中国科学: 数学　2016 年　第 46 卷　第 7 期: 1～XX
www.scichina.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

求解弱奇异Volterra积分方程的混合谱元法

献给应隆安教授80华诞

Changtao Sheng (盛长滔)①, Jie Shen (沈捷)①②*

① 福建省科学建模与高性能科学计算重点实验室和厦门大学数学科学学院, 厦门361005;
② Mathematics Department, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, USA
E-mail: ctsheng@stu.xmu.edu.cn, shen@math.purdue.edu

收稿日期: 20XX-XX-XX; 接受日期: 20XX-XX-XX　*Jie Shen (沈捷)
国家自然科学基金(批准号: 11371298和11421110001)资助项目

摘要　本文中，我们提出了用混合广义Jacobi函数和Legendre多项式的谱元法求解线性和非线性弱奇异Volterra积分方程（VIEs）。该方法结构简单且容易实现。我们分析了所提混合谱元法的存在性、唯一性以及收敛性，获得了该方法在L^2范数下的hp-型误差估计，并展示了与理论分析相吻合的数值结果。

关键词　谱元法　弱奇异Volterra积分方程　广义Jacobi函数　误差分析

MSC (2010) 主题分类　45D05, 41A10, 65N35, 65L70

1　引言

在本文中，我们考虑第二类非线性弱奇异Volterra积分方程:

$$y(t) = f(t) + \mathcal{V}y(t), \quad t \in I := [0, T], \tag{1.1}$$

其中积分算子$\mathcal{V} : C(I) \to C(I)$定义如下：

$$\mathcal{V}y(t) := \int_0^t (t-s)^{-\mu} K(t,s) G(s, y(s)) ds,$$

上式中$0 < \mu < 1$，$K \in C(D)$，$D := \{(t,s) :\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$，$f \in C(I)$ 以及 G 是一个连续函数。

Volterra积分方程具有记忆性质，其在物理、生物、激光以及人口增长等模型中有着广泛应用，相关的数值研究日益受到重视，并已成为该领域的一个热点。弱奇异VIEs研究的主要困难在于：(1)积分算子是非局部算子；(2)精确解在$t = 0$处具有奇性。Brunner [1]和Lubich [2]对弱奇异VIEs解的相关性质做了详细的研究。许多研究者也相继构造了诸多弱奇异VIEs的数值方法，相关的工作主要包括分片多项式配置方法和Runge-Kutta方法 [1, 3–5]。然而，这些方法往往比较适合局部算子，对于求解VIEs似乎并不高效。

谱方法一般只需要相对较少的自由度就能获得精确的数值结果。近几十年来，谱方法得以迅速发展，并广泛应用于计算流体力学、量子力学、材料科学、金融数学、生物数学等的数值模拟，参见文献

英文引用格式: Zuo Z 1, Zuo Z 2, Zuo Z 3, Zuo Z 4. The English title of this paper (in Chinese). Sci Sin Math, 2016, 46: 1–XX, doi: 10.1360/N012015-XXX

[6–12]。谱方法能够非常有效地求解全局问题，因此非常适合数值求解带光滑核的VIEs。Li等 [13]介绍了线性VIEs的多区域预估校正并行算法；Sheng等 [14]提出了非线性VIEs的多步谱配置方法；Wang等 [15]也提出了带消失时滞的非线性VIEs的多步谱配置方法。

为了更好地数值求解弱奇异VIEs，研究者们已经做了许多尝试来克服解的奇异性所造成的困难。Chen等 [16,17]提出了线性弱奇异VIEs的谱配置方法；Huang等 [18]研究了弱奇异Volterra/Fredholm型的积分方程的超几何收敛性。然而，这些方法都是使用正交多项式作为基函数。另一种求解弱奇异VIEs的方法是使用非多项式的奇性函数（它能刻画精确解具有的奇性）作为基函数。Brunner [19]构造了弱奇异VIEs的非多项式样条配置方法；Cao等 [20]提出了一种弱奇异VIEs的非多项式配置法。最近，Shen等 [21]提出了弱奇异VIEs的广义Jacobi函数的谱方法。由于弱奇异VIEs的解只有在$t=0$处具有奇性，在$t\neq 0$时解是光滑的。若将弱奇异VIEs的区间进行划分，显然只有第一个区间的解具有奇性，而其他区间的解没有奇性。因此，我们只需要在第一个区间使用广义Jacobi函数作为基函数，其他区间则使用Legendre多项式作为基函数就能达到理想的逼近效果。

本文提出了用混合广义Jacobi函数和Legendre多项式的谱元法求解弱奇异VIEs。Chen等 [22]首先使用了广义Jacobi 函数作为基函数来求解分数阶偏微分方程。本文的主要工作和创新点如下：

- 我们将广义Jacobi函数和Legendre多项式分别作为第一个区间和剩余区间的基函数，来构造非线性弱奇异VIEs的谱元法。广义Jacobi 函数能够与真解的奇性相匹配，从而得到一个简洁的过程（见本文的(2.35)和(2.29)）。而已有的谱方法研究了线性弱奇异VIEs的单区域配置法，其基函数为经典的正交多项式。

- 我们在假设精确解是非光滑的情况下，分析了所提谱元法的存在性、唯一性以及hp-型误差。而已有的谱方法则是假设真解是充分光滑的，且数值误差都是p-型的。

我们的数值结果表明所提的方法对高振荡解问题和长时间计算问题都十分有效。

本文的结构安排如下：在第二节，我们构造了非线性弱奇异VIEs的混合谱元法。在第三节，我们给出了一些证明收敛性要用到的引理。在第四节中，我们分析了所提方法的存在性、唯一性以及hp-型误差，接着在第五节中，我们给出了一系列的数值算例来验证我们的理论分析。最后一节我们进行总结。

2 谱元法

2.1 准备工作

在建立方程(1.1)的谱元法之前，我们先对(1.1)做一些预处理。设I_h为定义在I上的一个网格：

$$I_h := \{t_n :\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T\}.$$

记$h_n := t_n - t_{n-1}$, $h_{\max} = \max\limits_{1\leqslant n\leqslant N} h_n$，$I_n = (t_{n-1}, t_n]$，令$y^n(t)$为方程(1.1) 第$n$个小区间上的解，即

$$y^n(t) = y(t), \qquad \forall t \in I_n, \qquad 1 \leqslant n \leqslant N.$$

对任意的$t \in I_n$，方程(1.1)可以写成

$$y(t) = f(t) + \int_0^{t_{n-1}} (t-s)^{-\mu} K(t,s) G(s, y(s)) ds + \int_{t_{n-1}}^{t} (t-s)^{-\mu} K(t,s) G(s, y(s)) ds. \tag{2.1}$$

上述方程等价于

$$y^n(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{I_k} (t-\xi)^{-\mu} K(t,\xi) G(\xi, y^k(\xi)) d\xi + \int_{t_{n-1}}^{t} (t-s)^{-\mu} K(t,s) G(s, y^n(s)) ds. \tag{2.2}$$

为了将区间$(t_{n-1}, t]$变换到I_n上，我们作如下线性变换:

$$s = s(t,\tau) := t_{n-1} + \frac{(\tau - t_{n-1})(t - t_{n-1})}{h_n}, \qquad \tau \in I_n. \tag{2.3}$$

这样方程(2.2)就可以写成

$$\begin{aligned} y^n(t) &= f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{I_k} (t-\xi)^{-\mu} K(t,\xi) G(\xi, y^k(\xi)) d\xi \\ &\quad + \Big(\frac{t - t_{n-1}}{h_n}\Big)^{1-\mu} \int_{I_n} (t_n - \tau)^{-\mu} K(t, s(t,\tau)) G(s(t,\tau), y^n(s(t,\tau))) d\tau \\ &:= f(t) + \mathcal{V}_1^n y(t) + \mathcal{V}_2^n y^n(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 移位广义Jacobi函数和移位Legendre多项式.

2.2.1 区间I_1上的移位广义Jacobi函数

对任意的$\alpha, \beta > -1$，设$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$，$x \in \Lambda := (-1,1)$为标准单元上次数不超过n的Jacobi 多项式，其中权函数$\chi^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$。显然，由Jacobi多项式构成的集合形成一个完备的$L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Lambda)-$正交系，即

$$\int_{-1}^{1} J_l^{(\alpha,\beta)}(x) J_m^{(\alpha,\beta)}(x) \chi^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \gamma_l^{(\alpha,\beta)} \delta_{l,m}, \tag{2.5}$$

其中$\delta_{l,m}$是Kronecker函数，且

$$\gamma_l^{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, & l = 0, \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2l+\alpha+\beta+1)} \dfrac{\Gamma(l+\alpha+1)\Gamma(l+\beta+1)}{l!\Gamma(l+\alpha+\beta+1)}, & l \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

特别地，$J_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$。
从而，定义区间I_n上的移位Jacobi多项式$\widetilde{J}_{n,l}(t)$为

$$\widetilde{J}_{n,l}^{(\alpha,\beta)}(t) = J_l^{(\alpha,\beta)}\Big(\frac{2t - t_{n-1} - t_n}{h_n}\Big), \quad t \in I_n, \quad l \geqslant 0. \tag{2.7}$$

