

# 时域弹性波在周期结构中的散射问题

献给伍卓群教授 90 华诞

包刚<sup>1\*</sup>, 胡斌<sup>1</sup>, 李培军<sup>2</sup>, 王珏<sup>3</sup>

1. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027;

2. Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, USA;

3. 哈尔滨工程大学数学科学学院, 哈尔滨 150001

E-mail: baog@zju.edu.cn, binh@zju.edu.cn, lipeijun@math.purdue.edu, wangjue@hrbeu.edu.cn

收稿日期: 2019-01-31; 接受日期: 2019-04-16; 网络出版日期: 2019-06-12; \* 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11621101, 91630309, 11421110002 和 11801116) 和中央高校基础科研经费资助项目

**摘要** 本文研究时域弹性波在双周期结构中的散射问题. 针对无界区域中三维时域 Navier 方程, 本文提出利用压缩坐标变换的方法将散射问题转化为有限时间区间上的初边值问题, 然后采用 Galerkin 方法证明此散射问题弱解的唯一性, 并利用能量分析方法对解建立稳定性估计和具有显式时间依赖性的先验估计.

**关键词** 弹性波 双周期结构 适定性 稳定性 先验估计

**MSC (2010) 主题分类** 35A15, 35P25, 74J20

## 1 引言

周期结构中的散射理论, 如衍射光学中的光栅散射, 在微光学等领域中具有许多重要的应用 (参见文献 [1]). 针对时谐声波和电磁波方程在周期结构中的散射问题, 文献 [2] 及其参考文献研究了散射问题解的存在性和唯一性. 相应问题的数值方法, 包括有限元法和积分方程法 (参见文献 [3–5]). 文献 [6] 给出了衍射光学中所涉及的散射问题的分析和计算方法的综述. 由于弹性波散射问题在地球物理学和地震学等各种科学领域的重要应用, 它越来越受到工程界和数学界的关注 (参见文献 [7–9]). 其中有界障碍物的弹性波散射的相关结果可以参见文献 [10–14]. 关于周期结构中的时谐弹性波散射结果可以参见文献 [15–22]. 本文致力于双周期结构中时域弹性波散射问题的数学分析.

时域散射问题因其有描述捕获宽带信号的能力, 以及能模拟更一般的和非线性的材料, 而引起了人们的极大关注, 参见文献 [23–26]. 实际上, 时域数据通常更容易获得, 时域数据内容也远比几个离散频率下频域数据丰富. 但与时谐波散射问题相比, 由于时间依赖性带来的额外困难, 对于时域散射问题的数学研究相对较少. 各种结构中的时域声波、弹性波和电磁波散射问题, 包括有界障碍物、开腔

英文引用格式: Bao G, Hu B, Li P J, et al. Time domain scattering for elastic waves in a biperiodic structure (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2019, 49: 1723–1748, doi: 10.1360/N012019-00041

体和无限粗糙表面散射问题的分析<sup>[27-32]</sup>. 在这些文献中, 其基本想法是利用 Laplace 变换作为时域与频域之间的桥梁. 利用时域透射边界条件将问题转化为有界区域上的初边值问题, 并使用能量方法研究这些时间依赖性问题的适定性和稳定性. 其中一个关键步骤是, 建立时域透射边界条件的相关性质. 对于周期性结构中的时域散射问题, 结果相对更少. 文献 [28] 研究了一维周期结构的时域散射问题, 通过切向磁极化和电极化, 将时域 Maxwell 方程组简化为二维声波方程. 最近, 我们给出了双周期结构中时域 Maxwell 方程的数学分析<sup>1)</sup>. 对于双周期结构中时域弹性波散射问题目前仍然几乎没有结果.

除了时间依赖性问题之外, 另一个是无界域带来的困难. 本文中讨论的散射问题涉及偏微分方程外边界值问题, 在进行数学分析或数值计算时, 无界域需要被截断为有界域. 在截断域的边界上需要配置适当的边界条件来避免波的反射, 这种边界条件称为透射边界条件 (transparent boundary condition, TBC) 或无反射边界条件 (non-reflecting boundary condition, NRBC). 这些边界条件的研究一直是波传播领域中一个重要且活跃的课题 (参见文献 [33-36]). 自 Berenger<sup>[37]</sup> 提出用于求解 Maxwell 方程组的完美匹配层 (perfectly matched layer, PML) 方法以来, 对 PML 技术的研究经历了长足的发展. PML 技术的基本思想是, 通过一层有限厚度的虚构材料包围感兴趣的区域, 该材料可以吸收来自计算区域内部的所有波. 当波到达 PML 区域的外边界时, 它们的值很小, 以至于可以施加齐次的 Dirichlet 边界条件. 与时谐波散射问题的 PML 方法相比, 由于吸收介质给频率依赖性问题所带来的困难, 对于时域 PML 方法的严格数学分析更加复杂. TBC 或 PML 仍然是人们要研究的重要问题, 特别是时域问题. 我们需要指出, 由于三维时域 Navier 方程 TBC 比较复杂, 它需要包含不同速度传播的压力波和剪切波, 因此, 文献 [28] 提出的方法不能用于处理时域 Navier 方程.

本文首次给出双周期结构中时域弹性波散射问题的数学分析. 弹性波在时域中具有有限的传播速度, 即波在一定距离上传播需要一定的时间. 该特征不同于时谐波传播的情形. 我们利用这个事实提出一个压缩坐标转换, 将问题等价地转化为一个有界域中的初边值问题. 给定任意一个固定时间  $T$ , 考虑有限时间间隔  $(0, T]$  上的问题. 此外还与时谐问题不同的是, 在时域中解关于空间变量  $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  没有拟周期性. 该方法通过变量代换使得新方程的解关于空间变量  $\hat{x}$  具有周期性. 因此, 可以在  $x_1$  和  $x_2$  方向使用周期性边界条件. 在  $x_3$  方向, 我们选定一个能包含双周期结构非均匀媒介的区域. 在选定区域之外的上、下介质分别是均匀的. 然后选定两个平面, 一个位于非均匀介质区域的上方, 另一个位于非均匀介质区域的下方, 使得在时间  $T$  时刻散射波和透射波无法到达这两个平面, 因此, 在这两个表面上使用齐次 Dirichlet 边界条件. 虽然问题现在被限制在一个有界域中, 但整个物理域在  $x_3$  方向对于实际计算而言太大了. 为了解决这个问题, 我们再次使用变量代换将这两个表面向非均匀介质区域压缩, 将这两个平面映射到略微高于和低于非均匀介质区域, 因此, 我们可以在相对较小的区域内研究这个问题. 基于 Galerkin 方法和能量估计, 我们证明相应变分问题的弱解的存在性和唯一性. 此外, 通过直接考虑时域变分问题并采用特殊的测试函数, 我们得到显式依赖于波传播时间的先验估计.

本文余下内容安排如下. 第 2 节介绍该问题的模型, 并通过压缩变换, 将原问题转化为有限时间区间和空间区域的初边值问题. 第 3 节通过对导出问题的数学分析, 给出适定性和稳定性证明, 并得到先验估计. 最后, 第 4 节给出一些一般性评论和进一步的工作方向.

## 2 模型问题描述

本节将介绍数学模型, 并定义一些关于双周期结构中弹性波时域散射问题的相关符号.

1) Bao G, Hu B, Li P, et al. Analysis of time-domain Maxwell's equations in biperiodic structures. Preprint

### 2.1 弹性波方程

如图 1 所示, 首先给出问题的几何图形. 定义  $\mathbf{x} = (\hat{\mathbf{x}}, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , 其中  $\hat{\mathbf{x}} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . 令

$$R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), x_3 \in \mathbb{R}\},$$

其中  $\Lambda_j > 0$  ( $j = 1, 2$ ) 是  $x_j$  方向的周期. 令

$$\Omega_h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), h_2 < x_3 < h_1\},$$

此区域可能充有不均匀介质, 其中  $h_j$  ( $j = 1, 2$ ) 为常数. 假设

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), x_3 > h_1\},$$

$$\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), x_3 < h_2\}$$

分别充满均匀介质.

考虑如下时域弹性波方程:

$$\rho(\mathbf{x})\partial_t^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in R \times \mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

其中  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$  是总波场的位移,  $\rho > 0$  是弹性介质的密度, Cauchy 应力张量  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  由如下 Hook 定律给出:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \lambda\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}))\mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top), \tag{2.2}$$

这里  $\mu$  和  $\lambda$  是 Lamé 参数,  $\mathbf{I}$  是 3 阶单位矩阵,  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$  是应变张量,  $\nabla\mathbf{u}$  是如下形式的位移梯度张量:

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}u_1 & \partial_{x_2}u_1 & \partial_{x_3}u_1 \\ \partial_{x_1}u_2 & \partial_{x_2}u_2 & \partial_{x_3}u_2 \\ \partial_{x_1}u_3 & \partial_{x_2}u_3 & \partial_{x_3}u_3 \end{bmatrix}.$$

将 (2.2) 代入 (2.1) 可得

$$\rho\partial_t^2 \mathbf{u} - \nabla \cdot [\mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top)] - \nabla(\lambda\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in R \times \mathbb{R}^+, \tag{2.3}$$

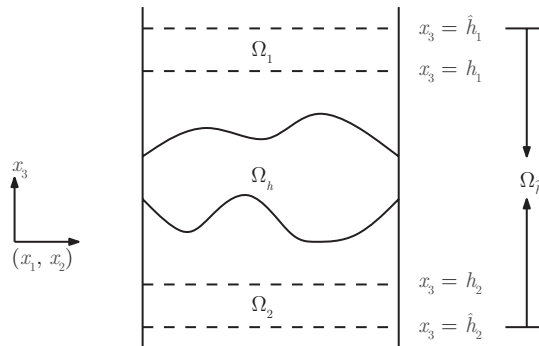


图 1 双周期结构示意图

其中 Lamé 参数  $\mu$  和  $\lambda$  满足  $\mu > 0$  和  $\mu + \lambda > 0$ . 由于结构是周期性的, 所以, 物理参数  $\rho$ 、 $\mu$  和  $\lambda$  都是  $\hat{\mathbf{x}}$  方向以  $\mathbf{\Lambda}$  为周期的函数. 在  $\Omega_j$  中, 由于介质是均匀的, 因此存在常数  $\rho_j$ 、 $\mu_j$  和  $\lambda_j$  使得

