CHAPITRE 4: CALCUL D'ITÔ

MR2, module B1: Cours de calcul stochastique
Fabrice Baudoin

Table des matières

1. Intégrale d'Itô

1.1. **Variation des trajectoires browniennes.** Pour développer une théorie de l'intégration par rapport au mouvement brownien, la première idée est d'essayer une approche trajectorielle, c'est-à-dire d'essayer de définir une intégrale $\int u_s dB_s$ comme une limite presque sûre de sommes de Riemann. La théorie classique de l'intégration de Riemann-Stieljes nous dit qu'une telle approche n'est possible que si les trajectoires sont localement à variation bornée[1]. On va tout de suite montrer que cette approche trajectorielle n'est pas possible.
Si

$$\Delta_n[0,t] = \{0 = t_0^n \leq t_1^n \leq ... \leq t_n^n = t\}$$

est une subdivision de l'intervalle de temps $[0,t]$, on note

$$\mid \Delta_n[0,t] \mid = \max\{\mid t_{k+1}^n - t_k^n \mid, k = 0,...,n-1\},$$

le pas de cette subdivision.

Proposition 1. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$. Soit $t \geq 0$. Pour toute suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

on a au sens L^2 (et donc en probabilité):

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 = t.$$

1. En fait il existe une théorie de l'intégration due à Young qui permet d'intégrer contre des fonctions de p-variation finie avec $p < 2$.

En particulier les trajectoires browniennes sont presque sûrement de variation infinie sur tout intervalle $[0,t]$.

Preuve.
On note

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 .$$

On a alors, par indépendance et stationnarité des accroissements browniens:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((V_n - t)^2\right) &= \mathbb{E}\left(V_n^2\right) - 2t\mathbb{E}\left(V_n\right) + t^2 \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right)^2 \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 \right) - t^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right)^4 \right) + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} \mathbb{E}\left(\left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n} \right)^2 \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 \right) - t^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \mathbb{E}\left(B_1^4\right) + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} (t_j^n - t_{j-1}^n)(t_k^n - t_{k-1}^n) - t^2 \\
&= 3 \sum_{k=1}^{n} (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} (t_j^n - t_{j-1}^n)(t_k^n - t_{k-1}^n) - t^2 \\
&= 2 \sum_{k=1}^{n} (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \\
&\le 2t \mid \Delta_n[0,t] \mid \to_{n \to +\infty} 0.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que cette convergence implique que les trajectoires de $(B_t)_{t \ge 0}$ sont presque sûrement de variation infinie sur l'intervalle $[0,t]$, c'est-à-dire, qu'on peut trouver une suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que presque sûrement

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mid B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \mid = +\infty.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que le sup sur toutes les subdivisions de $[0,t]$ des sommes

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mid B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \mid$$

peut être majoré par un certain $M > 0$. D'après ce qui précède, on peut trouver une suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ dont le pas tend vers 0 et telle que, presque sûrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 = t,$$

car de toute suite qui converge en probabilité, on peut extraire une sous-suite convergente. Mais on a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 \le M \sup_{1 \le k \le n} \mid B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \mid \to_{n \to +\infty} 0,$$

ce qui est absurde.

□

Exercice 2. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$.*

(1) *Montrer que pour tout $t \geq 0$, presque sûrement*
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \right)^2 = t.$$
(2) * *Soit une suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ dont le pas tend vers 0 et telle que $\Delta_{n+1}[0,t] \subset \Delta_n[0,t]$, montrer que presque sûrement*
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 = t.$$
(3) * *Montrer qu'il existe une suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que presque sûrement*
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 = +\infty.$$

Ainsi, d'après ce qui précède on ne peut pas définir trajectoriellement une intégrale contre le mouvement brownien. Néanmoins, l'existence d'une variation quadratique, encourage à tenter une approche L^2 qui va s'avèrer fructueuse.

1.2. **Intégration contre le mouvement brownien.** Dans ce qui suit nous considérons un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ qui satisfait les conditions usuelles. Cette hypothèse de condition usuelle sur la filtration implique notamment:

(1) Toute limite (presque sûre, au sens L^1, etc...) de processus adaptés reste adaptée;
(2) Toute modification d'un processus progressivement mesurable reste progressivement mesurable;
(3) Toute sur-martingale est régularisable au sens de Doob.

On note $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ l'ensemble des processus $(u_t)_{t\geq 0}$ progressivement mesurables par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tels que
$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds \right) < +\infty.$$

Exercice 3. *Montrer que $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ muni de la norme*
$$\| u \|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds \right)$$
est un espace de Hilbert.

On note maintenant $\mathcal{E}$ l'ensemble des processus $(u_t)_{t\geq 0}$ qui peuvent être écrits sous la forme:
$$u_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$
avec $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_n$ et F_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable telle que $\mathbb{E}(F_i^2) < +\infty$. L'ensemble $\mathcal{E}$ s'appelle l'ensemble des processus simples prévisibles. Il est clair que
$$\mathcal{E} \subset L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}).$$

Théorème 4. *(Intégrale d'Itô)*
Il existe une unique application linéaire

$$\mathcal{I} : L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}) \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$$

telle que:

(1) *Pour* $u = \sum_{i=0}^{n-1} F_i 1_{(t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{I}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i});$$

(2) *Pour* $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{I}(u)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds\right).$$

L'application $\mathcal{I}$ *s'appelle l'intégrale d'Itô contre le mouvement brownien et on note pour* $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$,

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^{+\infty} u_s dB_s.$$

Preuve.
Par le théorème de prolongement des isométries dans les espaces de Hilbert, il nous suffit de démontrer deux choses:

(1) Pour $u = \sum_{i=0}^{n-1} F_i 1_{(t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds\right);$$

(2) $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ pour la norme:

$$\|u\|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds\right).$$

Soit $u = \sum_{i=0}^{n-1} F_i 1_{(t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{E}$. On a, par indépendance des accroissements du mouvement brownien:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2\right)\\
=&\mathbb{E}\left(\sum_{i,j=0}^{n-1} F_i F_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right)\\
=&\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\sum_{0\leq i<j\leq n-1} F_i F_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right)\\
=&\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 (t_{i+1} - t_i)\right)\\
=&\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$.
Nous procédons en plusieurs étapes.
Dans un premier temps, on remarque que le sous-ensemble des processus progressivement mesurables et bornés est dense dans $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$. En effet, si $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$, alors u peut être approximé par la suite de processus $(u_t \mathbf{1}_{[0,n]}(\mid u_t \mid))_{t\geq 0}$.
Dans un deuxième temps, on remarque que si $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ est un processus borné, alors u peut être approximé par un processus de $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ borné et dont presque toutes les trajectoires sont à support inclus dans un même compact (il suffit maintenant de considérer la suite de processus $(u_t \mathbf{1}_{[0,n]}(t)_{t\geq 0}$ et de conclure par convergence dominée).
Dans un troisième temps, on remarque que si $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ est un processus borné dont presque toutes les trajectoires sont à support inclus dans un même compact, alors u peut être approximé par un processus de $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ continu, borné et dont presque toutes les trajectoires sont aussi à support inclus dans un même compact. En effet la suite $\left(\frac{1}{n}\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} u_s ds \mathbf{1}_{[\frac{1}{n},+\infty)}(t)\right)_{t\geq 0}$ fait tout à fait l'affaire (vérifiez-le !) .
Il suffit donc finalement de démontrer que si $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ est un processus borné, continu, dont presque toutes les trajectoires sont à support inclus dans un même compact alors u peut être approché par un élément de $\mathcal{E}$. Pour démontrer cela, il suffit de considérer la suite d'éléments de $\mathcal{E}$:

$$u_t^n = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{\frac{i}{n}} 1_{(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]}(t).$$

□

Exercice 5. *Soit $u,v \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$, montrer que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s dB_s\right) = 0$$

et

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s dB_s \int_0^{+\infty} v_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s v_s ds\right).$$

Le théorème précédent permet de construire un processus intégrale d'Itô:

Proposition 6. *Soit $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$. Le processus*

$$\left(\int_0^t u_s dB_s\right)_{t\geq 0} = \left(\int_0^{+\infty} u_s 1_{[0,t]}(s) dB_s\right)_{t\geq 0}$$

est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui admet une modification continue.