显然，由$\widetilde{J}_{n,l}^{(\alpha,\beta)}(t), n \geqslant 0$构成的集合形成一个完备的$L^2_{\chi_n^{(\alpha,\beta)}}(I_n)-$正交系，其中权函数$\chi_n^{(\alpha,\beta)}(t) = (t_n - t)^\alpha$ $(t - t_{n-1})^\beta$, 由(2.5)和(2.7)易知

$$\int_{I_n} \widetilde{J}_{n,l}^{(\alpha,\beta)}(t) \widetilde{J}_{n,m}^{(\alpha,\beta)}(t) \chi_n^{(\alpha,\beta)}(t) dt = \Big(\frac{h_n}{2}\Big)^{\alpha+\beta+1} \gamma_l^{(\alpha,\beta)} \delta_{l,m}. \tag{2.8}$$

对任意的整数$M_n > 0$，定义$\{x_{n,j}^{(\alpha,\beta)}, \omega_{n,j}^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^{M_n}$为标准单元$\Lambda$上的Jacobi-Gauss 求积节点和求积系数。设$\mathcal{P}_{M_n}(I_n)$为区间I_n上次数不超过M_n次的多项式集合，而$t_{n,j}^{(\alpha,\beta)}$为区间I_n上的Jacobi-Gauss求积节点

$$t_{n,j}^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2}(h_n x_{n,j}^{(\alpha,\beta)} + t_{n-1} + t_n), \qquad 0 \leqslant j \leqslant M_n. \tag{2.9}$$

由标准单元上Jacobi-Gauss求积性质（即(2.5)）知，对任意的$\phi \in \mathcal{P}_{2M_n+1}(I_n)$，

$$\begin{aligned}\int_{I_n} \phi(t)\chi_n^{(\alpha,\beta)}(t)dt &= (\frac{h_n}{2})^{\alpha+\beta+1}\int_{-1}^{1}\phi(\frac{h_n x + t_{n-1} + t_n}{2})\chi^{(\alpha,\beta)}(x)dx \\ &= (\frac{h_n}{2})^{\alpha+\beta+1}\sum_{j=0}^{M_n}\phi(\frac{h_n x_{n,j}^{(\alpha,\beta)} + t_{n-1} + t_n}{2})\omega_{n,j}^{(\alpha,\beta)} \\ &= (\frac{h_n}{2})^{\alpha+\beta+1}\sum_{j=0}^{M_n}\phi(t_{n,j}^{(\alpha,\beta)})\omega_{n,j}^{(\alpha,\beta)}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

下面来介绍区间I_1上的移位广义Jacobi函数(参考 [22])：

$$P_{1,l}^{(\alpha,\beta)}(t) := t^{\beta}\widetilde{J}_{1,l}^{(\alpha,\beta)}(t), \qquad \alpha,\beta > -1, \qquad t \in I_1. \tag{2.11}$$

定义

$$\mathcal{F}_{M_1}^{(\beta)}(I_1) := \{t^{\beta}\psi(t) : \psi(t) \in \mathcal{P}_{M_1}(I_1)\} = \mathrm{span}\{P_{1,l}^{(\alpha,\beta)} : 0 \leqslant l \leqslant M_1\}. \tag{2.12}$$

由(2.8)和(2.11)易知，$\{P_{1,l}^{(\alpha,\beta)}(t)\}_{l\geqslant 0}$构成的集合形成一个完备的$L^2_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}(I_1)-$正交系，其中权函数为$\chi_1^{(\alpha,-\beta)}(t)$，即

$$\begin{aligned}\int_{I_1} P_{1,l}^{(\alpha,\beta)}(t)P_{1,m}^{(\alpha,\beta)}(t)\chi_1^{(\alpha,-\beta)}(t)dt &= \int_{I_1} t^{2\beta}\widetilde{J}_{1,l}^{(\alpha,\beta)}(t)\widetilde{J}_{1,m}^{(\alpha,\beta)}(t)\chi_1^{(\alpha,-\beta)}(t)dt \\ &= \int_{I_1}\widetilde{J}_{1,l}^{(\alpha,\beta)}(t)\widetilde{J}_{1,m}^{(\alpha,\beta)}(t)\chi_1^{(\alpha,\beta)}(t)dt = (\frac{h_1}{2})^{\alpha+\beta+1}\gamma_l^{(\alpha,\beta)}\delta_{l,m}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

由(2.10)可知，对于任意的$\varphi(t) = t^{2\beta}\phi(t)$以及$\phi(t) \in \mathcal{P}_{2M_1+1}(I_1)$，

$$\begin{aligned}\int_{I_1}\varphi(t)\chi_1^{(\alpha,-\beta)}(t)dt &= \int_{I_1}\phi(t)\chi_1^{(\alpha,\beta)}(t)dt = (\frac{h_1}{2})^{\alpha+\beta+1}\sum_{j=0}^{M_1}\phi(t_{1,j}^{(\alpha,\beta)})\omega_{1,j}^{(\alpha,\beta)} \\ &= (\frac{h_1}{2})^{\alpha+\beta+1}\sum_{j=0}^{M_1}(t_{1,j}^{(\alpha,\beta)})^{-2\beta}\varphi(t_{1,j}^{(\alpha,\beta)})\omega_{1,j}^{(\alpha,\beta)}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

设$(u,v)_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}$和$\|v\|_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}$为空间$L^2_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}(I_1)$上的内积和范数。引进区间$I_1$上的离散内积和离散范数如下：

$$\begin{aligned}&\langle u,v\rangle_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}} = (\frac{h_1}{2})^{\alpha+\beta+1}\sum_{j=0}^{M_1}(t_{1,j}^{(\alpha,\beta)})^{-2\beta}u(t_{1,j}^{(\alpha,\beta)})v(t_{1,j}^{(\alpha,\beta)})\omega_{1,j}^{(\alpha,\beta)}, \\ &\|v\|_{M_1,\chi_1^{(\alpha,-\beta)}} = \langle v,v\rangle^{\frac{1}{2}}_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

根据(2.14)，对于任意的$\phi,\psi \in \mathcal{F}_{M_1}^{(\beta)}(I_1)$，下式成立

$$(\phi,\psi)_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}} = \langle\phi,\psi\rangle_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}, \quad \|\phi\|_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}} = \|\phi\|_{M_1,\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}. \tag{2.16}$$

2.2.2 区间I_n上的移位Legendre多项式(其中$n > 1$)

设$L_l(x)$，$x \in \Lambda$为标准单元上次数为l次的Legendre多项式。定义区间I_n上的移位Legendre多项式$L_{n,l}(t)$为

$$L_{n,l}(t) = L_l(\frac{2t - t_{n-1} - t_n}{h_n}), \qquad l = 0,1,2,\cdots.$$

根据标准单元上的Legendre多项式的性质，有

$$(l+1)L_{n,l+1}(t)-(2l+1)(\frac{2t-t_{n-1}-t_n}{h_n})L_{n,l}(t)+lL_{n,l-1}(t)=0,\qquad l\geqslant 1,\tag{2.17}$$

$$\frac{d}{dt}L_{n,l+1}(t)-\frac{d}{dt}L_{n,l-1}(t)=\frac{4l+2}{h_n}L_{n,l}(t),\qquad l\geqslant 1.\tag{2.18}$$

特别地，

$$\begin{aligned}&L_{n,0}(t)=1,\qquad L_{n,1}(t)=\frac{2t-t_{n-1}-t_n}{h_n},\\&L_{n,2}(t)=\frac{6t^2-6(t_{n-1}+t_n)t+4t_{n-1}t_n+t_{n-1}^2+t_n^2}{h_n^2}.\end{aligned}$$

显然，由$L_{n,l}(t)$构成的集合形成一个完备的$L^2(I_n)$-正交系，即

$$\int_{I_n}L_{n,l}(t)L_{n,m}(t)dt=\frac{h_n}{2l+1}\delta_{l,m}.\tag{2.19}$$

这样，对任意的$v\in L^2(I_n)$，

$$v(t)=\sum_{l=0}^{\infty}v_{n,l}L_{n,l}(t),\qquad v_{n,l}=\frac{2l+1}{h_n}\int_{I_n}v(t)L_{n,l}(t)dt.\tag{2.20}$$

对任意的整数$M_n>0$，定义$\{x_{n,j},\omega_{n,j}\}_{j=0}^{M_n}$为标准单元$\Lambda$上的Legendre-Gauss求积节点和求积系数。设$\mathcal{P}_{M_n}(I_n)$为区间I_n上次数不超过M_n次的多项式集合，而$t_{n,j}$为区间I_n上的Legendre-Gauss求积节点

$$t_{n,j}=\frac{h_nx_{n,j}+t_{n-1}+t_n}{2}\in I_n,\qquad 1\leqslant n\leqslant N,\qquad 0\leqslant j\leqslant M_n.\tag{2.21}$$

由标准单元上Legendre-Gauss求积性质知，对任意的$\phi\in\mathcal{P}_{2M_n+1}(I_n)$，

$$\begin{aligned}\int_{I_n}\phi(t)dt&=\frac{h_n}{2}\int_{-1}^{1}\phi(\frac{h_nx+t_{n-1}+t_n}{2})dx\\&=\frac{h_n}{2}\sum_{j=0}^{M_n}\omega_{n,j}\phi(\frac{h_nx_{n,j}+t_{n-1}+t_n}{2})=\frac{h_n}{2}\sum_{j=0}^{M_n}\omega_{n,j}\phi(t_{n,j}).\end{aligned}\tag{2.22}$$

下面设$(u,v)_{I_n}$和$\|v\|_{I_n}$为空间$L^2(I_n)$上的内积和范数。引进区间I_n上的离散内积和离散范数如下：

$$\langle u,v\rangle_{I_n}=\frac{h_n}{2}\sum_{j=0}^{M_n}u(t_{n,j})v(t_{n,j})\omega_{n,j},\qquad \|v\|_{M_n,I_n}=\langle v,v\rangle_{I_n}^{\frac{1}{2}}.\tag{2.23}$$

根据(2.22)，对任意的$\phi\psi\in\mathcal{P}_{2M_n+1}(I_n)$和$\varphi\in\mathcal{P}_{M_n}(I_n)$，下式成立

$$(\phi,\psi)_{I_n}=\langle\phi,\psi\rangle_{I_n},\quad \|\varphi\|_{I_n}=\|\varphi\|_{M_n,I_n}.\tag{2.24}$$

2.3　非线性弱奇异VIEs的谱元法.