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_j, \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu_j, \quad \lambda(\mathbf{x}) = \lambda_j, \quad \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad j = 1, 2.$$

假设

$$\frac{\rho(\mathbf{x})}{\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})} \geq \frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad \mathbf{x} \in R, \quad (2.4)$$

这意味着, 与区域  $R$  的其他部分相比, 波在  $\Omega_1$  中的传播速度更快. 此外, 假设

$$\begin{aligned} 0 < \rho_{\min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq \rho_{\max} < \infty, \\ 0 < \mu_{\min} \leq \mu(\mathbf{x}) \leq \mu_{\max} < \infty, \\ 0 < \zeta_{\min} \leq \lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) \leq \zeta_{\max} < \infty, \end{aligned}$$

其中  $\rho_{\min}$ 、 $\rho_{\max}$ 、 $\mu_{\min}$ 、 $\mu_{\max}$ 、 $\zeta_{\min}$  和  $\zeta_{\max}$  是常数. 为了施加初始条件, 假设全场在  $t \leq 0$  时为 0. 初始条件为

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \partial_t \mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{x} \in R. \quad (2.5)$$

令  $\mathbf{u}^{\text{inc}}$  是从上方入射的平面波. 显然,

$$\mathbf{u}^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}f(c_1 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \quad \text{或者} \quad \mathbf{u}^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}f(c_2 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}),$$

其中  $f$  是有紧支撑的光滑函数, 在  $\Omega_1$  中,  $c_1 = ((\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1)^{1/2}$  和  $c_2 = (\mu_1/\rho_1)^{1/2}$  分别是纵波和横波的传播速度.  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$  和  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$  是两个正交向量, 满足

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0, \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = 1.$$

实际上, 矢量  $\mathbf{p}$  表示传播方向. 纵波分量的极化与传播方向相同, 横波分量的极化与传播方向垂直. 由于假设平面波是从上面入射, 因此,

$$p_3 \neq 0, \quad p_1^2 + p_2^2 < 1. \quad (2.6)$$

假设入射场在开始时是静止的, 并规定初始条件为

$$\mathbf{u}^{\text{inc}}|_{t=0} = \partial_t \mathbf{u}^{\text{inc}}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{x} \in R.$$

在  $R \times \mathbb{R}^+$  中, 当  $\rho = \rho_1$ 、 $\mu = \mu_1$ 、 $\lambda = \lambda_1$  时, 入射场  $\mathbf{u}^{\text{inc}}$  满足弹性波方程 (2.3).

## 2.2 变量替换

注意到入射场  $\mathbf{u}^{\text{inc}}$  在  $\hat{\mathbf{x}}$  方向不是周期的, 但有

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\text{inc}}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}, x_3, t) &= \mathbf{p}f(c_1 t - \hat{\mathbf{p}} \cdot (\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}) - p_3 x_3) = \mathbf{p}f(c_1 t - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{\Lambda} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{p}f(c_1(t - c_1^{-1} \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{u}^{\text{inc}}(\hat{\mathbf{x}}, x_3, t - c_1^{-1} \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{\Lambda}), \end{aligned}$$

其中  $\hat{\boldsymbol{p}} = (p_1, p_2)$ ,  $\boldsymbol{\Lambda} = (s_1\Lambda_1, s_2\Lambda_2)$ ,  $s_j = 0$  或  $s_j = 1$ . 由于解的唯一性, 我们假设全场满足相同的性质, 即

$$\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\Lambda}, x_3, t) = \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t - c_1^{-1}\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\Lambda}).$$

令

$$U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) = \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t + c_1^{-1}\hat{\boldsymbol{p}} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\Lambda})), \quad (2.7)$$

可得

$$\begin{aligned} U(\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\Lambda}, x_3, t) &= \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\Lambda}, x_3, t + c_1^{-1}\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t + c_1^{-1}\hat{\boldsymbol{p}} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\Lambda})) \\ &= U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t), \end{aligned}$$

这说明  $U$  是  $\hat{\boldsymbol{x}}$  方向的周期函数. 类似地, 可验证入射场满足

$$\begin{aligned} U^{\text{inc}}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) &= \boldsymbol{u}^{\text{inc}}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t + c_1^{-1}\hat{\boldsymbol{p}} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\Lambda})) \\ &= \boldsymbol{p}f(c_1(t + c_1^{-1}\hat{\boldsymbol{p}} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\Lambda})) - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{p}f(c_1(t + c_1^{-1}\hat{\boldsymbol{p}} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\Lambda})) - \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} - p_3x_3) \\ &= \boldsymbol{p}f(c_1t - \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\Lambda} - p_3x_3), \end{aligned}$$

上式说明  $U^{\text{inc}}$  不依赖于  $\hat{\boldsymbol{x}}$ , 即入射场是  $\hat{\boldsymbol{x}}$  方向的周期函数.

利用变量替换, 可得

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) &= \partial_t U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t), \quad \partial_t^2 \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) = \partial_t^2 U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t), \\ \partial_{x_j} \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) &= \partial_{x_j} U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) - c_1^{-1}p_j \partial_t U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t), \quad j = 1, 2, \\ \partial_{x_3} \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) &= \partial_{x_3} U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t). \end{aligned}$$

容易证明

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) &= (\nabla - c_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{p}}\partial_t)U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) &= (\nabla - c_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{p}}\partial_t) \cdot U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t), \end{aligned}$$

其中  $\tilde{\boldsymbol{p}} = (\hat{\boldsymbol{p}}, 0)^T$ . 由 (2.6) 可得  $|\tilde{\boldsymbol{p}}| < 1$ . 因此, 时域弹性波动方程可归结为: 寻找周期函数  $U$ , 使得

$$\begin{aligned} &\rho \partial_t^2 U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) - (\nabla - c_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{p}}\partial_t) \cdot [\mu((\nabla - c_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{p}}\partial_t)U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t) + (\nabla - c_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{p}}\partial_t)U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t)^T)] \\ &\quad - (\nabla - c_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{p}}\partial_t)[\lambda(\nabla - c_1^{-1}\tilde{\boldsymbol{p}}\partial_t) \cdot U(\hat{\boldsymbol{x}}, x_3, t)] \\ &= 0, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in R \times \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (2.8)$$

当  $t \leq 0$  时, 假设全场和入射场为 0 使得  $U = \partial_t U = 0$ ,  $U^{\text{inc}} = \partial_t U^{\text{inc}} = 0$ . 假设  $\hat{\boldsymbol{p}} \cdot (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\Lambda}) \leq 0$ , 则由 (2.5) 和 (2.7) 可得初始条件

$$U|_{t=0} = \partial_t U|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in R.$$

### 2.3 压缩坐标变换

已知散射场  $\mathbf{U}^s = \mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{inc}}$  传播速度有限. 因此, 对任意给定时间  $T > 0$ , 存在充分大  $H_1$  和充分小  $H_2$ , 它们分别满足  $H_1 \gg h_1$  和  $H_2 \ll h_2$ , 使得散射场  $\mathbf{U}^s$  不能到达表面  $\Gamma_{H_j} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), x_3 = H_j\}$ , 因此,

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_{H_1}} = \mathbf{U}^{\text{inc}}|_{\Gamma_{H_1}}, \quad \mathbf{U}|_{\Gamma_{H_2}} = 0, \quad t \in (0, T].$$

选取其他两个常数  $\hat{h}_j$  满足  $h_1 < \hat{h}_1 \ll H_1$ ,  $H_2 \ll \hat{h}_2 < h_2$ . 令

$$\Gamma_{h_j} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), x_3 = h_j\},$$

$$\Gamma_{\hat{h}_j} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), x_3 = \hat{h}_j\}.$$

考虑如下变量替换:

$$x_3 = \psi(\tilde{x}_3) = \begin{cases} \tilde{x}_3, & \tilde{x}_3 \in (h_2, h_1), \\ \eta_1(\tilde{x}_3), & \tilde{x}_3 \in [h_1, \hat{h}_1], \\ \eta_2(\tilde{x}_3), & \tilde{x}_3 \in [\hat{h}_2, h_2], \end{cases}$$

其中

$$\eta_j(\tilde{x}_3) = \frac{h_j^2(H_j - \hat{h}_j) + \tilde{x}_3[h_j^2 + (\hat{h}_j - 2h_j)H_j]}{(\hat{h}_j - \tilde{x}_3)(H_j - \hat{h}_j) + (\hat{h}_j - h_j)^2}, \quad j = 1, 2.$$

经计算可得

$$\eta'_j(\tilde{x}_3) = \frac{(H_j - h_j)^2(\hat{h}_j - h_j)^2}{[(\hat{h}_j - \tilde{x}_3)(H_j - \hat{h}_j) + (\hat{h}_j - h_j)^2]^2} > 0,$$

以及

$$\eta_j(h_j) = h_j, \quad \eta_j(\hat{h}_j) = H_j, \quad \eta'_j(h_j) = 1.$$

这意味着函数  $\psi \in C^1([\hat{h}_2, \hat{h}_1])$ . 令

$$\Omega_{\hat{h}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), \hat{h}_2 < x_3 < \hat{h}_1\},$$

$$\Omega_H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \hat{\mathbf{x}} \in (0, \Lambda_1) \times (0, \Lambda_2), H_2 < x_3 < H_1\}.$$

显然, 映射  $\psi$  将区域  $\Omega_h$  映射到它自身, 同时将区域  $\Omega_H$  压缩到区域  $\Omega_{\hat{h}}$  中.