Preuve.
Démontrons tout d'abord la propriété de martingale. Si

$$u_t = \sum_{i=0}^{n-1} F_i 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

est un élément de $\mathcal{E}$ alors pour $t \geq s$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t u_v dB_v \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t}) \mid \mathcal{F}_s\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F_i(B_{t_{i+1}\wedge s} - B_{t_i\wedge s}) \\ &= \int_0^s u_v dB_v.\end{aligned}$$

Ainsi si $u \in \mathcal{E}$, le processus

$$\left(\int_0^t u_s dB_s\right)_{t\geq 0} = \left(\int_0^{+\infty} u_s 1_{[0,t]}(s) dB_s\right)_{t\geq 0}$$

est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Comme $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ pour la norme:

$$\| u \|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds\right),$$

et que l'espérance conditionnelle est continue dans L^2, nous en déduisons le résultat souhaité. Démontrons maintenant l'existence d'une version continue pour l'intégrale stochastique. Si $u \in \mathcal{E}$, le résultat découle facilement de la continuité des trajectoires browniennes. Soit maintenant $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$. Considérons une suite u^n de $\mathcal{E}$ qui converge vers u pour notre norme habituelle. D'après l'inégalité de Doob, pour $m,n \geq 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} \mid \int_0^t (u_s^n - u_s^m) dB_s \mid \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\mid \int_0^{+\infty} (u_s^n - u_s^m) dB_s \mid^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} (u_s^n - u_s^m)^2 ds\right)}{\varepsilon^2}.$$

Par conséquent, il est possible de trouver une suite n_k telle que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} \mid \int_0^t (u_s^{n_{k+1}} - u_s^{n_k}) dB_s \mid \geq \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, la suite de processus continu $\left(\int_0^t u_s^{n_k} dB_s\right)_{t\geq 0}$ converge alors presque sûrement uniformément vers le processus $\left(\int_0^t u_s dB_s\right)_{t\geq 0}$. D'où le résultat souhaité.
□

Comme corollaire immédiat de ce théorème et des inégalités martingales de Doob, nous en déduisons immédiatement:

Proposition 7. *Soit $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$. Alors:*

(1) *Pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} \mid \int_0^t u_s dB_s \mid \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds\right)}{\lambda^2};$$

(2)

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{t\geq 0} \mid \int_0^t u_s dB_s \mid\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 ds\right).$$

Nous insistons sur le fait que l'intégrale d'Itô n'est pas trajectorielle, i.e. pour $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$, les sommes de Riemann

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{\frac{kt}{n}} \left((B_{\frac{(k+1)t}{n}} - B_{\frac{kt}{n}} \right),$$

ne convergent en général pas presque sûrement vers $\int_0^t u_s dB_s$. Sous des hypothèses faibles, on a néanmoins une convergence en probabilité:

Proposition 8. *Soit $u \in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ un processus continu à gauche. Soit $t \geq 0$. Pour toute suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

on a en probabilité:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_{t_k^n} \left(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n} \right) = \int_0^t u_s dB_s.$$

Preuve.
Exercice. On démontrera tout d'abord, à l'aide des inégalités de Doob précédentes que si u^n est une suite de processus de $L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ qui converge presque sûrement vers 0 et telle que $u^n \leq u$ où u est un processus localement borné, alors $\int_0^t u_s^n dB_s$ converge vers 0 en probabilité.
□

Exercice 9.

(1) *Montrer que pour $t \geq 0$,*

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right).$$

Qu'est-ce qui vous surprend dans cette formule?

(2) *Calculer la limite en probabilité quand $n \to +\infty$ de*

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{(k+1)t}{n}} \left(B_{\frac{(k+1)t}{n}} - B_{\frac{kt}{n}} \right).$$

1.3. **Martingales de carré intégrable et variations quadratiques.** Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ qui satisfait les conditions usuelles. Sur cet espace, une martingale est dite de carré intégrable si pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\left(M_t^2\right) < +\infty$. Par exemple, si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ et si $(u_t)_{t\geq 0}$ est un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\left(\int_0^t u_s^2 ds\right) < +\infty$ alors

$$M_t = \int_0^t u_s dB_s, \quad t \geq 0,$$

est une martingale de carré intégrable.
Concernant les martingales de carré intégrable, le théorème suivant est fondamental.

Théorème 10. *Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue de carré intégrable sur l'espace de probabilité $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ telle que $M_0 = 0$. Il existe un unique processus continu et croissant (et donc à variation bornée) noté $(\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ qui vérifie:*

(1) $\langle M\rangle_0 = 0$*;*

(2) *Le processus $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.*

D'autre part pour $t \geq 0$ et pour toute suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

on a en probabilité:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n} \right)^2 = \langle M \rangle_t .$$

Le processus $(\langle M \rangle_t)_{t\geq 0}$ est appelé le processus variation quadratique de $(M_t)_{t\geq 0}$.

Preuve.
Quitte à considérer la suite de martingales $(M_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ avec $T_n = \inf\{t \geq 0, \mid M_t \mid > n\}$, nous supposerons que la martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ est bornée.
Nous allons tout d'abord démontrer que si $\Delta_n[0,t]$ est une suite de subdivisions de $[0,t]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

alors la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n} \right)^2$$

existe au sens L^2 et donc en probabilité.
Pour cela, introduisons quelques notations. Si $\Delta[0,T]$ est une subdivision de l'intervalle de temps $[0,T]$ et si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus, alors on note

$$S_t^{\Delta[0,T]}(X) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right) + (X_t - X_{t_k})^2,$$

où k est tel que $t_k \leq t < t_{k+1}$. Par un calcul élémentaire d'espérances conditionnelles, il est facile de voir que si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors le processus

$$X_t^2 - S_t^{\Delta[0,T]}(X), \quad t \leq T$$

est également une martingale. Enfin, si $\Delta[0,T]$ et $\Delta'[0,T]$ sont deux subdivisions de l'intervalle de temps $[0,T]$, on notera $\Delta \vee \Delta'[0,T]$ la subdivision obtenue en réunissant tous les points de $\Delta[0,T]$ et $\Delta'[0,T]$.
Soit $\Delta_n[0,T]$ une suite de subdivisions de $[0,T]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,T] \mid = 0.$$

Montrons que la suite $S_T^{\Delta_n[0,T]}(M)$ est de Cauchy dans L^2. Comme le processus $S^{\Delta_n[0,T]}(M) - S^{\Delta_p[0,T]}(M)$ est une martingale (en tant que différence de deux martingales), nous en déduisons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(S_T^{\Delta_n[0,T]}(M) - S_T^{\Delta_p[0,T]}(M) \right)^2 \right) \\
=&\mathbb{E}\left(S_T^{\Delta_n\vee\Delta_p[0,T]}(S^{\Delta_n[0,T]}(M) - S^{\Delta_p[0,T]}(M)) \right) \\
\leq& 2\left(\mathbb{E}\left(S_T^{\Delta_n\vee\Delta_p[0,T]}(S^{\Delta_n[0,T]}(M)) \right) + \mathbb{E}\left(S_T^{\Delta_n\vee\Delta_p[0,T]}(S^{\Delta_p[0,T]}(M)) \right) \right).
\end{aligned}$$

