Inhaltsverzeichnis

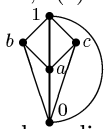
Kapitel 1

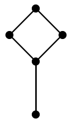
Fahnenräume

In diesem einführenden Kapitel werden wir uns mit grundlegenden Definitionen sowie einigen Erläuterungen und Beispielen beschäftigen. Vorher klären wir dir verwendeten Zeichen und Abkürzungen.
Notation 1.1
Durchweg werden wir bezeichnen mit

- $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen,
- K einen Kffi˘fflrper,
- $\{a, \ldots, b\} \times \{c, \ldots, d\}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ die Menge geordneter Paare (i, j) mit $a \leq i \leq b$ und $c \leq j \leq d$,
- $\mathbb{Z}$ den Ring der ganzen Zahlen.

Um den Begriff eines Fahnenraumes definieren zu können, muß zunächst etwas über geordnete Mengen und ordnungstreue Abbildungen gesagt werden.
Definition 1.2
Sei M eine endliche Menge, $\sqsubseteq$ eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf M mit der Eigenschaft, daß M bezüglich $\sqsubseteq$ ein minimales Element $\mathbf{0}$ und ein maximales Element $\mathbf{1}$ besitzt, so daffiaffl $m \in M$ impliziert $\mathbf{0} \sqsubseteq m \sqsubseteq \mathbf{1}$. Sei weiterhin $d : M \to \mathbb{N}$ eine ordungstreue Abbildung in die natürlichen Zahlen wobei $d(\mathbf{1}) = n$ und $d(\mathbf{0}) = 0$ gelte. Unter diesen Umständen nennen wir d eine *Dimensionsfunktion*, das System $\tau = (M, \sqsubseteq, d)$ einen *Typ* und wir wollen von einem *linearen Typ* sprechen, sofern die Ordung auf M eine lineare ist.

Bemerkung 1.3
Dem Typ τ ordnet man einen Graphen Γ_τ zu, in dem die Knoten von Γ den Elementen von M, die Kanten von Γ den Relationen von $\sqsubseteq$ auf M zugeordnet werden und die relative Lage der Knoten die Werte der Dimensionsfunktion veranschaulicht. Ist zum Beispiel $M = \{\mathbf{0}, a, b, c, \mathbf{1}\}$ mit $\mathbf{0} \sqsubset a \sqsubset b \sqsubset \mathbf{1}$ und $\mathbf{0} \sqsubset a \sqsubset c \sqsubset \mathbf{1}$, und gilt $d(a) = 2, d(b) = d(c) = 3, d(\mathbf{1}) = n = 4$, so hat der zugeordnete Graph Γ_τ die Form 

, wobei zumeist in den Graphen nur die Relationen aufgenommen werden, die $\sqsubset$ als transitive HffiΔfflle erzeugen; in unserem Falle wffiΞfflre der dann zu erwartende Graph  .

Der Typbegriff spielt eine fundamentale Rolle für die Konstruktion eines Fahnenraumes, allerdings fehlt eine weitere wichtige Ingredienz. Es sei K ein Körper, K^n der zugehörige n-dimensionale Vektorraum über K. Wir betrachten einen s-dimensionalen Untervektorraum V (mit $s < n$). Dann wählen wir in V $s+1$ linear unabhängige Vektoren $(x^0, \ldots, x^s)$ und deren Matrix bezffiΔfflglich einer gewffiΞfflhlten Basis fffiΔfflr K^n sei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} x_0^0 & \cdots & x_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^s & \cdots & x_n^s \end{pmatrix}.$$

Es sei nun $J = J_{s+1} = (i_0, \ldots, i_s)$ eine aufsteigend geordnete Menge von Indizes mit $i_s \leq n$. Wir bilden die $(s+1)$-reihige Unterdeterminante $\pi(J)$ von Spalten von Σ, deren Indizes in J liegen:

$$\pi(J) = \begin{vmatrix} x_{i_0}^0 & \cdots & x_{i_s}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_0}^s & \cdots & x_{i_s}^s \end{vmatrix}.$$

Durchläuft nun J alle $\binom{n+1}{s+1}$ Mengen bestehend aus $s+1$ Indizes, so ergeben die resultierenden Determinanten die sogenannten *Graßmann'schen Koordinaten* für den Untervektorraum V in der *Graßmann'schen Mannigfaltigkeit* $G_K(s,n)$. Eine Graßmann'sche Mannigfaltigkeit ist also die Menge aller Punkte $\left(\xi_1, \ldots, \xi_{\binom{n+1}{s+1}}\right)$ eines projektiven Raumes, deren Koordinaten gerade die Graßmann'schen Koordinaten eines s-dimensionalen Untervektorraumes von K^n sind. (Wir zeigen nach der folgenden Definition, daffia fflsich tatsffiΞfflchlich um einen projektiven Raum handelt.)

Dieses Konzept ermöglicht die folgende

Definition 1.4
Ein *geordneter Fahnenraum* (oder auch nur *Fahnenraum*) $F = F(K, \tau)$ über dem Körper K vom Typ $\tau = (M, \sqsubseteq, d)$ ist die Teilmenge F des Produktes

$$\prod_{m \in M} G^m\left(d(m), n\right) = \prod_{m \in M} G_K^m\left(d(m), n\right),$$

deren Punkte $g = (g_m)_{m \in M}$ die Bedingung

$$g_m \subseteq g'_m \text{ sofern } m \sqsubseteq m'$$

erfüllen. Die Elemente eines Fahnenraumes nennen wir *Fahnen*, und eine Fahne $g = (g_m)_{m \in M}$ heißt *linear*, wenn für alle $m, m' \in M$ aus $d(g_m) \leq d(g_{m'})$ folgt $g_m \subseteq g_{m'}$.

Die obige Beschreibung einer Graßmann'schen Mannigfaltigkeit ist nicht eben geschaffen, das Rechnen auf oder mit diesen Gebilden einfach zu gestalten. Wir zeigen jetzt einen handlicheren Zugang zur Topologie, der als *lokale Graßmannkoordinaten* bekannt ist. ZunffiΞfflchst stellen wir fest, daß die Graßmannkoordinaten des Vektorraumes $V \in G(s, n)$ der Dimension s nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind: wenn

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} y_0^0 & \cdots & y_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ y_0^s & \cdots & y_n^s \end{pmatrix}$$

ein anderes Erzeugendensystem für V ist, so muß $\{y_j^i\}$ aus $\{x_j^i\}$ durch eine lineare Transformation

$$y^i = \sum_{k=0}^{s} a_{i,k} \cdot x^k = (\mathcal{A} \cdot \Sigma)_i$$

hervorgegangen sein. Das aber impliziert $\pi_y(J) = |\mathcal{A}| \cdot \pi_x(J)$ für alle Indexmengen J. Da also nur das Verhältnis der Determinanten Signifikanz besitzt, können wir die Graßmannkoordinaten von V als Koordinaten von Punkten eines $\sigma = \left(\binom{n+1}{s+1} - 1\right)$-dimensionalen projektiven Raumes auffassen. Bei Variation von V erfüllen diese Punkte in $\mathbb{P}_K^\sigma$ eine Varietät, die *Graßmann'sche Varietät*. Da wir gezeigt haben, daß ein Basiswechsel für V keine Veränderung der Verhältnisse der Determinanten nach sich zieht und andererseits klar ist, daß zu verschiedenen Vektorräumen verschiedene Graßmannkoordinaten gehören müssen, entspricht jedem Vektorraum V genau ein Punkt. Wir geben F die Zariskitopologie.

Nun ist bekannt (siehe z.B. [5]), daß ein projektiver Raum lokal affin ist, und, da wir uns mit Singularitäten beschäftigen wollen, ist eine lokale Beschreibung auch völlig hinreichend. Wenn wir von der globalen zur lokalen Betrachtung übergehen, heißt das, daß wir dem geltenden Koordinatensystem eine uns genehme Form geben können. Wir tun das, indem wir $x^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ setzen, ein $n+1$-dimensionaler Einheitsvektor. Da die $x^0, \ldots, x^s$ V erzeugen sollen, muß es zumindest eine nichtsinguläre $(s+1) \times (s+1)-$Matrix geben. Gegebenenfalls nach einer Umsortierung der Koordinaten können wir es so einrichten, daß diese Matrix die ersten $s+1$ Spalten von Σ einnimmt und insbesondere an der Stelle $(0,0)$ die einzige nicht verschwindende Komponente des oben gewählten x^0 steht. Wenn wir anschließend mit der umsortierten Matrix einen vollständigen Gauß'schen Algorithmus durchführen, so hat das Resultat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \xi^1_{s+1} & \cdots & \xi^1_n \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \xi^2_{s+1} & \cdots & \xi^2_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \xi^s_{s+1} & \cdots & \xi^s_n \end{pmatrix}$$

und die Graßmannkoordinaten, die zu dem durch die Zeilen dieser Matrix gespannten Vektorraum gehören sind die gleichen (mit eventueller Umsortierung) wie die vor der Gaußtransformation. Der Vorteil, den die neue Matrix hat, liegt auf der Hand: einerseits sind die Determinanten im Wesentlichen um eine Dimension geschrumpft und auf der anderen Seite tritt jedes ξ^i_j einmal als Determinante auf. Um das zu sehen bilde man nur die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \xi^1_j & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi^2_j & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 1 & \xi^{i-1}_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & \xi^i_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & \xi^{i+1}_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & 0 & \xi^s_j & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Das bedeutet, daß alle anderen Determinanten polynomiale Funktionen der ξ^i_j sind, das heiffiafflt also, daffia ffldie wesentliche Information über den entsprechenden Punkt in $G(s,n)$ in den ξ^i_j liegt. Wir bemerken, daß Kraft der Normierung der ersten $s+1$ Spalten zu einer Einheitsmatrix die ξ^i_j nicht mehr homogen sind. Wir können also $G(s,n)$ lokal durch einen $(n-s) \times s-$dimensionalen Vektorraum über K beschreiben, genannt die lokalen Graßmannkoordinaten.

Der Vorteil dieser Herangehensweise wird evident, wenn man untersucht, was es lokal für zwei Punkte g, h zweier verschiedener Graßmann'scher Mannigfaltigkeiten $\mathcal{G} = G(s,n), \mathcal{H} = G(r,n)$ bedeutet, ineinander zu liegen (was für die Untersuchung von Fahnenräumen von wesentlicher Bedeutung ist). Jeder der beiden Punkte g, h stellt dann einen $s-$ bzw. $r-$dimensionalen Untervektorraum des K^n dar. Mit $s \leq r$ gilt dann $g \subseteq h$ genau dann, wenn jeder der Erzeugenden von g in h liegt, also im Spann der Erzeugenden von h. Ersetzt man für g die ξ_j^i in der obigen Matrix durch γ_j^i und für h durch ${\gamma'}_j^i$, kann man wegen der Trapezform des gestrichenen Systems sofort die Gleichungen ablesen, die erfüllt sein müssen, um $g \subseteq h$ zu gewährleisten:

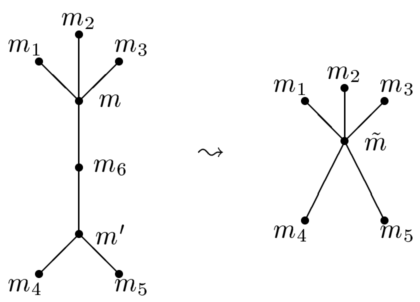
$$\begin{aligned} g^i \in h \iff & \\ f_{i,j}^{g,h} = g_j^i - h_j^i - \sum_{k=s+1}^{r} g_k^i h_j^k & = 0 \quad \text{für alle } 0 < i \leq s, r < j \leq n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Diese sind die Relationen, die uns in den folgenden Kapiteln begleiten und beschäftigen werden.

Nachdem wir nun die Basis bereitgestellt haben, die wir zur rechnerischen Behandlung der Fahnenräume benutzen wollen, bereiten wir jetzt ein Statement vor, welches angibt, unter welchen Umständen auf einem Fahnenraum eine Singularität zu erhoffen ist. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß es in M zwei Elemente $m \neq m'$ gibt mit $m \sqsubseteq m'$ und $d(m) = d(m')$. Ist dann g eine Fahne aus dem Fahnenraum zum Typ $(M, \sqsubseteq, d)$, so muß wegen obiger Relation

$$g_m \subseteq g_{m'}$$

sein. Jedoch sind dies zwei Vektorräume gleicher Dimension (wegen $d(m) = d(m')$) und also gleich. Das heißt, daffia fldie Komponenten zu den Indizes m beziehungsweise m' für alle Fahnen gleich sind. Man gewinnt hier das Gefühl, daß man, ohne den Fahnenraum zu ändern, im zu $(M, \sqsubseteq)$ gehörigen Graphen $\Gamma_{M,\sqsubseteq}$ die (eventuell mehreren) Kanten zwischen m und m' zu einem Punkt 'kontrahieren' kann in folgendem Sinne:



(wegen der Ordnungstreue von d folgt aus $d(m') = d(m)$ auch $d(m) = d(m_6)$, so daß man sich den neuen Graphen als durch zweifache Kontraktion aus dem alten hervorgegangen denken kann). In der Tat sind die beiden Fahnenräume der dargestellten Graphen im wesentlichen gleich, allerdings wollen wir auf den Beweis dessen hier nicht weiter eingehen. Der interessierte Leser sei au [2] verwiesen.

Nachdem man mit dem Graphen eine endliche Zahl oben beschriebener Kontraktionen durchgeführt hat, wird es nur noch benachbarte Knoten unterschiedlicher Dimension geben. Wenn dann $\tilde{M}$ die Knotenmenge des kontrahierten Graphen, $\tilde{\sqsubseteq}$ die auf dieser Menge durch $\sqsubseteq$ induzierte Relation und $\tilde{d}$ die modifizierte (d.h. in gewissem Sinne eingeschränkte) Dimensionsfunktion bezeichnet, haben wir

$$\tilde{d} : (\tilde{M}, \tilde{\sqsubset}) \longrightarrow (\mathbb{N}, <) \ (\#)$$

Definition 1.5
Das Tripel $(\tilde{M}, \tilde{\sqsubseteq}, \tilde{d})$ heißt ein *reduzierter Typ*, sofern es ein Typ ist und Eigenschaft (#) erfüllt.

Im Folgenden werden wir uns auf die Untersuchung von Fahnenräumen reduzierten Typs beschränken, und wenn immer das Wort 'Typ' auftaucht, wird es sich auf einen reduzierten Typ beziehen.

Es bezeichne Υ die Menge der Nachbarschaftspaare $\{(x,y) : x \sqsubset y \in M, x \sqsubset z \Rightarrow y \not\sqsupset z\}$. Falls $(x,y) \in \Upsilon$ ist, werden wir schreiben $x \multimap\!\!\sqsubset y$. Sei weiter $\mathbb{Z}/s$ mit $s \in \mathbb{N}$ die Restklassengruppe $\mathbb{Z}$ modulo s und $[b,c] = \{b, b+1, \ldots, c-1, c\}$ für $b, c \in \mathbb{Z}/s$.

Definition 1.6
Sei $s \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$ und $(M, \sqsubset, d)$ ein reduzierter Typ. Die Abbildung $\zeta : \mathbb{Z}/s \to (M \backslash \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \sqsubset)$ heißt ein *Zyklus aus* $(M, \sqsubset)$, wenn für alle $i \in \mathbb{Z}/s$ entweder $\zeta(i) \multimap\!\!\sqsubset \zeta(i+1)$ oder $\zeta(i+1) \multimap\!\!\sqsubset \zeta(i)$ gilt. Ein *Maximum* (bzw. *Minimum*) von ζ heißt ein solches x aus $\mathbb{Z}/s$, für das

$$\zeta(x-1) < \zeta(x) > \zeta(x+1)$$

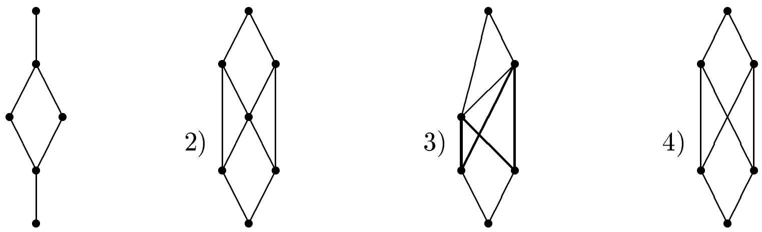
$$(\text{bzw. } \zeta(x-1) > \zeta(x) < \zeta(x+1)\ )$$

gilt. Die zugehörigen $\zeta(x)$ heißen *obere* (bzw. *untere*) *Zacken von* ζ. Ein Zyklus ζ aus $(M, \sqsubset)$ heißt *Kronenzyklus*, falls

- ζ injektiv ist,
- die Zahl der oberen Zacken von ζ mindestens gleich zwei ist,
- die auf $\mathrm{im}(\zeta)$ als transitive Hülle der Nachbarschaftsrelationen der Elemente von $\mathrm{im}(\zeta)$ erzeugte Relation $\sqsubset(\zeta)$ mit der Einschränkung $\sqsubset_{\mathrm{im}(\zeta)}$ von $\sqsubset$ auf $\mathrm{im}(\zeta)$ übereinstimmt.

Die teilweise geordnete Menge $(\mathrm{im}(\zeta), \sqsubset(\zeta) = \sqsubset_{\mathrm{im}(\zeta)})$ heißt dann eine *in* $(M, \sqsubset)$ *enthaltene Krone.*

Wir wollen uns dazu vier Beispiele ansehen:



Die Fälle 1), 2), 3) stellen keine in M enthaltenen Kronen dar, aus unterschiedlichen Gründen: 1) besitzt nur eine obere Zacke; in 2) ist jegliches mögliche ζ entweder ein Dreieck und hat mithin nur eine obere Zacke, oder aber ζ kann nicht injektiv sein; in 3) letztlich ist zwar 'eine Krone zu sehen', aber die Relation die die beiden oberen Zacken verbindet ist nicht erzeugbar durch die Nachbarschaftsrelationen des kronenähnlichen Zyklus'.

Wir sind jetzt in der Lage, den Eingangs erwähnten Satz über die Existenz von Singularitäten auf Fahnenräumen zu zitieren. Der Beweis ist zu finden in [3].

Theorem 1.7
Ein reduzierter Fahnenraum $F = F(M, \sqsubset, d)$ hat Singularitäten genau dann, wenn die zugrunde liegende teilweise Ordnung $(M, \sqsubset)$ eine Krone im obigen Sinne enthält. Ist dieses der Fall, so ist jede lineare Fahne (siehe 1.4) ein singulärer Punkt auf F. $\square$

Der Leser sei an dieser Stelle auf den außerordentlichen Umstand hingewiesen, daß in die obenstehende Aussage die Dimensionsfunktion d *nicht* explizit eingeht, also 1.7 für jedes ordnungstreue $d : (M, \sqsubset) \to (\mathbb{N}, <)$ richtig ist.