令

$$\tilde{\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{x}_3, t) = \mathbf{U}(\hat{\mathbf{x}}, \psi(\tilde{x}_3), t),$$

则有

$$\nabla \mathbf{U} = \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \tilde{\mathbf{U}}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}, \quad \partial_t \mathbf{U} = \partial_t \tilde{\mathbf{U}}, \quad \partial_t^2 \mathbf{U} = \partial_t^2 \tilde{\mathbf{U}},$$

其中

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} = \left( \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \frac{1}{\psi'(\tilde{x}_3)} \partial_{x_3} \right)^T.$$

由 (2.8) 可知, 散射问题是寻找一个周期函数  $\tilde{\mathbf{U}}$ , 使得

$$\rho \partial_t^2 \tilde{\mathbf{U}} - (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \cdot [\mu ((\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \tilde{\mathbf{U}} + (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \tilde{\mathbf{U}}^T)]$$

$$-(\nabla_{\tilde{d}} - c_1^{-1} \tilde{\rho} \partial_t)[\lambda(\nabla_{\tilde{d}} - c_1^{-1} \tilde{\rho} \partial_t) \cdot \tilde{U}] = 0, \quad \text{在 } \Omega_{\tilde{h}} \times (0, T] \text{ 内.}$$

初始条件为

$$\tilde{U}|_{t=0} = \partial_t \tilde{U}|_{t=0} = 0, \quad \text{在 } \Omega_{\tilde{h}} \text{ 内.}$$

边界条件为

$$\tilde{U}|_{\Gamma_{\tilde{h}_1}} = \tilde{U}^{\text{inc}}|_{\Gamma_{\tilde{h}_1}}, \quad \tilde{U}|_{\Gamma_{\tilde{h}_2}} = 0, \quad t \in (0, T],$$

其中

$$\tilde{U}^{\text{inc}} = \mathbf{U}^{\text{inc}}(\hat{\mathbf{x}}, \psi(\tilde{x}_3), t) = \mathbf{p}f(c_1 t - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{\Lambda} - p_3 \psi(\tilde{x}_3)).$$

### 2.4 初边值问题

定义一个周期函数空间

$$H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3 = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_{\tilde{h}})^3 : \mathbf{v}(0, x_2, \tilde{x}_3) = \mathbf{v}(\Lambda_1, x_2, \tilde{x}_3), \\ \mathbf{v}(x_1, 0, \tilde{x}_3) = \mathbf{v}(x_1, \Lambda_2, \tilde{x}_3), \mathbf{v}|_{\Gamma_{\tilde{h}_1}} = \mathbf{v}|_{\Gamma_{\tilde{h}_2}} = 0\}.$$

其范数定义为

$$\|\mathbf{v}\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3} = [\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\nabla_{\tilde{d}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\tilde{d}} \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2]^{1/2},$$

其中

$$\|\nabla_{\tilde{d}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}} = \left( \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_{\tilde{h}}} |\nabla_{\tilde{d}} v_j|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

**引理 2.1** 对任意函数  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 且其满足  $\partial_t \mathbf{v} \in L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 则有如下不等式成立:

$$\max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 \leq 2\|\mathbf{v}\|_{t=0}^2 + 2T^2 \max_{t \in [0, T]} \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2.$$

**证明** 对于任意的  $t \in (0, T]$ , 有

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\tilde{h}}.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} \leq \|\mathbf{v}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} + \left\| \int_0^t \partial_t \mathbf{v}(\cdot, \tau) d\tau \right\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} \\ \leq \|\mathbf{v}(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} + T^{1/2} \left( \int_0^T \|\partial_t \mathbf{v}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall t \in (0, T].$$

不等式两边对  $t$  取最大模即可得证. □

对于给定的  $\tilde{\mathbf{U}}^{\text{inc}}$ , 在  $\Omega_{\tilde{h}} \times (0, T]$  中存在一个紧支撑的  $\tilde{\mathbf{U}}_0$ , 满足边界条件

$$\tilde{\mathbf{U}}_0|_{\Gamma_{\tilde{h}_1}} = \tilde{\mathbf{U}}^{\text{inc}}|_{\Gamma_{\tilde{h}_1}}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_0|_{\Gamma_{\tilde{h}_2}} = 0, \quad t \in (0, T].$$

记  $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{U}}_0$ , 则考虑与原问题等价的如下初边值问题:

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \mathbf{V} - \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot [\mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V} + \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}^T)] - \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t [\lambda \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}] = \mathbf{g}_1, & \text{在 } \Omega_{\tilde{h}} \times (0, T] \text{ 内,} \\ \mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{g}_2, \quad \partial_t \mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{g}_3, & \text{在 } \Omega_{\tilde{h}} \text{ 内,} \\ \mathbf{V}|_{\Gamma_{\tilde{h}_1}} = \mathbf{V}|_{\Gamma_{\tilde{h}_2}} = 0, & \text{在 } (0, T] \text{ 内,} \end{cases} \quad (2.9)$$

其中  $\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t = (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t)$ , 且  $\mathbf{g}_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3)$ ,  $\mathbf{g}_2 \in H^1(\Omega_{\tilde{h}})^3$ ,  $\mathbf{g}_3 \in L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ .

### 3 适定性分析

本节给出本文的主要结果, 包括散射问题的适定性、稳定性和弱解的先验估计.

#### 3.1 存在性和唯一性

假设  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\hat{\mathbf{x}}, \tilde{x}_3, t)$  是问题 (2.9) 的一个光滑解, 定义相关映射  $\mathbf{V}: [0, T] \rightarrow H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3$  为

$$[\mathbf{V}(t)](\mathbf{x}) := \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\tilde{h}}, \quad t \in [0, T].$$

引入映射  $\mathbf{g}_1: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ :

$$[\mathbf{g}_1(t)](\mathbf{x}) := \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\tilde{h}}, \quad t \in [0, T].$$

在 (2.9) 两边同乘试探函数  $\mathbf{Q} \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 利用分部积分方法, 可得

$$(\rho \mathbf{V}'', \mathbf{Q}) + a[\mathbf{V}, \mathbf{Q}; t] = (\mathbf{g}_1, \mathbf{Q}), \quad t \in [0, T],$$

其中

$$a[\mathbf{V}, \mathbf{Q}; t] = \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{Q}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{Q}) d\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

$A : B = \text{tr}(AB^T)$  是方阵  $A$  和  $B$  的 Frobenius 内积. 容易验证  $A : B = B : A$  及

$$\int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) d\mathbf{x} = \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2,$$

其中  $(\cdot, \cdot)$  是  $L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$  中的内积. 我们寻找一个弱解  $\mathbf{V}$ , 它满足在  $t \in [0, T]$  上几乎处处有  $\mathbf{V}'' \in H_{\text{per},0}^{-1}(\Omega_{\tilde{h}})^3$ . 因此, 内积  $(\cdot, \cdot)$  也能被理解为定义在  $H_{\text{per},0}^{-1}(\Omega_{\tilde{h}})^3$  与  $H_{\text{per},0}^1(\Omega_{\tilde{h}})^3$  之间的对偶积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**引理 3.1** 对任意的函数  $\mathbf{v} \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 且其满足  $\partial_t \mathbf{v} \in L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 则存在正数  $C_1 > 0$  和  $C_2 > 0$  使得

$$\begin{aligned} C_1 (\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2) \\ \leq \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 \\ \leq C_2 (\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2), \end{aligned}$$

其中  $C_1 = (\max\{4, 4c_1^{-2} + 2\})^{-1} \min\{\frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}}, \frac{\zeta_{\min}}{\zeta_{\max}}\}$ ,  $C_2 = \max\{4, 4c_1^{-2} + 1\} \max\{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}, \frac{\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\}$ .



证明 对任意的函数  $\mathbf{v} \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 其满足  $\partial_t \mathbf{v} \in L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 有

$$\|\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 = \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \left( \sum_{j=1}^3 |\tilde{\mathbf{p}}|^2 v_j^2 \right) d\mathbf{x} = |\tilde{\mathbf{p}}|^2 \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \left( \sum_{j=1}^3 v_j^2 \right) d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2, \quad (3.2)$$

$$\|\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 = \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \left( \sum_{j=1}^2 p_j v_j \right)^2 d\mathbf{x} \leq |\tilde{\mathbf{p}}|^2 \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \left( \sum_{j=1}^3 v_j^2 \right) d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2. \quad (3.3)$$

因此,

$$\begin{aligned} a[\mathbf{v}, \mathbf{v}; t] &= \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}) \cdot (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu ((\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \mathbf{v}) : ((\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) ((\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \mathbf{v}) \cdot ((\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{v} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \cdot \partial_t \mathbf{v}) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \cdot \partial_t \mathbf{v}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

接下来, 分别估计 (3.4) 中右端的两项. 利用 (3.2) 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}) d\mathbf{x} + c_1^{-2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) : (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &\quad - c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}) : (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) d\mathbf{x} - c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}) d\mathbf{x} + c_1^{-2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) : (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &\quad - 2c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}) : (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &= \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + c_1^{-2} \|\sqrt{\mu} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &\quad - 2c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}) : (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}) d\mathbf{x} \\ &\geq \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + c_1^{-2} \|\sqrt{\mu} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &\quad - 2c_1^{-1} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}} \|\sqrt{\mu} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}} \\ &\geq \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + c_1^{-2} \|\sqrt{\mu} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 - 2c_1^{-2} \|\sqrt{\mu} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 - c_1^{-2} \|\sqrt{\mu} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 - c_1^{-2} \|\sqrt{\mu} \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2, \end{aligned}$$

由此得到

$$\|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + c_1^{-2}\|\sqrt{\mu}\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \geq \frac{1}{2}\|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \geq \frac{1}{2}\mu_{\min}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \quad (3.5)$$

和

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\mu_{\min}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \frac{1}{2}\mu_{\min}\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \leq \mu_{\max}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \left(c_1^{-2}\mu_{\max} + \frac{1}{2}\mu_{\min}\right)\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \leq \mu_{\max}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \left(c_1^{-2} + \frac{1}{2}\right)\mu_{\max}\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \leq \max\left\{1, c_1^{-2} + \frac{1}{2}\right\}\mu_{\max}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ & \leq \max\left\{1, c_1^{-2} + \frac{1}{2}\right\}\mu_{\max}(2\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

另一方面, 由 (3.2) 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \mu_{\min}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 & \leq \|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \leq 2\|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + 2c_1^{-2}\|\sqrt{\mu}\tilde{\mathbf{p}}\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \leq 2\mu_{\max}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + 2c_1^{-2}\mu_{\max}\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2, \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} & 2\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \leq \frac{1}{\mu_{\min}}(4\mu_{\max}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + (4c_1^{-2}\mu_{\max} + \mu_{\min})\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ & \leq \frac{1}{\mu_{\min}}(4\mu_{\max}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + (4c_1^{-2}\mu_{\max} + \mu_{\max})\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ & \leq \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}\max\{4, 4c_1^{-2} + 1\}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