Maintenant notons s_k les points de la subdivision $\Delta_n \vee \Delta_p[0,T]$ et pour s_k fixé, t_l le point de $\Delta_n[0,T]$ le plus proche de s_k tel que $t_l \leq s_k \leq t_{l+1}$. On a

$$\begin{aligned}
S_{s_{k+1}}^{\Delta_n[0,T]}(M) - S_{s_k}^{\Delta_n[0,T]}(M) &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 \\
&= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}\left(S_T^{\Delta_n \vee \Delta_p[0,T]}(S^{\Delta_n[0,T]}(M))\right) \le \mathbb{E}\left(\sup_k (M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l})^4\right)^{1/2} \mathbb{E}\left(\left(S_T^{\Delta_n \vee \Delta_p[0,T]}(M)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Comme M est continue, quand $n,p \to +\infty$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_k (M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l})^4\right) \to 0.$$

Pour conclure il suffit donc de démontrer que le terme $\mathbb{E}\left(\left(S_T^{\Delta_n \vee \Delta_p[0,T]}(M)\right)^2\right)$ est borné, ce qui se vérifie sans trop de difficultés en utilisant le fait que M est supposée bornée.
Ainsi, la limite

$$\langle M \rangle_t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n}\right)^2$$

existe au sens L^2 et donc en probabilité.
Voir que le processus $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \ge 0}$ est une martingale est aisé puisque pour chaque n et $T \ge 0$, le processus

$$M_t^2 - S_t^{\Delta_n[0,T]}(M), \quad t \le T$$

l'est.
Montrons maintenant que $\langle M \rangle$ est continu. Pour cela, remarquons que d'après l'inégalité de Doob, pour $n,p \ge 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \le t \le T}\left(S_t^{\Delta_n[0,T]}(M) - S_t^{\Delta_p[0,T]}(M)\right) > \varepsilon\right) \le \frac{\mathbb{E}\left(\left(S_T^{\Delta_n[0,T]}(M) - S_T^{\Delta_p[0,T]}(M)\right)^2\right)}{\varepsilon^2}.$$

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli il est donc possible de trouver une suite n_k telle que la suite de processus continus $\left(S_t^{\Delta_{n_k}[0,T]}(M)\right)_{0 \le t \le T}$ converge presque sûrement uniformément vers le processus $(\langle M \rangle_t)_{0 \le t \le T}$, ce qui donne l'existence d'une version continue.
Enfin, pour montrer que $\langle M \rangle$ est croissant, il suffit de considérer une suite croissante de subdivisions dont le pas tend vers 0.
Vérifions maintenant l'unicité de $\langle M \rangle$. Soient donc A et A' deux processus continus, croissants, nuls en 0 et et tels que $(M_t^2 - A_t)_{t \ge 0}$ et $(M_t^2 - A'_t)_{t \ge 0}$ sont des martingales. Le processus $(N_t)_{t \ge 0} = (A_t - A'_t)_{t \ge 0}$ est alors une martingale à variation bornée nulle en 0. Cela implique que $(N_t)_{t \ge 0}$ est identiquement nulle (Exercice !).
□

Exercice 11. *Soit $(M_t)_{t \ge 0}$ une martingale continue de carré intégrable sur l'espace de probabilité $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ telle que $M_0 = 0$. Si $\Delta[0,T]$ est une subdivision de l'intervalle de temps $[0,T]$ et si $(X_t)_{t \ge 0}$ est un processus, alors on note toujours*

$$S_t^{\Delta[0,T]}(X) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right) + (X_t - X_{t_k})^2,$$

où k est tel que $t_k \le t < t_{k+1}$. Soit $\Delta_n[0,T]$ une suite de subdivisions de $[0,T]$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \mid \Delta_n[0,T] \mid = 0.$$

Montrer qu'en probabilité,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\le t\le T}\mid S_t^{\Delta[0,T]}(M)-\langle M\rangle_t\mid=0.$$

Ainsi, dans le théorème précédent, la convergence a en fait lieu uniformément sur tout intervalle de temps compact.

Proposition 12. *Si $(B_t)_{t\ge0}$ est un mouvement brownien sur $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\ge0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ et si $(u_t)_{t\ge0}$ est un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ tel que pour tout $t\ge0$, $\mathbb{E}\left(\int_0^t u_s^2ds\right)<+\infty$ alors pour $t\ge0$:*

$$\left\langle\int_0^\cdot u_s dB_s\right\rangle_t=\int_0^t u_s^2ds.$$

Preuve.
Comme le processus $\left(\int_0^t u_s^2ds\right)_{t\ge0}$ est continu, croissant et nul en 0, il suffit donc de vérifier que

$$\left(\int_0^t u_s dB_s\right)^2-\int_0^t u_s^2ds$$

est une martingale. Pour $u\in\mathcal{E}$, processus simple, et $t\ge s$, il est facile de voir que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t u_v dB_v\right)^2\mid\mathcal{F}_s\right)&=\mathbb{E}\left(\left(\int_0^s u_v dB_v+\int_s^t u_v dB_v\right)^2\mid\mathcal{F}_s\right)\\&=\mathbb{E}\left(\left(\int_0^s u_v dB_v\right)^2\mid\mathcal{F}_s\right)+\mathbb{E}\left(\left(\int_s^t u_v dB_v\right)^2\mid\mathcal{F}_s\right)\\&=\mathbb{E}\left(\left(\int_0^s u_v dB_v\right)^2\mid\mathcal{F}_s\right)+\mathbb{E}\left(\int_s^t u_v^2dv\right),\end{aligned}$$

et on conclut par densité. □
Par polarisation, on obtient tout de suite:

Corollaire 13. *Soient $(M_t)_{t\ge0}$ et $(N_t)_{t\ge0}$ deux martingales continues nulles en 0 de carré intégrable sur l'espace de probabilité $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\ge0},\mathcal{F},\mathbb{P})$. Il existe un unique processus continu à variation bornée, noté $(\langle M,N\rangle_t)_{t\ge0}$ qui vérifie:*

(1) $\langle M,N\rangle_0=0$;
(2) *Le processus $(M_tN_t-\langle M,N\rangle_t)_{t\ge0}$ est une martingale.*

D'autre part pour $t\ge0$ et pour toute suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\mid\Delta_n[0,t]\mid=0,$$

on a en probabilité:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\left(M_{t_k^n}-M_{t_{k-1}^n}\right)\left(N_{t_k^n}-N_{t_{k-1}^n}\right)=\langle M,N\rangle_t.$$

Le processus $(\langle M,N\rangle_t)_{t\ge0}$ est appelé le processus de covariation quadratique de $(M_t)_{t\ge0}$ et $(N_t)_{t\ge0}$.

1.4. **Problème :Intégration contre les martingales de carré intégrable.** De la même façon qu'on a construit une intégrale contre le mouvement brownien, nous pouvons construire une intégrale contre des martingales de carré intégrable:

Problème 14. *(À faire absolument !)*
Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale continue de carré intégrable sur l'espace de probabilité* $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ *telle que* $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}\left(M_t^2\right) < +\infty$ *et* $M_0 = 0$*. On note* $\mathcal{L}^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ *l'ensemble des processus* $(u_t)_{t\geq 0}$ *progressivement mesurables par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et tels que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 d\langle M\rangle_s\right) < +\infty.$$

On note toujours $\mathcal{E}$ *l'ensemble des processus simples prévisibles.*

(1) *On définit la relation* $\mathcal{R}$ *sur* $\mathcal{L}^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ *de la façon suivante:*

$$u\mathcal{R}v \Leftrightarrow \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}(u_s - v_s)^2 d\langle M\rangle_s\right) = 0.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

(2) *On note*

$$L^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}) = \mathcal{L}^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})/\mathcal{R}.$$

Montrer que $L^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ *muni de la norme*

$$\|u\|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 d\langle M\rangle_s\right),$$

est un espace de Hilbert.