下面我们考虑对非线性弱奇异VIEs(2.4)的混合广义Jacobi函数和Legendre多项式的谱元法: 求$Y^1(t)\in\mathcal{F}_{M_1}^{(1-\mu)}(I_1)$以及$Y^n(t)\in\mathcal{P}_{M_n}(I_n)$，其中$n\geqslant 2$，使其满足

$$\begin{cases}(Y^1,\varphi)_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}=(f,\varphi)_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}+(\mathcal{V}_2^1Y^1,\varphi)_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}, & \forall\varphi\in\mathcal{F}_{M_1}^{(1-\mu)}(I_1);\\(Y^n,\psi)_{I_n}=(f,\psi)_{I_n}+(\mathcal{V}_1^nY,\psi)_{I_n}+(\mathcal{V}_2^nY^n,\psi)_{I_n}, & \forall\psi\in\mathcal{P}_{M_n}(I_n).\end{cases}\tag{2.25}$$

下面我们介绍格式(2.25)的一个有效数值算法。为此设

$$
\begin{cases}
Y^1(t) = \sum\limits_{p=0}^{M_1} y_p^1 P_{1,p}^{(-\mu,1-\mu)}(t), \quad t \in I_1, \\
Y^n(t) = \sum\limits_{p=0}^{M_n} y_p^n L_{n,p}(t), \qquad\quad t \in I_n, \qquad n \geqslant 2.
\end{cases}
\tag{2.26}
$$

将(2.26)代入到(2.25)中，取$\varphi = P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)}(t)$, $0 \leqslant q \leqslant M_1$，以及$\psi = L_{n,q}(t)$, $0 \leqslant q \leqslant M_n$，得

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{p=0}^{M_1} y_p^1 (P_{1,p}^{(-\mu,1-\mu)}, P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)})_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} - (\mathcal{V}_2^1 Y, P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)})_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} \\
\qquad = (f, P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)})_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}, \\
\sum\limits_{p=0}^{M_n} y_p^n (L_{n,p}, L_{n,q})_{I_n} - (\mathcal{V}_2^n Y^n, L_{n,q})_{I_n} = (f, L_{n,q})_{I_n} + (\mathcal{V}_1^n Y, L_{n,q})_{I_n}.
\end{cases}
\tag{2.27}
$$

令

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}^n = (y_0^n, y_1^n, \cdots, y_{M_n}^n)^T, \qquad\qquad A^n = \big(a_{pq}^n\big)_{0\leqslant p,q\leqslant M_n}, \\
&a_{pq}^1 = (P_{1,p}^{(-\mu,1-\mu)}, P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)})_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} = \big(\frac{h_1}{2}\big)^{2-2\mu} \gamma_p^{(-\mu,1-\mu)} \delta_{p,q}, \\
&a_{pq}^n = (L_{n,p}, L_{n,q})_{I_n} = \frac{h_n}{2p+1} \delta_{p,q}, && n \geqslant 2, \\
&\mathbf{f}^n = (f_0^n, \cdots, f_{M_n}^n)^T, \qquad f_q^1 = (f, P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)})_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}, \quad f_q^n = (f, L_{n,q})_{I_n}, && n \geqslant 2, \\
&\mathbf{v}^n = (v_0^n, \cdots, v_{M_n}^n)^T, \qquad v_q^n = (\mathcal{V}_1^n Y, L_{n,q})_{I_n}, && n \geqslant 2, \\
&\mathbf{w}^n = (w_0^n, \cdots, w_{M_n}^n)^T, \quad w_q^1 = (\mathcal{V}_2^1 Y^1, P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)})_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}, \\
&w_q^n = (\mathcal{V}_2^n Y^n, L_{n,q})_{I_n}, && n \geqslant 2.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

从而，可以得到如下的线性系统

$$
\begin{cases}
A^1 \mathbf{y}^1 - \mathbf{w}^1(\mathbf{y}^1) = \mathbf{f}^1, \\
A^n \mathbf{y}^n - \mathbf{w}^n(\mathbf{y}^n) = \mathbf{f}^n + \mathbf{v}^n, \quad n \geqslant 2.
\end{cases}
\tag{2.29}
$$

在实际计算中，我们使用求积公式(2.15)和(2.23)来逼近f_q^n，即

$$
\begin{aligned}
f_q^1 &\approx \langle f, P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)} \rangle_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} \\
&= \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{2-2\mu} \sum_{i=0}^{M_1} \big(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}\big)^{2\mu-2} f(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}) P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)}(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}) \omega_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)} \\
&= \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{2-2\mu} \sum_{i=0}^{M_1} \big(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}\big)^{\mu-1} f(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}) \widetilde{J}_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)}(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}) \omega_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

和

$$
f_q^n \approx \langle f, L_{n,q} \rangle_{I_n} = \frac{h_n}{2} \sum_{i=0}^{M_n} f(t_{n,i}) L_{n,q}(t_{n,i}) \omega_{n,i}.
\tag{2.31}
$$

根据(2.4)和(2.23)，可得

$$
\begin{aligned}
v_q^n &\approx \Big\langle \sum_{k=1}^{n-1} \int_{I_k} (\cdot-\xi)^{-\mu} K(\cdot,\xi) G(Y^k(\xi)) d\xi, L_{n,q}(\cdot) \Big\rangle_{I_n} \\
&\approx \frac{h_n}{2} \sum_{i=0}^{M_n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{2} \sum_{j=0}^{\widehat{M}_k} (t_{n,i}-t_{k,j})^{-\mu} K(t_{n,i},t_{k,j}) G(Y^k(t_{k,j})) L_{n,q}(t_{n,i}) \omega_{k,j} \omega_{n,i}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

类似地，根据(2.11)，(2.15)和(2.23)，得

$$
\begin{aligned}
w_q^1 &\approx \Big\langle \Big(\frac{\cdot}{h_1}\Big)^{1-\mu} \int_{I_1} (t_1-\tau)^{-\mu} K(\cdot, s(\cdot,\tau)) G(Y^1(s(\cdot,\tau))) d\tau, P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)}(\cdot) \Big\rangle_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} \\
&\approx \Big(\frac{h_1}{2}\Big)^{3-3\mu} \sum_{i,j=0}^{M_1} \Big(\frac{t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}}{h_1}\Big)^{1-\mu} K(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}, s(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}, t_{1,j}^{(-\mu,0)})) \\
&\quad \cdot G(Y^1(s(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}, t_{1,j}^{(-\mu,0)}))) P_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)}(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}) (t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)})^{2\mu-2} \omega_{1,j}^{(-\mu,0)} \omega_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)} \\
&= \frac{h_1^{2-2\mu}}{2^{3-3\mu}} \sum_{i,j=0}^{M_1} K(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}, s(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}, t_{1,j}^{(-\mu,0)})) G(Y^1(s(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}, t_{1,j}^{(-\mu,0)}))) \\
&\quad \cdot \widetilde{J}_{1,q}^{(-\mu,1-\mu)}(t_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)}) \omega_{1,j}^{(-\mu,0)} \omega_{1,i}^{(-\mu,1-\mu)},
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

和

$$
\begin{aligned}
w_q^n &\approx \Big\langle \Big(\frac{\cdot - t_{n-1}}{h_n}\Big)^{1-\mu} \int_{I_n} (t_n-\tau)^{-\mu} K(\cdot, s(\cdot,\tau)) G(Y^n(s(\cdot,\tau))) d\tau, L_{n,q}(\cdot) \Big\rangle_{I_n} \\
&\approx \frac{h_n}{2^{2-\mu}} \sum_{i,j=0}^{M_n} (t_{n,i}-t_{n-1})^{1-\mu} K(t_{n,i}, s(t_{n,i}, t_{n,j}^{(-\mu,0)})) G(Y^n(s(t_{n,i}, t_{n,j}^{(-\mu,0)}))) \\
&\quad \cdot L_{n,q}(t_{n,i}) \omega_{n,j}^{(-\mu,0)} \omega_{n,i}.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

为了书写方便，我们将(2.32)-(2.34)中的$G(\cdot,y)$简写为$G(y)$。

显然上式为隐格式。在实际的计算中，可以使用迭代法来计算系数$\{y_p^n\}_{p=0}^{M_n}$。在本文中，我们用一种简单的迭代算法(也称为连续替代方法)。简单地说，我们要计算Y^n在当前区间上各点的值，只需知道前面每个单元上的系数$\{y_p^k\}_{p=1}^{M_k}$，$1 \leqslant k \leqslant n-1$即可，算法2.1给出具体计算步骤。

算法2.1 一个简单的迭代算法

n从1算到N

给定迭代初值$\mathbf{y}^{n,(0)} \equiv (1,\cdots,1)^T$，执行以下迭代过程：

$A^1\mathbf{y}^{1,(k)} = \mathbf{f}^1 + \mathbf{w}^1(\mathbf{y}^{1,(k-1)})$，　或　$A^n\mathbf{y}^{n,(k)} = \mathbf{f}^n + \mathbf{v}^n + \mathbf{w}^n(\mathbf{y}^{n,(k-1)})$，　$k=1,2,\cdots$