Kapitel 2

Zweikronen

In diesem Kapitel werden wir die ersten, das heißt die einfachsten, Beispiele singulärer Fahnenräume näher betrachten. Dazu sei zunächst bemerkt, daß mit der Hilfe der lokalen Graßmannkoordinaten Fahnenräume lokal eine affine Varietät werden: sie sind gerade die Menge der Punkte in einem passenden Polynomring über K, auf denen alle Relationen $f_{i,j}^{m,m'}$ verschwinden mit $m \mathrel{-\!\!\sqsubset} m' \in M$ und $0 < i \leq d(m)$ sowie $d(m') < j \leq d(\mathbf{1}) = n$ (siehe (1.1)).

Der zugehörige Quotientenring wird als *Koeffizientenring* bezeichnet, seine Struktur kann in vielen Fällen eine Aussage über die lokale Geometrie von Varietäten ermöglichen. Auch in dieser Arbeit soll im weiteren diese Strategie verfolgt werden. Insbesondere werden wir uns nur noch mit einer einzigen geordneten Struktur $(M, \sqsubset)$ befassen.

Definition 2.1
Wir bezeichnen als *Zweikrone* mit (noch zu präzisierender) Dimensionsfunktion d denjenigen Fahnenraum F, der zum Typ $(M, \sqsubset, d)$ gehört wobei $M = \{\mathbf{0}, x, y, z, w, \mathbf{1}\}$ und die Ordnung auf M durch die Nachbarschaftsrelationen

$$\mathbf{0} \mathrel{-\!\!\sqsubset} x \mathrel{-\!\!\sqsubset} z \mathrel{-\!\!\sqsubset} \mathbf{1},\ \mathbf{0} \mathrel{-\!\!\sqsubset} y \mathrel{-\!\!\sqsubset} w \mathrel{-\!\!\sqsubset} \mathbf{1},\ x \mathrel{-\!\!\sqsubset} w,\ y \mathrel{-\!\!\sqsubset} z$$

induziert ist. Wir werden weiterhin die AbkffiΔfflrzungen

$$d(x) = \xi,\ d(y) = \eta,\ d(z) = \zeta,\ d(w) = \omega$$

benutzen und es heißt $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$ der *Index* von F.

Es folgt unmittelbar aus den Relationen in M und der Treue von d, daß stets $0 < \xi, \eta < \zeta, \omega < n$ gilt, so daß wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $0 < \xi \leq \eta < \zeta \leq \omega < n$ setzen dürfen (und das auch tun).

Beispiel 2.2
Es sei $\xi = \eta = 1$, $\zeta = \omega = 2$ und $n = 3$. Es entspricht im zugehörigen Fahnenraum x und y eine Gerade und z und w eine Ebene in K^3. Die Relation $\sqsubset$ bewirkt dann, daß für jede Fahne g beide Geraden in beiden Ebenen enthalten sind. Wie man sich unmittelbar klarmacht, erzwingt dies $g_x = g_y$ oder $g_z = g_w$. Weiterhin ist offensichtlich, daß eine Fahne beide Forderungen dann und nur dann erfüllt sind, wenn es sich um eine lineare Fahne handelt.

Nach 1.7 ist also g ein singulärer Punkt, falls beide Geraden und beide Ebenen zusammenfallen. Und das ist auch nicht überraschend, da hier die Menge der linearen Fahnen gerade der Schnitt zweier Varietäten ist deren Vereinigung F ausmacht. Diese Versicherung werden wir jetzt nachprüfen.

Wir statten $G^x(1,3), \ldots,\ G^w(2,3)$ mit lokalen Graßmannkoordinaten aus:

$$x \rightsquigarrow (1, x_2^1, x_3^1),\ \ y \rightsquigarrow (1, y_2^1, y_3^1),$$

$$z \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_3^1 \\ 0 & 1 & z_3^2 \end{pmatrix},\ w \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_3^1 \\ 0 & 1 & w_3^2 \end{pmatrix}.$$

Es existieren nun Relationen wie in (1.1) nur für solche i, j, die $0 < i \leq \eta$ und $\zeta < j \leq n$ erfüllen und das heißt also, für $i = 1, j = 3$. Sie haben die Gestalt

$$\begin{aligned}
f_{1,3}^{x,z} &= x_3^1 - z_3^1 - \sum_{k=2}^{2} x_k^1 z_3^k &&= x_3^1 - z_3^1 - x_2^1 z_3^2, \\
f_{1,3}^{x,w} &= x_3^1 - w_3^1 - \sum_{k=2}^{2} x_k^1 w_3^k &&= x_3^1 - w_3^1 - x_2^1 w_3^2, \\
f_{1,3}^{y,z} &= y_3^1 - z_3^1 - \sum_{k=2}^{2} y_k^1 z_3^k &&= y_3^1 - z_3^1 - y_2^1 z_3^2, \\
f_{1,3}^{y,w} &= y_3^1 - w_3^1 - \sum_{k=2}^{2} y_k^1 w_3^k &&= y_3^1 - w_3^1 - y_2^1 w_3^2.
\end{aligned}$$

Wir werden jetzt versuchen, über das Ideal $I = (f_{1,3}^{x,z}, f_{1,3}^{x,w}, f_{1,3}^{y,z}, f_{1,3}^{y,w})$ in $K[x_2^1, \ldots, z_3^2]$ nähere Informationen zu bekommen. Es wird sich dazu das folgende Ergebnis als nützlich erweisen.

Lemma 2.3
Sei K ein Körper, $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte ffiΔfflber K und es bezeichne $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ den Polynomring in diesen Unbestimmten. Es bezeichne weiter $\mathfrak{m}$ das durch $x_1, \ldots, x_n$ generierte Ideal in R. Wenn dann n Polynome $f_1, \ldots, f_n$ in $\mathfrak{m}$ gegeben sind, so daß jede der Unbestimmten als Polynom in den f_i dargestellt werden kann:

$$x_i = p_i(f_1, \ldots, f_n) \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n,$$

dann ist der Homomorphismus $\phi : R \to R$, unter dem jedes x_i in f_i übergeht, ein Ringisomorphismus.

Beweis.
Zunächst ist klar, wie der Homomorphismus gemeint ist: für ein Monom $\mu = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ mit natürlichen α_i ist $\phi(\mu)$ definiert als

$$f_1^{\alpha_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot \ldots \cdot f_n^{\alpha_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

und Summen von Monomen wird die Summe der entsprechenden Bilder zugeordnet. Es ist dann offensichtlich, daß alle Einheiten in R auf sich abgebildet werden. Weiterhin ist jedes Polynom, das in $\mathfrak{m}$ liegt, im Bild von ϕ, weil die f_i $\mathfrak{m}$ 'aus sich selbst' erzeugen: da $p_i(f_1, \ldots, f_n) = x_i$ ist, folgt für jedes $h \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n) &= h(p_1(f_1, \ldots, f_n), \ldots, p_n(f_1, \ldots, f_n)) \\ &= h(p_1(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)), \ldots, p_n(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))) \\ &= \phi(h(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_n))) \\ &\in \mathrm{im}(\phi) \end{aligned}$$

nach Definition von ϕ. Daraus folgt sofort, daß ϕ surjektiv ist, da jedes Polynom Summe eines Elementes von K (gegebenenfalls der 0) und eines Polynoms in $\mathfrak{m}$ ist, und wir wissen von beiden Mengen, daß sie in dem Bild von ϕ enthalten sind.

Nun ist aber R als endliche K-Algebra Noethersch und in diesem Falle folgt aus der Surjektivität die Injektivität, wie nun gezeigt wird.

Es ist

$$\ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^2) \subseteq \ldots \subseteq \ker(\phi^i) \subseteq \ldots \quad ,$$

und all diese Moduln sind Ideale in R. Demzufolge weist diese aufstrebende Folge ein größtes Element auf, d.h. es existiert ein i_0, so daß gilt

$$\ker(\phi^{i_0}) = \ker(\phi^i) \quad \text{für alle } i_0 \leq i \in \mathbb{N}.$$

Sei nun κ ein Element von $\ker(\phi^{i_0})$. Wegen der Surjektivität von ϕ gibt es dann ein Element $\lambda \in R$ mit $\phi^{i_0}(\lambda) = \kappa$, also $\lambda \in \ker(\phi^{2 \cdot i_0})$. Aber $\ker(\phi^{2 \cdot i_0}) = \ker(\phi^{i_0})$ und somit ist $\kappa = \phi^{i_0}(\lambda) = 0$. $\ker(\phi) \subseteq \ker(\phi^{i_0})$ ist also gleich 0. $\square$

Wir werden jetzt dieses Resultat auf Beispiel 2.2 anwenden. Dazu sei

$$\phi : K[x_2^1, x_3^1, y_2^1, y_3^1, z_3^1, z_3^2, w_3^1, w_3^2] \to K[x_2^1, x_3^1, y_2^1, y_3^1, z_3^1, z_3^2, w_3^1, w_3^2]$$

definiert wie folgt.

- $x_2^1, y_2^1, x_3^1, z_3^2, w_3^2$ werden auf sich abgebildet;
- $\phi(z_3^1) = f_{1,3}^{x,z}$;
- $\phi(w_3^1) = f_{1,3}^{x,w}$;

- $\phi(y_3^1) = f_{1,3}^{y,z}$.

Es muß nun geprüft werden, ob die gewählte Abbildung ϕ auch die im Lemma vorausgesetzten Forderungen erfüllt. Das heißt, ob alle Unbestimmten durch polynomiale Funktionen in den Bildern eben dieser Unbestimmten darstellbar sind. Das ist klar für die auf sich abgebildeten Variablen. Außerdem gilt

- $z_3^1 = -\phi(-x_3^1 + z_3^1 + x_2^1 z_3^2)$,
- $y_3^1 = \phi(y_3^1 + x_3^1 - z_3^1 - x_2^1 z_3^2 + y_2^1 z_3^2)$,
- $w_3^1 = -\phi(-x_3^1 + w_3^1 + x_2^1 w_3^2)$,

so daß ϕ surjektiv ist. ϕ vermittelt demzufolge einen Ringautomorphismus im Sinne von Lemma 2.3.

Bezeichnet man mit $V(I)$ bzw. $V(\phi^{-1}(I))$ die durch I und $\phi^{-1}(I)$ definierten VarietffiΞfflten, so induziert ϕ auch einen Isomorphismus zwischen diesen beiden. Die Ursache ist die Tatsache, daffia fflϕ und ϕ^{-1} nicht nur rational sondern sogar polynomial sind, mithin auf dem gesamten affinen Raum definiert sind.

Demzufolge können wir an Stelle des Ideales I auch sein Urbild $\phi^{-1}(I)$ und die hierdurch definierte VarietffiΞffllt betrachten. Welche Form hat nun dieses Ideal? Seine Erzeuger sind die Bilder der Erzeuger von I unter ϕ^{-1}. Und diese sind z_3^1, y_3^1, w_3^1 und das Bild von $f_{1,3}^{y,z}$. Nun ist

$$f_{1,3}^{y,z} = f_{1,3}^{y,w} - f_{1,3}^{x,w} + f_{1,3}^{x,z} + (x_2^1 - y_2^1)(z_3^2 - w_3^2),$$

so daß

$$\phi^{-1}(I) = (x_3^1, y_3^1, w_3^1, (x_2^1 - y_2^1)(z_3^2 - w_3^2)).$$

Es folgt nun sofort, daß $R/\phi^{-1}(I) \cong K[u_1, \ldots, u_5]/((u_1 - u_2)(u_3 - u_4))$. Wir zeigen in 4.1, daffia ffldieser Quotient dann auch isomorph zu R/I ist. Das geometrische Gebilde, welches zu dieser algebraischen Konstellation korrespondiert ist die Vereinigung von zwei Hyperebenen deren Schnittachse durch den Nullpunkt geht. Das Ergebnis (obwohl nur lokal korrekt) zeigt, daß der Nullpunkt singulär sein muß, genau wie die anderen Punkte der Schnittlinie.

Die Punkte des Schnittes der beiden Hyperebenen werden nun beschrieben durch $x_2^1 = y_2^1, z_3^2 = w_3^2$, und da die beteiligten vier Variablen unter ϕ auf sich abgebildet werden, wird die eigentliche Schnittmenge, also die Menge der singulären Punkte, durch das System

$$f_{1,3}^{x,z} = f_{1,3}^{x,w} = f_{1,3}^{y,z} = f_{1,3}^{y,w} = x_2^1 - y_2^1 = z_3^2 - w_3^2 = 0$$

in $K[x_2^1, x_3^1, y_2^1, y_3^1, z_3^1, z_3^2, w_3^1, w_3^2]$ beschrieben, weil ϕ einen Isomorphismus zwischen den VarietffiΞfflten darstellt. Aber nun folgt aus $f_{1,3}^{x,z} = f_{1,3}^{x,w} = 0$ zusammen mit $x_2^1 = y_2^1$ und $z_3^2 = w_3^2$, daß

$$\begin{aligned} f_{1,3}^{x,z} - f_{1,3}^{x,w} &= x_3^1 - z_3^1 - x_2^1 z_3^2 - (x_3^1 - w_3^1 - x_2^1 w_3^2) \\ &= x_3^1 - z_3^1 - (x_3^1 - w_3^1) \\ &= w_3^1 - z_3^1 = 0 \end{aligned}$$

ist, so daß $z_3^1 = w_3^1$. Auf ähnliche Weise ergibt sich auch noch $x_3^1 = y_3^1$. Das bedeutet aber nichts anderes als die Tatsache, daß es sich hier um lineare Fahnen handelt: alle Erzeuger gleichdimensionaler Vektorräume sind gleich, so daß die Ordnung bezüglich des Enthaltenseins eine lineare ist. Es sind also nicht nur alle linearen Fahnen singuläre Punkte von F sondern auch alle singulären Punkte lineare Fahnen.

Wir fahren mit einem anderen Beispiel fort und fffiΔfflhren anschlieffiafflend weitere Terminologie ein.

Beispiel 2.4

Da alle Zweikronen-Fahnenräume zu $n = 3$ schon durch das letzte Beispiel abgehandelt wurden, sei nun $n = 4$ und wir betrachten die Zweikrone vom Index $(1,1,3,3,4)$. Erneut ordnen wir lokale Graßmannkoordinaten zu

$$x \rightsquigarrow (1, x_2^1, x_3^1, x_4^1), \; y \rightsquigarrow (1, y_2^1, y_3^1, y_4^1),$$

$$z \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & z_4^1 \\ 0 & 1 & 0 & z_4^2 \\ 0 & 0 & 1 & z_4^3 \end{pmatrix}, \; w \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w_4^1 \\ 0 & 1 & 0 & w_4^2 \\ 0 & 0 & 1 & w_4^3 \end{pmatrix},$$

so daß die durch $x, y -\!\sqsubset z, w$ induzierten Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
f_{1,4}^{x,z} &= x_4^1 - z_4^1 - \sum_{k=2}^{3} x_k^1 z_4^k &&= x_4^1 - z_4^1 - x_2^1 z_4^2 - x_3^1 z_4^3, \\
f_{1,4}^{x,w} &= x_4^1 - w_4^1 - \sum_{k=2}^{3} x_k^1 w_4^k &&= x_4^1 - w_4^1 - x_2^1 w_4^2 - x_3^1 w_4^3, \\
f_{1,4}^{y,z} &= y_4^1 - z_4^1 - \sum_{k=2}^{3} y_k^1 z_4^k &&= y_4^1 - z_4^1 - y_2^1 z_4^2 - y_3^1 z_4^3, \\
f_{1,4}^{y,w} &= y_4^1 - w_4^1 - \sum_{k=2}^{3} y_k^1 w_4^k &&= y_4^1 - w_4^1 - y_2^1 w_4^2 - y_3^1 w_4^3.
\end{aligned}$$

Sei $I = (f_{1,4}^{x,z}, f_{1,4}^{x,w}, f_{1,4}^{y,z}, f_{1,4}^{y,w})$. Man sieht sofort, daß dieses Beispiel dem vorigen sehr ähnlich ist, und das weitere Vorgehen wird entsprechend sein. Dieses Mal sei

$$\phi : R := K[x_2^1, x_3^1, x_4^1, y_2^1, y_3^1, y_4^1, z_4^1, z_4^2, z_4^3, w_4^1, w_4^2, w_4^3] \to R$$

definiert durch

- $\phi(z_4^1) = f_{1,4}^{x,z}$,
- $\phi(y_4^1) = f_{1,4}^{y,z}$,
- $\phi(w_4^1) = f_{1,4}^{x,w}$,

- alle anderen Unbestimmten werden auf sich abgebildet.

Wir prüfen nun, ob alle Unbestimmten als Polynome in den Bildern der Unbestimmten dargestellt werden können. Es ist

- $z_4^1 = -\phi(z_4^1 - x_4^1 + x_3^1 z_4^3 + x_2^1 z_4^2)$,
- $y_4^1 = \phi(y_4^1 + y_3^1 z_4^3 + y_2^1 z_4^2) + z_4^1$ und z_4^1 wurde eben als darstellbar ermittelt,
- $w_4^1 = -\phi(w_4^1 - x_4^1 + x_3^1 w_4^3 + x_2^1 w_4^2)$

und die anderen Unbestimmten sind trivialerweise Polynome. Also ist ϕ surjektiv und nach 2.3 ein Automorphismus von R. Weiter ist

$$\phi^{-1}(I) = (z_4^1, y_4^1, w_4^1, (x_3^1 - y_3^1)(z_4^3 - w_4^3) + (x_2^1 - y_2^1)(z_4^2 - w_4^2)).$$

Wiederum ist I also durch eine R-normale Sequenz erzeugt, deren erste Glieder sogar im wesentlichen (wir betrachten ja $\phi^{-1}(I)$) Unbestimmte sind.

Im weiteren soll nun das nächste Kapitel vorbereitet werden, das im wesentlichen der Erstellung eines Automorphismus des Polynomringes gewidmet ist, der zu einem allgemeinen Zweikronen-Fahnenraum gehört. (Allgemeine Zweikrone bedeutet: $M = \{x, y, z, w\}, x, y \multimap z, w$, aber die spezielle Wahl von d ist noch offen.) Die dargestellte Abbildung ϕ wird eine Verallgemeinerung der Automorphismen der Beispiele 2.2 und 2.4 sein.