(3) *Montrer qu'il existe une unique application linéaire*

$$\mathcal{I}_M : L^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P}) \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$$

telle que:

– *Pour* $u = \sum_{i=0}^{n-1} F_i 1_{(t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{I}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i});$$

– *Pour* $u \in L^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{I}_M(u)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} u_s^2 d\langle M\rangle_s\right).$$

L'application $\mathcal{I}_M$ *s'appelle l'intégrale d'Itô contre la martingale* $(M_t)_{t\geq 0}$ *et on note pour* $u \in L^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$,

$$\mathcal{I}_M(u) = \int_0^{+\infty} u_s dM_s.$$

(4) *Soit* $(u_t)_{t\geq 0}$ *un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *tel que pour tout* $t \geq 0$, $\mathbb{E}\left(\int_0^t u_s^2 d\langle M\rangle_s\right) < +\infty$ *. Montrer que le processus*

$$\left(\int_0^t u_s dM_s\right)_{t\geq 0} = \left(\int_0^{+\infty} u_s 1_{[0,t]}(s) dM_s\right)_{t\geq 0}$$

est une martingale de caré intégrable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *qui admet une modification continue.*

(5) *Soit* $(u_t)_{t\geq 0}$ *un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *tel que pour tout* $t\geq 0$, $\mathbb{E}\left(\int_0^t u_s^2 d\langle M\rangle_s\right)<+\infty$ *. Montrer que*

$$\left\langle \int_0^\cdot u_s dM_s \right\rangle_t = \int_0^t u_s^2 d\langle M\rangle_s.$$

(6) *Soit* $u\in L^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ *un processus continu à gauche. Soit* $t\geq 0$*. Montrer que pour toute suite de subdivisions* $\Delta_n[0,t]$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

on a en probabilité:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} u_{t_k^n}\left(M_{t_{k+1}^n}-M_{t_k^n}\right)=\int_0^t u_s dM_s.$$

(7) *On suppose maintenant que* $M_t=\int_0^t \Theta_s dB_s$ *où* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien sur* $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et* $\Theta\in L^2(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$*. Montrer alors que pour* $u\in L^2_M(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$, $\int_0^t u_s dM_s=\int_0^t u_s\Theta_s dB_s$.

(8) *Soient* $(M_t)_{t\geq 0}$ *et* $(N_t)_{t\geq 0}$ *deux martingales de carré intégrable telles que pour tout* $t\geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t M_s^2 d\langle N\rangle_s\right)<+\infty,\quad \mathbb{E}\left(\int_0^t N_s^2 d\langle M\rangle_s\right)<+\infty.$$

Montrer que pour $t\geq 0$,

$$M_tN_t=M_0N_0+\int_0^t M_s dN_s+\int_0^t N_s dM_s+\langle M,N\rangle_t.$$

1.5. **Martingales locales, Semi-martingales et intégrateurs.** Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord étendre la classe des processus qui peuvent être intégrés par rapport à un mouvement brownien. L'idée est d'utiliser le procédé fertile de localisation. Nous essayerons ensuite de voir quelle est la classe la plus générale de processus continus par rapport auxquels il est possible de définir une intégrale stochastique naturelle. Cela nous conduira à la notion de semi-martingale.
Soit un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ qui satisfait les conditions usuelles.

Definition 15. *On note* $L^2_{loc}(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$*, l'ensemble des processus progressivement mesurables par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et tels que pour tout* $t\geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t u_s^2 ds<+\infty\right)=1.$$

On a le lemme suivant:

Lemme 16. *Soit* $u\in L^2_{loc}(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$*. Il existe une suite croissante de temps d'arrêt* $(T_n)_{n\geq 0}$ *de la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *telle que:*

(1) *Presque sûrement,*

$$\lim_{n\to+\infty} T_n=+\infty;$$

(2)

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{T_n} u_s^2 ds\right)<+\infty.$$

Preuve.
Exercice.
□
Grâce à ce lemme, on définit facilement $\int_0^t u_s dB_s$ pour $u \in L^2_{loc}(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$. En effet soient $u \in L^2_{loc}(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ et $t \geq 0$. Soit maintenant une suite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_{n\geq 0}$ de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ telle que:

(1) Presque sûrement,
$$\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty;$$
(2)
$$\mathbb{E}\left(\int_0^{T_n} u_s^2 ds\right) < +\infty.$$

Comme
$$\mathbb{E}\left(\int_0^{T_n} u_s^2 ds\right) < +\infty,$$
l'intégrale stochastique
$$\int_0^{T_n} u_s dB_s = \int_0^{+\infty} u_s 1_{[0,T_n]}(s) dB_s$$
existe. Cela permet donc de définir (de façon unique), un processus
$$\left(\int_0^t u_s dB_s\right)_{t\geq 0}$$
tel que:

(1)
$$\left(\int_0^t u_s dB_s\right)_{t\geq 0}$$
est un processus continu adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;

(2) Le processus
$$\left(\int_0^{t\wedge T_n} u_s dB_s\right)_{t\geq 0}$$
est une martingale uniformément intégrable (car bornée dans L^2) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Cela nous conduit à la définition suivante

Definition 17. *Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est appelé une martingale locale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\geq 0}$ telle que:*

1. *La suite $(T_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ p.s.;*
2. *Pour tout $n \geq 1$, the process $(M_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Ainsi, si $u \in L^2_{loc}(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ alors le processus $\left(\int_0^t u_s dB_s\right)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue nulle en 0.

Evidemment une martingale est toujours une martingale locale, mais **attention** la réciproque est loin d'être vraie, néamoins:

Exercice 18. *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale locale telle que pour tout* $t \geq 0$*,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t} \mid M_s \mid\right) < +\infty.$$

Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale. En particulier, les martingales locales bornées sont des martingales.*

Le lemme suivant permet d'étendre facilement les résultats que nous avons vus pour les martingales de carré intégrables.

Lemme 19. *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale locale continue sur l'espace de probabilité* $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ *telle que* $M_0 = 0$*. Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, le processus* $(M_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ *est une martingale bornée (et donc de carré intégrable !).*

Preuve.
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une suite de temps d'arrêt telle que:

(1) La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ p.s.;
(2) Pour tout $n \geq 1$, the process $(M_{t\wedge s_n})_{t\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Pour $t \geq s$ et $k,n \geq 0$, on a:

$$\mathbb{E}\left(M_{t\wedge S_k\wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s\right) = M_{s\wedge S_k\wedge T_n}.$$

En passant à la limite quand $k \to +\infty$, on en déduit le résultat souhaité par continuité L^1 de l'espérance conditionnelle.
□
De ce petit lemme nous déduisons

Théorème 20. *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *une martingale locale continue sur l'espace de probabilité* $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ *telle que* $M_0 = 0$*. Alors, il existe un unique processus continu et croissant noté* $(\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ *qui vérifie:*

(1) $\langle M\rangle_0 = 0$*;*
(2) *Le processus* $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale locale.*

D'autre part pour $t \geq 0$ *et pour toute suite de subdivisions* $\Delta_n[0,t]$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

on a en probabilité:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(M_{t_k^n} - M_{t_{k-1}^n}\right)^2 = \langle M\rangle_t.$$

De plus si u *est un processus progressivement mesurable tel que pour tout* $t \geq 0$*,*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t u_s^2 d\langle M\rangle_s < +\infty\right) = 1,$$

alors on peut définir un processus intégrale d'Itô $\left(\int_0^t u_s dM_s\right)_{t\geq 0}$ *qui est tel que* $\left(\int_0^t u_s dM_s\right)_{t\geq 0}$ *est une martingale locale continue.*