注释 2.1. 对于线性弱奇异VIEs(即$G(s,y)=y$)，方程(2.25)等价于如下的线性系统：

$$
\begin{cases}
A^1\mathbf{y}^1 - B^1\mathbf{y}^1 = \mathbf{f}^1 & \Rightarrow \mathbf{y}^1 = (A^1-B^1)^{-1}\mathbf{f}^1, \\
A^n\mathbf{y}^n - B^n\mathbf{y}^n = \mathbf{f}^n + \mathbf{v}^n & \Rightarrow \mathbf{y}^n = (A^n-B^n)^{-1}(\mathbf{f}^n+\mathbf{v}^n), \quad n \geqslant 2.
\end{cases}
\tag{2.35}
$$

其中$\mathbf{y}^n$, $\mathbf{f}^n$, A^n 由(2.28)给出，

$$\begin{aligned} &B^n = (b^n_{qp})_{0\leqslant q,p\leqslant M_n}, \quad b^1_{qp} = (\mathcal{V}^1_2 P^{(-\mu,1-\mu)}_{1,p}, P^{(-\mu,1-\mu)}_{1,q})_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}, \\ &b^n_{qp} = (\mathcal{V}^n_2 L_{n,p}, L_{n,q})_{I_n}, \qquad\qquad n\geqslant 2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

类似地，由求积公式(2.15)和(2.23)可以得到

$$\begin{aligned} b^1_{qp} &\approx \Big\langle \Big(\frac{\cdot}{h_1}\Big)^{1-\mu}\int_{I_1}(t_1-\tau)^{-\mu}K(\cdot,s(\cdot,\tau))P^{(-\mu,1-\mu)}_{1,p}(s(\cdot,\tau))d\tau, P^{(-\mu,1-\mu)}_{1,q}(\cdot)\Big\rangle_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} \\ &\approx \frac{h_1^{2-2\mu}}{2^{4-4\mu}}\sum_{i,j=0}^{M_1}\big(t^{(-\mu,1-\mu)}_{1,i}\big)^{1-\mu}K(t^{(-\mu,1-\mu)}_{1,i}, s(t^{(-\mu,1-\mu)}_{1,i}, t^{(-\mu,1-\mu)}_{1,j})) \\ &\quad\cdot \widetilde{J}^{(-\mu,1-\mu)}_{1,p}(s(t^{(-\mu,1-\mu)}_{1,i}, t^{(-\mu,1-\mu)}_{1,j}))\widetilde{J}^{(-\mu,1-\mu)}_{1,q}(t^{(-\mu,1-\mu)}_{1,i})\omega^{(-\mu,1-\mu)}_{1,j}\omega^{(-\mu,1-\mu)}_{1,i}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

以及

$$\begin{aligned} b^n_{qp} &\approx \Big\langle (\frac{\cdot-t_{n-1}}{h_n})^{1-\mu}\int_{I_n}(t_n-\tau)^{-\mu}K(\cdot,s(\cdot,\tau))L_{n,p}(s(\cdot,\tau))d\tau, L_{n,q}(\cdot)\Big\rangle_{I_n} \\ &\approx \frac{h_n}{2^{2-\mu}}\sum_{i,j=0}^{M_n}(t_{n,i}-t_{n-1})^{1-\mu}K(t_{n,i}, s(t_{n,i}, t^{(-\mu,0)}_{n,j}))L_{n,p}(s(t_{n,i}, t^{(-\mu,0)}_{n,j}))L_{n,q}(t_{n,i})\omega^{(-\mu,0)}_{n,j}\omega_{n,i}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

3 引理

在这一部分，我们回顾一些误差分析中将要用到的引理。对任意的整数$m\geqslant 0$，定义如下带Jacobi权的Sobolev空间

$$H^m_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}(\Lambda) = \{v : \|v\|_{H^m_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}} < \infty\},$$

其范数和半范数定义如下:

$$\|v\|_{H^m_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}} = \Big(\sum_{k=0}^{m}|v|^2_{H^k_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}}\Big)^{\frac12}, \quad |v|_{H^k_{\chi^{(\alpha,\beta)},A}} = \|\partial^k_x v\|_{\chi^{(\alpha+k,\beta+k)}},$$

其中$\|\cdot\|_{\chi^{(\alpha,\beta)}}$表示$L^2_{\chi^{(\alpha,\beta)}}(\Lambda)$范数。记$c$为任一正常数，它不依赖于$h_k$，$M$，$M_k$以及方程的解$y(t)$和$Y(t)$。下面，我们来回顾下Riemann-Liouville分数阶积分和Riemann-Liouville分数阶导数，参考 [23,24]。

定义 3.1. (Riemann-Liouville分数阶积分和Riemann-Liouville分数阶导数.)对任意的$\rho\in\mathbb{R}^+$，左侧和右侧Riemann-Liouville分数阶积分分别定义为

$${}_aI^\rho_x u(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_a^x\frac{u(y)}{(x-y)^{1-\rho}}dy, \quad x>a; \quad {}_xI^\rho_b u(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_x^b\frac{u(y)}{(y-x)^{1-\rho}}dy, \quad x<b, \tag{3.1}$$

其中$\Gamma(\cdot)$为通常的Gamma函数。

对任意的$s\in[k-1,k)$，$k\in\mathbb{N}$，左侧Riemann-Liouville s阶导数定义为

$${}_aD^s_x u(x) = \frac{1}{\Gamma(k-s)}\frac{d^k}{dx^k}\int_a^x\frac{u(y)}{(x-y)^{s-k+1}}dy, \quad x\in(a,b), \tag{3.2}$$

而右侧Riemann-Liouville s阶导数定义为

$${}_xD^s_b u(x) = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-s)}\frac{d^k}{dx^k}\int_x^b\frac{u(y)}{(y-x)^{s-k+1}}dy, \quad x\in(a,b). \tag{3.3}$$

接着，我们定义(参考 [22])

$$\widetilde{\mathcal{F}}_M^{(\beta)}(\Lambda) := \{(1+x)^\beta \psi(x) : \psi(x) \in \mathcal{P}_M(\Lambda)\} = \mathrm{span}\{(1+x)^\beta J_l^{(\alpha,\beta)}(x) : 0 \leqslant l \leqslant M\},$$

和

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta}^m(\Lambda) := \{u \in L^2_{\chi^{(\alpha,-\beta)}}(\Lambda) : {}_{-1}D_x^{\beta+r} u \in L^2_{\chi^{(\alpha+\beta+r,r)}}(\Lambda) \quad \text{for} \quad 0 \leqslant r \leqslant m\}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

根据 [22]中的定理4.3，我们有

引理 3.1. 设$\alpha > -1$，$\beta > 0$，对任意的$u \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,\beta}^m(\Lambda)$其中$0 \leqslant m \leqslant M$，成立

$$\|\widetilde{\pi}_M^{(\alpha,\beta)} u - u\|_{\chi^{(\alpha,-\beta)}} \leqslant c M^{-(\beta+m)} \|{}_{-1}D_x^{\beta+m} u\|_{\chi^{(\alpha+\beta+m,m)}}. \tag{3.4}$$

这里$\widetilde{\pi}_M^{(\alpha,\beta)}$为标准区间$\Lambda$上基于空间$\widetilde{\mathcal{F}}_M^{(\beta)}(\Lambda)$的$L^2_{\chi^{(\alpha,-\beta)}}(\Lambda)$-正交投影

$$(\widetilde{\pi}_M^{(\alpha,\beta)} u - u, \psi)_{\chi^{(\alpha,-\beta)}} = 0, \quad \forall \psi \in \widetilde{\mathcal{F}}_M^{(\beta)}(\Lambda).$$

为了更好的描述解y的正则型，我们引入区间I_1上带分数阶导数的非一致权空间：

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\alpha,\beta}^m(I_1) &:= \{v \in L^2_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}(I_1) : {}_0D_t^{\beta+r} v \in L^2_{\chi_1^{(\alpha+\beta+r,r)}}(I_1) \quad \text{for} \quad 0 \leqslant r \leqslant m\}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \\
\mathcal{H}_{\alpha,\beta}^m(I_1) &:= \{v \in L^2_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}(I_1) : {}_0D_t^{\beta+r} v \in L^2_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}(I_1) \quad \text{for} \quad 0 \leqslant r \leqslant m\}, \quad m \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

定义$\pi_{I_1,M_1}^{(\alpha,\beta)}$为区间$I_1$上基于空间$\mathcal{F}_{M_1}^{(\beta)}(I_1)$的$L^2_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}(I_1)$-正交投影

$$(\pi_{I_1,M_1}^{(\alpha,\beta)} v - v, \psi)_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}} = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{F}_{M_1}^{(\beta)}(I_1). \tag{3.5}$$

引理 3.2. 设$\alpha > -1$，$\beta > 0$，对任意的$v \in \mathcal{B}_{\alpha,\beta}^{m_1}(I_1)$，其中$0 \leqslant m_1 \leqslant M_1$，成立

$$\|\pi_{I_1,M_1}^{(\alpha,\beta)} v - v\|_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}} \leqslant c h_1^{-\beta} M_1^{-(\beta+m_1)} \|{}_{t_0}D_t^{\beta+m_1} v\|_{\chi_1^{(\alpha+\beta+m_1,m_1)}}. \tag{3.6}$$

