Un principe du maximum pour des opérateurs monotones

Antonin Chambolle Bradley J. Lucier*

Résumé – Nous montrons que si T est un opérateur éventuellement non-linéaire de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même qui conserve l'intégrale, est monotone et commute avec les translations, alors T satisfait un principe du maximum.

A maximum principle for order-preserving mappings

Abstract – *We prove that if T is a possibly nonlinear mapping from $L^1(\mathbb{R}^n)$ to itself that preserves the integral, is order preserving, and that commutes with translations, then T satisfies a maximum principle: the essential supremum of Tu is no greater than the essential supremum of u.*

Abridged english version – We prove the following theorem.

THEOREM 1. *If $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ satisfies*

(1) *for all u in $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} Tu = \int_{\mathbb{R}^n} u$,*

(2) *for all u and v in $L^1(\mathbb{R}^n)$ with $u \geq v$ a.e., $Tu \geq Tv$ a.e., and*

(3) *for all $h \in \mathbb{R}^n$ and all $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $T(u(\cdot - h)) = (Tu)(\cdot - h)$,*

then for all $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\operatorname{ess\,sup} Tu \leq \operatorname{ess\,sup} u \quad \text{and} \quad \operatorname{ess\,inf} Tu \geq \operatorname{ess\,inf} u,$$

i.e., the mapping T satisfies maximum and minimum principles.

We remark that the theorem holds if $T : L^1(\mathbb{Z}^n) \to L^1(\mathbb{Z}^n)$ under the same hypotheses (considering only integer translations).

Crandall and Tartar [4] proved that conditions (1) and (2) on $L^1(\Omega)$ of any measure space $(\Omega, d\mu)$ are equivalent to (1) and

(2′) *for all u and v in $L^1(\Omega)$, $\|Tu - Tv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^1(\Omega)}$.*

Thus, on $L^1(\Omega)$, non-expansive mappings that preserve the integral are the same as order-preserving mappings that preserve the integral. Later, Lucier [7] proved Theorem 1 when $n = 1$ by noting that there is a relationship in one dimension between the variation of u and the essential supremum of u. However, that technique does not generalize to more than one dimension.

We are motivated by solution operators T that take $u(\cdot, 0)$ to $u(\cdot, t)$ for some fixed t in various nonlinear evolution equations of the form $u_t + A(u) = 0$, where A is a translation-invariant m-accretive operator on $L^1(\mathbb{R}^n)$ with $\int A(u) = 0$ for all u in the domain of A. Equations whose solution operators satisfy the three conditions of Theorem 1 include scalar conservation laws

$$u_t + \nabla \cdot F(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

* financé en partie par l'Office of Naval Research, Contrat N00014-91-J-1152.

where $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is Lipschitz continuous (see [6]); the porous medium equation

$$u_t - \Delta\phi(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

under various conditions on ϕ (see [3])—ϕ being continuous and strictly increasing with $\phi(0) = 0$ suffices, for example; Sobolev equations of the form

$$u_t + f(u)_x - \nu g(u)_{xx} - \beta u_{xxt} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ \nu > 0,\ \beta > 0,$$

when f and g are Lipschitz and $\nu g' \geq \beta^{1/2}|f'|$ (see [7]); and second order hyperbolic equations of the form

$$u_t + f(u)_x + \epsilon u_{xt} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ \epsilon > 0,$$

when f is Lipschitz, $f' \geq 0$, and the solution is interpreted correctly, because the initial data are given on a characteristic—see [7] and [1]. Theorem 1 provides an alternate method for proving maximum principles for all these equations.

Brézis and Strauss [2] prove that if an operator T satisfies conditions (1) and (2′) and the conclusion of Theorem 1, then for all $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|Tu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. For this to be true for all $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, it would be sufficient to be able to extend T to map $L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ to itself; see [5].

Sketch of proof of Theorem 1 – We sketch the proof of the maximum principle. The idea is to show that if the conclusion is violated anywhere for a particular pair u and Tu, then we can use the monotonicity and translation invariance properties to construct a function $\bar{u}$ for which $T\bar{u}$ is so large that it fails the integral-preserving hypothesis.