Remarque 21. *Par polarisation, on définit de façon immédiate le processus de covariation quadratique de deux martingales locales continues.*

Nous en sommes maintenant presqu'au bout de la route de la théorie de l'intégration stochastique ! On remarque tout d'abord que cela ne coûte rien d'ajouter un processus à variation bornée à une martingale locale, c'est à dire que si un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ peut être écrit:

$$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

où $(A_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation bornée et $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue sur l'espace de probabilité $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ telle que $M_0 = 0$, alors si u est un processus progressivement mesurable tel que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t u_s^2 d\langle M\rangle_s < +\infty\right) = 1,$$

on peut définir un processus intégrale d'Itô $\left(\int_0^t u_s dX_s\right)_{t\geq 0} = \left(\int_0^t u_s dA_s + \int_0^t u_s dM_s\right)_{t\geq 0}$ où $\int_0^t u_s dA_s$ est tout simplement une intégrale de Riemann-Stieltjes.
Cela nous conduit à la définition suivante:

Definition 22. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et continu sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si $(X_t)_{t\geq 0}$ peut être écrit:*

$$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

où $(A_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation bornée et $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue nulle en 0. Dans ce cas, la décomposition précédente est alors unique (Demandez-vous pourquoi !) et on note $(\langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$ la variation quadratique de la martingale locale $(M_t)_{t\geq 0}$.

Comme un processus à variation bornée est de variation quadratique nulle, il est facile de démontrer le théorème suivant:

Proposition 23. *Soit*

$$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

une semi-martingale continue et adaptée. Pour $t \geq 0$ et pour toute suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

on a en probabilité:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right)^2 = \langle M\rangle_t.$$

On note alors $\langle X\rangle = \langle M\rangle$.

Exercice 24. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi-martingale continue sur l'espace de probabilité $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$. Si $\Delta[0,T]$ est une subdivision de l'intervalle de temps $[0,T]$ alors on note*

$$S_t^{\Delta[0,T]}(X) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right) + (X_t - X_{t_k})^2,$$

où k est tel que $t_k \leq t < t_{k+1}$. Soit $\Delta_n[0,T]$ une suite de subdivisions de $[0,T]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,T] \mid = 0.$$

Montrer qu'en probabilité,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \mid S_t^{\Delta[0,T]}(X) - \langle X\rangle_t \mid = 0.$$

Exercice 25. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi-martingale continue sur l'espace de probabilité $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$. Soit maintenant u^n une suite de processus localement bornés adaptés convergeant simplement vers 0 et telle que $u^n \leq u$ où est un processus localement borné Montrer qu'en probabilité, pour $T \geq 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t u_s^n dX_s \mid = 0.$$

L'intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale continue est également une limite en probabilité de sommes de Riemann.

Proposition 26. *Soit u un processus continu et adapté et $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi-martingale continue adaptée. Soit $t \geq 0$. Pour toute suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

on a en probabilité:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_{t_k^n} \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n} \right) = \int_0^t u_s dX_s.$$

Comme le montre le puissant théorème structurel suivant, la classe des semi-martingales à laquelle nous sommes finalement arrivé apparaît comme la classe la plus générale des processus contre lesquels on a une intégrale stochastique naturelle d'un point de vue probabiliste.
Notons $\mathcal{E}_b$ l'ensemble des processus $(u_t)_{t\geq 0}$ qui peuvent être écrits sous la forme:

$$u_t = \sum_{i=1}^{N} F_i 1_{(S_i,T_i]}(t),$$

avec $0 \leq S_1 \leq T_1 \leq ... \leq S_N \leq T_N$ temps d'arrêt bornés et F_i, variable aléatoire $\mathcal{F}_{S_i}$ mesurable et bornée. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté et continu, alors on définit naturellement

$$\int_0^t u_s dX_s = \sum_{i=1}^{N} F_i (X_{T_i\wedge t} - X_{S_i \wedge t}).$$

Théorème 27. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et continu. Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale si et seulement si pour toute suite u^n de $\mathcal{E}_b$ qui converge presque sûrement uniformément vers 0, on a pour tout $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mid \int_0^t u_s^n dX_s \mid > \varepsilon \right) = 0.$$

2. Formule d'Itô

La formule d'Itô est très certainement la formule la plus importante et la plus utile du calcul stochastique. C'est une formule très simple dont la spécificité par rapport au calcul différentiel ordinaire est l'apparition d'un terme de variation quadratique. Essayons tout d'abord de comprendre d'un point de vue intuitif quelle est la nature exacte de ce terme correctif et d'où il provient. Pour cela, prenons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière disons C^∞ et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On a alors le petit calcul *à la physicienne* suivant:

$$\begin{aligned} f(x_{t+dt}) &= f(x_t + (x_{t+dt} - x_t)) \\ &= f(x_t) + f'(x_t)(x_{t+dt} - x_t) \\ &= f(x_t) + f'(x_t) dx_t, \end{aligned}$$

qui conduit à une formule mathématique correcte:

$$f(x_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(x_s)dx_s.$$

Supposons maintenant qu'on veuille prendre pour x un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. Alors, la première difficulté à laquelle on se heurte est la non-dérivabilité des trajectoires browniennes: Quel sens donner à dB_t ? Eh bien en fait, il faut se rendre compte que tout le travail fait précédemment pour la construction d'une intégrale par rapport au mouvement brownien revient à cela !! Du coup, reprenons le calcul *à la physicienne* précédent à partir de

$$f(B_{t+dt}) = f(B_t + (B_{t+dt} - B_t))$$

Mais maintenant dans le développement limité de f il va falloir tenir compte du terme d'ordre deux qui fait intervenir $(dB_t)^2$: ce terme ne plus être négligé. En effet, puisque le mouvement brownien a une variation quadratique égale à t, on a envie d'écrire $(dB_t)^2 = dt$ ce qui donne le calcul suivant:

$$\begin{aligned} f(B_{t+dt}) &= f(B_t + (B_{t+dt} - B_t)) \\ &= f(B_t) + f'(B_t)(B_{t+dt} - B_t) + \frac{1}{2} f''(B_t)((B_{t+dt} - B_t))^2 \\ &= f(B_t) + f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)dt. \end{aligned}$$

En notation intégrale, on obtient par conséquent

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds,$$

formule qui nous le verrons est mathématiquement tout à fait correcte.
Dans ce qui suit, nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ qui satisfait les conditions usuelles. Notre point de départ pour établir la formule d'Itô est la formule d'intégration par parties suivante:

Théorème 28. *(Formule d'intégration par parties) Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux semi-martingales continues et adaptées, alors le processus $(X_tY_t)_{t\geq 0}$ est une semi-martingale continue et on a:*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t.$$

Preuve.
Par polarisation, on peut se restreindre au cas où $X = Y$. Quitte à considérer $X - X_0$, on supposera également $X_0 = 0$.
Soit $t \geq 0$. Pour toute suite de subdivisions $\Delta_n[0,t]$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mid \Delta_n[0,t] \mid = 0,$$

on a

$$\sum_{k=1}^n \left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right)^2 = X_t^2 - 2\sum_{k=1}^n X_{t_{k-1}^n}\left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}\right).$$

En passant à la limite en probabilité, on obtient donc

$$X_t^2 = 2\int_0^t X_s dX_s + \langle X\rangle_t.$$

Ce qui est le résultat souhaité.
□

Nous en arrivons à la formule d'Itô.