特别地，若$v \in \mathcal{H}_{\alpha,\beta}^{m_1}(I_1)$，则

$$\|\pi_{I_1,M_1}^{(\alpha,\beta)} v - v\|_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}} \leqslant c h_1^{m_1} M_1^{-(\beta+m_1)} \|{}_{t_0}D_t^{\beta+m_1} v\|_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}}. \tag{3.7}$$

证明： 设$u(x) = v(t)\Big|_{t=\frac{h_1x+t_0+t_1}{2}}$. 由于$\pi_{I_1,M_1}^{(\alpha,\beta)} v(t)\Big|_{t=\frac{h_1x+t_0+t_1}{2}}$和$\widetilde{\pi}_{M_1}^{(\alpha,\beta)} u(x)$按变量$x$属于空间$\widetilde{\mathcal{F}}_{M_1}^{(1-\mu)}(\Lambda)$。因此

$$\pi_{I_1,M_1}^{(\alpha,\beta)} v(t)\Big|_{t=\frac{h_1x+t_0+t_1}{2}} = \widetilde{\pi}_{M_1}^{(\alpha,\beta)} u(x). \tag{3.8}$$

上述式子和(3.4)可得

$$\begin{aligned}
\|\pi_{I_1,M_1}^{(\alpha,\beta)} v - v\|^2_{\chi_1^{(\alpha,-\beta)}} &= \left(\frac{h_1}{2}\right)^{\alpha-\beta+1} \int_{-1}^1 \big(\widetilde{\pi}_{M_1}^{(\alpha,\beta)} u(x) - u(x)\big)^2 (1-x)^\alpha (1+x)^{-\beta} dx \\
&\leqslant c h_1^{\alpha-\beta+1} M_1^{-2(\beta+m_1)} \int_{-1}^1 \big({}_{-1}D_x^{\beta+m_1} u(x)\big)^2 (1-x)^{\alpha+\beta+m_1} (1+x)^{m_1} dx \\
&\leqslant c h_1^{-2\beta} M_1^{-2(\beta+m_1)} \int_{I_1} \big({}_0D_t^{\beta+m_1} v(t)\big)^2 (t_1-t)^{\alpha+\beta+m_1} (t-t_0)^{m_1} dt.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

从而得到结果(3.6)。进一步地，

$$\int_{I_1}\left({}_0D_t^{\beta+m_1}v(t)\right)^2(t_1-t)^{\alpha+\beta+m_1}(t-t_0)^{m_1}dt\leqslant\left(\frac{h_1}{2}\right)^{2(\beta+m_1)}\int_{I_1}\left({}_0D_t^{\beta+m_1}v(t)\right)^2(t_1-t)^{\alpha}(t-t_0)^{-\beta}dt.$$

根据文献 [12]中的定理3.35，有

引理 3.3. 对任意的函数$u\in H^m_{\chi^{(0,0)},A}(\Lambda)$以及整数$1\leqslant m\leqslant M_n+1$，成立

$$\|u-\widetilde{\pi}_{M_n}u\|_{L^2(-1,1)}\leqslant cM_n^{-m}\|\partial_x^m u\|_{L^2_{\omega^m}(-1,1)}, \tag{3.10}$$

这里$\widetilde{\pi}_{M_n}$是基于多项式空间$\mathcal{P}_{M_n}(\Lambda)$的$L^2(\Lambda)$-正交投影：

$$(\widetilde{\pi}_{M_n}u-u,\psi)_{L^2(\Lambda)}=0,\quad\forall\psi\in\mathcal{P}_{M_n}(\Lambda).$$

进而，我们定义π_{I_n,M_n}是基于多项式空间$\mathcal{P}_{M_n}(I_n)$的$L^2(I_n)$-正交投影：

$$(\pi_{I_n,M_n}v-v,\psi)_{I_n}=0,\quad\forall\psi\in\mathcal{P}_{M_n}(I_n). \tag{3.11}$$

引理 3.4. 对任意的函数$v\in H^m(I_n)$以及整数$1\leqslant m\leqslant M_n+1$，成立

$$\|v-\pi_{I_n,M_n}v\|_{I_n}\leqslant cM_n^{-m}\|\partial_t^m v\|_{\chi_n^{(m,m)}}\leqslant ch_n^mM_n^{-m}\|\partial_t^m v\|_{I_n}, \tag{3.12}$$

这里$H^m(I_n)$为通常的Sobolev空间。

证明： 显然，由$u(x)=v(t)\Big|_{t=\frac{h_nx+t_{n-1}+t_n}{2}}$，而且$\pi_{I_n,M_n}v(t)\Big|_{t=\frac{h_nx+t_{n-1}+t_n}{2}}$和$\widetilde{\pi}_{M_n}u(x)$按变量$x$是属于多项式空间$\mathcal{P}_{M_n}(-1,1)$，因此

$$\pi_{I_n,M_n}v(t)\Big|_{t=\frac{h_nx+t_{n-1}+t_n}{2}}=\widetilde{\pi}_{M_n}u(x). \tag{3.13}$$

从而，由上式和(3.10)可得

$$\begin{aligned}\|v-\pi_{I_n,M_n}v\|^2_{I_n}&=\frac{h_n}{2}\int_{-1}^1(u(x)-\widetilde{\pi}_{M_n}u(x))^2dx\\&\leqslant ch_nM_n^{-2m}\int_{-1}^1(\partial_x^m u(x))^2(1-x^2)^m dx\\&\leqslant cM_n^{-2m}\int_{I_n}(\partial_t^m v(t))^2(t_n-t)^m(t-t_{n-1})^m dt\\&\leqslant ch_n^{2m}M_n^{-2m}\int_{I_n}(\partial_t^m v(t))^2dt.\end{aligned} \tag{3.14}$$

证毕。

以下的Gronwall引理参考 [14]。

引理 3.5. 假设$\{k_j\}$和$\{\rho_j\}$ $(j\geqslant 0)$是两组给定的非负序列，且序列$\{\varepsilon_n\}$满足$\varepsilon_0\leqslant\rho_0$以及

$$\varepsilon_n\leqslant\rho_n+\sum_{j=0}^{n-1}q_j+\sum_{j=0}^{n-1}k_j\varepsilon_j,\quad n\geqslant 1, \tag{3.15}$$

其中$\rho_0\geqslant 0$ $(j\geqslant 0)$。则

$$\varepsilon_n\leqslant\rho_n+\sum_{j=0}^{n-1}(q_j+k_j\rho_j)\exp(\sum_{j=0}^{n-1}k_j),\quad n\geqslant 1. \tag{3.16}$$

4　存在性、唯一性和误差分析

本节我们将对格式(2.25)进行存在性、唯一性以及收敛性分析，其中hp-型误差估计要求$0 < \mu < 1/2$。我们知道方程(1.1)的解只有在$t = 0$处具有奇性，而$t \neq 0$时解则是光滑的。因此，我们可以假设当$n = 1$时，$y|_{t\in I_1}$属于带分数阶导数的非一致权空间$\mathcal{B}^{m_1}_{-\mu,1-\mu}(I_1)$，当$n > 1$时，$y(t)|_{t\in I_n}$属于一般的Sobolev空间$H^{m_n}(I_n)$。进一步地，我们设$y(t)$是方程(1.1)解，而$Y(t)$则是方程(2.25)的整体解，即

$$Y(t) := Y^n(t), \qquad t \in I_n, \qquad 1 \leqslant n \leqslant N.$$

设$e_n(t) = y^n(t) - Y^n(t)$，$1 \leqslant n \leqslant N$，以及$M_{\min} = \min\limits_{1\leqslant n\leqslant N} M_n$。

定理 4.1. 假设$K(t,s) \in C(D)$，且G满足如下的Lipschitz条件:

$$|G(s,y_1) - G(s,y_2)| \leqslant \gamma|y_1 - y_2|, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{4.1}$$

则对任意的$1 \leqslant n \leqslant N$以及足够小的$h_{\max}^{2-2\mu}$, 方程(2.25)存在唯一解。

证明： 我们首先来证明存在性。设$U_1^{(m)}(t)$和$U_2(t)$为定义在$[0,t_n]$上的整体函数，

$$U_1^{(m)}(t)\Big|_{t\in I_k} = G(t,Y^{k,(m)}(t)) - G(t,Y^{k,(m-1)}(t)), \quad U_2(t)\Big|_{t\in I_k} = G(t,y^k(t)) - G(t,Y^k(t)), \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{4.2}$$

考虑如下的迭代过程$m = 1, 2, \cdots$：

$$\begin{cases} (Y^{1,(m)},\varphi)_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} = (f,\varphi)_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} + (\mathcal{V}_2^1 Y^{1,(m-1)},\varphi)_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}, & \forall \varphi \in \mathcal{F}^{(1-\mu)}_{M_1}(I_1); \\ (Y^{n,(m)},\psi)_{I_n} = (f,\psi)_{I_n} + (\mathcal{V}_1^n Y,\psi)_{I_n} + (\mathcal{V}_2^n Y^{n,(m-1)},\psi)_{I_n}, & \forall \psi \in \mathcal{P}_{M_n}(I_n), \qquad n \geqslant 2. \end{cases} \tag{4.3}$$

根据$\pi^{(-\mu,1-\mu)}_{I_1,M_1}$和$\pi_{I_n,M_n}$的定义(3.5)和(3.11)，可以得到

$$\begin{cases} Y^{1,(m)} = \pi^{(-\mu,1-\mu)}_{I_1,M_1}\big(f + \mathcal{V}_2^1 Y^{1,(m-1)}\big), \\ Y^{n,(m)} = \pi_{I_n,M_n}\big(f + \mathcal{V}_1^n Y + \mathcal{V}_2^n Y^{n,(m-1)}\big), \qquad n \geqslant 2. \end{cases} \tag{4.4}$$