First notice that we can assume that Tu is continuous for all u. Actually, if we define for any mollifier ϕ (i.e., positive, smooth, with $\int \phi = 1$) the operator T^ϕ as $T^\phi u = \phi * Tu$ for all $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, then $T^\phi u$ is continuous, and T^ϕ satisfies all the assumptions of Theorem 1. If the result holds for any T^ϕ, then letting ϕ tend to a Dirac mass will prove the result for T.

If the result is not true, there exists a function $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ such that $\operatorname{ess\,sup} u < +\infty$ and $\sup Tu > \operatorname{ess\,sup} u$. We can assume that u is non-negative (since $T(u^+) \geq Tu$), and that $\operatorname{ess\,sup} u > 0$ and $\sup Tu > 0$. Since Tu is continuous, up to a translation we deduce that on some small cube $(0,h)^n$, $Tu \geq u_\infty + \alpha$ for some $\alpha > 0$ (where we have set $u_\infty = \operatorname{ess\,sup} u = \|u\|_\infty$).

Choose $\epsilon > 0$. There exists $H = H(\epsilon) > 0$ such that $\int_{\mathbb{R}^n \setminus (-H,H)^n} u \leq \epsilon$. We define for each integer $k \geq 1$ the function

$$u^k = \max\{u(\cdot - hl) \ : \ l = (l_1, ..., l_n) \in \{0, ..., k-1\}^n\};$$

the properties of T imply that

$$Tu^k \geq \max\{(Tu)(\cdot - hl) \ : \ l \in \{0, ..., k-1\}^n\}.$$

Thus, $Tu^k \geq u_\infty + \alpha$ on the whole cube $(0, kh)^n$. On the other hand, we easily get the estimate $\int_A u^k \leq k^n \epsilon$ on the set $A = \mathbb{R}^n \setminus (-H, kh + H)^n$.

We deduce

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^k \leq (kh + 2H)^n u_\infty + k^n \epsilon \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^n} Tu^k \geq (kh)^n (u_\infty + \alpha),$$

so that $\int u^k < \int Tu^k$ if $\epsilon < h^n \alpha / 2$ and k is large enough, contradicting (1). □

Nous montrons le résultat suivant.

Théorème 1. *Si* $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ *vérifie :*

(1) *quel que soit* u *dans* $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} Tu = \int_{\mathbb{R}^n} u$,

(2) *quels que soient* u *et* v *dans* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *tels que* $u \geq v$ *p. p.,* $Tu \geq Tv$ *p. p., et*

(3) *quels que soient* $h \in \mathbb{R}^n$ *et* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $T(u(\cdot - h)) = (Tu)(\cdot - h)$,

alors pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\operatorname{ess\,sup} Tu \leq \operatorname{ess\,sup} u \quad \textit{et} \quad \operatorname{ess\,inf} Tu \geq \operatorname{ess\,inf} u,$$

en d'autres termes, l'application T *satisfait un principe du maximum (et du minimum).*

Remarquons que le résultat reste vrai pour des opérateurs $T : L^1(\mathbb{Z}^n) \to L^1(\mathbb{Z}^n)$, sous les mêmes hypothèses (en ne considérant que des translations entières).

Crandall et Tartar [4] ont montré que les conditions (1) et (2) dans $L^1(\Omega)$ (sur n'importe quel espace mesuré $(\Omega, d\mu)$) sont équivalentes à (1) et

(2′) *pour tout* u *et* v *dans* $L^1(\Omega)$, $\|Tu - Tv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L^1(\Omega)}$.

Ainsi, dans l'espace $L^1(\Omega)$, les opérateurs monotones préservant l'intégrale et les contractions qui préservent l'intégrale sont les mêmes applications. Plus tard, Lucier [7] a démontré le Théorème 1 dans le cas $n = 1$ en remarquant qu'en dimension un, il y a une relation simple entre la variation totale de u et sa borne supérieure essentielle. Mais cette propriété n'est plus vraie en dimension supérieure et la démonstration ne se généralise pas.