Théorème 29. *(Formule d'Itô I) Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *une semi-martingale continue et adaptée et* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une application de classe* C^2*. On a:*

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s. \tag{1}$$

Preuve.
Quitte à localiser par les temps d'arrêt $T_n=\inf\{t\geq 0, X_t>n\}$ nous supposerons que X est bornée.
Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications f de classe C^2 pour lesquelles la formule (1) est satisfaite. Par linéarité de la formule, il est clair que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel réel.
Montrons que c'est également une algèbre, i.e. que $\mathcal{A}$ est stable par multiplication. Soient donc $f,g\in\mathcal{A}$. En utilisant la formule d'intégration par parties pour $f(X)$ et $g(X)$, on obtient:

$$f(X_t)g(X_t)=f(X_0)g(X_0)+\int_0^t f(X_s)dg(X_s)+\int_0^t g(X_s)df(X_s)+\langle f(X),g(X)\rangle_t.$$

Calculons maintenant les différents termes de la somme précédente. Comme $f,g\in\mathcal{A}$, on a facilement (vérifiez le proprement!):

$$\int_0^t f(X_s)dg(X_s)=\int_0^t f(X_s)g'(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f(X_s)g''(X_s)d\langle X\rangle_s$$

$$\int_0^t g(X_s)df(X_s)=\int_0^t g(X_s)f'(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t g(X_s)f''(X_s)d\langle X\rangle_s$$

$$\langle f(X),g(X)\rangle_t=\int_0^t f'(X_s)g'(X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}f(X_t)g(X_t)=&f(X_0)g(X_0)+\int_0^t f(X_s)g'(X_s)dX_s+\int_0^t g(X_s)f'(X_s)dX_s\\&+\frac{1}{2}\int_0^t f(X_s)g''(X_s)d\langle X\rangle_s+\int_0^t f'(X_s)g'(X_s)d\langle X\rangle_s+\frac{1}{2}\int_0^t g(X_s)f''(X_s)d\langle X\rangle_s\\=&f(X_0)g(X_0)+\int_0^t (fg)'(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t (fg)''(X_s)d\langle X\rangle_s.\end{aligned}$$

On en déduit que $fg\in\mathcal{A}$. Par conséquent $\mathcal{A}$ est bien une algèbre. Comme $\mathcal{A}$ contient la fonction $x\to x$, on en déduit que $\mathcal{A}$ contient également toutes les fonctions polynomiales. Comme X est supposée bornée, elle prend ses valeurs dans un compact. Mais maintenant, on sait très bien, qu'étant donnée une fonction de classe C^2 sur un compact, il est possible de trouver une suite de fonctions polynomiales P_n telle que P_n converge uniformément vers f, P_n' converge uniformément vers f' et P_n'' converge uniformément vers f''. On peut alors conclure à l'aide du résultat démontré dans l'exercice 25.
□
Ainsi en appliquant cette première formule d'Itô avec X un mouvement brownien B, on en arrive à la formule annoncée en préambule: Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une application de classe C^2,

$$f(B_t)=f(0)+\int_0^t f'(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

De la même façon, il est facile de dériver quelques généralisations de la formule précédente:

Théorème 30. *(Formule d'Itô II) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi-martingale continue et adaptée, $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté à variation bornée et $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application de classe $C^{1,2}$, i.e. une fois continument différentiable en la première variable t et deux fois continument différentiable en la seconde variable x. On a:*

$$f(A_t,X_t)=f(A_0,X_0)+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(A_s,X_s)dA_s+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(A_s,X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_s,X_s)d\langle X\rangle_s.$$

Théorème 31. *(Formule d'Itô II) Soient $(X_t^1)_{t\geq 0},...,(X_t^n)_{t\geq 0}$ n semi-martingales continues et adaptées et $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une application de classe C^2. On a:*

$$f(X_t^1,...,X_t^n)=f(X_0^1,...,X_0^n)+\sum_{i=1}^n\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s^1,...,X_s^n)dX_s^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_s^1,...,X_s^n)d\langle X^i,X^j\rangle_s.$$

Exercice 32. *Soit $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction de classe $C^{1,2}$ telle que*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Montrer que si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue, alors $(f(\langle M\rangle_t,M_t))_{t\geq 0}$ en est également une. En déduire que pour $\lambda\in\mathbb{C}$, le processus $\exp(\lambda M_t-\frac{1}{2}\lambda^2\langle M\rangle_t)$ est une martingale locale.

Exercice 33. *Soit $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $(B_t)_{t\geq 0}=(B_t^1,...,B_t^n)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien n-dimensionnel, i.e. $B_t^1,...,B_t^n$ sont des mouvements browniens indépendants. Montrer que*

$$X_t=f(t,B_t)-\left(\int_0^t \frac{1}{2}\Delta f(s,B_s)+\frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)ds\right)$$

est une martingale locale.

Exercice 34. *On définit le polynôme de Hermite d'ordre n par*

$$H_n(x)=(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(1) *Calculer H_0,H_1,H_2,H_3.*
(2) *Montrer que si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien alors $\left(t^{n/2}H_n(\frac{B_t}{\sqrt{t}})\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.*
(3) *Montrer que*

$$t^{n/2}H_n(\frac{B_t}{\sqrt{t}})=n!\int_0^t\int_0^{t_1}...\int_0^{t_{n-1}}dB_{s_1}...dB_{s_n}.$$

Exercice 35. *(Un théorème de P. Lévy) Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale continue nulle en 0 et telle que pour tout $t\geq 0$, $\langle M\rangle_t=t$. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.*

3. Le théorème de représentation d'Itô

Dans ce qui suit, nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ et on suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle usuellement complétée d'un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ (une telle filtration est appelée une filtration brownienne).

On a alors le théorème suivant:

Théorème 36. *(Théorème de représentation d'Itô). Soit $F \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$. Il existe un unique processus $(u_t)_{t\ge 0}$ progressivement mesurable tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_s^2 ds\right) < +\infty$ et*

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^{+\infty} u_s dB_s.$$

Preuve.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions étagées à support compact $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, i.e.

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i]}.$$

Pour $f \in \mathcal{D}$, on note

$$\mathcal{E}_t(f) = \exp\left(\int_0^t f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds\right).$$

À l'aide de la formule d'Itô, il est facile de vérifier que $(\mathcal{E}_t(f))_{t\ge 0}$ est une martingale.
Nous prétendons maintenant que la famille

$$\{\mathcal{E}_\infty(f), f \in \mathcal{D}\}$$

est totale dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$, c'est-à-dire qu'une variable de $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$ orthogonale à tous les éléments de la famille précédente est nécessairement nulle. En effet soit $X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$ telle que pour tout $f \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}\left(X\mathcal{E}_\infty(f)\right) = 0.$$

Il est alors facile de voir que pour tout $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}\left(Xe^{\sum_{i=1}^n \lambda_i B_{t_i}}\right) = 0.$$

Par prolongement analytique, on a alors en fait plus généralement,

$$\mathbb{E}\left(Xe^{\sum_{i=1}^n \lambda_i B_{t_i}}\right) = 0,$$

pour tout $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{C}$, $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}$, et donc en particulier,

$$\mathbb{E}\left(Xe^{i\sum_{j=1}^n \lambda_j B_{t_j}}\right) = 0,$$

pour tout $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}$. Nos connaissances en analyse de Fourier sont alors suffisantes pour conclure que pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left(Xf(B_{t_1},...,B_{t_n})\right) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}\left(X \mid \sigma(B_{t_1},...,B_{t_n})\right) = 0.$$

Comme $\mathcal{F}_\infty$ est engendrée par les cylindres précédents (à complétion près), nous en déduisons alors que $X = 0$.
Ainsi la famille

$$\{\mathcal{E}_\infty(f), f \in \mathcal{D}\}$$

est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$.
Notons maintenant $\mathcal{B}$ le sous-ensemble de $\mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty,\mathbb{P})$ constitué des variables aléatoires F pour lesquelles on peut trouver un processus $(u_t)_{t\ge 0}$ progressivement mesurable tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^\infty u_s^2 ds\right) < +\infty$ et