接着，令$\widetilde{Y}^{n,(m)} = Y^{n,(m)} - Y^{n,(m-1)}$, $n \geqslant 1$，由(4.4)，则有

$$\begin{cases} \widetilde{Y}^{1,(m)} = \pi^{(-\mu,1-\mu)}_{I_1,M_1}\big(\mathcal{V}_2^1 Y^{1,(m-1)} - \mathcal{V}_2^1 Y^{1,(m-2)}\big), \\ \widetilde{Y}^{n,(m)} = \pi_{I_n,M_n}\big(\mathcal{V}_2^n Y^{n,(m-1)} - \mathcal{V}_2^n Y^{n,(m-2)}\big), \qquad n \geqslant 2. \end{cases} \tag{4.5}$$

显然地，对于任意的$v \in L^2_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}(I_1)$，有

$$\|\pi^{(-\mu,1-\mu)}_{I_1,M_1} v\|^2_{I_1} \leqslant h_1 \|\pi^{(-\mu,1-\mu)}_{I_1,M_1} v\|^2_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} \leqslant h_1 \|v\|^2_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}. \tag{4.6}$$

从而，根据(4.1)，(4.5)，(4.6)以及Cauchy-Schwarz不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{Y}^{1,(m)}\|_{I_1}^2 &\leqslant h_1\int_{I_1}\Big(\int_{t_0}^t(t-s)^{-\mu}K(t,s)U_1^{(m-1)}(s)ds\Big)^2\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}(t)dt \\
&\leqslant ch_1\int_{I_1}\Big[\int_{t_0}^t(t-s)^{-\mu}ds\int_{t_0}^t(t-s)^{-\mu}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2ds\Big]\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}(t)dt \\
&= ch_1\int_{I_1}\Big(\frac{-(t-s)^{1-\mu}}{1-\mu}\Big|_{s=t_0}^{s=t}\Big)\int_{t_0}^t(t-s)^{-\mu}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2ds\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}(t)dt \\
&\leqslant ch_1\int_{I_1}(t-t_0)^{1-\mu}\int_{t_0}^t(t-s)^{-\mu}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2ds\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}(t)dt \\
&\leqslant h_1\int_{I_1}(t_1-t)^{-\mu}\int_{t_0}^t(t-s)^{-\mu}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2dsdt \\
&\leqslant ch_1\int_{I_1}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2\int_s^{t_1}(t_1-t)^{-\mu}(t-s)^{-\mu}dtds \\
&\leqslant ch_1^{2-2\mu}\int_{I_1}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2ds\leqslant ch_1^{2-2\mu}\|\widetilde{Y}^{1,(m-1)}\|_{I_1}^2.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

类似地，当$n>1$时，由(4.1)，(4.5)，(4.6)以及Cauchy-Schwarz不等式，得

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{Y}^{n,(m)}\|_{I_n}^2 &= \int_{I_n}\Big(\int_{t_{n-1}}^t(t-s)^{-\mu}K(t,s)U_1^{(m-1)}(s)ds\Big)^2dt \\
&\leqslant c\int_{I_n}\int_{t_{n-1}}^t(t-s)^{-\mu}ds\int_{t_{n-1}}^t(t-s)^{-\mu}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2dsdt \\
&= c\int_{I_n}\Big[\frac{-(t-s)^{1-\mu}}{1-\mu}\Big|_{s=t_{n-1}}^{s=t}\Big]\int_{t_{n-1}}^t(t-s)^{-\mu}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2dsdt \\
&\leqslant ch_n^{1-\mu}\int_{I_n}\int_{t_{n-1}}^t(t-s)^{-\mu}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2dsdt \\
&\leqslant ch_n^{1-\mu}\int_{I_n}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2\int_s^{t_n}(t-s)^{-\mu}dtds \\
&\leqslant ch_n^{2-2\mu}\int_{I_n}\big(U_1^{(m-1)}(s)\big)^2ds\leqslant ch_n^{2-2\mu}\|\widetilde{Y}^{n,(m-1)}\|_{I_n}^2.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

因此，若满足$ch_1^{2-2\mu}\leqslant\beta<1$，当$m\to\infty$，则有$\|\widetilde{Y}^{1,(m)}\|_{I_1}\to 0$ 或$\|\widetilde{Y}^{n,(m)}\|_{\chi_n^{(-\mu,\mu-1)}}\to 0$。从而证明了解的存在性，我们可以用类似的方法来证明解的唯一性。

定理 4.2. 设y^n是方程(2.4)的解，Y^n是方程(2.25)的解。假设$0<\mu<1/2$，$K(t,s)\in C(D)$，$y|_{t\in I_1}\in\mathcal{B}_{-\mu,1-\mu}^{m_1}(I_1)$，$y|_{t\in I_n}\in H^{m_n}(I_n)$其中$n\geqslant 2$，以及整数$1\leqslant m_n\leqslant M_n+1$，并且$G$满足Lipschitz条件(4.1)，那么，对任意的整数$1\leqslant n\leqslant N$以及足够小的$h_{\max}^{2-2\mu}$，有

$$
\begin{aligned}
&\|y^1-Y^1\|_{I_1}\leqslant ch_1^{\mu-1/2}M_1^{-(1-\mu+m_1)}\|{}_0D_t^{1-\mu+m_1}y\|_{\chi_1^{(1-2\mu+m_1,m_1)}}, \\
&\|y^n-Y^n\|_{I_n}\leqslant ch_n^{m_n}M_n^{-m_n}\|\partial_t^{m_n}y\|_{I_n},\qquad n\geqslant 2.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

特别地，若$y|_{t\in I_1}\in\mathcal{H}_{-\mu,1-\mu}^{m_1}(I_1)$, 则

$$
\begin{aligned}
&\|y^1-Y^1\|_{I_1}\leqslant ch_1^{m_1+1/2}M_1^{-(1-\mu+m_1)}\|{}_0D_t^{1-\mu+m_1}y\|_{\chi_1^{-\mu,\mu-1}}, \\
&\|y^n-Y^n\|_{I_n}\leqslant ch_n^{m_n}M_n^{-m_n}\|\partial_t^{m_n}y\|_{I_n},\qquad n\geqslant 2.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

证明： 我们将(2.4)减去(2.25)，得

$$\begin{cases} y^1 - Y^1 = f - \pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} f + \mathcal{V}_2^1 y^1 - \pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} \mathcal{V}_2^1 Y^1, \\ y^n - Y^n = f - \pi_{I_n,M_n} f + \mathcal{V}_1^n y - \pi_{I_n,M_n} \mathcal{V}_1^n Y + \mathcal{V}_2^n y^n - \pi_{I_n,M_n} \mathcal{V}_2^n Y^n, \qquad n > 1. \end{cases}$$

此外，由(2.4)可知

$$\begin{cases} f - \pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} f = y^1 - \pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} y^1 + \big(\pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} - \mathcal{I}\big) \mathcal{V}_2^1 y^1, \\ f - \pi_{I_n,M_n} f = y^n - \pi_{I_n,M_n} y^n + \big(\pi_{I_n,M_n} - \mathcal{I}\big) \mathcal{V}_1^n y + \big(\pi_{I_n,M_n} - \mathcal{I}\big) \mathcal{V}_2^n y^n, \qquad n > 1. \end{cases}$$

其中$\mathcal{I}$为等价算子。结合以上两式可以进一步得到

$$\begin{cases} e_1 = y^1 - \pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} y^1 + \pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} \big(\mathcal{V}_2^1 y^1 - \mathcal{V}_2^1 Y^1\big), \\ e_n = y^n - \pi_{I_n,M_n} y^n + \pi_{I_n,M_n} (\mathcal{V}_1^n y - \mathcal{V}_1^n Y) + \pi_{I_n,M_n} (\mathcal{V}_2^n y^n - \mathcal{V}_2^n Y^n), \qquad n > 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

进而, 由(4.11)和(4.6)，可得

$$\|e_1\|_{I_1}^2 \leqslant 2\|y^1(t) - \pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} y^1\|_{I_1}^2 + 2\|\pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} \big(\mathcal{V} y^1 - \mathcal{V} Y^1\big)\|_{I_1}^2 \leqslant ch_1(D_1 + D_2), \tag{4.12}$$

其中

$$D_1 = \|y^1(t) - \pi_{I_1,M_1}^{(-\mu,1-\mu)} y^1\|_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}^2, \quad D_2 = \|\mathcal{V} y^1 - \mathcal{V} Y^1\|_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}^2.$$

根据引理3.2，对任意的整数$1 \leqslant m_1 \leqslant M_1 + 1$，即有

$$\begin{aligned} D_1 &\leqslant ch_1^{2\mu-2} M_1^{-2(1-\mu+m_1)} \|{}_0D_t^{1-\mu+m_1} y\|_{\chi_1^{(1-2\mu+m_1,m_1)}}^2 \\ &\leqslant ch_1^{2m_1} M_1^{-2(1-\mu+m_1)} \|{}_0D_t^{1-\mu+m_1} y\|_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}^2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