Definition 2.5
Ist F eine Zweikrone und ϕ ein Automorphismus des zu F gehörigen Polynomringes der die Voraussetzungen von 2.3 erfüllt, so sei die Menge

$$\left\{\phi(\alpha_j^i) : \alpha \in \{x, y, z, w\},\ 0 < i \le d(\alpha) < j \le n\right\}$$

als *Menge direkter Bilder unter* ϕ bezeichnet.

Es ist eine Tatsache, daß es für die einen Fahnenraum beschreibenden Ideale von ihrer Natur her wesentlich verschiedene Erzeuger gibt. Die eine Klasse, aus der wir noch keinem Element begegnet sind, bereitet keine Schwierigkeiten und ihre Elemente können ohne Bedenken als Bilder für Unbestimmte unter einem Automorphismus im Sinne von 2.3 benutzt werden. Dann aber gibt es eine Klasse von Relationen, deren Elemente in Gruppen zu je vieren sinnvoll zusammenfaßbar sind, wo Vorsicht geboten ist. In beiden vorangegangenen Beispielen durften wir je drei der vier vorhandenen Erzeuger als direkte Bilder nehmen, jedoch nicht alle vier. Der Grund war, daß die Wechselsumme $f_{i,j}^{x,z} - f_{i,j}^{y,z} + f_{i,j}^{y,w} - f_{i,j}^{x,w}$ ein Polynom zweiten Grades ergibt, und wie man sich sofort klarmacht, kann ein solches Polynom als Element des Quadrates vom maximalen Ideal $(x_1^1, \ldots, w_n^\omega)$ nicht das Bild eines linearen Polynoms unter einem Automorphismus sein. Nun kann eine solche Konstellation stets nur dann auftreten, wenn es auch 'genug' Relationen gibt, deren lineare Glieder sich auslöschen können: würde eine der vier Relationen zum gleichen Paar (i, j) (oder mehr) fehlen, könnte wieder jede Relation (nun weniger als vier von vornherein) als direktes Bild dienen. Da diese Viererblöcke von Relationen eine besondere Rolle zu spielen scheinen, geben wir ihnen einen Namen.

Definition 2.6
FfiΔfflr eine Zweikrone F vom Index $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$ bezeichnen wir die Menge

$$\{1, \ldots, \omega\} \times \{1, \ldots, n\} = \{(i, j) : 1 \le i \le \omega, 1 \le j \le n\}$$

mit $\mathfrak{J}$. Sei $(i, j) \in \mathfrak{J}, \alpha \in \{x, y\}$ und $\beta \in \{z, w\}$. Falls dann

$$i \le d(\alpha) \quad \text{und} \quad d(\beta) < j$$

ist, heißt die Relation

$$f_{i,j}^{\alpha,\beta} = \alpha_j^i - \beta_j^i - \sum_{k=d(\beta)+1}^{d(\alpha)} \alpha_k^i \beta_j^k = 0$$

assoziiert zu (i, j). Ist das nicht der Fall, sei dieser Umstand durch die Phrase $f_{i,j}^{\alpha,\beta}$ *existiert nicht* zum Ausdruck gebracht.

Wenn also zum Beispiel die Zweikrone zum Index $(1, 2, 3, 4, 5)$ betrachtet wird, gibt es zu $(2, 4)$ nur die assoziierte Relation $f_{2,4}^{y,z}$, wohingegen $f_{2,4}^{x,z}$, $f_{2,4}^{y,w}$ und $f_{2,4}^{x,w}$ aus unterschiedlichen Gründen nicht existieren.

Mit der vorangegangenen Definition ist es sinnvoll, die Indexmatrix $\mathfrak{J}$ in gewisse Untermatrizen zu zerlegen, die einheitliche Mengen assoziierter Relationen aufweisen. Das geschieht wie folgt. Es sei

- $\mathfrak{E} = \{(i, j) : 0 < i \le \xi < j \le \eta\}$,
- $\mathfrak{F} = \{(i, j) : 0 < i \le \xi;\ \eta < j \le \zeta\}$,
- $\mathfrak{A} = \{(i, j) : 0 < i \le \xi;\ \zeta < j \le \omega\}$,
- $\mathfrak{C} = \{(i, j) : 0 < i \le \xi;\ \omega < j \le n\}$,
- $\mathfrak{G} = \{(i, j) : \xi < i \le \eta;\ \eta < j \le \zeta\}$,
- $\mathfrak{B} = \{(i, j) : \xi < i \le \eta;\ \zeta < j \le \omega\}$,
- $\mathfrak{D} = \{(i, j) : \xi < i \le \eta;\ \omega < j \le n\}$,

- $\mathfrak{H} = \{(i,j) : \eta < i \leq \zeta;\ \zeta < j \leq \omega\}$,
- $\mathfrak{M} = \{(i,j) : \eta < i \leq \zeta;\ \omega < j \leq n\}$,
- $\mathfrak{N} = \{(i,j) : \zeta < i \leq \omega;\ \omega < j \leq n\}$.

Zur Visualisierung betrachtet man die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{A} & \mathfrak{C} \\ \hline
0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & \mathfrak{G} & \mathfrak{B} & \mathfrak{D} \\ \hline
0 & 0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & \mathfrak{H} & \mathfrak{M} \\ \hline
0 & 0 & 0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & \mathfrak{N}
\end{array}\right)$$

der Breite n und der Höhe ω und identifiziert Elemente der oben definierten Matrizen mit den beschreibenden Indexpaaren (i,j).

Bemerkung 2.7
Es stehen dann z.B. die Elemente der Matrizen $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ in unmittelbarer Beziehung zu x: die Elemente sind gerade ihre eigenen Indizes und so gibt es zu jedem Matrixelement dieser vier Matrizen eine Graßmannkoordinate von $G^x(\xi, n)$. Entsprechend korrespondieren $\mathfrak{F}, \mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}$ mit y; $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}, \mathfrak{H}, \mathfrak{M}$ mit z und $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ mit w. Es sei die Sprechweise eingeführt, daß *die Variable* α^i_j *in* Ξ *existiert* für $\Xi \in \{\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{N}\}$ und $\alpha \in \{x, y, z, w\}$, falls es ein Indexpaar $(i,j) \in \Xi$ gibt, so daß $i \leq d(\alpha) < j$ ist. (Dank der geeigneten Wahl der Teilmatrizen zieht die Existenz einer einzigen Variable mit Indexpaar in Ξ die Existenz aller Variablen in Ξ nach sich.)

Es ist also $\mathfrak{C}$ die einzige Teilmatrix Ξ von $\mathfrak{J}$, für die aus $(i,j) \in \Xi$ folgt, daß alle vier beteiligten Graßmann'schen $G^\alpha(d(\alpha), n)$ eine Koordinate α^i_j besitzen. Das hat zur Folge, daß nur für solche (i,j) alle vier möglichen Relationen $f^{x,z}_{i,j}, f^{y,z}_{i,j}, f^{y,w}_{i,j}, f^{x,w}_{i,j}$ existieren.

Ebenso ist klar, daß es überhaupt keine Relationen gibt, die zu Elementen aus $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{H}, \mathfrak{N}$ assoziiert sind, da es zu einer Relation stets zweier verschiedener Graßmannkoordinaten mit gleichem Indexpaar bedarf und die erwähnten Matrizen nur jeweils eine zulassen. Auch für $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{M}$ ist das der Fall. Für die erstere

Matrix haben nur $G^x(\xi, n)$ und $G^y(\eta, n)$ assoziierte Koordinaten, wohingegen zu einer Relation assoziiert zu (i, j) entweder z_j^i oder w_j^i nötig wäre. Entprechend fehlt es an x_j^i, y_j^i für Relationen in $\mathfrak{M}$. Das von uns zu untersuchende Ideal I ist also von Relationen erzeugt, die zu Elementen von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{D}$ assoziiert sind.

Kapitel 3

Ein Automorphismus

Wie der Titel schon verheißt, ist dieses Kapitel vollständig der Etablierung eines (Ring-)Automorphismus ϕ gewidmet, der den zu einer Zweikrone F gehörigen Polynomring auf sich abbildet, so daß das F definierende Ideal I eine einfachere Struktur annimmt. Man kann die unten definierte Abbildung ϕ als direkte Verallgemeinerung der in 2.2 und 2.4 verwendeten Automorphismen betrachten.

Satz 3.1
Es sei F eine Zweikrone vom Typ $\tau = (M, <, d)$ mit Index $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$ über dem Körper K. Die zu $G^x(\xi, n), \ldots, G^w(\omega, n)$ gehörigen lokalen Graßmannkoordinaten seien gegeben durch

$$x \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 & x^1_{\xi+1} & \cdots & x^1_n \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & x^\xi_{\xi+1} & \cdots & x^\xi_n \end{pmatrix}, y \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 & y^1_{\eta+1} & \cdots & y^1_n \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & y^\eta_{\eta+1} & \cdots & y^\eta_n \end{pmatrix},$$

$$z \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 & z^1_{\zeta+1} & \cdots & z^1_n \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & z^\zeta_{\zeta+1} & \cdots & z^\zeta_n \end{pmatrix}, w \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & 0 & w^1_{\omega+1} & \cdots & w^1_n \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & w^\omega_{\omega+1} & \cdots & w^\omega_n \end{pmatrix}.$$

Sei weiter $R = K[x^1_{\xi+1}, \ldots, w^\omega_n]$ der Polynomring ﬃΔﬄber K in diesen Unbestimmten. Dann ist die wie folgt definierte Abbildung ϕ ein die Voraussetzungen von Lemma 2.3 erfüllender Ringhomomorphismus ($\alpha \in \{x, y, z, w\}$):

- $\phi(\alpha^i_j) = \alpha^i_j$, falls $i > \eta$ oder $j \leq \xi$;
- $\phi(x^i_j) = x^i_j$, $\phi(y^i_j) = f^{y,z}_{i,j}$, $\phi(z^i_j) = f^{x,z}_{i,j}$, falls $(i,j) \in \mathfrak{A}$;
- $\phi(y^i_j) = y^i_j$, $\phi(z^i_j) = f^{y,z}_{i,j}$, falls $(i,j) \in \mathfrak{B}$;
- $\phi(x^i_j) = x^i_j$, $\phi(y^i_j) = f^{y,z}_{i,j}$, $\phi(z^i_j) = f^{x,z}_{i,j}$ $\phi(w^i_j) = f^{x,w}_{i,j}$, falls $(i,j) \in \mathfrak{C}$;
- $\phi(y^i_j) = y^i_j$, $\phi(z^i_j) = f^{y,z}_{i,j}$, $\phi(w^i_j) = f^{y,w}_{i,j}$, falls $(i,j) \in \mathfrak{D}$.

Beweis.
Daß ϕ ein Homomorphismus ist bedarf keiner Erläuterung, also ist nur der Beweis des ersten Teils der Behauptung notwendig. Um die Voraussetzungen des Lemmas 2.3 zu erfüllen, muß gezeigt werden, daß sich alle Unbestimmten $x^1_{\xi+1}, \ldots, w^\omega_n$ als Polynome von Bildern eben dieser Unbestimmten darstellen lassen. Dieses ist trivial für alle α^i_j, deren Indexpaar (i,j) in $\mathfrak{J}\backslash(\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}\cup\mathfrak{D})$ liegt und ebenso für alle x^i_j mit beliebigen (i,j), da all diese Unbestimmten auf sich abgebildet werden unter ϕ. Es bleiben also die von x^i_j verschiedenen Unbestimmten zu untersuchen, die zu $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{D}$ assoziiert sind.

- $(i,j)\in\mathfrak{B}$: Da x^i_j und w^i_j nicht existieren und die y^i_j auf sich abgebildet werden, braucht nur z^i_j untersucht zu werden. Es gilt

$$z^i_j = -\left[\phi(z^i_j) - \phi(y^i_j) + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^i_l z^l_j\right],$$

und wir haben $(i,l)\in\mathfrak{G}, (l,j)\in\mathfrak{H}$, so daß

$$z^i_j = -\left[\phi(z^i_j) - \phi(y^i_j) + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \phi(y^i_l)\phi(z^l_j)\right]$$

ist.

- $(i,j)\in\mathfrak{A}$: Hier sind y^i_j und z^i_j zu erzeugen. Es gilt

$$\begin{aligned} y^i_j &= f^{y,z}_{i,j} - f^{x,z}_{i,j} + x^i_j + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^i_l z^l_j - \sum_{k=\xi+1}^{\zeta} x^i_k z^k_j \\ &= \phi(y^i_j) - \phi(z^i_j) + \phi(x^i_j) + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^i_l z^l_j - \sum_{k=\xi+1}^{\zeta} x^i_k z^k_j. \end{aligned}$$

Nun ist $(i,l)\in\mathfrak{F}, (i,k)\in\mathfrak{C}\cup\mathfrak{F}, (k,j)\in\mathfrak{B}\cup\mathfrak{H}$ und $(l,j)\in\mathfrak{H}$. Es folgt aus der Definition von ϕ und dem oben für den Fall $(i,j)\in\mathfrak{B}$ gezeigten, daß

$$\begin{aligned} y^i_j &= \phi(y^i_j - z^i_j + x^i_j) + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \left(\phi(y^i_l) - \phi(x^i_l)\right)\phi(z^l_j) \\ &+ \sum_{k=\zeta+1}^{\eta} \phi(x^i_k)\ \phi\left(z^k_j - y^k_j + \sum_{m=\eta+1}^{\zeta} y^k_m z^m_j\right). \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise stellt man die z^i_j dar:

$$\begin{aligned} z^i_j &= -\left[x^i_j - z^i_j - \sum_{k=\xi+1}^{\zeta} x^i_k z^k_j\right] + x^i_j - \sum_{k=\xi+1}^{\zeta} x^i_k z^k_j \\ &= \phi(-z^i_j + x^i_j) - \sum_{k=\xi+1}^{\eta} \phi(x^i_k) z^k_j - \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \phi(x^i_l) z^l_j, \end{aligned}$$

und sowohl für $(k,j)\,(\in \mathfrak{B})$ als auch für $(l,j)\,(\in \mathfrak{H})$ wurde schon gezeigt, daß z^l_j beziehungsweise z^k_j erzeugbar ist.

- $(i,j) \in \mathfrak{D}$: Es ist hier $y^i_j = \phi(y^i_j)$ nach Definition von ϕ. Weiter gilt

$$\begin{aligned} z^i_j &= -\left[y^i_j - z^i_j - \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} y^i_k z^k_j\right] + y^i_j - \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} y^i_k z^k_j \\ &= -\phi(z^i_j) + \phi(y^i_j) - \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} y^i_k z^k_j \end{aligned}$$

und da $(i,k) \in \mathfrak{G}$ und $(k,j) \in \mathfrak{M}$ ist,

$$z^i_j = -\phi(z^i_j) + \phi(y^i_j) - \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} \phi(y^i_k)\phi(z^k_j).$$

Es bleibt also die Untersuchung der w^i_j:

$$\begin{aligned} w^i_j &= -\left[y^i_j - w^i_j - \sum_{k=\eta+1}^{\omega} y^i_k w^k_j\right] + y^i_j - \sum_{k=\eta+1}^{\omega} y^i_k w^k_j \\ &= -\phi(w^i_j) + \phi(y^i_j) - \sum_{k=\eta+1}^{\omega} \phi(y^i_k)\phi(w^k_j), \end{aligned}$$

weil $(i,k) \in \mathfrak{G} \cup \mathfrak{B}$ und $(k,j) \in \mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ ist.

- $(i,j) \in \mathfrak{C}$: Zunächst ist

$$\begin{aligned} z^i_j &= -\left[x^i_j - z^i_j - \sum_{k=\xi+1}^{\zeta} x^i_k z^k_j\right] + x^i_j - \sum_{k=\xi+1}^{\zeta} x^i_k z^k_j \\ &= -\phi(z^i_j) + \phi(x^i_j) - \sum_{k=\xi+1}^{\zeta} \phi(x^i_k) z^k_j. \end{aligned}$$

Da aber $(k,j) \in \mathfrak{D} \cup \mathfrak{M}$ ist, und das zugehörige z_j^k nach oben gezeigtem erzeugbar sind, ist es auch z_j^i. Ebenso ist

$$\begin{aligned} y_j^i &= \left[y_j^i - z_j^i - \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y_l^i z_j^l \right] + z_j^i + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y_l^i z_j^l \\ &= \phi(y_j^i) + z_j^i + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \phi(y_l^i)\phi(z_j^l), \end{aligned}$$

denn $(i,l) \in \mathfrak{F}$ und $(l,j) \in \mathfrak{M}$. Da z_j^i schon als erzeugbar dargestellt worden ist, folgt, daß auch y_j^i erzeugbar ist. Letztlich ist

$$\begin{aligned} w_j^i &= -\left[x_j^i - w_j^i - \sum_{k=\xi+1}^{\omega} x_k^i w_j^k \right] + x_j^i - \sum_{k=\xi+1}^{\omega} x_k^i w_j^k \\ &= -\phi(w_j^i) + \phi(x_j^i) - \sum_{k=\xi+1}^{\omega} \phi(x_k^i) w_j^k . \end{aligned}$$

Weil aber $(l,j) \in \mathfrak{D} \cup \mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ gilt, ist in jedem Fall schon die Erzeugbarkeit von w_j^l gezeigt worden. Das beweist die Erzeugbarkeit von w_j^i.

Konsequenterweise ist ϕ surjektiv und nach Lemma 2.3 ein Ringautomorphismus von R auf sich. $\square$

Bemerkung 3.2
Auch in Satz 3.1 vermittelt ϕ als polynomiale Abbildung mit polynomialer Inverser fffiΔfflr jedes Ideal $I \subseteq R$ einen Isomorphismus zwischen den VarietffiΞfflten $V(I)$ und $V(\phi^{-1}(I))$.