由 (3.6) 和 (3.7), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}}(\max\{2, 2c_1^{-2} + 1\})^{-1}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ & \leq 2\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \leq \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}\max\{4, 4c_1^{-2} + 1\}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

类似地, 根据 (3.3) 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + c_1^{-2}\|\sqrt{\lambda + \mu}\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \geq \frac{1}{2}\|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ & \geq \frac{1}{2}\zeta_{\min}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2. \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\zeta_{\min}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 &\leq\|\sqrt{\lambda+\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+c_1^{-2}\|\sqrt{\lambda+\mu}\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq\max\{1,c_1^{-2}\}\zeta_{\max}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ &\leq\max\{1,c_1^{-2}\}\zeta_{\max}(2\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

另一方面, 由 (3.3) 和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \zeta_{\min}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 &\leq\|\sqrt{\lambda+\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq 2\|\sqrt{\lambda+\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+2c_1^{-2}\|\sqrt{\lambda+\mu}\tilde{\mathbf{p}}\cdot\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq 2\|\sqrt{\lambda+\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+2c_1^{-2}\|\sqrt{\lambda+\mu}\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq 2\zeta_{\max}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+2c_1^{-2}\zeta_{\max}\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

以及

$$\begin{aligned} 2\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 &\leq\frac{4\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\left(\frac{4c_1^{-2}\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}+1\right)\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq\frac{4\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\left(\frac{4c_1^{-2}\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}+\frac{\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\right)\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq\frac{\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\max\{4,4c_1^{-2}+1\}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

结合 (3.9) 和 (3.11), 可得

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{\min}}{\zeta_{\max}}(\max\{2,2c_1^{-2}\})^{-1}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) &\leq 2\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq\frac{\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\max\{4,4c_1^{-2}+1\}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

再由 (3.8) 和 (3.12), 可得

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}}(\max\{2,2c_1^{-2}+1\})^{-1}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) &+\frac{\zeta_{\min}}{\zeta_{\max}}(\max\{2,2c_1^{-2}\})^{-1}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ &\leq 2\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+2\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+2\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}\max\{4,4c_1^{-2}+1\}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ &+\frac{\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\max\{4,4c_1^{-2}+1\}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} (\max\{4,4c_1^{-2}+2\})^{-1}\min\left\{\frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}},\frac{\zeta_{\min}}{\zeta_{\max}}\right\}(\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) &\leq\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}},\tilde{\mathbf{p}}}^t\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2+\|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \end{aligned}$$

$$\leq \max\{4, 4c_1^{-2} + 1\} \max\left\{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}, \frac{\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\right\} (\|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3\times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + \|\partial_t\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^3}^2).$$

证毕.  $\square$

**定义 3.1** 函数  $\mathbf{V} \in L^2[0, T; H_{\text{per},0}(\Omega_{\bar{h}})^3]$ , 且  $\mathbf{V}' \in L^2[0, T; L^2(\Omega_{\bar{h}})^3]$  和  $\mathbf{V}'' \in L^2[0, T; H_{\text{per},0}^{-1}(\Omega_{\bar{h}})^3]$ , 如果其满足

$$(i) (\rho\mathbf{V}'', \mathbf{Q}) + a[\mathbf{V}, \mathbf{Q}; t] = (\mathbf{g}_1, \mathbf{Q}), \forall \mathbf{Q} \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\bar{h}})^3, \text{ a.e. } t \in [0, T];$$

$$(ii) \mathbf{V}(0) = \mathbf{g}_2, \mathbf{V}'(0) = \mathbf{g}_3,$$

则称该函数为初始边值问题 (2.9) 的一个弱解.

接下来, 采用 Galerkin 方法, 通过求解有限维近似, 构造初边值问题 (2.9) 的弱解. 关于一般二阶微分方程弱解的构造方法, 可参见文献 [38]. 该方法首先是选择光滑函数  $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{x})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , 要求  $\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1}^\infty$  是  $H_{\text{per},0}(\Omega_{\bar{h}})^3$  的一个正交基, 以及  $\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1}^\infty$  是  $L^2(\Omega_{\bar{h}})^3$  的一个正交基. 对于正整数  $m$ , 令

$$\mathbf{V}_m(t) := \sum_{k=1}^m v_m^k(t) \boldsymbol{\xi}_k, \quad (3.13)$$

其中, 对所有的  $k = 1, \dots, m$ ,  $t \in [0, T]$ , 系数  $v_m^k(t)$  满足

$$v_m^k(0) = (\mathbf{g}_2, \boldsymbol{\xi}_k), \quad \left. \frac{dv_m^k}{dt} \right|_{t=0} = (\mathbf{g}_3, \boldsymbol{\xi}_k) \quad (3.14)$$

和

$$(\rho\mathbf{V}_m'', \rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k) + a[\mathbf{V}_m, \rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k; t] = (\mathbf{g}_1, \rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k). \quad (3.15)$$

**定理 3.1** 对每一个  $m \in \mathbb{N}$ , 存在唯一函数  $\mathbf{V}_m$ , 其形式为 (3.13), 并且满足 (3.14) 和 (3.15).

**证明** 因为  $\{\boldsymbol{\xi}_k\}_{k=1}^\infty$  是  $H_{\text{per},0}(\Omega_{\bar{h}})^3$  的一个正交基, 由 (3.13), 可得

$$(\rho\mathbf{V}_m''(t), \rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k) = \sum_{l=1}^m \left\{ \int_{\Omega_{\bar{h}}} \boldsymbol{\xi}_l \cdot \boldsymbol{\xi}_k d\mathbf{x} \right\} \frac{d^2 v_m^l(t)}{dt^2} = \frac{d^2 v_m^k(t)}{dt^2}. \quad (3.16)$$

再由 (3.1), 可得

$$\begin{aligned} a[\mathbf{V}_m, \rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k; t] &= \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m) : (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t (\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{\bar{h}}} (\lambda + \mu)(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m)(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \cdot (\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k)) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu[(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \mathbf{V}_m] : [(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t)(\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k)] d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_{\bar{h}}} (\lambda + \mu)[(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \cdot \mathbf{V}_m][(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t) \cdot (\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k)] d\mathbf{x} \\ &= \sum_{l=1}^m \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( v_m^l(t) (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \boldsymbol{\xi}_l) - c_1^{-1} \frac{dv_m^l(t)}{dt} (\tilde{\mathbf{p}} \boldsymbol{\xi}_l) \right) : (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} (\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k)) d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{l=1}^m \int_{\Omega_{\bar{h}}} (\lambda + \mu) \left( v_m^l(t) (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \cdot \boldsymbol{\xi}_l) - c_1^{-1} \frac{dv_m^l(t)}{dt} (\tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\xi}_l) \right) (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \cdot (\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k)) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{l=1}^m \left\{ -c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} (\mu(\tilde{\mathbf{p}} \boldsymbol{\xi}_l) : (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} (\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k)) + (\lambda + \mu)(\tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\xi}_l)(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \cdot (\rho^{-1}\boldsymbol{\xi}_k))) d\mathbf{x} \right\} \frac{dv_m^l(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=1}^m \left\{ \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\mu(\nabla_{\tilde{d}} \xi_l) : (\nabla_{\tilde{d}}(\rho^{-1} \xi_k)) + (\lambda + \mu)(\nabla_{\tilde{d}} \cdot \xi_l)(\nabla_{\tilde{d}} \cdot (\rho^{-1} \xi_k))) dx \right\} v_m^l(t) \\
 & = \sum_{l=1}^m b_k^l \frac{dv_m^l(t)}{dt} + \sum_{l=1}^m c_k^l v_m^l(t),
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 b_k^l & = -c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\mu(\tilde{p} \xi_l) : (\nabla_{\tilde{d}}(\rho^{-1} \xi_k)) + (\lambda + \mu)(\tilde{p} \cdot \xi_l)(\nabla_{\tilde{d}} \cdot (\rho^{-1} \xi_k))) dx, \\
 c_k^l & = \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\mu(\nabla_{\tilde{d}} \xi_l) : (\nabla_{\tilde{d}}(\rho^{-1} \xi_k)) + (\lambda + \mu)(\nabla_{\tilde{d}} \cdot \xi_l)(\nabla_{\tilde{d}} \cdot (\rho^{-1} \xi_k))) dx.
 \end{aligned}$$

记

$$g^k(t) = (\mathbf{g}_1, \rho^{-1} \xi_k), \quad k = 1, \dots, m. \tag{3.17}$$

将 (3.16) 和 (3.17) 代入 (3.15), 可得常微分方程线性系统的如下矩阵形式:

$$\frac{d^2 \mathbf{v}_m(t)}{dt^2} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{v}_m(t)}{dt} + \mathbf{C} \mathbf{v}_m(t) = \mathbf{g}(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.18}$$

其中

$$\mathbf{v}_m(t) = (v_m^1(t), \dots, v_m^m(t))^T, \quad \mathbf{g}(t) = (g^1(t), \dots, g^m(t))^T, \quad \mathbf{B} = [b_k^l]_{m \times m}, \quad \mathbf{C} = [c_k^l]_{m \times m}$$

满足初始条件 (3.14). 根据常微分方程的标准理论可知, 对  $t \in [0, T]$ , 存在唯一的  $C^2$  函数  $\mathbf{v}_m(t)$  满足 (3.18) 和 (3.14). □

**定理 3.2** 存在一个仅依赖于  $\Omega$ 、 $T$  和问题 (2.9) 参数的正常数  $C$ , 使得

$$\begin{aligned}
 & \max_{t \in [0, T]} (\|\mathbf{V}_m(t)\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\mathbf{V}'_m(t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2) + \|\mathbf{V}''_m(t)\|_{L^2[0, T; H_{\text{per},0}^{-1}(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 \\
 & \leq C (\|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 + \|\mathbf{g}_2\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2), \quad m = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

**证明** 对任意  $\mathbf{V}_m \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 其中  $\mathbf{V}'_m \in L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 有

$$(\rho \mathbf{V}''_m, \mathbf{V}'_m) + a[\mathbf{V}_m, \mathbf{V}'_m; t] = (\mathbf{g}_1, \mathbf{V}'_m), \quad \text{a.e. } t \in [0, T]. \tag{3.19}$$