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^{+\infty} u_s dB_s.$$

Par continuité de l'intégrale d'Itô (c'est une isométrie!), $\mathcal{B}$ est fermé. Étant donné que pour $f \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{E}_\infty(f) = 1 + \int_0^{+\infty} f(s)\mathcal{E}_s(f)dB_s,$$

nous avons

$$\{\mathcal{E}_\infty(f), f \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{B}.$$

Par densité nous concluons

$$\mathcal{B} = \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}).$$

L'unicité de u est une conséquence immédiate de la propriété d'isométrie de l'intégrale d'Itô.
□

Remarque 37. *Le théorème précédent implique facilement que pour $T \geq 0$ et $F \in \mathbf{L}^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, il existe un unique processus $(u_t)_{0 \leq t \leq T}$ progressivement mesurable tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^T u_s^2 ds\right) < +\infty$ et*

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^T u_s dB_s.$$

Le théorème précedent admet le remarquable corollaire suivant:

Corollaire 38. *Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de carré intégrable, alors il existe un unique processus $(u_t)_{t \geq 0}$ progressivement mesurable tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^t u_s^2 ds\right) < +\infty$, $t \geq 0$ et*

$$M_t = \mathbb{E}(M_0) + \int_0^t u_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

Ce qu'il y a de remarquable dans ce résultat c'est qu'ainsi toutes les martingales de carré intégrable dans une filtration brownienne sont nécessairement continues! Nous en profitons ici pour insister sur l'hypothèse de filtration brownienne dans tout ce qui précède.
Le corollaire précdent s'étend sans difficultés à des martingales locales:

Exercice 39. *Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ montrer qu'il existe un unique processus $(u_t)_{t \geq 0}$ progressivement mesurable tel que $\mathbb{P}\left(\int_0^t u_s^2 ds < +\infty\right) = 1$, $t \geq 0$ et*

$$M_t = \mathbb{E}(M_0) + \int_0^t u_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

4. Problème: Théorème de Girsanov

Le but de ce problème est d'étudier l'impact d'un changement de probabilité équivalent sur le calcul stochastique. Nous encourageons vivement le lecteur à relire la section 4.2. du Chapitre 2.

Problème 40.
Partie I
Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. On note $\mathbb{P}$ la mesure de Wiener, $(\pi_t)_{t \geq 0}$ le processus des coordonnées et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle.

(1) *Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{P}^\mu$ la loi du processus $(B_t + \mu t)_{t \geq 0}$. Montrer que pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}^\mu_{/\mathcal{F}_t} \ll \mathbb{P}_{/\mathcal{F}_t},$$

et que

$$\frac{d\mathbb{P}^{\mu}_{/\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{/\mathcal{F}_t}} = e^{\mu\pi_t - \frac{\mu^2}{2}t}.$$

(2) *A t'on*

$$\mathbb{P}^{\mu}_{/\mathcal{F}_\infty} \ll \mathbb{P}_{/\mathcal{F}_\infty} \quad ?$$

(3) *Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on note*

$$T_a = \inf\{t \geq 0, B_t + \mu t = a\}.$$

Calculer la loi de T_a à l'aide de la question (1).

(4) *Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t f^2(s)ds < +\infty$. On note $\mathbb{P}^f$ la loi du processus $(B_t + \int_0^t f(s)ds)_{t\geq 0}$. Montrer que pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}^f_{/\mathcal{F}_t} \ll \mathbb{P}_{/\mathcal{F}_t},$$

et que

$$\frac{d\mathbb{P}^f_{/\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{/\mathcal{F}_t}} = e^{\int_0^t f(s)d\pi_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds}.$$

(5) *Pour quelles fonctions f, a-t'on*

$$\mathbb{P}^f_{/\mathcal{F}_\infty} \ll \mathbb{P}_{/\mathcal{F}_\infty} \quad ?$$

Partie II

Dans cette partie, nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ et on suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle usuellement complétée d'un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. Soit $\mathbb{Q}$ une probabilité sur $\mathcal{F}_\infty$ équivalente à $\mathbb{P}$. On note D la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.

(1) *Montrer qu'il existe un processus $(\Theta_t)_{t\geq 0}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\int_0^t \Theta_s^2 ds < +\infty\right) = 1$ et*

$$\mathbb{E}\left(D \mid \mathcal{F}_t\right) = \exp\left(\int_0^t \Theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_s^2 ds\right).$$

(2) *Montrer que sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus*

$$B_t - \int_0^t \Theta_s ds$$

est un mouvement brownien.

(3) *En déduire que toute semimartingale sur l'espace $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ est également une semi-martingale sur l'espace $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{Q})$.*

Partie III

Dans cette partie, nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ qui satisfait les conditions usuelles. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur cet espace de probabilité filtré. Soit maintenant $(\Theta_t)_{t\geq 0}$ un processus progressivement mesurable tel que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\int_0^t \Theta_s^2 ds < +\infty\right) = 1$. On note

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \Theta_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \parallel \Theta_s \parallel^2 ds\right), \; t \geq 0.$$

(1) *Montrer que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale.*

(2) *Montrer que si pour tout* $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}(Z_t) = 1,$$
alors $(Z_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

(3) *On suppose désormais l'hypothèse de la question précédente satisfaite. Montrer que sur l'espace de probabilité filtré* $\mathcal{F}_\infty$, *il existe une unique mesure de probabilité* $\mathbb{Q}$ *équivalente à* $\mathbb{P}$ *telle que pour tout* $t \geq 0$,
$$\frac{d\mathbb{Q}_{/\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{/\mathcal{F}_t}} = Z_t, \ \mathbb{P}-p.s.$$

(4) *Montrer que sous la probabilité* $\mathbb{Q}$, *le processus*
$$B_t - \int_0^t \Theta_s ds$$
est un mouvement brownien.

5. Equations différentielles stochastiques et diffusions

Dans ce paragraphe, nous revenons au problème de la construction de diffusions évoqué à la section 7 du chapitre 3 et nous allons voir comment le calcul d'Itô s'avère un outil extrêmement puissant.
Comme d'habitude nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathcal{F},\mathbb{P})$ qui satisfait les conditions usuelles et sur lequel est défini un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$.
L'idée va être de construire à partir de $(B_t)_{t\geq 0}$ et du calcul d'Itô un processus de générateur
$$\mathcal{L} = b(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{d^2}{dx^2}.$$
où b et σ sont deux fonctions données.

Théorème 41. *Soient* $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\sigma : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ *deux fonctions continues telles que pour un certain* $K > 0$,

(1) $\mid b(x) - b(y) \mid + \mid \sigma(x) - \sigma(y) \mid \leq K \mid x - y \mid$, $x,y \in \mathbb{R}$;

(2) $\mid b(x) \mid + \mid \sigma(x) \mid \leq K(1+ \mid x \mid)$, $x \in \mathbb{R}$.

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, *il existe un unique processus continu* $(X_t^{x_0})_{t\geq 0}$ *tel que pour* $t \geq 0$
$$X_t^{x_0} = x_0 + \int_0^t b(X_s^{x_0})ds + \int_0^t \sigma(X_s^{x_0})dB_s. \tag{2}$$
De plus $(X_t^{x_0})_{t\geq 0}$ *est un processus de diffusion de générateur*
$$\mathcal{L} = b(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma(x)^2\frac{d^2}{dx^2}.$$

6. Un invité de marque: K. Itô

Born: 7 Sept 1915 in Hokusei-cho, Mie Prefecture, Japan
Dead: Still alive!
Kiyosi Ito studied mathematics in the Faculty of Science of the Imperial University of Tokyo. It was during his student years that he became attracted to probability theory. In [3] he explains how this came about:
Ever since I was a student, I have been attracted to the fact that statistical laws reside in seemingly random phenomena. Although I knew that probability theory was a means of describing such phenomena, I was not satisfied with contemporary papers or works on probability theory,

since they did not clearly define the random variable, the basic element of probability theory. At that time, few mathematicians regarded probability theory as an authentic mathematical field, in the same strict sense that they regarded differential and integral calculus. With clear definition of real numbers formulated at the end of the19th century, differential and integral calculus had developed into an authentic mathematical system. When I was a student, there were few researchers in probability; among the few were Kolmogorov of Russia, and Paul Levy of France.