Um nun, in Analogie zu 2.2 und 2.4, aus dem oben angegebenen Ringautomorphismus einen die weitere Betrachtung vereinfachenden Nutzen ziehen zu können, müssen wir jetzt die Urbilder der Erzeuger des Fahnenraumideales I berechnen. Wie zuvor ist das bei recht vielen der Erzeuger sehr einfach, da sie unter ϕ als direkte Bilder auftreten. Das gilt für alle $f_{i,j}^{\alpha,\beta}$ mit $\alpha, \beta \in \{x,y,w,z\}, (i,j) \in \mathfrak{J}$ mit Ausnahme der $f_{i,j}^{y,w}$, die zu $\mathfrak{C}$ assoziiert sind, wie man sofort erkennt:

in $\mathfrak{A}$: $\quad f^{x,z}_{i,j} = \phi(z^i_j),\quad f^{x,w}_{i,j} = \phi(w^i_j);$ $\qquad$ in $\mathfrak{B}$: $\quad f^{y,z}_{i,j} = \phi(z^i_j);$

in $\mathfrak{C}$: $\quad f^{x,z}_{i,j} = \phi(z^i_j),\quad f^{x,w}_{i,j} = \phi(w^i_j),\quad f^{y,z}_{i,j} = \phi(y^i_j;$ $\qquad$ in $\mathfrak{D}$: $\quad f^{y,z}_{i,j} = \phi(z^i_j),\quad f^{y,w}_{i,j} = \phi(w^i_j).$

Es verbleibt somit die Aufgabe, $f^{y,w}_{i,j}$ als Ausdruck direkter Bilder darzustellen. Dazu sei zunächst bemerkt, daß

$$\begin{aligned} f^{y,w}_{i,j} &= f^{y,z}_{i,j} - f^{x,z}_{i,j} + f^{x,w}_{i,j} \\ &\quad - \sum_{k=\eta+1}^{\omega} y^i_k w^k_j + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^i_l z^l_j - \sum_{r=\xi+1}^{\zeta} x^i_r z^r_j + \sum_{s=\xi+1}^{\omega} x^i_s w^s_j \\ &= f^{y,z}_{i,j} - f^{x,z}_{i,j} + f^{x,w}_{i,j} + \sum_{k=\xi+1}^{\eta} x^i_k \left(w^k_j - z^k_j\right) \\ &\quad + \sum_{k=\zeta+1}^{\omega} \left(x^i_k - y^i_k\right) w^k_j + \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} \left(y^i_k - x^i_k\right)\left(z^k_j - w^k_j\right) \end{aligned}$$

ist. Wir werden die drei Summanden in Summenform einzeln untersuchen.

1. Summand: Da $0 < i \leq \xi$ und $\xi < k \leq \eta$ ist, folgt $(i,k) \in \mathfrak{E}$, so daß x^i_k direktes Bild ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} w^k_j - z^k_j &= f^{y,z}_{k,j} - f^{y,w}_{k,j} + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^k_l z^l_j - \sum_{r=\eta+1}^{\omega} y^k_r w^r_j \\ &= f^{y,z}_{k,j} - f^{y,w}_{k,j} + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^k_l \left(z^l_j - w^l_j\right) - \sum_{r=\zeta+1}^{\omega} y^k_r w^r_j . \end{aligned}$$

Nun ist $(k,j) \in \mathfrak{D}, (k,l) \in \mathfrak{G}, (l,j) \in \mathfrak{M}, (k,r) \in \mathfrak{B}$ und $(r,j) \in \mathfrak{N}$. Es folgt, daß $y^k_l, z^l_j, w^l_j, y^k_r$ und w^r_j auf sich abgebildet werden und somit wie $f^{y,z}_{k,j}$ und $f^{y,w}_{k,j}$ direkte Bilder sind. Also ist (†) die gesuchte Darstellung des ersten Summanden:

$$\sum_{k=\xi+1}^{\eta} x^i_k \left(f^{y,z}_{k,j} - f^{y,w}_{k,j} + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^k_l \left(z^l_j - w^l_j\right) - \sum_{r=\zeta+1}^{\omega} y^k_r w^r_j \right) . \; (\dagger)$$

2. Summand: Hier sind wegen $(k,j) \in \mathfrak{N}$ und $(i,k) \in \mathfrak{A}$ sowohl w_j^k als auch x_k^i direkte Bilder, nicht jedoch y_k^i. Nun ist

$$\begin{aligned} y_k^i &= f_{i,k}^{y,z} - f_{i,k}^{x,z} + x_k^i + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y_l^i z_k^l - \sum_{r=\xi+1}^{\zeta} x_r^i z_k^r \\ &= f_{i,k}^{y,z} - f_{i,k}^{x,z} + x_k^i + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \left(y_l^i - x_l^i\right) z_k^l - \sum_{r=\xi+1}^{\eta} x_r^i z_k^r. \end{aligned}$$

Da $(l,k) \in \mathfrak{H}, (i,l) \in \mathfrak{F}, (i,k) \in \mathfrak{A}, (i,r) \in \mathfrak{E}$ und $(r,k) \in \mathfrak{B}$ folgt, daß $z_k^l, y_l^i, x_k^i, x_l^i$ und x_r^i direkte Bilder sind, z_k^r jedoch nicht. Also muß z_k^r weiter zerlegt werden, und zwar gemäß

$$z_k^r = y_k^r - f_{r,k}^{y,z} - \sum_{s=\eta+1}^{\zeta} y_s^r z_k^s,$$

was auf der rechten Seite wegen $(r,k) \in \mathfrak{B}, (r,s) \in \mathfrak{G}, (s,k) \in \mathfrak{H}$ nur direkte Bilder enthält. Für $\sum_{k=\zeta+1}^{\omega} \left(x_k^i - y_k^i\right) w_j^k$ ergibt sich die Darstellung

$$\sum_{k=\zeta+1}^{\omega} \left(x_k^i - f_{i,k}^{y,z} + f_{i,k}^{x,z} - x_k^i - \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \left(y_l^i - x_l^i\right) z_k^l + \right. \\ \left. + \sum_{r=\xi+1}^{\eta} x_r^i \left(y_k^r - f_{r,k}^{y,z} - \sum_{s=\eta+1}^{\zeta} y_s^r z_k^s \right) \right) w_j^k. \qquad (\dagger\dagger)$$

3. Summand: Dieses ist nun ganz besonders einfach, da $(i,k) \in \mathfrak{F}$ und $(k,j) \in \mathfrak{M}$ ist, so daß sämtliche im dritten Summanden erscheinende Terme sofort direkte Bilder sind. Also ist

$$\sum_{k=\eta+1}^{\zeta} \left(y_k^i - x_k^i\right) \left(z_j^k - w_j^k\right) \qquad (\dagger\dagger\dagger)$$

die gesuchte Darstellung in diesem Fall.

Es ist nun einfach, die Urbilder der obenstehenden Ausdrücke $(\dagger), (\dagger\dagger)$ und $(\dagger\dagger\dagger)$ abzulesen und aufzusummieren und so das Urbild von $f_{i,j}^{y,w}$ mit $(i,j) \in \mathfrak{C}$ zu erhalten. Bevor wir das aber tun, sei daran erinnert, daß das Urbild ein Erzeuger von $\phi^{-1}(I)$ ist und nur durch diese Eigenschaft ein Interesse unsererseits rechtfertigt. Das hat zur Konsequenz, daß alle Monome in $(\dagger), (\dagger\dagger)$ und $(\dagger\dagger\dagger)$, die einen der anderen Erzeuger von I einbeziehen (nämlich $f_{i,j}^{x,z}, f_{i,j}^{x,w}, f_{i,j}^{y,z}$), weggelassen werden können ohne das erzeugte Ideal, und somit den uns interessierenden

Gesichtspunkt, zu ändern. Nach dem Wegstreichen aller solcher Terme ist die Summe der drei Teile gleich

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=\xi+1}^{\eta} x_k^i \left(\sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y_l^k \left(z_j^l - w_j^l\right) - \sum_{r=\zeta+1}^{\omega} y_r^k w_j^r \right) \\
&\quad + \sum_{k=\zeta+1}^{\omega} \left(- \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \left(y_l^i - x_l^i\right) z_k^l + \sum_{r=\xi+1}^{\eta} x_r^i \left(y_k^r - \sum_{s=\eta+1}^{\zeta} y_s^r z_k^s \right) \right) w_j^k \\
&\quad + \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} \left(y_k^i - x_k^i\right) \left(z_j^k - w_j^k\right), \quad \text{was wir mit } r_j^i \text{ bezeichnen wollen.}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nicht eben der ffiæfflbersichtlichste, wie sich in Kürze herausstellen wird. Um r_j^i vereinfachen zu können, wechseln wir die Summationsindizes nach folgender Konvention.

- a wird benutzt, wenn immer eine Summe von $\xi + 1$ bis η läuft,
- b wird benutzt für Summen von $\eta + 1$ bis ζ und
- c für solche von $\zeta + 1$ bis ω.

r_j^i hat sodann die Form

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i \left(\sum_{b=\eta+1}^{\zeta} y_b^a \left(z_j^b - w_j^b\right) - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} y_c^a w_j^c \right) \\
&\quad + \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} \left(- \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(y_b^i - x_b^i\right) z_c^b + \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i \left(y_c^a - \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} y_b^a z_c^b \right) \right) w_j^c \\
&\quad + \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(y_b^i - x_b^i\right) \left(z_j^b - w_j^b\right).
\end{aligned}$$

Man erkennt nun leichter, daß

$$
\begin{aligned}
r_j^i &= \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(y_b^i - x_b^i\right) \left(z_j^b - w_j^b - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_j^c\right) + \\
&+ \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(\left(\sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_b^a\right) \left(z_j^b - w_j^b\right)\right) + \\
&- \sum_{a=\xi+1}^{\eta} \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} x_a^i y_c^a w_j^c + \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_c^a w_j^c + \\
&- \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} \sum_{a=\xi+1}^{\eta} \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} x_a^i y_b^a z_c^b w_j^c
\end{aligned}
$$

ist, wobei sich die erste Zeile hier aus dem dritten Summanden und dem ersten Teil des zweiten Summanden von oben, die zweite Zeile hier aus dem ersten Teil des ersten Summanden von oben, die dritte Zeile hier aus dem zweiten Teil des ersten Summanden und dem zweiten Teil des zweiten Summanden von oben, und die vierte Zeile hier aus dem dritten Teil des zweiten Summanden von oben zusammensetzt.

Zusammengefaßt ergibt sich dann

$$
\begin{aligned}
r_j^i &= \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(y_b^i - x_b^i + \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_b^a\right) \left(z_j^b - w_j^b - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_j^c\right) + \\
&- \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} \sum_{a=\xi+1}^{\eta} \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} x_a^i y_b^a z_c^b w_j^c + \\
&+ \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(\left(\sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_b^a\right) \left(\sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_j^c\right)\right)
\end{aligned}
$$

und die beiden letzten Summanden sind gleich, weil in beiden alle möglichen Terme der Form $x_a^i y_b^a z_c^b w_j^c$ aufsummiert werden für die $i \leq \xi < a \leq \eta < b \leq \zeta < c \leq \omega < j$ gilt. Also ist

$$
r_j^i = \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(y_b^i - x_b^i + \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_b^a\right) \left(z_j^b - w_j^b - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_j^c\right). \qquad (\ddagger)
$$

Die Erzeuger des Urbildes von I unter ϕ sind somit alle $y_j^i, z_j^i, w_j^i, r_j^i$ mit $(i,j) \in \mathfrak{C}$ und r_j^i wie in $(\ddagger)$, sowie die Menge $\{y_j^i, z_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{A}} \cup \{z_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{B}} \cup \{z_j^i, w_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{D}}$.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die r_j^i als Linearkombination aus verschiedenen $f_{i,j}^{\alpha,\beta}$, in die $f_{i,j}^{y,w}$ mit dem Koeffizienten 1 eingeht, auch als Erzeuger von I selbst genommen werden kffiˇfflnnen (anstelle von $f_{i,j}^{y,w}$). Auch sehr interessant ist die Struktur dieser Summe, denn betrachtet man die einzelnen Summanden näher, so stellt man fest, daß sie stets das Produkt zweier Relationen sind, die zu $x \mathrel{-\!\sqsubset} y$ beziehungsweise $z \mathrel{-\!\sqsubset} w$ gehören. Das hat zum Beispiel die Konsequenz, daß, wenn $\mathfrak{C}$ eine 1×1-Matrix ist, $\zeta = \eta + 1$, und es dann, wie man an dem von uns konstruierten ϕ ablesen kann, nur einen Erzeuger für $\phi^{-1}(I)$ gibt, der nicht Unbestimmte ist, die singulären mit den linearen Fahnen zusammenfallen. Das sieht man wie folgt.

- Daß lineare Fahnen singuläre sind, folgt aus 1.7.
- Die Erzeuger von $\phi^{-1}(I)$ sind y_n^1, w_n^1, z_n^1 und

$$\sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(y_b^1 - x_b^1 + \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^1 y_b^a \right) \left(z_n^b - w_n^b - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_n^c \right).$$

  Es folgt, daß $R/I \cong R/\phi^{-1}(I) \cong R'/J$ (zur Existenz dieses Isomorphismus siehe 4.1) mit

$$\begin{aligned} J &= \left(\sum_{b=\eta+1}^{\zeta} \left(y_b^1 - x_b^1 + \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^1 y_b^a \right) \left(z_n^b - w_n^b - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_n^c \right) \right) \\ &= \left(y_\zeta^1 - x_\zeta^1 + \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^1 y_\zeta^a \right) \left(z_n^\zeta - w_n^\zeta - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^\zeta w_n^c \right), \end{aligned}$$

  wo R' der Polynomring über K ist, der durch Adjunktion von $x_{\xi+1}^1, \dots, w_n^\omega$ mit Ausnahme von y_n^1, w_n^1, z_n^1 entsteht. Es ist F dann die Vereinigung zweier regulffiΞfflrer Quadriken (die Gradienten der definierenden Polynome enthalten an den zu x_ζ^1 bzw. z_n^ζ korrespondierenden Stellen eine 1, haben also stets 'Vollrang') und demzufolge sind die singulären Punkte diejenigen die im Schnitt beider Quadriken liegen, das heißt die, für die beide Faktoren verschwinden. Den verbleibenden Teil, nämlich zu zeigen, daß dies die Linearität dieser Fahnen nach sich zieht, ist Inhalt des folgenden

Lemma 3.3
Sei g eine Fahne auf der Zweikrone F vom Index $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$, die zusätzlich für alle $(i, l) \in \mathfrak{F}$ und $(k, j) \in \mathfrak{M}$ die Gleichungen

$$y_l^i - x_l^i + \sum_{k=\xi+1}^{\eta} x_k^i y_l^k = 0$$

beziehungsweise

$$z_j^k - w_j^k - \sum_{l=\zeta+1}^{\omega} z_l^k w_j^l = 0$$

erfüllt. Dann ist g eine lineare Fahne. (Diese Voraussetzungen sind schwffiΞfflcher als $x \mathrel{-\!\sqsubset} y, z \mathrel{-\!\sqsubset} w$, weil letztere die Existenz der oben dargestellten Relationen auch fffiΔfflr $(i,l) \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{C}$ und $(k,j) \in \mathfrak{D} \cup \mathfrak{C}$ implizieren.)

Beweis.

Sei zunächst $(i,j) \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{C}$. Dann folgen aus $x \mathrel{-\!\sqsubset} z$ und $y \mathrel{-\!\sqsubset} z$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^i_j - z^i_j - \sum_{k=\xi+1}^{\zeta} x^i_k z^k_j &= 0, \\ y^i_j - z^i_j - \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} y^i_k z^k_j &= 0. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion gewinnt man

$$x^i_j - y^i_j + \sum_{r=\eta+1}^{\zeta} \left(y^i_r - x^i_r\right) z^r_j - \sum_{k=\xi+1}^{\eta} x^i_k z^k_j = 0.$$

Nun ist $(k,j) \in \mathfrak{B} \cup \mathfrak{D}$, so daß wegen $y \mathrel{-\!\sqsubset} z$ die Relation $y^k_j - z^k_j - \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^k_l z^l_j = 0$ besteht. Durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= x^i_j - y^i_j + \sum_{r=\eta+1}^{\zeta} \left(y^i_r - x^i_r\right) z^r_j - \sum_{k=\xi+1}^{\eta} x^i_k \left(y^k_j - \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y^k_l z^l_j \right) \\ &= x^i_j - y^i_j - \sum_{k=\xi+1}^{\eta} x^i_k y^k_j + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \left(y^i_l - x^i_l\right) z^l_j + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \sum_{k=\xi+1}^{\eta} x^i_k y^k_l z^l_j \\ &= x^i_j - y^i_j - \sum_{k=\xi+1}^{\eta} x^i_k y^k_l + \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} \left(y^i_l - x^i_l + \sum_{k=\xi+1}^{\eta} x^i_k y^k_l \right) z^l_j \end{aligned}$$

und der letzte dargestellte Term ist nach Voraussetzung eine Linearkombination von Nullen. Der erste Teil der Behauptung, nämlich $x \mathrel{-\!\sqsubset} y$, folgt.

Sei nun $(i,j) \in \mathfrak{C} \cup \mathfrak{D}$. Dann folgen aus $y \mathrel{-\!\sqsubset} z, y \mathrel{-\!\sqsubset} w$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} & y^i_j - z^i_j - \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} y^i_k z^k_j &= 0 \\ \text{und} \quad & y^i_j - w^i_j - \sum_{k=\eta+1}^{\omega} y^i_k w^k_j &= 0. \end{aligned}$$

Wie oben ergibt sich durch Subtraktion

$$z^i_j - w^i_j - \sum_{k=\zeta+1}^{\omega} y^i_k w^k_j + \sum_{r=\eta+1}^{\zeta} y^i_r \left(z^r_j - w^r_j\right).$$

Weil nun $(i,k) \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ ist, gibt $y -\!\!\sqsubset z$ Anlaß zu $y_k^i - z_k^i - \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y_l^i z_k^l = 0$ und dieses wiederum eingesetzt in obige Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= z_j^i - w_j^i - \sum_{k=\zeta+1}^{\omega} z_k^i w_j^k - \sum_{k=\zeta+1}^{\omega} \sum_{l=\eta+1}^{\zeta} y_l^i z_k^l w_j^k + \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} y_k^i \left(z_j^k - w_j^k\right) \\ &= z_j^i - w_j^i - \sum_{k=\zeta+1}^{\omega} z_k^i w_j^k - \sum_{k=\eta+1}^{\zeta} \left(z_j^k - w_j^k - \sum_{l=\zeta+1}^{\omega} z_k^l w_j^k \right), \end{aligned}$$

wo wiederum der letzte Term nach Voraussetzung verschwindet. □

Wir werden jetzt einen weiteren Automorphismus definieren, der das Zweikronenideal $\phi^{-1}(I)$ noch mehr vereinfacht, jedoch wesentlich einfacher ist als 3.1.

Lemma 3.4

Für die Zweikrone F vom Index $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$ über K ist der auf dem zugehörigen Polynomring $R = K[x_{\xi+1}^1, \ldots, w_n^\omega]$ durch

- $\psi(y_b^i) = y_b^i - x_b^i + \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_b^a$ für $(i,b) \in \mathfrak{F}$,
- $\psi(z_j^b) = z_j^b - w_j^b - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_j^c$ für $(b,j) \in \mathfrak{M}$,
- für alle übrigen $(\alpha, i, j) \in \{x, y, z, w\} \times \{1, \ldots, d(\alpha)\} \times \{d(\alpha)+1, \ldots, n\}$ sei $\psi(\alpha_j^i) = \alpha_j^i$

definierte Evaluationshomomorphismus ein Automorphismus.