使用类似于(4.6)和(4.7)的方法, 易知

$$\begin{aligned} D_2 &\leqslant \int_{I_1} \Big(\int_{t_0}^t (t-s)^{-\mu} K(t,s) U_2(s) ds\Big)^2 \chi_1^{(-\mu,\mu-1)}(t) dt \\ &\leqslant \int_{I_1} \Big[\int_{t_0}^t (t-s)^{-\mu} ds \int_{t_0}^t (t-s)^{-\mu} \big(U_2(s)\big)^2 ds\Big] \chi_1^{(-\mu,\mu-1)}(t) dt \\ &= \int_{I_1} \Big(\frac{-(t-s)^{1-\mu}}{1-\mu}\Big|_{s=t_0}^{s=t}\Big) \int_{t_0}^t (t-s)^{-\mu} \big(U_2(s)\big)^2 ds \chi_1^{(-\mu,\mu-1)}(t) dt \\ &\leqslant \int_{I_1} (t-t_0)^{1-\mu} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\mu} \big(U_2(s)\big)^2 ds \chi_1^{(-\mu,\mu-1)}(t) dt \\ &\leqslant c \int_{I_1} (t_1-t)^{-\mu} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\mu} \big(U_2(s)\big)^2 ds dt \\ &\leqslant c \int_{I_1} \big(U_2(s)\big)^2 \int_s^{t_1} (t_1-t)^{-\mu} (t-s)^{-\mu} dt ds \\ &\leqslant ch_1^{1-2\mu} \int_{I_1} \big(U_2(s)\big)^2 ds \leqslant ch_1^{1-2\mu} \|e_1\|_{I_1}^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

因此，根据(4.12)，(4.13)和(4.14)容易得到

$$\|e_1\|_{I_1}^2 \leqslant ch_1^{2m_1+1} M_1^{-2(1-\mu+m_1)} \|{}_0D_t^{1-\mu+m_1} y\|^2_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}. \tag{4.15}$$

下面考虑$n > 1$的情况

$$\|e_n\|_{I_n}^2 \leqslant 2\|y^n(t) - \pi_{I_n,M_n} y^n\|_{I_n}^2 + 2\|\pi_{I_n,M_n}\big(\mathcal{V}y^n - \mathcal{V}Y^n\big)\|_{I_n}^2 \leqslant 2(D_3 + D_4), \tag{4.16}$$

其中

$$D_3 = \|y^n(t) - \pi_{I_n,M_n} y^n\|_{I_n}^2, \quad D_4 = \|\mathcal{V}y^n - \mathcal{V}Y^n\|_{I_n}^2.$$

根据引理3.4，对于任意的整数$1 \leqslant m_n \leqslant M_n + 1$，

$$D_3 \leqslant ch_n^{2m_n} M_n^{-2m_n} \|\partial_t^{m_n} y\|_{I_n}^2. \tag{4.17}$$

由(4.16)易知

$$D_4 = \|D_5 + D_6\|_{I_n}^2 \leqslant 2\|D_5\|_{I_n}^2 + 2\|D_6\|_{I_n}^2, \tag{4.18}$$

其中

$$\begin{aligned}
D_5(t) &= \int_0^{t_{n-1}} (t-s)^{-\mu} K(t,s)\big(G(s,y(s)) - G(s,Y(s))\big)ds, \\
D_6(t) &= \int_{t_{n-1}}^{t} (t-s)^{-\mu} K(t,s)\big(G(s,y^n(s)) - G(s,Y^n(s))\big)ds.
\end{aligned}$$

进而，根据(4.1)，(4.2)和Cauchy-Schwarz不等式, 当$0 < \mu < 1/2$时，有

$$\begin{aligned}
\|D_5\|_{I_n}^2 &= \int_{I_n} \Big(\int_0^{t_{n-1}} (t-s)^{-\mu} K(t,s) U_2(s) ds\Big)^2 dt \\
&\leqslant c\int_{I_n} \Big[\int_0^{t_{n-1}} (t-s)^{-2\mu} ds \int_0^{t_{n-1}} \big(U_2(s)\big)^2 ds\Big] dt \\
&= c\int_{I_n} \Big(\frac{-(t-s)^{1-2\mu}}{1-2\mu}\Big|_{s=0}^{s=t_{n-1}}\Big) \int_0^{t_{n-1}} \big(U_2(s)\big)^2 ds dt \\
&\leqslant c\int_{I_n} (t-t_{n-1})^{1-2\mu} \int_0^{t_{n-1}} \big(U_2(s)\big)^2 dsdt + c\int_{I_n} t^{1-2\mu} \int_0^{t_{n-1}} \big(U_2(s)\big)^2 dsdt \\
&\leqslant c\int_{I_n} \int_0^{t_{n-1}} \big(U_2(s)\big)^2 dsdt \\
&\leqslant ch_n \sum_{k=1}^{n-1} \|e_k\|_{I_k}^2.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

类似地，由(4.1)，(4.2)和Cauchy-Schwarz不等式, 易知

$$
\begin{aligned}
\|D_6\|_{I_n}^2 &= \int_{I_n}\Big(\int_{t_{n-1}}^{t}(t-s)^{-\mu}K(t,s)U_2(s)ds\Big)^2dt \\
&\leqslant c\int_{I_n}\int_{t_{n-1}}^{t}(t-s)^{-\mu}ds\int_{t_{n-1}}^{t}(t-s)^{-\mu}\big(U_2(s)\big)^2dsdt \\
&= c\int_{I_n}\Big[\frac{-(t-s)^{1-\mu}}{1-\mu}\Big|_{s=t_{n-1}}^{s=t}\Big]\int_{t_{n-1}}^{t}(t-s)^{-\mu}\big(U_2(s)\big)^2dsdt \\
&\leqslant ch_n^{1-\mu}\int_{I_n}\int_{t_{n-1}}^{t}(t-s)^{-\mu}\big(U_2(s)\big)^2dsdt \\
&\leqslant ch_n^{1-\mu}\int_{I_n}\big(U_2(s)\big)^2\int_{s}^{t_n}(t-s)^{-\mu}dtds \\
&\leqslant ch_n^{2-2\mu}\int_{I_n}\big(U_2(s)\big)^2ds \leqslant ch_n^{2-2\mu}\|e_n\|_{I_n}^2.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

因此，由(4.16)-(4.20)，得

$$
\|e\|_{I_n}^2 \leqslant c\sum_{k=1}^{n-1}h_n\|e_k\|_{I_k}^2 + ch_n^{2m_n}M_n^{-2m_n}\|\partial_t^{m_n}y\|_{I_n}^2. \tag{4.21}
$$

最后，根据引理3.5可得

$$
\|e_n\|_{I_n}^2 \leqslant ch_n^{2m_n}M_n^{-2m_n}\|\partial_t^{m_n}y\|_{I_n}^2. \tag{4.22}
$$

证毕。

定理 4.3. 设y是方程(1.1)的解，Y是方程(1.1)的整体数值解。假设$0<\mu<1/2$, $K(t,s)\in C(D)$, $y|_{t\in I_1}\in \mathcal{B}_{-\mu,1-\mu}^m(I_1)$, $y|_{t\in I_n}\in H^m(I_n)$其中$n\geqslant 2$，以及整数$1\leqslant m\leqslant M_{\min}+1$，并且$G$满足如下的Lipschitz条件(4.1)，那么，对足够小的$h_{\max}$，有

$$
\|y-Y\|_{L^2(I)} \leqslant ch_1^{\mu-1/2}M_1^{-(1-\mu+m)}\|{}_0D_t^{1-\mu+m}y\|_{\chi_1^{(1-2\mu+m_1,m_1)}} + h_{\max}^m M_{\min}^{-m}\|\partial_t^m y\|_{L^2(I)}. \tag{4.23}
$$

特别地，若$y|_{t\in I_1}\in \mathcal{H}_{-\mu,1-\mu}^m(I_1)$，则

$$
\|y-Y\|_{L^2(I)} \leqslant ch_1^{m+1/2}M_1^{-(1-\mu+m)}\|{}_0D_t^{1-\mu+m}y\|_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}} + h_{\max}^m M_{\min}^{-m}\|\partial_t^m y\|_{L^2(I)}. \tag{4.24}
$$

证明： 显然地，我们将方程(4.9)和(4.10)的n从1到N进行累加，即

$$
\begin{aligned}
\|y-Y\|_{L^2(I)}^2 &\leqslant ch_1^{2\mu-1}M_1^{-2(1-\mu+m)}\|{}_0D_t^{1-\mu+m}y\|_{\chi_1^{(1-2\mu+m,m)}}^2 + \sum_{n=2}^{N}h_n^{2m}M_n^{-2m}\|\partial_t^m y\|_{I_n}^2 \\
&\leqslant ch_1^{2\mu-1}M_1^{-2(1-\mu+m)}\|{}_0D_t^{1-\mu+m}y\|_{\chi_1^{(1-2\mu+m,m)}}^2 + h_{\max}^{2m}M_{\min}^{-2m}\|\partial_t^m y\|_{L^2(I)}^2,
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\|y-Y\|_{L^2(I)}^2 &\leqslant ch_1^{2m+1}M_1^{-2(1-\mu+m)}\|{}_0D_t^{1-\mu+m}y\|_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}^2 + \sum_{n=2}^{N}h_n^{2m}M_n^{-2m}\|\partial_t^m y\|_{I_n}^2 \\
&\leqslant ch_1^{2m+1}M_1^{-2(1-\mu+m)}\|{}_0D_t^{1-\mu+m}y\|_{\chi_1^{(-\mu,\mu-1)}}^2 + h_{\max}^{2m}M_{\min}^{-2m}\|\partial_t^m y\|_{L^2(I)}^2.
\end{aligned}
$$