In 1938 Ito graduated from the University of Tokyo and in the following year he was appointed to the Cabinet Statistics Bureau. He worked there until 1943 and it was during this period that he made his most outstanding contributions:-

During those five years I had much free time, thanks to the special consideration given me by the then Director Kawashima ... Accordingly, I was able to continue studying probability theory, by reading Kolmogorov's Basic Concept of Probability Theory and Levy's Theory of Sum of Independent Random Variables. At that time, it was commonly believed that Levy's works were extremely difficult, since Levy, a pioneer in the new mathematical field, explained probability theory based on his intuition. I attempted to describe Levy's ideas, using precise logic that Kolmogorov might use. Introducing the concept of regularisation, developed by Doob of the United States, I finally devised stochastic differential equations, after painstaking solitary endeavours. My first paper was thus developed; today, it is common practice for mathematicians to use my method to describe Levy's theory.

In 1940 he published On the probability distribution on a compact group on which he collaborated with Yukiyosi Kawada. The background to Ito's famous 1942 paper On stochastic processes (Infinitely divisible laws of probability) which he published in the Japanese Journal of Mathematics is given in [2]:-

Brown, a botanist, discovered the motion of pollen particles in water. At the beginning of the twentieth century, Brownian motion was studied by Einstein, Perrin and other physicists. In 1923, against this scientific background, Wiener defined probability measures in path spaces, and used the concept of Lebesgue integrals to lay the mathematical foundations of stochastic analysis. In 1942, Dr. Ito began to reconstruct from scratch the concept of stochastic integrals, and its associated theory of analysis. He created the theory of stochastic differential equations, which describe motion due to random events.

Although today we see this paper as a fundamental one, it was not seen as such by mathematicians at the time it was published. Ito, who still did not have a doctorate at this time, would have to wait several years before the importance of his ideas would be fully appreciated and mathematicians would begin to contribute to developing the theory. In 1943 Ito was appointed as Assistant Professor in the Faculty of Science of Nagoya Imperial University. This was a period of high activity for Ito, and when one considers that this occurred during the years of extreme difficulty in Japan caused by World War II, one has to find this all the more remarkable. Volume 20 of the Proceedings of the Imperial Academy of Tokyo contains six papers by Ito: (1) On the ergodicity of a certain stationary process; (2) A kinematic theory of turbulence; (3) On the normal stationary process with no hysteresis; (4) A screw line in Hilbert space and its application to the probability theory; (5) Stochastic integral; and (6) On Student's test.

In 1945 Ito was awarded his doctorate. He continued to develop his ideas on stochastic analysis with many important papers on the topic. Among them were On a stochastic integral equation (1946), On the stochastic integral (1948), Stochastic differential equations in a differentiable manifold (1950), Brownian motions in a Lie group (1950), and On stochastic differential equations (1951).

In 1952 Ito was appointed to a Professorship at Kyoto University. In the following year he published his famous text Probability theory. In this book, Ito develops the theory on a probability space using terms and tools from measure theory. The years 1954-56 Ito spent at the Institute for Advanced Study at Princeton University. An important publication by Ito in 1957 was Stochastic processes. This book contained five chapters, the first providing an introduction, then the remaining ones studying processes with independent increments, stationary processes, Markov processes, and the theory of diffusion processes. In 1960 Ito visited the Tata Institute in Bombay, India, where he gave a series of lectures surveying his own work and that of other on Markov processes, Levy processes, Brownian motion and linear diffusion.

Although Ito remained as a professor at Kyoto University until he retired in 1979, he also held positions as professor at Aarhus University from 1966 to 1969 and professor at Cornell University from 1969 to 1975. During his last three years at Kyoto before he retired, Ito was Director of the Research Institute for Mathematical Sciences there. After retiring from Kyoto University in 1979 he did not retire from mathematics but continued to write research papers. He was also appointed at Professor at Gakushuin University.

Ito gives a wonderful description mathematical beauty in [3] which he then relates to the way in which he and other mathematicians have developed his fundamental ideas:-

In precisely built mathematical structures, mathematicians find the same sort of beauty others find in enchanting pieces of music, or in magnificent architecture. There is, however, one great difference between the beauty of mathematical structures and that of great art. Music by Mozart, for instance, impresses greatly even those who do not know musical theory; the cathedral in Cologne overwhelms spectators even if they know nothing about Christianity. The beauty in mathematical structures, however, cannot be appreciated without understanding of a group of numerical formulae that express laws of logic. Only mathematicians can read "musical scores" containing many numerical formulae, and play that "music" in their hearts. Accordingly, I once believed that without numerical formulae, I could never communicate the sweet melody played in my heart. Stochastic differential equations, called "Ito Formula," are currently in wide use for describing phenomena of random fluctuations over time. When I first set forth stochastic differential equations, however, my paper did not attract attention. It was over ten years after my paper that other mathematicians began reading my "musical scores" and playing my "music" with their "instruments." By developing my "original musical scores" into more elaborate "music," these researchers have contributed greatly to developing "Ito Formula."

Ito received many honours for his outstanding mathematical contributions. He was awarded the Asahi Prize in 1978, and in the same year he received the Imperial Prize and also the Japan Academy Prize. In 1985 he received the Fujiwara Prize and in 1998 the Kyoto Prize in Basic Sciences from the Inamori Foundation. These prizes were all from Japan, and a further Japanese honour was his election to the Japan Academy. However, he also received many honours from other countries. He was elected to the National Academy of Science of the United States and to the Acadmie des Sciences of France. He received the Wolf Prize from Israel and honorary doctorates from the universities of Warwick, England and ETH, Zurich, Switzerland.

In [2] this tribute is paid to Ito:

Nowadays, Dr. Ito's theory is used in various fields, in addition to mathematics, for analysing phenomena due to random events. Calculation using the "Ito calculus" is common not only to scientists in physics, population genetics, stochastic control theory, and other natural sciences, but also to mathematical finance in economics. In fact, experts in financial affairs refer to Ito calculus as "Ito's formula." Dr. Ito is the father of the modern stochastic analysis that has been systematically developing during the twentieth century. This ceaseless development has been led by many, including Dr. Ito, whose work in this regard is remarkable for its mathematical

depth and strong interaction with a wide range of areas. His work deserves special mention as involving one of the basic theories prominent in mathematical sciences during this century.
A recent monograph entitled Ito's Stochastic Calculus and Probability Theory (1996), dedicated to Ito on the occasion of his eightieth birthday, contains papers which deal with recent developments of Ito's ideas:-
Professor Kiyosi Ito is well known as the creator of the modern theory of stochastic analysis. Although Ito first proposed his theory, now known as Ito's stochastic analysis or Ito's stochastic calculus, about fifty years ago, its value in both pure and applied mathematics is becoming greater and greater. For almost all modern theories at the forefront of probability and related fields, Ito's analysis is indispensable as an essential instrument, and it will remain so in the future. For example, a basic formula, called the Ito formula, is well known and widely used in fields as diverse as physics and economics.
Article by: J J O'Connor and E F Robertson