观察得

$$(\rho \mathbf{V}''_m, \mathbf{V}'_m) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 \right) \tag{3.20}$$

和

$$\begin{aligned}
 a[\mathbf{V}_m, \mathbf{V}'_m; t] & = \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu(\nabla_{\tilde{d}, \tilde{p}}^t \mathbf{V}_m) : (\nabla_{\tilde{d}, \tilde{p}}^t \mathbf{V}'_m) dx + \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu)(\nabla_{\tilde{d}, \tilde{p}}^t \cdot \mathbf{V}_m)(\nabla_{\tilde{d}, \tilde{p}}^t \cdot \mathbf{V}'_m) dx \\
 & = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} a[\mathbf{V}_m, \mathbf{V}'_m; t] \right) \\
 & = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{d}, \tilde{p}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu} \nabla_{\tilde{d}, \tilde{p}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

结合 (3.19)–(3.21), 并利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
& \min\{\rho_{\min}, \mu_{\min}, \zeta_{\min}\} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2) \\
& \leq \frac{d}{dt} (\|\sqrt{\rho} \mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\sqrt{\mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2) \\
& = 2(\mathbf{g}_1, \mathbf{V}'_m) \leq 2|(\mathbf{g}_1, \mathbf{V}'_m)| \leq \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\mathbf{g}_1\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 \\
& \leq \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\mathbf{g}_1\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

令

$$\alpha(t) = \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2, \quad \delta(t) = \|\mathbf{g}_1\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2,$$

则 (3.22) 意味着

$$\alpha'(t) \leq C_3 \alpha(t) + C_3 \delta(t), \quad t \in [0, T],$$

其中  $C_3 = (\min\{\rho_{\min}, \mu_{\min}, \zeta_{\min}\})^{-1}$ . 应用 Gronwall 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
\alpha(t) & \leq e^{C_3 t} \left( \alpha(0) + C_3 \int_0^t \delta(s) ds \right) \\
& \leq e^{C_3 T} \left( \alpha(0) + C_3 \int_0^T \|\mathbf{g}_1\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 dt \right) \\
& = e^{C_3 T} (\alpha(0) + C_3 \|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)]}^2), \quad t \in [0, T]. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

由引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned}
\alpha(0) & = \|\mathbf{V}'_m|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 \\
& \leq C_2 (\|\mathbf{V}'_m|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}_m|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{V}_m|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2) \\
& = C_2 (\|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2), \tag{3.24}
\end{aligned}$$

其中  $C_2 = \max\{4, 4c_1^{-2} + 1\} \max\{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}, \frac{\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}\}$ . 结合 (3.23) 和 (3.24), 可得

$$\begin{aligned}
\alpha(t) & = \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 \\
& \leq C_4 (\|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)]}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2), \tag{3.25}
\end{aligned}$$

其中  $C_4 = e^{C_3 T} \max\{C_2, C_3\}$ .

另一方面, 由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
\alpha(t) & = \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 \\
& \geq C_1 (\|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2). \tag{3.26}
\end{aligned}$$

注意到  $t \in [0, T]$  是任意的, 结合 (3.25) 和 (3.26), 可得

$$\begin{aligned}
& \max_{t \in [0, T]} \{ \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 \} \\
& \leq C (\|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)]}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3) \times 3}^2 + \|\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}}^3)}^2). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

由 (3.27) 和引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}
 & \max_{t \in [0, T]} \{ \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 + \|\mathbf{V}_m\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})}^2 \} \\
 &= \max_{t \in [0, T]} \{ \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 + \|\mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 \} \\
 &\leq C(\|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})}^3 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2) \\
 &\quad + \max_{t \in [0, T]} \{ \|\mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 \} \\
 &\leq C(\|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})}^3 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2) \\
 &\quad + 2\|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 + 2T^2 \max_{t \in [0, T]} \|\mathbf{V}'_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 \\
 &\leq C(\|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})}^3 + \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2) \\
 &= C(\|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})}^3 + \|\mathbf{g}_2\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2). \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

对任意的  $\mathbf{v} \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3$ , 其满足  $\|\mathbf{v}\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})} \leq 1$ , 令  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , 其中  $\mathbf{v}_1 \in \text{span}\{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_m\}$ ,  $\langle \mathbf{v}_2, \boldsymbol{\xi}_k \rangle = 0, k = 1, \dots, m$ . 因此, 有  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$  和

$$\|\mathbf{v}_1\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})}^2 = \|\mathbf{v}\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})}^2 - \|\mathbf{v}_2\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})}^2 \leq 1.$$

由 (3.13) 和 (3.15), 可得

$$\langle \mathbf{V}''_m, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{V}''_m, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{V}''_m, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{V}''_m, \mathbf{v}_1),$$

以及

$$(\rho\mathbf{V}''_m, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) - a[\mathbf{V}_m, \mathbf{v}_1; t],$$

从而可得

$$\begin{aligned}
 \rho_{\min} |\langle \mathbf{V}''_m, \mathbf{v} \rangle| &= \rho_{\min} |\langle \mathbf{V}''_m, \mathbf{v}_1 \rangle| = |\langle \rho_{\min} \mathbf{V}''_m, \mathbf{v}_1 \rangle| \\
 &\leq |\langle \rho \mathbf{V}''_m, \mathbf{v}_1 \rangle| = |(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1) - a[\mathbf{V}_m, \mathbf{v}_1; t]| \\
 &\leq |(\mathbf{g}_1, \mathbf{v}_1)| + |a[\mathbf{V}_m, \mathbf{v}_1; t]| \\
 &\leq \|\mathbf{g}_1\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})} \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})} + \mu_{\max} \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}} \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \mathbf{v}_1\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}} \\
 &\quad + \zeta_{\max} \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})} \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{v}_1\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})} \\
 &\leq \max\{1, \mu_{\max}, \zeta_{\max}\} (\|\mathbf{g}_1\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})} + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}} + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}_m\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}). \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

因此, 由 (3.25) 和 (3.29), 可得

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|\mathbf{V}''_m\|_{H_{\text{per},0}^{-1}(\Omega_{\hat{h}})}^2 dt &= \int_0^T \sup_{\|\mathbf{v}_1\|_{H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})}=1} |\langle \mathbf{V}''_m, \mathbf{v} \rangle|^2 dt \\
 &\leq C(\|\mathbf{g}_1\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})}^3 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2 \\
 &\quad + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})}^2). \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

结合 (3.28) 和 (3.30), 即可得定理. □

**定理 3.3** 初边值问题 (2.9) 存在一个弱解.

**证明** 从定理 3.2 中的能量估计可以看出

$$\begin{aligned} \{\mathbf{V}_m\}_{m=1}^\infty & \text{ 在 } L^2[0, T; H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3] \text{ 有界,} \\ \{\mathbf{V}'_m\}_{m=1}^\infty & \text{ 在 } L^2[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})^3] \text{ 有界,} \\ \{\mathbf{V}''_m\}_{m=1}^\infty & \text{ 在 } L^2[0, T; H_{\text{per},0}^{-1}(\Omega_{\hat{h}})^3] \text{ 有界.} \end{aligned}$$

因此, 存在一个子序列  $\{\mathbf{V}_m\}_{m=1}^\infty$  和  $\mathbf{V} \in L^2[0, T; H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3]$ , 其满足  $\mathbf{V}' \in L^2[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})^3]$  和  $\mathbf{V}'' \in L^2[0, T; H_{\text{per},0}^{-1}(\Omega_{\hat{h}})^3]$ , 使得

$$\begin{cases} \mathbf{V}_m \rightharpoonup \mathbf{V}, & \text{弱收敛于 } L^2[0, T; H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3], \\ \mathbf{V}'_m \rightharpoonup \mathbf{V}', & \text{弱收敛于 } L^2[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})^3], \\ \mathbf{V}''_m \rightharpoonup \mathbf{V}'', & \text{弱收敛于 } L^2[0, T; H_{\text{per},0}^{-1}(\Omega_{\hat{h}})^3]. \end{cases} \quad (3.31)$$

接下来, 固定一个整数  $N$ , 并选择一个函数  $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3)$ , 其形式为

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^N v^k(t) \boldsymbol{\xi}_k, \quad (3.32)$$

其中  $v^k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) 是光滑函数. 选择  $m \geq N$ , 则有

$$\int_0^T (\langle \rho \mathbf{V}''_m, \mathbf{v} \rangle + a[\mathbf{V}_m, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{g}_1, \mathbf{v}) dt. \quad (3.33)$$

利用 (3.31), 并在 (3.33) 中取极限  $m \rightarrow \infty$ , 得到

$$\int_0^T (\langle \rho \mathbf{V}'', \mathbf{v} \rangle + a[\mathbf{V}, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{g}_1, \mathbf{v}) dt. \quad (3.34)$$

因为具有形式 (3.32) 的函数在空间中是稠密的, 所以, 上式对任意的函数  $\mathbf{v} \in L^2[0, T; H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3]$  均成立. 由 (3.34), 可得

$$\langle \rho \mathbf{V}'', \mathbf{v} \rangle + a[\mathbf{V}, \mathbf{v}; t] = (\mathbf{g}_1, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}}), \quad \text{a.e. } t \in [0, T],$$

以及

$$\mathbf{V} \in C([0, T]; H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3), \quad \mathbf{V}' \in C([0, T]; L^2(\Omega_{\hat{h}})^3).$$

接下来证明

$$\mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{V}'|_{t=0} = \mathbf{g}_3. \quad (3.35)$$

选择任意函数  $\mathbf{v} \in C^2([0, T]; H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3)$ , 其中  $\mathbf{v}(T) = \mathbf{v}'(T) = 0$ . 在 (3.34) 中, 关于  $t$  采用两次分部积分, 得到

$$\int_0^T (\langle \rho \mathbf{v}'', \mathbf{V} \rangle + a[\mathbf{V}, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{g}_1, \mathbf{v}) dt - (\rho \mathbf{V}(0), \mathbf{v}'(0)) + (\rho \mathbf{V}'(0), \mathbf{v}(0)). \quad (3.36)$$