Parmi les opérateurs auxquels on peut appliquer le résultat, citons notamment les applications T qui associent à $u(\cdot, 0)$ la solution $u(\cdot, t)$ à un instant $t > 0$ fixé de diverses équations d'évolution non-linéaires, de la forme $u_t + A(u) = 0$, où A est un opérateur m-accrétif de $L^1(\mathbb{R}^n)$, invariant par translation, et tel que $\int A(u) = 0$ pour tout u dans le domaine de A. Les équations pour lesquelles l'opérateur T satisfait les trois conditions du Théorème 1 incluent les lois de conservation scalaires

$$u_t + \nabla \cdot F(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est Lipschitzienne (voir [6]) ; l'équation des milieux poreux

$$u_t - \Delta\phi(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

où ϕ doit vérifier certaines conditions (voir [3])—il suffit par exemple que la fonction ϕ soit continue, strictement croissante, avec $\phi(0) = 0$; les équations de Sobolev de la forme

$$u_t + f(u)_x - \nu g(u)_{xx} - \beta u_{xxt} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ \nu > 0,\ \beta > 0,$$

lorsque f et g sont Lipschitziennes et $\nu g' \geq \beta^{1/2}|f'|$ (voir [7]) ; et des équations hyperboliques du second ordre de la forme

$$u_t + f(u)_x + \epsilon u_{xt} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ \epsilon > 0,$$

où f est Lipschitzienne, $f' \geq 0$, à condition que la solution soit correctement définie, la donnée initiale étant prise sur une caractéristique—voir [7] et [1]. Le Théorème 1 permet de redémontrer le principe du maximum pour chacune de ces équations.

Brézis et Strauss [2] ont prouvé que si un opérateur T satisfait les conditions (1) et (2′) et la conclusion du Théorème 1, alors pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|Tu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Pour étendre cette propriété à tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, il suffirait de savoir prolonger T en un opérateur de $L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (voir [5]).

Preuve du Théorème 1 – Nous ne démontrerons que le principe du maximum, puisque la preuve du principe du minimum est rigoureusement symétrique. L'idée de la démonstration est de montrer que s'il existait une fonction u pour laquelle la conclusion est fausse, on pourrait grâce aux propriétés de monotonicité et d'invariance par translation de T construire à partir de u une fonction $\bar{u}$ dont l'image $T\bar{u}$, trop grande, violerait la propriété de conservation de l'intégrale.

Remarquons d'abord que l'on peut supposer que pour toute fonction u, Tu est continue. En effet, si pour un noyau régularisant arbitraire ϕ (positif, régulier, et tel que $\int \phi = 1$) on définit l'opérateur T^ϕ par $T^\phi u = \phi * Tu$ pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors T^ϕ est encore une contraction, conserve l'intégrale, et est invariant par translation ; de plus $T^\phi u$ est continue pour tout u. Si le résultat est vrai pour l'opérateur T^ϕ, alors en faisant tendre ϕ vers une masse de Dirac on obtiendra la même conclusion pour l'opérateur T.

Si le résultat n'est pas vrai, il existe une fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{ess\,sup} u < +\infty$ et $\sup Tu > \operatorname{ess\,sup} u$. Puisque la fonction $u^+ = \max(u, 0)$ est plus grande que u et donc $Tu^+ \geq Tu$, on peut supposer que u est presque partout positive ou nulle. Remarquons également que l'on peut supposer que $\operatorname{ess\,sup} u > 0$ (sinon $u = 0$ et $Tu = 0$, du fait de l'invariance par translation) et donc que $\sup Tu > 0$. La fonction Tu étant continue, on en déduit (après une éventuelle translation) qu'il existe $h > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$Tu(x) \geq u_\infty + \alpha$$

pour tout $x \in (0, h)^n$, où l'on a posé $u_\infty = \operatorname{ess\,sup} u = \|u\|_\infty$.