Beweis.

Offensichtlich ist es nach 2.3 nur notwendig zu zeigen, daß y_b^i und z_j^b für $(i,b) \in \mathfrak{F}$ beziehungsweise $(b,j) \in \mathfrak{M}$ im Bild von ψ liegen. Aber

$$\psi\left(y_b^i + x_b^i - \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_b^a \right) = y_b^i - x_b^i + \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_b^a + x_b^i - \sum_{a=\xi+1}^{\eta} x_a^i y_b^a = y_b^i$$

und

$$\psi\left(z_j^b + w_j^b + \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_j^c \right) = z_j^b - w_j^b - \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_j^c + w_j^b + \sum_{c=\zeta+1}^{\omega} z_c^b w_j^c = z_j^b,$$

so daß das Lemma bewiesen ist. □

Betrachet man nun das Urbild der Erzeuger von $\phi^{-1}(I)$ unter ψ, so sind das nach (‡) und den darauf folgenden Bemerkungen gerade

$$\left\{ \sum_{b=\eta+1}^{\zeta} y_b^i z_j^b \right\}_{(i,j)\in\mathfrak{C}}$$

vereinigt mit

$$\{y_j^i, w_j^i, z_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{C}} \cup \{y_j^i, z_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{A}} \cup \{z_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{B}} \cup \{z_j^i, w_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{D}}.$$

Kapitel 4

Gemischte Ideale

Das letzte Kapitel, in dem zwei Automorphismen gefunden wurden, wird in dem nun beginnenden seine Anwendung finden in dem Sinne, daß wir uns nun mit der einfachsten Sorte von Zweikronen befassen und deren lokale Koeffizientenringe untersuchen wollen.

Es sei begonnen mit einem kurzen Rückblick auf das, was an für dieses Kapitel wesentlichen Dingen im vergangenen gesagt wurde. Dazu sei F eine Zweikrone vom Index $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$ über dem Körper K mit korrespondierendem Koeffizientenring R und definierendem Ideal I. Wir hatten dann Abbildungen $\phi, \psi : R \to R$ definiert und gezeigt, daß sie Automorphismen sind. Insbesondere wurde gezeigt, daß $\psi^{-1}\phi^{-1}(I)$ erzeugt wird durch die Unbestimmten

$$\{y_j^i, w_j^i, z_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{C}} \cup \{y_j^i, z_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{A}} \cup \{z_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{B}} \cup \{z_j^i, w_j^i\}_{(i,j)\in\mathfrak{D}},$$

vereinigt mit den Polynomen

$$\left\{\sum_{b=\eta+1}^{\zeta} y_b^i z_j^b\right\}_{(i,j)\in\mathfrak{C}}.$$

Wir zeigen als erstes Ergebnis dieses Kapitels, daß dieses Wissen auch wirklich nützlich ist.

Lemma 4.1

Sei die Terminologie wie oben beschrieben. Dann gilt:

Der Automorphismus $\psi^{-1}\phi^{-1} : R \to R$ aus Kapitel 3 induziert einen Isomorphismus zwischen den Ringen R/I und R/I', wobei $I' = \psi^{-1}\phi^{-1}(I)$ ist.

Beweis.

Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "(\phi\psi)^{-1}"'] & R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(\phi\psi)^{-1}"'] & R/I \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\overline{(\phi\psi)^{-1}}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
I' \arrow[r, "\iota'"] & R \arrow[r, "\pi'"] & R/I' \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

zeigt, daß der zusammengesetzte Homomorphismus $R \xrightarrow{(\phi\psi)^{-1}} R \xrightarrow{\pi'} R/I'$ den Kern I hat, da $(\phi\psi)^{-1}$ ein Monomorphismus ist. Also muß $\pi' \circ \psi^{-1} \circ \phi^{-1}$ durch R/I faktorisieren, hierbei die Existenz von $\overline{\psi^{-1}\phi^{-1}} : R/I \to R/I'$ via $r + I \to (\phi\psi)^{-1}(r) + I'$, so daß das obige Diagramm kommutiert, etablierend. Nun folgt aber durch das Fivelemma (siehe z.B. [8], Th. 3.32) daß es sich dabei um einen Isomorphismus von R-Moduln handeln muß. Zu zeigen bleibt dann nur noch die Vertauschbarkeit von $\overline{(\phi\psi)^{-1}}$ mit der Multiplikation in R/I beziehungsweise R/I', aber das ist durch die Definition offensichtlich. □

Wir können also anstelle von R/I auch R/I' untersuchen, was wegen der übersichtlicheren Struktur von I' einfacher ist. In Folge sei für $I' = (\phi\psi)^{-1}(I)$, das transformierte definierende Ideal von F, die Bezeichnung J verwendet. Bevor die rein algebraischen Gesichtspunkte von R/I' näher beleuchtet werden, sei etwas mehr arithmetisches gesagt.

Der Ring $R = K[x^1_{\xi+1}, \dots, w^\omega_n]$ entstand aus K durch Adjunktion von

$$\delta(F) = (n-\xi)\xi + (n-\eta)\eta + (n-\zeta)\zeta + (n-\omega)\omega$$

Unbestimmten, wohingegen die Anzahl $\jmath(F)$ der zu Beginn dieses Kapitels dargestellten linearen Erzeuger von $I' = J$ genau $\mathrm{card}(\mathfrak{B}) + 2 \cdot (\mathrm{card}(\mathfrak{A}) + \mathrm{card}(\mathfrak{D})) + 3 \cdot \mathrm{card}(\mathfrak{C})$ ist, also

$$\begin{aligned}
\jmath(F) &= (\eta-\xi)(\omega-\zeta) + 2(\omega-\zeta)\xi + 2(\eta-\xi)(n-\omega) + 3\xi(n-\omega) \\
&= \eta(n-\omega) + \eta(n-\zeta) + \xi(n-\zeta).
\end{aligned}$$

Es sei die Differenz aus diesen beiden Zahlen mit $\Delta(F)$ bezeichnet. Eine einfache Konsequenz des letzten Kapitels ist dann, das R/I isomorph ist zu dem Quotienten des Ringes

$$A = K[t_1, \dots, t_{\Delta - \mathrm{card}(\mathfrak{F}) - \mathrm{card}(\mathfrak{M})}, y^1_1, \dots, y^\xi_{\zeta-\eta}, z^1_1, \dots, z^{\zeta-\eta}_{n-\omega}]$$

nach seinem Ideal

$$\mathfrak{a} = \left(\left\{ \sum_{b=1}^{\zeta-\eta} y^i_b z^b_j \right\}_{(i,j) \in (1,\dots,\xi) \times (1,\dots,n-\omega)} \right),$$

einfach indem man zunächst $R/I \cong R/J$ ausnutzt, sodann alle Unbestimmten die nicht ein y_b^i mit $(i,b) \in \mathfrak{F}$ oder ein z_j^b mit $(b,j) \in \mathfrak{M}$ sind auf die t_ν abbildet und beachtet, daß die linearen Erzeuger von J, die sofort herausfaktorisiert werden können, gerade $\delta(F) - \Delta(F)$ Stück sind.

Man stellt nach längerem Hinsehen fest, daß Δ genau wie $\delta(F)$ und $\jmath(F)$ unverändert bleibt, wenn man ξ durch $n-\omega$ ersetzt, η durch $n-\zeta$, ζ durch $n-\eta$ und ω durch $n-\xi$. Das gleiche gilt auch für card($\mathfrak{C}$), da sich $\mathfrak{C}$ unter diesen Ersetzungen nur 'transponiert', sowie die Zahl $\zeta - \eta$.

Wegen Lemma 4.1 sind zwei Zweikronen F, F' über dem gleichen Körper K lokal algebraisch ununterscheidbar, wenn für die zugeordneten Polynomringe R, R' und die transformierten definierenden Ideale J, J' ein Isomorphismus $\upsilon : R \to R'$ existiert mit $\upsilon(J) = J'$. Betrachtet man nun eine Zweikrone mit Index $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$ und die dazu duale Zweikrone vom Index $(n-\omega, n-\zeta, n-\eta, n-\xi, n)$, so stellt man zunächst fest, daß nach obigen Betrachtungen $\delta(F) = \delta(F'), \jmath(F) = \jmath(F')$, also $\Delta(F) = \Delta(F')$. Das hat zur Folge, daß R und R' die gleiche Dimension über K haben und die Anzahl der linearen Erzeuger von J und J' übereinstimmen. Da weiterhin $\mathfrak{C}(F)$ und $\mathfrak{C}(F')$ die gleiche Kardinalität haben, ist auch die Zahl der homogen quadratischen Erzeuger für beide Kronen gleich. Und diese letzteren Erzeuger haben auch die gleiche Gestalt, da die 'Länge' der Summen in diesen Polynomen im einen Fall gerade $\zeta - \eta$, im anderen $(n-\eta) - (n-\zeta)$ und somit die gleiche ist.

Dieses Resultat mag an dieser Stelle überraschend erscheinen, ist es aber nicht so sehr, wenn man F, F' und das, was sie verbindet, ohne die Isomorphismen betrachtet. F wurde definiert mit Hilfe von Graßmann'schen Varietäten, die sich wiederum durch Untervektorräume des K^n definieren. Falls nun aber U, V zwei solche Untervektorräume sind, gilt natürlich $U \subseteq V$ genau dann wenn $U^\perp \supseteq V^\perp$ gilt und $\dim(U) - \dim(V) = (n - \dim(V)) - (n - \dim(U)) = \dim(V^\perp) - \dim(U^\perp)$. Das aber bedeutet, daß nicht nur $R/I \cong R'/I'$ ist, sondern daffia fflbeide Fahnenräume das gleiche geometrische Gebilde darstellen, nur auf unterschiedliche Weise mit Koordinaten ausgestattet.

Nach diesen Vorbemerkungen allgemeiner Art kommen wir nun zu den Zweikronen, die uns im weiteren Verlauf dieses Kapitels beschäftigen sollen. Es sind dieses die Zweikronen vom Index $(\xi, \eta, \zeta = \eta + 1, \omega, n)$. Nach den Bemerkungen am Anfang dieser Seite haben wir dann den Ring $A/\mathfrak{a}$ zu untersuchen, wobei A wie oben definiert ist und $\mathfrak{a}$ erzeugt ist durch alle Polynome der Form $y_1^i z_j^1$ mit $0 < i \leq \xi, 0 < j \leq n - \omega$, denn alle Summen haben Länge $\zeta - \eta = 1$. Schreibt man diese Erzeuger in eine Matrix als

$$\begin{pmatrix} y_1^1 z_1^1 & y_1^1 z_2^1 & \cdots & y_1^1 z_{n-\omega}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^\xi z_1^1 & y_1^\xi z_2^1 & \cdots & y_1^\xi z_{n-\omega}^1 \end{pmatrix},$$

so sieht man, daß $\mathfrak{a} = (y_1^1, \ldots, y_1^\xi) \cap (z_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^1)$. Wir schreiben $(y_1^1, \ldots, y_1^\xi) = \mathfrak{y}$ und $(z_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^1) = \mathfrak{z}$. Es ist dann $A/\mathfrak{a} = A/(\mathfrak{y} \cap \mathfrak{z})$. Diese Ringe weisen somit eine besonders einfache Struktur auf. An dieser Stelle ist es sinnvoll einige Begriffe zu definieren.

Definition 4.2

Sei R ein kommutativer Noether'scher Ring mit Eins. Das Ideal $I \subseteq R$ heiffiafflt *ungemischt*, sofern fffiΔfflr alle primffiΞfflren Komponenten $Q_1, \ldots, Q_s$ von I, so daffiaffl

$$I = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i,$$

gilt

$$\mathrm{ht}\,(Q_1) = \mathrm{ht}\,(Q_2) = \ldots = \mathrm{ht}\,(Q_s).$$

R heiffiafflt *Cohen-Macaulay-Ring* (oder kurz *CM-Ring*) genau dann wenn alle Ideale der Hffiˇfflhe r, die mit r Elementen generiert werden kffiˇfflnnen, ungemischt sind fffiΔfflr alle $r \leq \dim R$.

Eine Klasse von Cohen-Macaulay-Ringen sind zum Beispiel die Polynomringe ffiΔfflber Kffiˇfflrpern – ein brillantes Ergebnis von Macaulay aus dem Jahre 1916; fffiΔfflr regulffiΞfflre lokale Ringe wurde das 'Ungemischtheitstheorem' 1946 von I.S. Cohen gezeigt: siehe [4].

Als ein wichtiger Spezialfall in der Definition von Cohen-Macaulay'schen Ringen ist die Variante $r = 0$ enthalten: unter dem Ideal $(\emptyset)$ wollen wir das Nullideal von R verstehen. Das bedeutet dann, daffia ffldas Nullideal keine eingebetteten Komponenten haben darf. Wir werden in KffiΔfflrze Nutzen hieraus ziehen.

Als im Kapitel 1 der Begriff des Fahnenraumes mit Hilfe von GraffiafflmannvaritffiΞfflten eingefffiΔfflhrt wurde, wurden zur Parametrisierung lokale Koordinaten verwendet. Da also ohnehin nicht eine globale Beschreibung genutzt worden ist, ist es nur legal, auch die zugeordneten Koeffizientenringe in der Lokalisierung zu betrachten. Es wirft sich die Frage auf, bezffiΔfflglich welchen multiplikativ abgeschlossenen Systems S dies zu tun wffiΞfflre. Wir werden S so wffiΞfflhlen, daffia fflеs gerade das Komplement von $\mathfrak{n} = \Big(t_1, \ldots, t_{\Delta-\mathrm{card}(\mathfrak{F})-\mathrm{card}(\mathfrak{M})}, y_1^1, \ldots, y_{\zeta-\eta}^{\xi}, z_1^1, \ldots, z_{\xi}^{\zeta-\eta}\Big)$ in A ist.

Bemerkung 4.3

Diese Lokalisierung ist nicht irgendeine willkffiΔfflrlich gewffiΞfflhlte, sondern entspricht der Lokalisierung in der trivialen Fahne in der alle Graffiafflmannkoordinaten verschwinden. Das sieht man wie folgt. Da unter ϕ und ψ nach Definition das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R auf sich abgebildet wird, folgt, daffia fflder in 4.1 etablierte Isomorphismus $R/I \cong R/I'$ einen solchen zwischen $(R/I)_{\mathfrak{m}}$ und $(R/I')_{\mathfrak{m}} = (R/J)_{\mathfrak{m}}$ induziert. Nach [9], 5.44 ist aber $(R/J)_{\mathfrak{m}}$ isomorph zu $(A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{n}}$.

Wir zitieren jetzt einige Ergebnisse, die die Untersuchung, ob ein gegebener Ring A Cohen-Macaulay ist oder nicht, sehr erleichtern werden. FffiΔfflr Beweise siehe [7], Theoreme 17.3, 17.4 und 17.6.

Theorem 4.4

Ist A ein Noetherscher kommutativer Ring, dann gilt

1. ist a ein Nichtnullteiler in A, dann ist A ein CM-Ring genau dann wenn $A/a \cdot A$ ein CM-Ring ist;

2. falls A CM ist, so gilt fffiΔfflr jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A, daffiaffl $(A)_{\mathfrak{p}}$ ein Cohen-Macaulay-Ring ist;

3. ist das Ideal $\mathfrak{a}$ im Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ enthalten, dann gilt stets
$$\mathrm{ht}\,(\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} + \dim\,(A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}} = \dim\,(A)_{\mathfrak{p}}$$
wenn immer A Cohen-Macaulay ist.

Wir werden nun zwei weitere Klassen von Ringen definieren, die geometrisch besondere Bedeutung besitzen.

Definition 4.5

Es sei A ein Noether'scher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{n}$ der Dimension d.

- A heiffiafflt *regulffiΞfflr* genau dann wenn $\mathfrak{n}$ durch d Elemente von A erzeugt werden kann.

- Sei M ein A-Modul. Eine *normale M-Sequenz in A* $(x_1, \ldots, x_i)$ ist eine Menge von Elementen aus A, so daffia fflfffiΔfflr alle $\nu \in \{1, \ldots, i\}$ gilt, daffia fflx_ν kein Nullteiler auf $M/(x_1, \ldots, x_{\nu-1}) \cdot M$ ist, und
$$M/(x_1, \ldots, x_\nu) \cdot M \neq 0$$
gilt.

- Sei A zusffiΞffltzlich regulffiΞfflr. Ist B ein Ring der aus A durch Faktorisierung nach dem Ideal $I \subset A$ hervorgegangen ist, so heiffiafflt B *vollstffiΞfflndiger Durchschnitt*, falls I durch eine normale A-Sequenz erzeugt werden kann.

Ein Ring heiffiafflt regulffiΞfflr (vollstffiΞfflndiger Durchschnitt), falls jede seiner Lokalisierungen lokal regulffiΞfflr (lokal vollstffiΞfflndiger Durchschnitt) ist.

Wenn ein Ring B der Quotient A/I des regulffiΞfflren Ringes A ist, nennen wir das Maximum
$$\max_{Q_1, Q_2 \in \min(I)} (\mathrm{ht}\,(Q_1) - \mathrm{ht}\,(Q_2))$$

den *Defekt* von B.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daffia ffldiese Definition von Ringen vollstffiΞfflndigen Durchschnittes eine ausgesprochen spezielle Form der allgemeinen Definition ist, die nur fffiΔfflr Quotienten regulffiΞfflr lokaler Ringe richtig ist und zum Beispiel in [7] in Theoremform dargestellt wird (siehe Th. 21.2). Weiterhin sei darauf verwiesen, daffia fflunter den oben definierten Ringklassen folgende Hierarchie besteht:

A regulffiΞfflr $\Rightarrow$ A vollstffiΞfflndiger Durchschnitt $\Rightarrow$ A Cohen-Macaulay.

Die erste Implikation ist durch unsere Form der Definition von vollstffiΞfflndigen Durchschnitten trivial, die zweite bildet in [7] Th. 21.3 zusammen mit der Definition von lokalen Gorenstein-Ringen die nach Theorem 18.1 folgt.