类似地, 由 (3.33), 有

$$\int_0^T ((\rho \mathbf{v}'' , \mathbf{V}_m) + a[\mathbf{V}_m, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{g}_1, \mathbf{v}) dt - (\rho \mathbf{V}_m(0), \mathbf{v}'(0)) + (\rho \mathbf{V}'_m(0), \mathbf{v}(0)). \quad (3.37)$$

在 (3.37) 中取极限  $m \rightarrow \infty$ , 利用 (3.14) 和 (3.31) 得到

$$\int_0^T ((\rho \mathbf{v}'' , \mathbf{V}) + a[\mathbf{V}, \mathbf{v}; t]) dt = \int_0^T (\mathbf{g}_1, \mathbf{v}) dt - (\rho \mathbf{g}_2, \mathbf{v}'(0)) + (\rho \mathbf{g}_3, \mathbf{v}(0)). \quad (3.38)$$

比较 (3.36) 和 (3.38), 因为  $\mathbf{v}(0)$  和  $\mathbf{v}'(0)$  是任意的, 所以可得 (3.35). 因此,  $\mathbf{V}$  是初边值问题 (2.9) 的一个弱解.  $\square$

**定理 3.4** 初边值问题 (2.9) 具有唯一弱解.

**证明** 如果  $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_3 = 0$ , 则只需证明  $\mathbf{V} = 0$ . 固定  $0 \leq s \leq T$ , 令

$$\mathbf{v}(t) := \begin{cases} \int_t^s \mathbf{V}(\tau) d\tau, & \text{如果 } 0 \leq t \leq s, \\ 0, & \text{如果 } s \leq t \leq T, \end{cases}$$

则对每个  $t \in [0, T]$  都有  $\mathbf{v}(t) \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3$ , 并且满足

$$\int_0^s ((\rho \mathbf{V}'' , \mathbf{v}) + a[\mathbf{V}, \mathbf{v}; t]) dt = 0.$$

因为  $\mathbf{V}'(0) = \mathbf{v}(s) = 0$ , 由分部积分法, 可得

$$\int_0^s (-\rho \mathbf{V}' , \mathbf{v}') + a[\mathbf{V}, \mathbf{v}; t] dt = 0. \quad (3.39)$$

很容易注意到  $\mathbf{v}'(t) = -\mathbf{V}(t)$ ,  $0 \leq t \leq s$ , 由 (3.39), 有

$$0 = \int_0^s ((\rho \mathbf{V}' , \mathbf{V}) - a[\mathbf{v}' , \mathbf{v}; t]) dt = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} (\|\sqrt{\rho} \mathbf{V}\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^3}^2 - a[\mathbf{v}, \mathbf{v}; t]) dt.$$

从而,

$$\int_0^s \frac{d}{dt} (\|\sqrt{\rho} \mathbf{V}\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^3}^2 - a[\mathbf{v}, \mathbf{v}; t]) dt = 0.$$

由此可得

$$\|\sqrt{\rho} \mathbf{V}(s)\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^3}^2 + a[\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(0); t] = 0, \quad s \in [0, T]. \quad (3.40)$$

因为  $a[\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(0); t] \geq 0$ , 所以, 由 (3.40) 可得  $\mathbf{V} = 0$ . 证毕.  $\square$

### 3.2 稳定性分析

本小节给出初边值问题 (2.9) 唯一弱解的稳定性估计, 并给出一个与时间有显式依赖关系的先验估计.

**定理 3.5** 令  $\mathbf{V}$  是初边值问题 (2.9) 的唯一弱解. 给定  $\mathbf{g}_1 \in L^1[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})^3]$ ,  $\mathbf{g}_2 \in H_{\text{per},0}(\Omega_{\hat{h}})^3$ ,  $\mathbf{g}_3 \in L^2(\Omega_{\hat{h}})^3$ , 则存在一个正数  $C$ , 使得

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} (\|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^3}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^3}^2) \\ & \leq C (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\hat{h}})^3]}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^3}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\hat{h}})^3}^2). \end{aligned}$$

**证明** 因初边值问题 (2.9) 有唯一弱解  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \in L^2[0, T; H_{\text{per},0}(\Omega_{\tilde{h}})^3] \cap H^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]$ , 对任意的  $t \in [0, T]$ , 考虑如下能量函数:

$$\begin{aligned} E(t) &= \|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + a[\mathbf{V}, \mathbf{V}; t] \\ &= \|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2. \end{aligned}$$

一方面, 通过计算可得

$$\begin{aligned} \int_0^t E'(\tau) d\tau &= E(t) - E(0) \\ &= (\|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ &\quad - (\|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &\quad - \|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ &= (\|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ &\quad - (\|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}(\cdot, t)|_{t=0} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)|_{t=0})\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &\quad - \|\sqrt{\lambda + \mu}(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)|_{t=0} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \cdot \partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)|_{t=0})\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ &= (\|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2) \\ &\quad - (\|\sqrt{\rho}\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{g}_2 - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{g}_3)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &\quad - \|\sqrt{\lambda + \mu}(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \mathbf{g}_2 - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{g}_3)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2). \end{aligned} \quad (3.41)$$

另一方面, 由 (2.9) 和分部积分法, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^t E'(\tau) d\tau &= 2 \int_0^t \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \partial_t^2 \mathbf{V} \cdot \partial_t \mathbf{V} d\mathbf{x} dt \\ &\quad + 2 \int_0^t \int_{\Omega_{\tilde{h}}} [\mu(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \partial_t \mathbf{V}) + (\lambda + \mu)(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V})(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \partial_t \mathbf{V})] d\mathbf{x} dt \\ &= 2 \int_0^t \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \partial_t^2 \mathbf{V} \cdot \partial_t \mathbf{V} d\mathbf{x} dt - 2 \int_0^t \int_{\Omega_{\tilde{h}}} [\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot (\mu(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V} + \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}^T))] \cdot \partial_t \mathbf{V} d\mathbf{x} dt \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\Omega_{\tilde{h}}} [\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t (\lambda(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}))] \cdot \partial_t \mathbf{V} d\mathbf{x} dt \\ &= 2 \int_0^t \int_{\Omega_{\tilde{h}}} [\rho \partial_t^2 \mathbf{V} - \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot (\mu(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V} + \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}^T)) - \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t (\lambda \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V})] \cdot \partial_t \mathbf{V} d\mathbf{x} dt \\ &= 2 \int_0^t \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mathbf{g}_1 \cdot \partial_t \mathbf{V} d\mathbf{x} dt \leq 2 \int_0^t \|\partial_t \mathbf{V}\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} \|\mathbf{g}_1\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} dt \\ &\leq 2 \max_{t \in [0, T]} \{\|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}\} \|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

结合 (3.41) 和 (3.42), 并利用 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\ &\leq \|\sqrt{\rho}\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\sqrt{\mu}(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{g}_2 - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{g}_3)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^{3 \times 3}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \|\sqrt{\lambda + \mu}(\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot \mathbf{g}_2 - c_1^{-1}\tilde{\mathbf{p}}\cdot \mathbf{g}_3)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + 2 \max_{t \in [0, T]} \{\|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^3}\} \|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\bar{h}})^3]} \\
 \leq & \rho_{\max} \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + 2\mu_{\max}(\|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + c_1^{-2}\|\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2) \\
 & + 2\zeta_{\max}(\|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + c_1^{-2}\|\tilde{\mathbf{p}}\cdot \mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2) \\
 & + 2 \max_{t \in [0, T]} \{\|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^3}\} \|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\bar{h}})^3]} \\
 \leq & \rho_{\max} \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + 2\mu_{\max}(\|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + c_1^{-2}\|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2) \\
 & + 2\zeta_{\max}(\|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + c_1^{-2}\|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2) \\
 & + \frac{\rho_{\min}}{2} \max_{t \in [0, T]} \{\|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^3}\}^2 + 2(\rho_{\min})^{-1} \|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\bar{h}})^3]}^2 \\
 \leq & 2(\rho_{\min})^{-1} \|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\bar{h}})^3]}^2 + 2 \max\{\mu_{\max}, \zeta_{\max}\}(\|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2) \\
 & + [\rho_{\max} + 2c_1^{-2}(\mu_{\max} + \zeta_{\max})] \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + \frac{\rho_{\min}}{2} \max_{t \in [0, T]} \{\|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^3}\}^2. \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

显然,

$$\begin{aligned}
 & \|\sqrt{\rho}\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + \|\sqrt{\mu}\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\sqrt{\lambda + \mu}\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 \\
 \geq & \rho_{\min} \|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + \mu_{\min} \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \zeta_{\min} \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2. \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

由 (3.43)、(3.44) 和引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned}
 & \min \left\{ \frac{\rho_{\min}}{2}, \mu_{\min}, \zeta_{\min} \right\} C_1 \max_{t \in [0, T]} \{ \|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 \} \\
 \leq & \min \left\{ \frac{\rho_{\min}}{2}, \mu_{\min}, \zeta_{\min} \right\} \max_{t \in [0, T]} \{ \|\partial_t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 \} \\
 \leq & 2(\rho_{\min})^{-1} \|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\bar{h}})^3]}^2 + 2 \max\{\mu_{\max}, \zeta_{\max}\}(\|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2) \\
 & + [\rho_{\max} + 2c_1^{-2}(\mu_{\max} + \zeta_{\max})] \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 \\
 \leq & 2 \max \left\{ (\rho_{\min})^{-1}, \max\{\mu_{\max}, \zeta_{\max}\}, \frac{\rho_{\max}}{2} + c_1^{-2}(\mu_{\max} + \zeta_{\max}) \right\} \\
 & \times (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\bar{h}})^3]}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \|\nabla_{\bar{\mathbf{d}}}\cdot \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})}^2),
 \end{aligned}$$

其中  $C_1 = (\max\{4, 4c_1^{-2} + 2\})^{-1} \min\{\frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}}, \frac{\zeta_{\min}}{\zeta_{\max}}\}$ . 证毕. □

### 3.3 先验估计

接下来推导弹性波的先验稳定性估计, 该估计对数据具有最小的正则性要求, 并且与时间有明确的依赖关系. 对  $t \in [0, T]$ , 变分问题 (2.9) 为: 找  $\mathbf{V} \in H_{\text{per}, 0}(\Omega_{\bar{h}})^3$ , 使得

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{\bar{h}}} \rho \partial_t^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} dx + \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{Q}) dx + \int_{\Omega_{\bar{h}}} (\lambda + \mu) (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}) (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{Q}) dx \\
 & = \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{Q} dx, \quad \forall \mathbf{Q} \in H_{\text{per}, 0}(\Omega_{\bar{h}})^3. \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

**定理 3.6** 令  $\mathbf{V}$  为初边值问题 (2.9) 的唯一弱解. 给定  $\mathbf{g}_1 \in L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]$ ,  $\mathbf{g}_2 \in L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ ,  $\mathbf{g}_3 \in L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3$ , 则存在正数  $K_1$  和  $K_2$  使得

$$\|\mathbf{V}\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 \leq K_1 (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 + \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2)$$

和

$$\|\mathbf{V}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 \leq K_2 (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 + \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2),$$

其中  $\tilde{K}_1 = [(1 - |\tilde{\rho}|^2) \frac{\rho_1(\mu_{\min} + \zeta_{\min})}{\lambda_1 + 2\mu_1}]^{-1}$ ,  $K_1 = \tilde{K}_1 \max\{8T^2\tilde{K}_1, 2\rho_{\max}, 8T^2\tilde{K}_1\rho_{\max}^2\}$ ,  $K_2 = TK_1$ .