Choisissons $\epsilon > 0$. Il existe $H = H(\epsilon) > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus (-H,H)^n} u \leq \epsilon.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on définit à présent la fonction

$$u^k = \max\{u(\cdot - hl) \ : \ l = (l_1, ..., l_n) \in \{0, ..., k-1\}^n\} \ ;$$

on a toujours $u_\infty = \sup u^k$. Pour tout $l \in \{0, ..., k-1\}^n$, $u^k \geq u(\cdot - hl)$ implique $Tu^k \geq T(u(\cdot - hl)) = (Tu)(\cdot - hl)$, et on en déduit que

$$Tu^k \geq \max\{(Tu)(\cdot - hl) \ : \ l \in \{0, ..., k-1\}^n\}.$$

En particulier, $Tu^k(x) \geq u_\infty + \alpha$ pour tout $x \in (0, kh)^n$. Maintenant, soit $A = \mathbb{R}^n \setminus (-H, kh + H)^n$. Clairement,

$$u^k(x) \leq \sum_{l \in \{0,\dots,k-1\}^n} u(x - hl),$$

et par conséquent puisque $\int_A u(x - hl)dx \leq \epsilon$ pour chacun de ces multi-entiers l,

$$\int_A u^k \leq k^n \epsilon.$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^k \leq (kh + 2H)^n u_\infty + k^n \epsilon \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} Tu^k \geq (kh)^n (u_\infty + \alpha),$$

de sorte que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} u^k}{\int_{\mathbb{R}^n} Tu^k} \leq \left(\frac{kh + 2H}{kh}\right)^n \frac{u_\infty}{u_\infty + \alpha} + \frac{\epsilon / h^n}{u_\infty + \alpha}.$$

Supposons qu'on ait choisi $\epsilon < h^n\alpha/2$. L'inégalité devient

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} u^k}{\int_{\mathbb{R}^n} Tu^k} < \frac{(1+2H/kh)^n u_\infty + \alpha/2}{u_\infty + \alpha}.$$

Comme $\lim_{k\to\infty}(1+2H/kh)^n = 1$, on peut prendre k assez grand pour avoir

$$(1+2H/kh)^n u_\infty < u_\infty + \alpha/2$$

Alors, pour une telle valeur de k,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} u^k}{\int_{\mathbb{R}^n} Tu^k} < \frac{u_\infty + \alpha/2 + \alpha/2}{u_\infty + \alpha} = 1,$$

et ceci contredit l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^n} Tu^k = \int_{\mathbb{R}^n} u^k$ (puisqu'aucune de ces intégrales ne peut être nulle). $\square$

Références

[1] **G. F. Carey, B.-N. Jiang, and R. E. Showalter**. A regularization-stabilization technique for nonlinear conservation equation computations. *Numer. Methods for Partial Differential Equations* **4** (1988) 165–171.

[2] **H. Brézis and W. A. Strauss**. Semi-linear second-order elliptic equations in L^1. *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973) 564–590.

[3] **M. G. Crandall and M. Pierre**. Regularizing effects for $u_t + A\varphi(u) = 0$ in L^1. *J. Funct. Anal.* **45** (1982), 194–212.

[4] **M. G. Crandall and L. Tartar**. Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **78** (1980), 385–390.

[5] **R. A. DeVore and B. J. Lucier**. On the size and smoothness of solutions to nonlinear hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Math. Anal.* **27** (1996), 684–707.

[6] **S. N. Kružkov**. First order quasilinear equations in several independent variables. *Math. USSR Sb.* **10** (1970), 217–243.

[7] **B. J. Lucier**. On Sobolev regularizations of hyperbolic conservation laws. *Comm. Partial Differential Equations* **10** (1985), 1–28.

Antonin Chambolle :
CEREMADE (CNRS URA 749)
Université de Paris–Dauphine, 75775 Paris CEDEX 16, France
Courrier électronique : `Antonin.Chambolle@ceremade.dauphine.fr`

Bradley J. Lucier :
Department of Mathematics
Purdue University, West Lafayette, IN 47907-1395
Courrier électronique : `lucier@math.purdue.edu`

17 octobre 1997.