Bemerkung 4.6

Sei A ein Ring, der der Quotient eines regulffiΞfflren Ringes R nach dem Ideal I in R ist mit der Eigenschaft, daffia ffldie Vereinigung aller assoziierten Primideale von I in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ liegt. Ist A ein Cohen-Macaulay Ring, so gilt nach 4.4 fffiΔfflr jedes assoziierte Primideal von I in R, daffia ffles minimales Primoberideal von I nach der Ungemischtheitsforderung an 0 in A ist, und

$$\operatorname{ht}\mathfrak{p} + \dim R/\mathfrak{p} = \operatorname{ht}\left((\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}}\right) + \dim\left((R/\mathfrak{p})\right)_{\mathfrak{m}} = \dim\,(R)_{\mathfrak{m}} = \dim R.$$

Nun ist nach [7], Theorem 17.3,

$$\dim_{R/\mathfrak{p}} R/\mathfrak{p} = \dim_R R/\mathfrak{p} = \dim_R R/I = \dim_{R/I} R/I,$$

da R/I CM-Ring impliziert R/I CM-Modul ffiΔfflber R. (FffiΔfflr Definitionen und SffiΞffltze ffiΔfflber CM-Moduln siehe [7], Kapitel 17). Das bedeutet, daffia ffl stets $\operatorname{ht}\mathfrak{p} + \dim R/I = \dim R$ ist, mithin I ungemischt sein muffiaffl, oder, anders gesagt, daffia ffl$A$ den Defekt 0 hat.

Beispiele 4.7

Als einfachstes Beispiel eines regulffiΞfflren Ringes stellt sich das eines Kffi˘fflrpers dar. Weitere fundamentale Beispiele sind Polynomringe und formale Potenzreihenringe ffiΔfflber regulffiΞfflren Ringen – das ist Theorem 19.4 in [7].

Ein Beispiel eines nichtregulffiΞfflren Ringes der nichtsdestotrotz vollstffiΞfflndiger Durchschnitt ist, ist $R = K[[x]]/(x^2)$ fffiΔfflr einen beliebigen Kffi˘fflrper K. Der Beweis ist einfach: R ist lokal Artin'sch, da das maximale Ideal (x) nilpotent ist, also von Dimension Null. Aber (x) ist sicher nicht durch $\emptyset$ erzeugbar, da es vom Nullideal verschieden ist. So kann R nichr regulffiΞfflr sein. Aber nach oben zitiertem Theorem 19.4 aus [7] ist R Quotient eines lokalen regulffiΞfflren

Ringes nach einem (offensichtlichen) Nichtnullteiler, also nach Definition 4.5 vollstffiΞfflndiger Durchschnitt.

Ein Beispiel fffiΔfflr einen CM-Ring, der nicht vollstffiΞfflndiger Durchschnitt ist, erhffiΞfflt man wie folgt. Es sei K ein Kffi˘fflrper und $K[[x]]$ der formale Potenzreihenring in einer Unbestimmten ffiΔfflber K. Sei $R = K[[x^3, x^5, x^7]]$ der Unterring von $K[[x]]$, der alle formalen Potenzreihen der Form $\sum_{\alpha=3n_1+5n_2+7n_3} \kappa_\alpha x^\alpha$ mit $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ enthffiΞfflt.

Es ist dann $(x^3) \subseteq \mathfrak{m} = (x^3, x^5, x^7)$ und $\mathfrak{m}^2 \subseteq (x^3)$ wie man sofort erkennt. Es folgt nach [7], Th. 17.6, daffia ffl$R$ eindimensionaler CM-Ring ist.

Wir betrachten das Ideal (x^3) auch weiterhin. Es enthffiΞfflt $x^3, x^6 = x^3 \cdot x^3, x^8 = x^3 \cdot x^5, x^9 = x^3 \cdot x^6, x^{10} = x^3 \cdot x^7$ und demzufolge auch alle Potenzen von x mit Exponenten grffi˘affler als 7. Wir behaupten, daffia ffl$(x^3) = (x^3, x^5) \cap (x^3, x^7)$ ist.
Beweis:
Ist $r \in (x^3, x^5) \cap (x^3, x^7)$, hat es eine Darstellung

$$r = x^3 f_1 + x^5 f_2 = x^3 g_1 + x^7 g_2$$

mit $f_1, \ldots, g_2 \in R$. Wir untersuchen, welche Form solche AusdrffiΔfflcke haben kffi˘fflnnen. Ein Element von (x^3, x^5) ist die formale Linearkombination von Potenzen von x deren Exponenten geschrieben werden kffi˘fflnnen als $3+(3n_1+5n_2+7n_3)$ oder $5+(3n_1'+5n_2'+7n_3')$ mit natffiΔfflrlichen $n_1, \ldots, n_3'$. Alle solchen Exponenten sind $3, 5, 6 = 3+3, 8 = 3+5, 9 = 3+2\cdot 3, 10 = 5+5, \ldots$. In gleicher Weise besteht (x^3, x^7) aus formalen Linearkombinationen mit den Exponenten $3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$. Schreibt man r also aus, kffi˘fflnnen wegen der Zugehffi˘fflrigkeit zu beiden Idealen die Exponenten 5 und 7 nicht auftreten. Es folgt, daffia ffl$r$ formale Potenzreihe ist, deren Exponenten gleich 3, 5, 6, 8 oder grffi˘affler sind und somit zu (x^3) gehffi˘fflren muffiaffl. Es folgt $(x^3) \supseteq (x^3, x^5) \cap (x^3, x^7)$ und die entgegengesetzte Relation ist offensichtlich. Nun ist (x^3) durch eine R-regulffiΞfflre Sequenz generiert und $\mathfrak{m}$-primffiΞfflr, man bezeichnet es dann als *Parameterideal*. Wir haben gezeigt, daffia ffles in R ein reduzibles Parameterideal gibt, also ist nach [7], Th. 18.1 R nicht Gorenstein, und nach [7], Th. 21.3 auch nicht vollstffiΞfflndiger Durchschnitt.

Wir kommen nun zum eigentlichen Thema dieses Kapitels zurffiΔfflck, der Untersuchung der lokalen Ringe die zu FahnenrffiΞfflumen vom Index $(\xi, \eta, \eta+1, \omega, n)$ gehffi˘fflren. Wir hatten festgestellt, daffia fflsie isomorph sind zu dem Quotienten B des Ringes

$$A = K[t_1, \ldots, t_{\Delta - \mathrm{card}(\mathfrak{F}) - \mathrm{card}(\mathfrak{M})}, y_1^1, \ldots, y_1^\xi, z_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^1]$$

nach seinem Ideal

$$\mathfrak{a} = \left(\left\{ y_1^i z_j^1 \right\}_{(i,j) \in (1, \ldots, \xi) \times (1, \ldots, n-\omega)} \right)$$

(siehe die Bemerkungen nach Lemma 4.1), lokalisiert in dem maximalen Ideal $\mathfrak{n} \cdot B = (t_1, \dots, z^1_{n-\omega}) \cdot B$. Wir schreiben im Folgenden $\overline{x}$ fffiΔfflr das Bild von $x \in A$ unter der natffiΔfflrlichen Projektion $A \to B$ in B.

Bemerkung 4.8

Da $\mathfrak{t} = (t_1, \dots, t_{\Delta - \mathrm{card}(\mathfrak{F}) - \mathrm{card}(\mathfrak{M})})$ eine regulffiΞfflre $B_{\mathfrak{n}\cdot B}$-Sequenz ist, ist $B_{\mathfrak{n}\cdot B}$ genau dann Cohen-Macaulay beziehungsweise vollstffiΞfflndiger Durchschnitt, wenn das fffiΔfflr $B_{\mathfrak{n}\cdot B}/(\mathfrak{t} \cdot B_{\mathfrak{n}\cdot B})$ richtig ist. Wir nennen $B_{\mathfrak{n}\cdot B}/(\mathfrak{t} \cdot B_{\mathfrak{n}\cdot B})$ den *reduzierten Polynomring zu F.*

Satz 4.9

Der lokale Ring $B_{\mathfrak{n}\cdot B}$, der vor 4.8 beschrieben wurde, ist nur fffiΔfflr ein einziges ξ, nffiΞfflmlich $\xi = 1$, Cohen-Macaulay, in welchem Fall er auch vollstffiΞfflndiger Durchschnitt ist.

Beweis.

Wir betrachten zunffiΞfflchst irgendeinen lokalen CM-Ring R'. Ist $\mathfrak{p}$ eine Primkomponente des Nullideales, so muffia fflnach 4.2 $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 0$ sein und nach 4.4 gilt

$$\mathrm{ht}\,(\mathfrak{p}) + \dim(R'/\mathfrak{p}) = \dim R'.$$

Das bedeutet, daffia fflalle minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ in R' die Gleichung

$$\dim(R'/\mathfrak{p}) = \dim R' \tag{4.1}$$

erfffiΔfflllen.

Wir gehen absofort wegen 4.8 von $\Delta = \mathrm{card}(\mathfrak{F}) + \mathrm{card}(\mathfrak{M})$ aus. Es bezeichne $\overline{x}$ das Bild von $x \in A$ in B unter der natffiΔfflrlichen Projektion.

Nun ist in $B_{\mathfrak{n}\cdot B}$ das Nullideal der Durchschnitt der Ideale $\overline{(z^1_1, \dots, z^1_{n-\omega})}_{\mathfrak{n}\cdot B}$ und $\overline{(y^1_1, \dots, y^\xi_1)}_{\mathfrak{n}\cdot B}$. Der Quotient nach einem dieser beiden Primideale ist isomorph zum Polynomring in $\Delta - (n - \omega)$ beziehungsweise $\Delta - \xi$ Unbestimmten ffiΔfflber K, lokalisiert in einem maximalen Ideal. Um die ErfffiΔfflllung von (4.1) zu ermffiˇfflglichen, muffia fflsomit $n - \omega = \xi$ sein. Die Zahl der mffiˇfflglichen Kandidaten fffiΔfflr CM-Ringe hat sich also schon erheblich verringert und wir betrachten im weiteren nur noch solche FahnenrffiΞfflume, fffiΔfflr welche n gleich $\omega + \xi$ ist.

Wir betrachten jetzt in $B_{\mathfrak{n}\cdot B}$ das Ideal $\overline{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{n}\cdot B} = (y^1_1 + z^1_1 + \mathfrak{a})_{\mathfrak{n}\cdot B}$. Da $y^1_1 + z^1_1$ kein Nullteiler in B ist, folgt nach dem Krull'schen Hauptidealsatz $\mathrm{ht}\,(\overline{\mathfrak{b}}) = 1$ und also auch $\mathrm{ht}\,(\overline{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{n}\cdot B} = 1$. Sollte $B_{\mathfrak{n}\cdot B}$ ein CM-Ring sein, wffiΔfflrde aus der Definition folgen, daffia ffl$\overline{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{n}\cdot B}$ ungemischt ist. Man betrachte dazu zum Beispiel das Element $\overline{y^1_1}$ in B und den Idealquotienten $\overline{\mathfrak{c}} = \overline{\mathfrak{b}} : (\overline{y^1_1})$. Dieser Quotient ist wegen der LinearitffiΞfflt von y^1_1 verschieden von B. Da $y^1_1 \cdot y^i_1 = (y^1_1 + z^1_1) \cdot y^i_1 - y^i_1 z^1_1$ ist, ist $\overline{y^1_1 y^i_1}$ in $\overline{\mathfrak{b}}$ fffiΔfflr alle $0 < i \leq \xi = n - \omega$.

Es folgt, daffia ffl$\overline{\mathfrak{c}} \ni \overline{y^i_1}$ fffiΔfflr alle solchen i. Aber $\overline{\mathfrak{c}}$ enthffiΞfflt natffiΔfflrlich auch alle z_i^1 mit $0 < i \leq \xi$ so daffia fflgilt

$$\mathrm{ht}\,(\overline{\mathfrak{c}}) \geq \mathrm{ht}\,\overline{(y_1^1, \ldots, y_1^\xi, z_1^1, \ldots, z_\xi^1)}.$$

Das rechststehende Ideal aber ist gleich $\mathfrak{n} \cdot B$ und das hat Hffi˘fflhe ξ, da sich die saturierte Primidealkette

$$(y_1^1, \ldots, y_1^\xi) \subset (y_1^1, \ldots, y_1^\xi, z_1^1) \subset \ldots \subset (y_1^1, \ldots, y_1^\xi, z_1^1, \ldots, z_\xi^1)$$

in $K[y_1^1, \ldots, y_1^\xi, z_1^1, \ldots, z_\xi^1]$ auf B fortsetzt. Folglich ist auch $\mathfrak{n} \cdot B_{\mathfrak{n} \cdot \mathrm{B}}$ ein assoziiertes Primideal von $(\overline{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{n} \cdot B}$. Damit nun $\overline{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{n} \cdot B}$, und somit $\overline{\mathfrak{b}}$, ungemischt ist, muffia ffldemzufolge $1 = \mathrm{ht}\,(\overline{\mathfrak{b}}) = \mathrm{ht}\,\overline{(y^1, \ldots, y_1^\xi, z_1^1, \ldots, z_\xi^1)} = \xi$ sein. Der Typ eines Fahnenraumringes muffia fflalso, falls $\zeta = \eta + 1$, die Form $(1, \eta, \eta + 1, n - 1, n)$ haben, um Cohen-Macaulay sein zu kffi˘fflnnen.

In diesem Fall ist $(\mathfrak{a})_\mathfrak{n}$ von einem einzigen Element, $y_1^1 z_1^1 \cdot A_\mathfrak{n}$, generiert und dieser Generator ist natffiΔfflrlich kein Nullteiler in dem regulffiΞfflren Ring

$$\left(K[t_1, \ldots, t_{\Delta - \mathrm{card}(\mathfrak{F}) - \mathrm{card}(\mathfrak{M})}, y_1^1, \ldots, y_{\zeta-\eta}^\xi, z_1^1, \ldots, z_\xi^{\zeta - \eta}]\right)_\mathfrak{n}.$$

Es folgt aus [7], Th. 21.2, daffia ffl$R$ dann vollstffiΞfflndiger Durchschnitt ist. □

Bemerkung 4.10
Falls $\zeta - \eta = 1$ ist und auffiafflerdem $n - \omega = \xi$, dann haben wir gesehen, daffia fflzwar das Ideal $\mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ ungemischt ist, der Quotient $B_{\mathfrak{n} \cdot B}$ aber nicht Cohen-Macaulay. Ringe dieser Art bezeichnet man als *Buchsbaum-Ringe* (nach D. Buchsbaum), zu denen [10] eine gute EinfffiΔfflhrung ist. Der Beweis, daffia fflobiger Ring Buchsbaum ist, findet sich dort auf Seite 83.

Es sei noch angemerkt, daffia fflfffiΔfflr $\Delta > \mathrm{card}(\mathfrak{F}) + \mathrm{card}(\mathfrak{M})$ die Eigenschaft Buchsbaum zu sein sich *nicht* von $B_{\mathfrak{n} \cdot B}$ auf $(R/J)_\mathfrak{m}$ ffiΔfflbertrffiΞfflgt.

Kapitel 5

Determinantenideale

Dieses Kapitel ist der Erforschung des nach Kapitel 4 nffiΞfflchstliegenden Falles gewidmet. Bisher hatten wir fffiΔfflr die Zweikrone F vom Typ $(\xi,\eta,\zeta,\omega,n)$ angenommen, daffia ffl$\zeta = \eta + 1$ ist. Das zeigte sich als eine einfach zu untersuchende Sorte von Zweikronen – ein Fakt der hauptsffiΞfflchlich auf den Struktursatz 3.1 zurffiΔfflckgeht.

In diesem Kapitel gehen wir nun ffiΔfflber zu der Annahme $\zeta = \eta+2$. Obzwar die ffiffiffflnderung gering aussieht, hat sie gravierende Auswirkungen auf die PrimffiΞfflrkomponenten der zugehffi˘fflrigen Fahnenraumideale und auch auf die Schwierigkeiten bei der Untersuchung. Bisher ist es auch noch nicht gelungen, die in einer SingularitffiΞfflt lokalisierten Koeffizientenringe von Zweikronen mit $\zeta \geq \eta+3$ zu beschreiben, abgesehen von dem Fall $n-\omega = 1$ (oder, dual, $\xi = 1$), der am Ende des Kapitels dargelegt wird.

Wir beginnen mit einer Beschreibung der Erzeuger des nach 3.1 transformierten Ideals J. Neben den $\jmath$ linearen Erzeugern von J haben wegen $\zeta - \eta = 2$ die dort konstruierten quadratischen Erzeuger, deren $\mathrm{card}(\mathfrak{C}) = \xi(n-\omega)$ an der Zahl sind, die Form

$$y^i_{\eta+1} z^{\eta+1}_j + y^i_{\eta+2} z^{\eta+2}_j$$

mit $(i,j) \in \mathfrak{C}$. Wie zu Beginn des letzten Kapitels geben wir den nicht in eine solche Relation verwickelten Unbestimmten aus R die neuen Bezeichnungen $t_1,\dots,t_\delta$, faktorisieren die $\jmath$ trivialen Erzeuger von J heraus und untersuchen in $K[t_1,\dots,t_\Delta, y^1_{\eta+1},\dots,y^\xi_{\eta+2=\zeta}, z^{\eta+1}_{\omega+1},\dots,z^{\eta+2=\zeta}_n]$ das Ideal, welches durch die Quadriken

$$\left\{y^i_{\eta+1} z^{\eta+1}_j + y^i_{\eta+2} z^{\eta+2}_j\right\}_{(i,j)\in\mathfrak{C}}$$

erzeugt wird. Der Einfachheit halber seien noch alle unteren y-Indizes sowie alle oberen z-Indizes um η gesenkt, und (i,j) variiere statt in $\mathfrak{C} = \{1,\dots,\xi\} \times \{\omega+1,\dots,n\}$ in $\{1,\dots,\xi\} \times \{1,\dots,n-\omega\}$.

Es ist nun sofort sichtbar, daffia ffldiese Quadriken nicht auf so simple Weise wie in 4.9 Aufschluffia Δfflber die Struktur des von ihnen erzeugten Ideales geben, da sie nicht das Produkt nichttrivialer Polynome sind. GlffiΔfflcklicherweise aber besitzen sie gerade die richtige LffiΞfflnge um als Determinanten aufgefaffiafflt werden zu kffiˇfflnnen und dieser Trick ermffiˇfflglicht es dann, die PrimffiΞfflrkomponenten zu finden. Das Auftauchen von Determinanten fffiΔfflhrt sofort auf Determinantenideale und diese bilden den Kern der Untersuchungen. Da Determinantenideale in verschiedenen ZuammenhffiΞfflngen auftreten, sind sie gut erforscht, und es sei hier ein Ergebnis zitiert, das auf Eagon und Hochster zurffiΔfflckgeht. (Siehe [6], Theorem 1.)