**证明** 令  $0 < s < T$ , 并定义一个辅助函数

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int_t^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\tilde{h}}, \quad 0 \leq t \leq s.$$

显然,

$$\Phi(\mathbf{x}, s) = 0, \quad \partial_t \Phi(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (3.46)$$

对任意的  $\Psi(\mathbf{x}, t) \in L^2[0, s; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]$ , 利用分部积分和 (3.46), 可得

$$\begin{aligned} \int_0^s \Psi(\mathbf{x}, t) \cdot \Phi(\mathbf{x}, t) dt &= \int_0^s \left( \Psi(\mathbf{x}, t) \cdot \int_t^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^s \left[ \left( \int_0^t \Psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right)' \cdot \left( \int_t^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \right] dt \\ &= \left[ \left( \int_0^t \Psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \cdot \left( \int_t^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \right] \Big|_0^s \\ &\quad - \int_0^s \left[ \left( \int_0^t \Psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \cdot \left( \int_t^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right)' \right] dt \\ &= - \int_0^s \left[ \left( \int_0^t \Psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \cdot \left( \int_t^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right)' \right] dt \\ &= - \int_0^s \left[ \left( \int_0^t \Psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \cdot (-\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) \right] dt \\ &= \int_0^s \left( \int_0^t \Psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) dt. \end{aligned} \quad (3.47)$$

接下来, 取 (3.45) 中的测试函数  $\mathbf{Q} = \Phi$ , 从  $t = 0$  到  $t = s$  积分得到

$$\begin{aligned} &\int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \partial_t^2 \mathbf{V} \cdot \Phi d\mathbf{x} \right) dt + \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \Phi) d\mathbf{x} \right) dt \\ &\quad + \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \Phi) d\mathbf{x} \right) dt \\ &= \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mathbf{g}_1 \cdot \Phi d\mathbf{x} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.48)$$

由 (3.46), 可得

$$\int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \partial_t^2 \mathbf{V} \cdot \Phi d\mathbf{x} \right) dt = \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \left( \int_0^s \partial_t^2 \mathbf{V} \cdot \Phi dt \right) d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \left( \partial_t \mathbf{V} \cdot \Phi \Big|_0^s - \int_0^s \partial_t \mathbf{V} \cdot \partial_t \Phi dt \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \left( \partial_t \mathbf{V}(\mathbf{x}, s) \cdot \Phi(\mathbf{x}, s) - \partial_t \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) - \int_0^s \partial_t \mathbf{V} \cdot (-\mathbf{V}) dt \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \left( \int_0^s \partial_t \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} dt - \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \left( \int_0^s \left( \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 \right)' dt - \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 - \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} |\sqrt{\rho} \mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} |\sqrt{\rho} \mathbf{g}_2(\mathbf{x})|^2 dx - \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) dx \\
 &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 - \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 - \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) dx. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

再由 (3.48) 和 (3.49), 可得

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \Phi) dx \right) dt \\
 &\quad + \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu)(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V})(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \Phi) dx \right) dt \\
 &\quad = \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mathbf{g}_1 \cdot \Phi dx \right) dt + \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) dx. \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

由 (3.46), 可得

$$\begin{aligned}
 &\int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \Phi) dx \right) dt \\
 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \Phi - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \Phi) dt \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V} - c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \Phi + c_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}) dt \right) dx \\
 &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \Phi) dt \right) dx + c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}) dt \right) dx \\
 &\quad - c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \int_0^s (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \Phi) dt \right) dx - c_1^{-2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \int_0^s (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}) dt \right) dx. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

接下来, 我们分别估计 (3.51) 右端的三项. 根据积分的性质, 可得

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \Phi) dt \right) dx &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \int_0^s \int_t^s (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau dt \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu \left( \left( \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \int_0^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) dt \right) : \left( \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \int_0^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} [\mu(\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \Phi(\mathbf{x}, 0)) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \Phi(\mathbf{x}, 0))] dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2. \quad (3.52)$$

由 (3.46) 和分部积分, 可得

$$\begin{aligned} c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \mathbf{V}) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}) dt \right) d\mathbf{x} &= c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} (-\partial_t \Phi)) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}) dt \right) d\mathbf{x} \\ &= c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu ((\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\mathbf{x}, 0)) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0))) d\mathbf{x} \\ &\quad + c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi) : (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}) dt \right) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.53)$$

和

$$\begin{aligned} c_1^{-2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( \int_0^s (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}) dt \right) d\mathbf{x} &= \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( \int_0^s \frac{d}{dt} (|\tilde{\mathbf{p}}| |\mathbf{V}|)^2 dt \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( \int_0^s \frac{d}{dt} |\mathbf{V}|^2 dt \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} - \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

将 (3.52)–(3.54) 代入 (3.51), 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^s \left( \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu (\nabla_{\bar{\mathbf{d}, \tilde{\mathbf{p}}}^t}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\bar{\mathbf{d}, \tilde{\mathbf{p}}}^t}^t \Phi) d\mathbf{x} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu ((\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\mathbf{x}, 0)) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0))) d\mathbf{x} \\ &\quad + c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( \int_0^s (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi) : (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}) dt \right) d\mathbf{x} - c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu \left( \int_0^s (\tilde{\mathbf{p}} \partial_t \mathbf{V}) : (\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi) dt \right) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + c_1^{-1} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu ((\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\mathbf{x}, 0)) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0))) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)) : (\tilde{\mathbf{p}} \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)) d\mathbf{x} \right) \\ &\quad - \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 - \left( \frac{1}{2} \|\sqrt{\mu} \nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^{3 \times 3}}^2 + \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \right) \\ &\quad - \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \\ &= -\frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \int_{\Omega_{\bar{h}}} \mu |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} = -\frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \|\sqrt{\mu} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\bar{h}})^3}^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \Phi) d\mathbf{x} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\lambda + \mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) ((\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0)) (\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0))) d\mathbf{x} \\
 &\quad + c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) \left( \int_0^s (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \Phi) (\tilde{\mathbf{p}} \cdot \partial_t \mathbf{V}) dt \right) d\mathbf{x} - c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) \left( \int_0^s (\tilde{\mathbf{p}} \cdot \partial_t \mathbf{V}) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \Phi) dt \right) d\mathbf{x} \\
 &\quad - \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) |\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) |\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\lambda + \mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + c_1^{-1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) ((\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0)) (\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0))) d\mathbf{x} \\
 &\quad - \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) |\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) |\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \\
 &\geq \frac{1}{2} \|\sqrt{\lambda + \mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 \\
 &\quad - \left( \frac{1}{2} \|\sqrt{\lambda + \mu} \nabla_{\tilde{\mathbf{d}}} \cdot \Phi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^2 + \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) |\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \right) \\
 &\quad - \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) |\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} + \frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) |\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)|^2 d\mathbf{x} \\
 &= -\frac{c_1^{-2}}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) |\tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} \\
 &\geq -\frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \|\sqrt{\lambda + \mu} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^3. \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

结合 (3.50)、(3.55) 和 (3.56), 可得

$$\begin{aligned}
 & \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mathbf{g}_1 \cdot \Phi d\mathbf{x} \right) dt + \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^3 + \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^3 + \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mu (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \mathbf{V}) : (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \Phi) d\mathbf{x} \right) dt \\
 &\quad + \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + \mu) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \mathbf{V}) (\nabla_{\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{p}}}^t \cdot \Phi) d\mathbf{x} \right) dt \\
 &\geq \frac{1}{2} \|\sqrt{\rho} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^3 - \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \|\sqrt{\mu} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^3 - \frac{c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} \|\sqrt{\lambda + \mu} \mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})}^3 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\rho - c_1^{-2} |\tilde{\mathbf{p}}|^2 (\lambda + 2\mu)) |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} - |\tilde{\mathbf{p}}|^2 \frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \right) |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x} \\
 &\geq \frac{1 - |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} (\mu_{\min} + \zeta_{\min}) \frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \int_{\Omega_{\tilde{h}}} |\mathbf{V}(\mathbf{x}, s)|^2 d\mathbf{x}, \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

其中由假设 (2.4) 可知,  $|\tilde{\mathbf{p}}| < 1$ ,  $\frac{1 - |\tilde{\mathbf{p}}|^2}{2} (\mu_{\min} + \zeta_{\min}) \frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} > 0$ .