Theorem 5.1
Sei R ein kommutativer Noether'scher IntegritffiΞfflltsbereich. Sei $M = (c_{ij})$ eine Matrix vom Typ $r \times s$ und c_{ij} Unbestimmte ffiΔfflber R. Sei weiter $H = (s_0, \ldots, s_m)$ eine strikt anwachsende Folge natffiΔfflrlicher Zahlen mit $s_0 = 0$, $s_m = s$ und $m < r$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq n \leq s$ und $t \in \mathbb{N}$, $1 \leq t \leq m$. $I = I_{H,n} = I_{H,n}(M)$ bezeichne das durch die $(t+1) \times (t+1)$-Minoren der ersten s_t Spalten von M und $c_{11}, \ldots, c_{1n}$ generierte Ideal. Wenn immer dann $n = s_t$ gilt, ist $I_{H,n}$ ein Primideal in $R[c_{11}, \ldots, c_{rs}]$. □

Es folgt aus diesem Theorem insbesondere, daffia fflim Polynomring

$$K[t_1, \ldots, t_{2a}, y_1, \ldots, y'_a, z_1, \ldots, z'_a]$$

das Ideal D, das durch die 2×2-Unterdeterminaten der Matrix

$$\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_a & t_{a+1} & \cdots & t_{2a} \\ y_1 & \cdot & y_a & y'_1 & \cdot & y'_a \\ z_1 & \cdots & z_a & z'_1 & \cdots & z'_a \end{pmatrix}$$

und allen t_i erzeugt wird, prim ist: man setze n aus dem Theorem gleich $2a$ und nehme $s = (1, 2a)$, so daffia ffl$t = 1$.

Es ist nun der natffiΔfflrliche Homomorphismus

$$\rho : K[t_1, \ldots, z'_a] \to K[y_1, \ldots, z'_a],$$

via $t_i \to 0, y_i \to y_i, y'_i \to y'_i, z_i \to z_i, z'_i \to z'_i$ fffiΔfflr alle jeweils in Frage kommenden i, ein surjektiver und D enthffiΞfflt den Kern von ρ. Das impliziert nach [9], 3.30, daffia fflldas Bild des Ideals D auch prim ist.

Notation 5.2
Sei B ein Ring und $b_{11}, \ldots, b_{rs}$ Elemente aus B mit $1 \leq l \leq r, s \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & . & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rs} \end{vmatrix}_{(l)}$$

fffiΔfflr das durch die $l \times l$-Minoren der obenstehenden Matrix (b_{ij}) in B erzeugte Ideal.

Mit dieser Schreibweise ergibt sich also aus 5.1, daffia fflwenn $a_{11}, \dots, a_{rs}$ Unbestimmte ffi∆fflber dem Kffi˘fflrper K sind und $r, s \geq 2$ gilt, das Ideal

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & . & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rs} \end{vmatrix}_{(2)}$$

ein Primideal ist.

Lemma 5.3

Das Ideal $\mathfrak{a} \subset K[y_1^1, \dots, y_2^\xi, z_1^1, \dots, z_{n-\omega}^2] \stackrel{!}{=} A$, dessen Erzeuger die Polynome

$$y_1^i z_j^1 + y_2^i z_j^2, \qquad (i,j) \in \{1, \dots, \xi\} \times \{1, \dots, n-\omega\}$$

sind, hat das Ideal

$$\mathfrak{p} = \begin{vmatrix} y_1^1 & \cdots & y_1^\xi & -z_1^2 & \cdots & -z_{n-\omega}^2 \\ y_2^1 & \cdots & y_2^\xi & z_1^1 & \cdots & z_{n-\omega}^1 \end{vmatrix}_{(2)}$$

der Hffi˘fflhe $\xi + n - \omega - 1$ als minimales Primideal.

Beweis.

Es gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, da die gegebenen Erzeuger von $\mathfrak{a}$ als 2×2-Determinanten der $\mathfrak{p}$ definierenden Matrix erscheinen. Weiterhin enthalten $\mathfrak{a}$ sowohl als $\mathfrak{p}$ das Polynom y_1^1 nicht, da sffiΞfflmtliche Erzeuger homogen vom Grade zwei sind. Folglich gilt $\mathfrak{a} : (y_1^1) \subseteq \mathfrak{p} : (y_1^1) = \mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{p}$ Primideal ist. Andererseits gilt $z_a^1 z_b^2 - z_b^1 z_a^2 \in \mathfrak{a} : (y_1^1)$ fffi∆fflr alle $1 \leq a < b \leq n - \omega$, da

$$y_1^1(z_a^1 z_b^2 - z_b^1 z_a^2) = z_b^2(y_1^1 z_a^1 + y_2^1 z_a^2) - z_a^2(y_1^1 z_b^1 + y_2^1 z_b^2) \in \mathfrak{a}.$$

Auch z_1^1 ist nicht in $\mathfrak{p}$, also gilt $\mathfrak{a} : (y_1^1 z_1^1) = (\mathfrak{a} : (y_1^1)) : (z_1^1) \subseteq \mathfrak{p} : (z_1^1) = \mathfrak{p}$. Wie eben ist aber $y_1^a y_2^b - y_1^b y_2^a$ in $\mathfrak{a} : (z_1^1)$, da

$$z_1^1(y_1^a y_2^b - y_1^b y_2^a) = y_2^b(z_1^1 y_1^a + z_1^2 y_2^a) - y_2^a(y_2^b z_1^2 + y_1^b z_1^1) \in \mathfrak{a}.$$

Es folgt, daffia ffl$\mathfrak{a} : (y_1^1 z_1^1) \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a} : (y_1^1 z_1^1)$, so daffia fflnach [9], 4.17 $\mathfrak{p}$ ein assoziiertes Primideal zu $\mathfrak{a}$ ist.

Falls nun gilt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ fffi∆fflr ein Primideal $\mathfrak{q}$ in A ($\mathfrak{a}$ ist nach obigem nicht prim!), dann ist $y_1^1 z_1^1 \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$, so daffia ffl $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ sein muffia fflwegen der Primheit von $\mathfrak{p}$ und $y_1^1 z_1^1 \notin \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$. $\mathfrak{p}$ ist minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$.

Es bleibt die Aussage zur Hffi˘fflhe von $\mathfrak{p}$. Wir machen dazu

Definition 5.4

Es bezeichne in A (und allen ffiΞfflhnlich konstruierten Ringen der Zukunft) $\mathfrak{p}_{ij}$ das (nach [6]) Primideal

$$\begin{vmatrix} y_1^1 & \cdots & y_1^i & -z_1^2 & \cdots & -z_j^2 \\ y_2^1 & \cdots & y_2^i & z_1^1 & \cdots & z_j^1 \end{vmatrix}_{(2)}.$$

Die strikt aufsteigende Primidealkette

$$0 \subset \mathfrak{p}_{11} \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_{1,n-\omega} \subset \mathfrak{p}_{2,n-\omega} \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_{\xi,n-\omega} = \mathfrak{p}$$

zeigt dann, daffia fflht$(\mathfrak{p}) \geq (n-\omega) + \xi - 1$ ist. Andererseits ist

$$\mathfrak{p} \subseteq (y_1^1, \ldots, y_1^\xi, z_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^1) = \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}' + (y_2^1) \subseteq$$

$$\subseteq \mathfrak{p}' + (y_2^1, y_2^2) \subseteq \mathfrak{p}' + (y_2^1, \ldots, y_2^\xi, z_1^2, \ldots, z_{n-\omega}^2) = \mathfrak{n}$$

eine aufsteigende Kette von Primoberidealen von $\mathfrak{p}$, in der niemals das Gleichheitszeichen gilt. Es folgt, daffia ffl

$$\begin{aligned} \mathrm{ht}\,(\mathfrak{p}) &\leq \dim(A) - ((n-\omega) + \xi + 1) \\ &= 2(n - \omega + \xi) - (n-\omega) - \xi - 1 \\ &= n - \omega + \xi - 1. \end{aligned}$$

Mit der zuerst gezeigten Ungleichung folgt das Lemma. □

Lemma 5.5
Die Bezeichnungen seien wie im vorangegangenen Lemma. Sofern dann $n - \omega$ mindestens gleich zwei ist, so ist das Ideal $\mathfrak{y} = (y_1^1, \ldots, y_1^\xi, y_2^1, \ldots, y_2^\xi)$ ein minimales Element in $\mathrm{ass}(\mathfrak{a})$.
Beweis.
Es gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{y}$ und $(z_1^1 z_2^2 - z_2^1 z_1^2) \notin \mathfrak{y}$. Folglich ist $\mathfrak{a} : (z_1^1 z_2^2 - z_2^1 z_1^2) \subseteq \mathfrak{y}$. Andererseits gilt fffiΔfflr alle (i,j) mit $i \in \{1, \ldots, \xi\}, j = 1$ oder 2, daffiaffl

$$\begin{aligned} y_j^i(z_1^1 z_2^2 - z_2^1 z_1^2) &= \left.\begin{aligned} &(y_1^i z_1^1 + y_2^i z_1^2) z_2^2 \\ -\ &(y_2^i z_2^2 + y_1^i z_2^1) z_1^2 \end{aligned}\right\} \in I, \text{falls} \quad j = 1; \\ &= \left.\begin{aligned} -\ &(y_1^i z_1^1 + y_2^i z_1^2) z_2^1 \\ +\ &(y_1^i z_2^1 + y_2^i z_2^2) z_1^1 \end{aligned}\right\} \in I, \text{falls} \quad j = 2, \end{aligned}$$

woraus folgt, daffia ffl$(z_1^1 z_2^2 - z_2^1 z_1^2) \cdot \mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{a}$ und demzufolge $\mathfrak{a} : (z_1^1 z_2^2 - z_2^1 z_1^2) = \mathfrak{y}$ ist. Also gehffi˘fflrt $\mathfrak{y}$ zu $\mathrm{ass}(\mathfrak{a})$.

Wie schon im letzten Lemma nehmen wir nun an, daffia fflfffiΔfflr ein $\mathfrak{q}$ im Spektrum von A die Relation $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{y}$ richtig ist. Wegen $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{a} \supseteq (z_1^1 z_2^2 - z_2^1 z_1^2)\mathfrak{y}$ und der Primheit von $\mathfrak{y}$ muffia ffldann entweder $\mathfrak{q} = \mathfrak{y}$ oder $(z_1^1 z_2^2 - z_2^1 z_1^2) \in \mathfrak{y}$ sein. Letzteres ist nicht der Fall, also ist gezeigt, daffia ffl$\mathfrak{y}$ minimales Primoberideal zu $\mathfrak{a}$ ist. □

Lemma 5.6
Mit den Bezeichnungen von 5.5 ist das Ideal $\mathfrak{z} = (z_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^1, z_1^2, \ldots, z_{n-\omega}^2)$ in $\min(\mathfrak{a})$.

Beweis.
Analog zu dem Beweis von 5.5. □

Wir haben nun genffiΔfflgend Informationen gesammelt, um zum Kernpunkt dieses Kapitels vorzustoffiafflen.

Satz 5.7
Sei F eine Zweikrone vom Index $(\xi, \eta, \eta+2, \omega, n)$, A der zugeordnete und nach 4.8 vereinfachte reduzierte Polynomring und $\mathfrak{a}$ das gemffiΞa ffl3.1 und 4.8 transformierte Fahnenraumideal. Dann gilt:

1. ist $\xi = n - \omega$=1, dann ist $\mathfrak{a}$ gleich dem Hauptideal $(y_1^1 z_2^1 + y_1^2 z_1^1)$;
2. ist $\xi = 1, n-\omega > 1$ oder $\xi > 1, n-\omega = 1$, dann ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_{1,n-\omega} \cap (y_1^1, y_1^2)$ beziehungsweise $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_{\xi,1} \cap (z_1^1, z_2^1)$;
3. sind sowohl ξ als auch $n-\omega$ grffiˇaffler als 1, gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_{\xi,n-\omega} \cap \mathfrak{y} \cap \mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{y} = (y_1^1, \ldots, y_1^\xi, y_2^1, \ldots, y_2^\xi)$ und $\mathfrak{z} = (z_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^1, z_1^2, \ldots, z_{n-\omega}^2)$.

Die Lokalisation des Quotienten $B = A/\mathfrak{a}$ nach dem maximalen Ideal $\mathfrak{n} \cdot B = (y_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^2) \cdot B$ ist im ersten Fall vollstffiΞfflndiger Durchschnitt; im zweiten vollstffiΞfflndiger Durchschnitt falls $n-\omega$ beziehungsweise ξ gleich zwei ist und sonst niemals Cohen-Macaulay; im letzten niemals Cohen-Macaulay.

Beweis.

1. Hier ist nichts zu beweisen.
2. Ist $n-\omega > 2$, so gilt $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_{1,n-\omega}) = n-\omega > 2$ und $\operatorname{ht}(y_1^1, y_1^2) = 2$. In 5.3 und 5.5 wurde gezeigt, daffia ffl$\mathfrak{p}_{1,n-\omega}$ und $\mathfrak{y}$ zu den assoziierten Primidealen von $\mathfrak{a}$ gehffiˇfflren. Es folgt aus 4.4 (2) und der Tatsache daffia ffl$K[y_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^2]$ ein regulffiΞfflrer Ring ist, daffia fflder Quotientenring nicht Cohen-Macaulay sein kann.

   Es bleibt zu zeigen, daffia ffl$\mathfrak{a}$ das angegebene Radikal ist. Dazu ist einerseits klar, daffia ffl$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_{1,n-\omega} \cap \mathfrak{y}$ ist, da $\mathfrak{a}$ offensichtlich in beiden Idealen enthalten ist. Wir setzen fffiΔfflr den Beweis der Umkehrung

$$\mathfrak{b} = \begin{vmatrix} y_1^1 & -z_1^2 & -z_2^2 & -z_3^2 & \cdots & -z_{n-\omega}^2 \\ y_2^1 & z_1^1 & y_2^1 & z_3^1 & \cdots & z_{n-\omega}^1 \end{vmatrix}_{(2)} \cap \mathfrak{y} = \mathfrak{p}_{1,n-\omega} \cap \mathfrak{y}.$$

   Nach der Definition von $\mathfrak{b}$ gilt dann fffiΔfflr jedes $p \in \mathfrak{b}$ (also $p \in \mathfrak{p}_{1,n-\omega}$):

$$\begin{aligned} p &= a + p_{12} \begin{vmatrix} -z_1^2 & -z_2^2 \\ z_1^1 & z_2^1 \end{vmatrix} + p_{13} \begin{vmatrix} -z_1^2 & -z_3^2 \\ z_1^1 & z_3^1 \end{vmatrix} + \\ & \quad \ldots + p_{n-\omega-1,n-\omega} \begin{vmatrix} -z_{n-\omega-1}^2 & -z_{n-\omega}^2 \\ z_{n-\omega-1}^1 & z_{n-\omega}^1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

wobei a den Bestandteil von p enthffiΞfflt, der durch Kombination der Unterdeterminanten die die $\mathfrak{y}$-Spalte enthalten entsteht.

Wir zerlegen nun p_{ij} in $a_{ij}y_1^1 + b_{ij}y_2^1 + c_{ij}$ so, daffia ffl stets c_{ij} nur noch ein Polynom in den z_β^α ist. Weiterhin wissen wir, daffia ffl$p$ in $\mathfrak{y}$ ist, mithin eine Zerlegung $p = ay_1^1 + by_2^1$ gestattet. Durch Gleichsetzen ergibt sich

$$y_1^1 \left(a - \sum_{i<j} a_{ij} z_{ij} \right) + y_2^1 \left(b - \sum_{i<j} b_{ij} z_{ij} \right) = \sum_{i<j} c_{ij} z_{ij}$$

mit $z_{ij} = \begin{vmatrix} -z_i^2 & -z_j^2 \\ z_i^1 & z_j^1 \end{vmatrix}$. Nun ist der linke Teil der Gleichung in $\mathfrak{y}$, also auch der rechte. Das einzige Polynom aber, das gleichzeitig in $\mathfrak{y}$ sein kann und nur durch z_β^α gebildet wird, ist das Nullpolynom. Es ist also

$$\sum_{i<j} p_{ij} z_{ij} = \sum_{i<j} \left(a_{ij} y_1^1 + b_{ij} y_2^1 \right) z_{ij}.$$

Da nun aber $\mathfrak{y} = (y_1^1, y_2^1)$ ist, ist jedes Polynom in $\mathfrak{y}$ eine Summe aus einem Vielfachen von y_1^1 und y_2^1. In 5.5 hatten wir schon gezeigt, daffia ffl$z_{ij}\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{a}$ liegt fffiΔfflr alle $1 \leq i < j \leq n - \omega$, und das hat zur Folge, daffia ffl$p = a + \sum_{i<j} \left(a_{ij} y_1^1 + b_{ij} y_2^1 \right) z_{ij}$ in $\mathfrak{a}$ liegt. Also gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

3. Analog zu 2. sei $\mathfrak{b}$ definiert als Schnitt von

$$\mathfrak{p} = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \cdots & y_1^\xi & -z_1^2 & -z_2^2 & \cdots & -z_{n-\omega}^2 \\ y_2^1 & y_2^2 & \cdots & y_2^\xi & z_1^1 & y_2^1 & \cdots & z_{n-\omega}^1 \end{vmatrix}_{(2)},$$

$\mathfrak{y} = (y_1^1, \ldots, y_1^\xi, y_2^1, \ldots, y_2^\xi)$ und $\mathfrak{z} = (z_1^1, \ldots, z_{n-\omega}^1, z_1^2, \ldots, z_{n-\omega}^2)$. Sei wiederum $p \in \mathfrak{b}$. Wir versuchen zu zeigen, daffia ffldann p in $\mathfrak{a}$ liegt. $p \in \mathfrak{b}$ impliziert $p \in \mathfrak{p}$, und so gibt es eine Darstellung

$$p = a + \sum_{i<j} a_{ij} y_{ij} + \sum_{i'<j'} b_{i'j'} z_{i'j'}$$

in der a den Teil von p enthffiΞfflt, der von Determinanten erzeugt wurde, die sowohl $y-$ als auch $z-$Spalten einbeziehen, a_{ij} und $b_{i'j'}$ Polynome sind, und $y_{ij} = \begin{vmatrix} y_i^2 & y_j^2 \\ y_i^1 & y_j^1 \end{vmatrix}$ fffiΔfflr $1 \leq i < j \leq \xi$,$z_{i'j'} = \begin{vmatrix} -z_{i'}^2 & -z_{j'}^2 \\ z_{i'}^1 & z_{j'}^1 \end{vmatrix}$ fffiΔfflr $1 \leq i' < j' \leq n - \omega$. Wir zerlegen a_{ij} in $\alpha_{ij} + \beta_{ij} + \gamma_{ij}$ wobei $\alpha_{ij} \in \mathfrak{z}, \beta_{ij} \in \mathfrak{y} \backslash \mathfrak{z}, \gamma_{ij} \in K$ ist. Analog gelte $b_{i'j'} = \alpha'_{i'j'} + \beta'_{i'j'} + \gamma'_{i'j'}$ mit $\alpha'_{i'j'} \in \mathfrak{y}, \beta'_{i'j'} \in \mathfrak{z} \backslash \mathfrak{y}, \gamma'_{i'j'} \in K$.