接下来, 我们分别估计 (3.57) 左端的两项. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \left( \int_0^s \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) dt \right) d\mathbf{x} \\
 &= \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \rho \mathbf{g}_3(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) dt \\
 &\leq \rho_{\max} \int_0^s \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} \|\mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} dt \\
 &= (\rho_{\max} \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}) \int_0^s \|\mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} dt. \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

对  $0 \leq t \leq s \leq T$ , 由 (3.47), 可得

$$\begin{aligned}
 \int_0^s \left( \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, t) \cdot \Phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) dt &= \int_{\Omega_{\tilde{h}}} \left( \int_0^s \left( \int_0^t \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) dt \right) d\mathbf{x} \\
 &\leq \int_0^s \int_0^t \|\mathbf{g}_1(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} \|\mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} d\tau dt \\
 &\leq \left( \int_0^s \|\mathbf{g}_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} dt \right) \left( \int_0^s \|\mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} dt \right) \\
 &\leq \|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]} \int_0^s \|\mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} dt. \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

将 (3.58) 和 (3.59) 代入 (3.57), 则对任意的  $s \in [0, T]$ , 有

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{V}(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 &\leq \tilde{K}_1 \|\sqrt{\rho} \mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 \\
 &\quad + 2\tilde{K}_1 (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]} + \rho_{\max} \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}) \int_0^s \|\mathbf{V}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3} dt, \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

其中  $\tilde{K}_1 = [(1 - |\hat{\rho}|^2)(\mu_{\min} + \zeta_{\min}) \frac{\rho_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}]^{-1}$ .

在 (3.60) 的两边关于  $s$  取  $L^\infty$ -范数, 并利用 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 &\|\mathbf{V}\|_{L^\infty[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 \\
 &\leq 2\tilde{K}_1 \rho_{\max} \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + [2T\tilde{K}_1 (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]} + \rho_{\max} \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3})]^2 \\
 &\leq \max\{8T^2\tilde{K}_1^2, 2\tilde{K}_1\rho_{\max}, 8T^2\tilde{K}_1^2\rho_{\max}^2\} (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 + \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2) \\
 &= K_1 (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 + \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2).
 \end{aligned}$$

类似地, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 &\|\mathbf{V}\|_{L^2[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 \\
 &\leq 2T\tilde{K}_1 \rho_{\max} \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + [2T^{\frac{3}{2}}\tilde{K}_1 (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]} + \rho_{\max} \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3})]^2 \\
 &\leq \max\{8T^3\tilde{K}_1^2, 2T\tilde{K}_1\rho_{\max}, 8T^3\tilde{K}_1^2\rho_{\max}^2\} (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 + \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2) \\
 &= K_2 (\|\mathbf{g}_1\|_{L^1[0, T; L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3]}^2 + \|\mathbf{g}_2\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2 + \|\mathbf{g}_3\|_{L^2(\Omega_{\tilde{h}})^3}^2).
 \end{aligned}$$

证毕. □



## 4 结论

本文针对时域弹性波双周期结构散射问题在数学上进行了细致分析, 根据时域问题的具体特点, 通过发展压缩坐标变换的方法, 将散射问题转化为有界域中等价的初始边界值问题. 在建立相关 Sobolev 空间中范数等价关系的基础上, 通过使用 Galerkin 方法证明了相应变分问题的适定性. 此外, 本文通过直接考虑时域弹性波方程的变分问题, 得到了具有显式依赖时间的先验估计. 证明中主要利用压缩变换、Galerkin 方法、能量估计和 Sobolev 空间模估计. 该方法不引入任何近似或截断误差, 它避免了 TBC 或 PML 所需的复杂误差或收敛分析. 由于等价压缩问题的形式简单并且计算区域较小, 特别适用于数值模拟. 我们相信该方法适用于其他许多此类型的时域散射问题. 我们将在后续工作中进一步给出有关数值分析和计算方面的结果.

## 参考文献

- 1 Petit R. *Electromagnetic Theory of Gratings*. New York: Springer, 1980
- 2 Bao G, Dobson D C, Cox J A. Mathematical studies in rigorous grating theory. *J Opt Soc Amer A*, 1995, 12: 1029–1042
- 3 Bao G, Li P, Wu H. An adaptive edge element method with perfectly matched absorbing layers for wave scattering by bi-periodic structures. *Math Comp*, 2010, 79: 1–34
- 4 Chen Z, Wu H. An adaptive finite element method with perfectly matched absorbing layers for the wave scattering by periodic structures. *SIAM J Numer Anal*, 2003, 41: 799–826
- 5 Nedelec J C, Starling F. Integral equation methods in a quasi-periodic diffraction problem for the time-harmonic Maxwell's equations. *SIAM J Math Anal*, 1991, 22: 1679–1701
- 6 Bao G, Cowsar L, Masters W. *Mathematical Modeling in Optical Science*. *Frontiers in Applied Mathematics*, vol. 22. Philadelphia: SIAM, 2001
- 7 Ammari H, Bretin E, Garnier J, et al. *Mathematical Methods in Elasticity Imaging*. Princeton: Princeton University Press, 2015
- 8 Ciarlet P G. *Mathematical Elasticity, vol. I: Three-Dimensional Elasticity*. *Studies in Mathematics and Its Applications*, vol. 20. Amsterdam: North-Holland, 1988
- 9 Landau L D, Lifshitz E M. *Theory of Elasticity*. New York: Pergamon Press, 1959
- 10 Bao G, Hu G, Sun J, et al. Direct and inverse elastic scattering from anisotropic media. *J Math Pures Appl* (9), 2018, 117: 263–301
- 11 Bramble J H, Pasciak J E, Trenev D. Analysis of a finite PML approximation to the three dimensional elastic wave scattering problem. *Math Comp*, 2010, 79: 2079–2101
- 12 Chen Z, Xiang X, Zhang X. Convergence of the PML method for elastic wave scattering problems. *Math Comp*, 2016, 85: 2687–2714
- 13 Li P, Wang Y, Wang Z, et al. Inverse obstacle scattering for elastic waves. *Inverse Problems*, 2016, 32: 115018
- 14 Li P, Yuan X. Inverse obstacle scattering for elastic waves in three dimensions. *Inverse Probl Imaging*, 2019, 13: 545–573
- 15 Arens T. A new integral equation formulation for the scattering of plane elastic waves by diffraction gratings. *J Integral Equations Appl*, 1999, 11: 275–297
- 16 Arens T. The scattering of plane elastic waves by a one-dimensional periodic surface. *Math Methods Appl Sci*, 1999, 22: 55–72
- 17 Diao H, Li P, Yuan X. Inverse elastic surface scattering with far-field data. *Inverse Probl Imaging*, 2019, 13: 721–744
- 18 Elschner J, Hu G. Variational approach to scattering of plane elastic waves by diffraction gratings. *Math Methods Appl Sci*, 2010, 33: 1924–1941
- 19 Elschner J, Hu G. Scattering of plane elastic waves by three-dimensional diffraction gratings. *Math Models Methods Appl Sci*, 2012, 22: 1150019
- 20 Jiang X, Li P, Lv J, et al. An adaptive finite element PML method for the elastic wave scattering problem in periodic structures. *ESAIM: M2AN*, 2017, 51: 2017–2047

- 21 Li P, Wang Y, Zhao Y. Near-field imaging of biperiodic surfaces for elastic waves. *J Comput Phys*, 2016, 324: 1–23
- 22 Li P, Wang Y, Zhao Y. Convergence analysis in near-field imaging for elastic waves. *Appl Anal*, 2016, 95: 2339–2360
- 23 Chen Q, Monk P. Discretization of the time domain CFIE for acoustic scattering problems using convolution quadrature. *SIAM J Math Anal*, 2014, 46: 3107–3130
- 24 Fan L, Monk P. Time dependent scattering from a grating. *J Comput Phys*, 2015, 302: 97–113
- 25 Riley D J, Jin J M. Finite-element time-domain analysis of electrically and magnetically dispersive periodic structures. *IEEE Trans Antennas and Propagation*, 2008, 56: 3501–3509
- 26 Veysoglu M E, Shin R T, Kong J A. A finite-difference time-domain analysis of wave scattering from periodic surfaces: Oblique incidence case. *J Electromagnet Waves Appl*, 1993, 7: 1595–1607
- 27 Bao G, Gao Y, Li P. Time-domain analysis of an acoustic-elastic interaction problem. *Arch Ration Mech Anal*, 2018, 229: 835–884
- 28 Gao Y, Li P. Analysis of time-domain scattering by periodic structures. *J Differential Equations*, 2016, 261: 5094–5118
- 29 Gao Y, Li P. Electromagnetic scattering for time-domain Maxwell’s equations in an unbounded structure. *Math Models Methods Appl Sci*, 2017, 27: 1843–1870
- 30 Gao Y, Li P, Li Y. Analysis of time-domain elastic scattering by an unbounded structure. *Math Methods Appl Sci*, 2018, 41: 7032–7054
- 31 Gao Y, Li P, Zhang B. Analysis of transient acoustic-elastic interaction in an unbounded structure. *SIAM J Math Anal*, 2017, 49: 3951–3972
- 32 Li P, Wang L L, Wood A. Analysis of transient electromagnetic scattering from a three-dimensional open cavity. *SIAM J Appl Math*, 2015, 75: 1675–1699
- 33 Alpert B, Greengard L, Hagstrom T. Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent wave equation. *J Comput Phys*, 2002, 180: 270–296
- 34 Gächter G K, Grote M J. Dirichlet-to-Neumann map for three-dimensional elastic waves. *Wave Motion*, 2003, 37: 293–311
- 35 Givoli D, Keller J B. Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave Motion*, 1990, 12: 261–279
- 36 Chen Z, Nedelec J C. On Maxwell equations with the transparent boundary condition. *J Comput Math*, 2008, 26: 284–296
- 37 Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J Comput Phys*, 1994, 114: 185–200
- 38 Evans L C. *Partial Differential Equations*, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2010

## Time domain scattering for elastic waves in a biperiodic structure

Gang Bao, Bin Hu, Peijun Li & Jue Wang

**Abstract** This paper concerns the mathematical analysis of the scattering of an elastic plane wave by a biperiodic structure. The wave propagation is governed by the time-domain Navier equation in three dimensions. The method of a compressed coordinate transformation is developed to reduce equivalently the scattering problem into an initial-boundary value problem formulated in a bounded domain over a finite time interval. The reduced problem is shown to have a unique weak solution by using the constructive Galerkin method. The stability and a priori estimates with explicit time dependence are established for the weak solution.

**Keywords** elastic wave, biperiodic structures, well-posedness, stability, a priori estimate

**MSC(2010)** 35A15, 35P25, 74J20

**doi:** 10.1360/N012019-00041