Weil nun alle anderen Monome in p von den Mindestgrad drei haben oder in $\mathfrak{y} \cap \mathfrak{z}$ liegen, gilt $\sum_{i<j} \gamma_{ij} y_{ij} + \sum_{i'<j'} \gamma'_{i'j'} z_{i'j'} = 0$ und wie oben folgt,

daffia fflbeide Summanden verschwinden. Also ist

$$p - \left(a + \sum_{i<j} \alpha_{ij} y_{ij} + \sum_{i'<j'} \alpha'_{i'j'} z_{i'j'} \right) = \sum_{i<j} \beta_{ij} y_{ij} + \sum_{i'<j'} \beta'_{i'j'} z_{i'j'} \in \mathfrak{y} \cap \mathfrak{z},$$

da der linksstehende Term in $\mathfrak{y} \cap \mathfrak{z}$ ist.

Es folgt wie im zweiten Beweisteil, daffia ffl $\sum_{i<j} \beta_{ij} y_{ij} = \sum_{i'<j'} \beta'_{i'j'} z_{i'j'} = 0$. Also gilt $p = a + \sum_{i<j} \alpha_{ij} y_{ij} + \sum_{i'<j'} \alpha'_{i'j'} z_{i'j'}$. Ist g ein Monom in einem α_{ij}, so ist $g = z_s^r g'$ fffiΔfflr ein Paar (r, s) mit $r = 1$ oder 2 und $s \leq n - \omega$ und also ist

$$\begin{aligned} g y_{ij} &= g' z_s^r y_{ij} = g' z_s^r (y_1^i y_2^j - y_2^i y_1^j) \\ &= g' \left[y_2^j (y_1^i z_s^1 + y_2^i z_s^2) - y_2^i (y_2^j z_s^2 + y_1^j z_s^1 \right] \quad \text{falls } r = 1, \\ &= g' \left[y_1^i (y_2^j z_s^2 + y_1^j z_s^1) - y_1^j (y_1^i z_s^1 + y_2^i z_s^2) \right] \quad \text{falls } r = 2. \end{aligned}$$

Analog folgt fffiΔfflr ein Monom h von $\alpha'_{i'j'}$, daffia ffles gleich $y_{s'}^{r'} h'$ ist mit $s' = 1$ oder 2, $r' \in \{1, \ldots, \xi\}$ und weiter, daffia ffl$h \cdot z_{i'j'} = y_{s'}^{r'} z_{i'j'} h' \in \mathfrak{a}$ ist.

Das beweist, daffia fflalle Summanden von p in $\mathfrak{a}$ liegen, und so ist $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Da die entgegengesetzte Relation trivial ist, gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$.

Wir kommen nun zu den Aussagen die den Ringtyp der lokalisierten Zweikronenringe betreffen. In 1. haben wir es zu tun mit dem Quotienten eines lokalen regulffiΞfflren Ringes nach einem Hauptideal; da lokale regulffiΞfflre Ringe nach [9], 15.34 IntegritffiΞffltsbereiche sind, ist jedes Hauptideal durch eine regulffiΞfflre Folge erzeugbar und das wiederum beweist nach 4.5, daffia fflder Quotient lokal vollstffiΞfflndiger Durchschnitt ist.

In 2. ist das faktorisierende Ideal gemischt, wenn $n - \omega$ beziehungsweise ξ verschieden von zwei ist. Das folgt aus 5.3, 5.5 und 5.6. Nach 4.6 folgt fffiΔfflr diese FffiΞfflle, daffia fflder Quotient nicht Cohen-Macaulay sein kann und den Defekt $n - \omega - 2$ bzw. $\xi - 2$ aufweist. Ist aber $n - \omega = 2$, dann bildet $\big((y_1^1 z_1^1 + y_2^1 z_1^2), (y_1^1 z_2^1 + y_2^1 z_2^2)\big)$ eine normale Sequenz, da das durch den ersten Erzeuger gebildete Hauptideal prim ist, und also ist der lokalisierte Quotientenring nach 4.5 vollstffiΞfflndiger Durschnitt. Analog ist bei $\xi = 2$, $n - \omega = 1$ die Folge $\big((y_1^1 z_1^1 + y_2^1 z_1^2), (y_1^2 z_1^1 + y_2^2 z_1^2)\big)$ regulffiΞfflr in A, so daffiaffl auch hier $(A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{n} \cdot (A/\mathfrak{a})}$ vollstffiΞfflndiger Durchschnitt ist.

Im letzten Fall ist es hinreichend zu zeigen, daffia fflnicht alle Primteiler von $\mathfrak{a}$ die gleiche Hffi˘fflhe haben kffi˘fflnnen. Nach 5.3, 5.5, 5.6 haben die drei assoziierten Primideale von $\mathfrak{a}$ die Hffi˘fflhen $(n - \omega + \xi - 1), 2\xi$ beziehungsweise $2(n - \omega)$. Man erkennt mffiΔfflhelos, daffia fflder Defekt des Quotientenringes gleich

$$\max\left(|(n - \omega + \xi - 1) - 2\xi)|, |(n - \omega + \xi - 1) - 2(n - \omega)|, |2(n - \omega - \xi)|\right)$$

$$\geq |n - \omega - \xi| + 1$$

ist. □

Wir bringen jetzt die zu Beginn dieses Kapitels versprochenen Resultate ffiΔfflber den Zerfall von Zweikronen.

Satz 5.8

Sei F eine Zweikrone vom Index $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$ ffiΔfflber dem Kffiˇfflrper K und I das definierende Ideal von F in $R = K[x^1_{\xi+1}, \dots, w^\omega_n]$. Sei A der reduzierte Polynomring von F und $\mathfrak{a}$ das reduzierte definierende Ideal. Es gelte $\xi + (n-\omega) \leq \zeta - \eta$ und $\xi = 1$ oder $n - \omega = 1$.

Dann ist F eine irreduzible VarietffiΞfflt der Dimension $\Delta(F) + (\zeta - \eta) \cdot (\xi + n - \omega) - (n - \omega)$. ($\Delta(F)$ ist auf Seite 30 erklffiΞfflrt.) $\mathfrak{a}$, und damit I, ist durch eine normale A- beziehungsweise R-Sequenz erzeugtes Primideal und jede Lokalisierung des Koeffizientenringes von F ist ein vollstffiΞfflndiger Durchschnitt.

Beweis.

Sei zunffiΞfflchst $\xi = 1$. Nach 3.1, 3.4 und 4.8 wird $\mathfrak{a}$ durch die Polynome

$$\left(\sum_1^{\zeta-\eta} y^1_i z^i_1, \sum_1^{\zeta-\eta} y^1_i z^i_2, \dots, \sum_1^{\zeta-\eta} y^1_i z^i_{n-\omega} \right) \quad (*)$$

erzeugt. Da in $K[y^1_1, \dots, y^1_{\zeta-\eta}]$ das Ideal $(y^1_1, \dots, y^1_{\zeta-\eta})$ den Grad $\zeta - \eta$ hat, und $\zeta - \eta \geq n - \omega$ ist, gilt nach [6], Prop. 21, daffiaffl $(*)$ eine normale A-Sequenz ist. Es folgt die Dimensionsaussage, sowie, daffia ffl$(A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p}$ vollstffiΞfflndiger Durchschnitt ist fffiΔfflr alle Primideale $\mathfrak{p}$, in A, die $\mathfrak{a}$ enthalten. (NatffiΔfflrlich auch fffiΔfflr alle, die $\mathfrak{a}$ nicht umfassen, dann ist die Lokalisierung einfach der Nullring.) Da $R/I \cong (A/\mathfrak{a})[t_1, \dots, t_{\Delta-\mathrm{card}(\mathfrak{F}\cup\mathfrak{M})}]$ ist, folgt entsprechendes fffiΔfflr R/I. Die Dimension von F ist dann gleich der Dimension von R abzffiΔfflglich der Summe aus $\jmath(F)$ und $n - \omega$, was gleich $\Delta(F) - n + \omega$ ist.

Nun gilt sogar $\zeta - \eta > n - \omega$ nach Voraussetzung, so daffia fflnach [6], Prop. 22 $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist. Mithin ist F irreduzibel. Der Fall $n - \omega = 1$ lffiΞafflt sich analog behandeln, ist aber eigentlich in dem gezeigten enthalten, da beide Relationen unter einer Dualisierung der Zweikrone (siehe Seite 31) auseinander hervorgehen. □

Satz 5.9

Sei F eine Zweikrone zum Index $(\xi, \eta, \zeta, \omega, n)$ ffiΔfflber K. Wenn dann $\xi + (n - \omega) \geq \zeta - \eta$ gilt, ist F reduzibel.

Beweis.

Es sei A der reduzierte Polynomring zu F und $\mathfrak{a}$ das reduzierte definierende Ideal. Es genffiΔfflgt zu zeigen, daffia ffl$\mathfrak{a}$ nicht prim ist.

Nach 3.1, 3.4 und 4.8 ist $\mathfrak{a}$ erzeugt durch die Elemente der Produktmatrix

$$\begin{pmatrix} y_1^1 & \cdots & y_{\zeta-\eta}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^\xi & \cdots & y_{\zeta-\eta}^\xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1^1 & \cdots & z_{n-\omega}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{\zeta-\eta} & \cdots & z_{n-\omega}^{\zeta-\eta} \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man das Produkt der y-Matrix mit der ersten z-Spalte, erhffiΞfflt man

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1^1 z_1^1 & + & y_2^1 z_1^2 & + & \cdots & + & y_{\zeta-\eta}^1 z_1^{\zeta-\eta} & \in & \mathfrak{a}, \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ y_1^\xi z_1^1 & + & y_2^\xi z_1^2 & + & \cdots & + & y_{\zeta-\eta}^\xi z_1^{\zeta-\eta} & \in & \mathfrak{a}. \end{array}$$

Fffi∆fflhrt man mit diesem 'Gleichungssystem' zeilenweise Elimination durch, so ist das Resultat in Zeile $\zeta - \eta$, falls $\xi \geq \zeta - \eta$ ist, gleich

$$\begin{vmatrix} y_1^1 & \cdots & y_{\zeta-\eta}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{\zeta-\eta} & \cdots & y_{\zeta-\eta}^{\zeta-\eta} \end{vmatrix} \cdot z_1^{\zeta-\eta} \in \mathfrak{a},$$

wie man sich unmittelbar klarmacht.

Da jedes Monom in jedem Erzeuger von $\mathfrak{a}$ stets sowohl einen z- als auch einen y-Term enthffiΞfflt, gilt das fffi∆fflr alle Monome beliebiger Elemente von $\mathfrak{a}$. Folglich sind weder $z_1^{\zeta-\eta}$ noch die obenstehende Determinante in $\mathfrak{a}$, das heiffiafflt $\mathfrak{a}$ ist nicht prim in diesem Fall.

Falls nun aber $\xi < \zeta - \eta$ ist, lautet das Resultat des Gauffiaffl'schen Algorithmus

$$\begin{vmatrix} y_1^1 & \cdots & y_\xi^1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^\xi & \cdots & y_\xi^\xi \end{vmatrix} \cdot z_1^\xi + \begin{vmatrix} y_1^1 & \cdots & y_{\xi-1}^1 & y_{\xi+1}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^\xi & \cdots & y_{\xi-1}^1 & y_{\xi+1}^\xi \end{vmatrix} \cdot z_1^{\xi+1} + \cdots$$
$$+ \begin{vmatrix} y_1^1 & \cdots & y_{\xi-1}^1 & y_{\zeta-\eta}^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^\xi & \cdots & y_{\xi-1}^\xi & y_{\zeta-\eta}^\xi \end{vmatrix} \cdot z_1^{\zeta-\eta} \in \mathfrak{a}.$$

Variiert man nun die Spalten der z und fffi∆fflhrt den Gauffiaffl'schen Algorithmus jedes mal auf die gleiche Weise durch, so erhffiΞfflt man als Resultat stets die oben dargestellte Relation, mit variierenden unteren Indizes der z_j^i. Wir schreiben dise $(n - \omega)$ Relationen untereinander und betrachten nun die Determinanten in den y-Variablen als gesucht. Da $n - \omega \geq \zeta - \eta - \xi$ vorausgesetzt ist, endet der Gauffiaffl'sche Algorithmus fffi∆fflr dieses System vom Format

$(n-\omega)\cdot(\zeta-\eta-\xi)$ in der $(\zeta-\eta-\xi)$-ten Zeile mit dem Endergebnis

$$\begin{vmatrix} y_1^1 & \cdots & y_{\xi-1}^1 & y_{\zeta-\eta}^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^\xi & \cdots & y_{\xi-1}^\xi & y_{\zeta-\eta}^\xi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1^\xi & \cdots & z_{\zeta-\eta-\xi}^\xi \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{\zeta-\eta} & \cdots & z_{\zeta-\eta-\xi}^{\zeta-\eta} \end{vmatrix} \in \mathfrak{a}.$$

Wiederum können beide Determinanten nicht Elemente von $\mathfrak{a}$ sein und somit ist gezeigt, daß $\mathfrak{a}$ nicht prim ist. $\square$

Wir beenden jetzt die Untersuchung von Fahnenraumklassen und beweisen ein Ergebnis, das zeigt, daß die Struktur des Fahnenraumringes faktorisiert nach dem Fahnenraumideal im wesentlichen nur von solchen Elementen der teilweise geordneten Menge M abhängt, die in einem Zyklus im Sinne von Definition 1.6 enthalten sind.

Lemma 5.10
Sei $F=(K,\tau)$ ein reduzierter Fahnenraum vom Typ $\tau=(M,\sqsubset,d)$ mit $n=d(\mathbf{1})$ und $x\in M\backslash\{\mathbf{1}\cup\mathbf{0}\}$. Es bezeichne $\tilde{M}$ die Menge $M\backslash x$ und $\tilde{\tau}$ den auf $\tilde{M}$ vermöge der eingeschränkten teilweisen Ordnung $\sqsubset$ und der eingeschränkten Dimensionsfunktion d induzierten Typ. Ist dann x so, daß es nur einen Nachbarn y in $(M\backslash\{\mathbf{0}\cup\mathbf{1}\},\sqsubset)$ besitzt und bezeichnen $R(F)$ beziehungsweise $R(\tilde{F})$ die zu den Fahnenräumen F und $\tilde{F}=(K,\tilde{\tau})$ gehörigen Polynomringe und $I(F)$ und $I(\tilde{F})$ die zugehörigen definierenden Ideale, dann gibt es einen Isomorphismus

$$\phi: R(F) \xrightarrow{\cong} R(\tilde{F})[t_1,\ldots,t_{d(x)\cdot(n-d(x))}],$$

so daß $\phi(I(F))=I(\tilde{F})+(t_1,\ldots,t_\nu)$ ist. Dabei gilt

$$\begin{aligned}\nu &= \min(d(x),d(y))\cdot\min((n-d(x)),(n-d(y)))\\ &= \min((n-d(x))\cdot d(y),(n-d(y))\cdot d(x)).\end{aligned}$$

Beweis.
Sei $d(x)=\xi, d(y)=\eta$. Natürlich ist $R(F)$ aus $R(\tilde{F})$ durch Hinzunahme von $d(x)\cdot(n-d(x))$ Unbestimmten hervorgegangen.

Es sei zunächst $x\sqsubset y$ und der Fahnenraum wie üblich durch lokale Graßmankoordinaten dargestellt.

Wir wenden Lemma 2.3 an und definieren dazu die folgende Abbildung $\psi: R(F)\to R(F)$:

- $\psi(x_j^i)=f_{i,j}^{x,y}$, falls $1\le i\le\xi$ und $\eta\le j\le n$;
- alle anderen Unbestimmten in $R(F)$ werden auf sich selbst abgebildet.

Es ist sofort klar, daffia fflψ ein Epimorphismus ist und nach 2.3 also ein Automorphismus. Weiterhin ist offensichtlich, daffia ffldas Urbild von $I(F)$ unter ψ erzeugt wird durch die x^i_j mit $1 \le i \le \xi, \eta \le j \le n$ vereinigt mit allen Relationen aus $I(F)$, die x nicht enthalten; und daffiaffl es gerade $d(x) \cdot (n - d(y))$ solche x^i_j sind. Schlieffiafflen wir also an die Abbildung ψ^{-1} den Isomorphismus $\chi : R(F) \to R(\tilde{F})[t_1, \dots, t_{d(x)\cdot(n-d(x))}]$ an, unter dem alle x^i_j mit beliebigen (i,j) auf $t_{\xi\cdot(n-j)+i}$ und alle anderen Unbestimmten auf die ihres Namens im Bildring abgebildet werden, folgt die Behauptung.

Der Fall $x \sqsubset y$ ist vollkommen analog abhandelbar. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] M. BOŽEK und K. DRECHSLER, Zur Topologie der FahnenrffiΞfflume: Definitionen und Fragestellungen, *Math. Nachr.* **99** (1980), 251-258.

[2] M. BOŽEK und K. DRECHSLER, Morphismen von Fahnenmengen, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **LVIII–LIX** (1990),135-148.

[3] M. BOŽEK und K. DRECHSLER, SingularitffiΞfflten auf FahnenrffiΞfflumen, (in Vorbereitung).

[4] I.S. COHEN, On the structure and ideal theory of complete local rings, *Trans. AMS* **59** (1946),54-106.

[5] P. GRIFFITHS and J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry* ('A Wiley-Interscience publication', New York, 1978).

[6] M. HOCHSTER and J. EAGON, Cohen-Macaulay Rings, Invariant Theory, and the Generic Perfection of Determinantal Loci, *Am. J. Math.* **93** (1971), 1020-1058.

[7] H. MATSUMURA, *Commutative Ring Theory* (Cambridge University Press, 1986).

[8] J. ROTMAN, *Homological Algebra* (Academic Press London, 1979).

[9] R. Y. SHARP, *Steps in Commutative Algebra* (Cambridge University Press, 1990).

[10] J. STffiæfflCKRAD and W. VOGEL, *Buchsbaum Rings and Applications* (Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1986).