证毕。

注释 4.1. 与传统的有限元方法不同，定理4.2和定理4.3中的收敛性结果并不要求网格是拟一致的。

5 数值结果

这一部分我们给出一些数值例子来说明混合广义Jacobi函数和Legendre多项式的谱元法的有效性。定义$E_1(T)$和$E_2(T)$分别为网格点上的最大误差和离散L^2-误差:

$$E_1(T) = \max_{1\leqslant k\leqslant N} |y(t_k) - Y(t_k)|,$$
$$E_2(T) = \Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{h_k}{2}\sum_{j=0}^{M_k}(y^k(x_{k,j}) - Y^k_{M_k}(x_{k,j}))^2\omega_{k,j}\Big)^{\frac{1}{2}} \approx \Big(\int_0^T (y(t) - Y(t))^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

这里我们取初值$\{y_p^{n,(0)}\}_{p=0}^{M_n} \equiv 1$。

5.1 线性问题

先考虑线性弱奇异VIEs:

$$y(t) = f(t) + \int_0^t (t-s)^{-1/3}K(t,s)y(s)ds, \quad t\in[0,T]. \tag{5.1}$$

这里我们取$K(t,s)=1$，选择适合的f使得方程的精确为$y(t)=t^{2/3}\cos(t)$。

注意到解在$t=0$处的一阶导数是无界的，而在$t\neq 0$时是解析的。因此，方程(5.1)非常适合来检验我们的混合广义Jacobi 函数和Legendre多项式的谱元法。这里我们采用(2.25)来求解(5.1)。在图1中，我们列出了方程(5.1)的L^2-误差，其中$T=2$，每个小区间上使用相等的配置点数$M_k\equiv M$以及一致的步长$h_k=h$。数值结果表明，当M递增或$h_{\max}$递减时，误差呈指数衰减。这意味着我们可以通过增加多项式次数或细化网格来获得更高的精度。

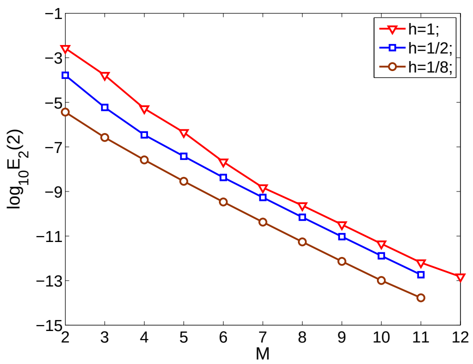

图 1 方程(5.1)的离散L^2-误差.

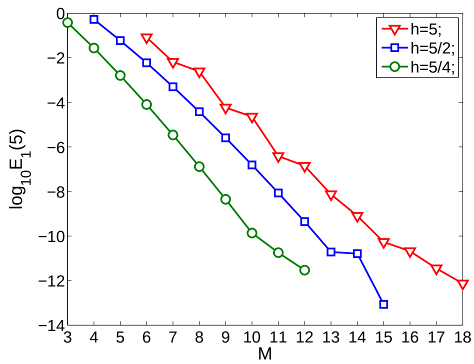

图 2 方程(5.2)的最大误差.

5.2 非线性问题

再考虑带弱奇异核的非线性VIEs:

$$y(t) = \sqrt{t}\exp(t) + \frac{4}{3}t^{3/2} - \int_0^t (t-s)^{-0.5}\exp(-2s)y^2(s)ds, \quad t\in[0,T], \tag{5.2}$$

其精确解为$y(t)=\sqrt{t}\exp(t)$。

显然，方程(5.2)的解在$t=0$处具有奇性。我们使用算法2.1的算法来求解(5.2)。图2和3列出了方程(5.2)的最大误差和离散的L^2-误差，其中$T=5$，一致的$M_k\equiv M$和$h_k\equiv h$。数值结果表明，当M递增或$h_{\max}$递减时，误差呈指数衰减。事实上，这就是hp-型的主要优势。

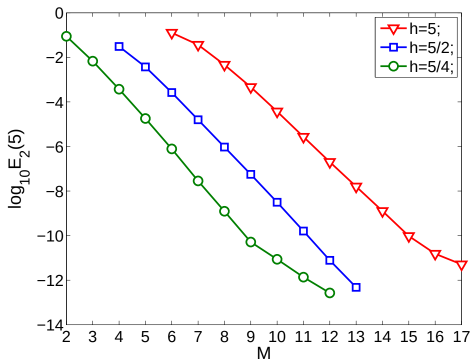

图 3　方程(5.2)的离散L^2-误差.

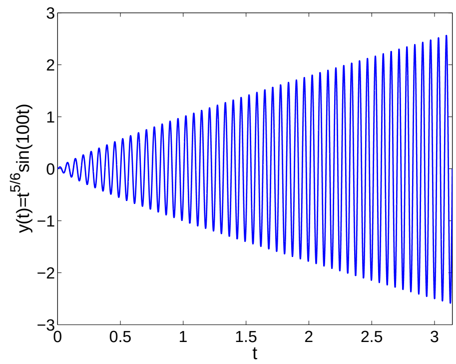

图 4　精确解$y(t)=t^{1-\mu}\sin(100t)$.

5.3　高振荡解问题

考虑带弱奇异核的线性VIEs:

$$y(t)=f(t)+\int_0^t (t-s)^{-1/6}K(t,s)y(s)ds,\quad t\in[0,T]. \tag{5.3}$$

这里我们取$K(t,s)=1$，选择适合的f使得方程的精确为$y(t)=t^{5/6}\sin(\lambda t)$。

显然当λ很大时，解具有高振荡性，参见图4。我们用算法2.1中的混合广义Jacobi函数和Legendre多项式的谱元法来求解方程(5.3)，在图5和6中，我们列出了方程(5.3)的最大误差和离散的L^2-误差，其中$T=\pi$，$\lambda=100$，$M_k\equiv M$以及$h_k\equiv h$。数值结果表明，当M递增或h递减时，误差呈指数衰减。这说明所提算法对于计算高振荡解问题也非常有效，这是混合谱元法的另一个优点。

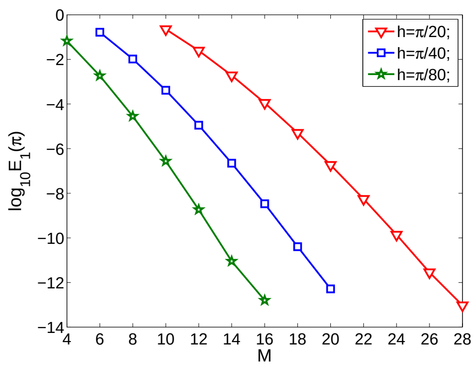

图 5　方程(5.3)的最大误差.

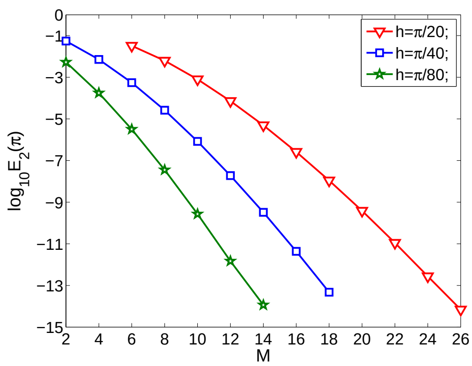

图 6　方程(5.3)的离散L^2-误差.

5.4 长时间计算

考虑带弱奇异核的非线性VIEs:

$$y(t) = f(t) + \int_0^t (t-s)^{-0.5} \exp(\frac{-s^{-0.5}y(s)}{2})ds, \quad t \in [0,T]. \tag{5.4}$$

其精确解为$y(t) = t^{0.5}\ln(t+e)$, 源函数为

$$f(t) = \sqrt{t}\ln(t+e) + 2\arctan(\frac{e^{1/2}}{\sqrt{t}}) - \pi.$$

我们用算法2.1中混合广义Jacobi函数和Legendre多项式的谱元法来求解方程(5.4)，在图7中，我们列出了方程(5.4)的相对最大误差，其中$h_k = h = 1$, $M_k = M = 10$。数值结果表明，所提方法长时间计算精确且稳定。

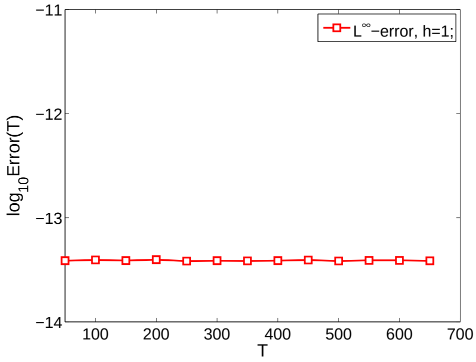

图 7 方程(5.4)的相对误差.

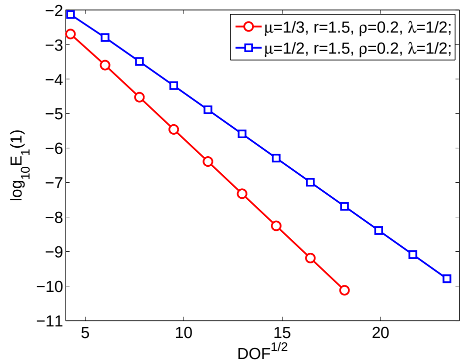

图 8 方程(5.5)的误差.

5.5 给定源函数

考虑带弱奇异核的线性VIEs:

$$y(t) = f(t) + \lambda\int_0^t (t-s)^{-\mu}y(s)ds, \quad t \in [0,T]. \tag{5.5}$$

这里我们取源函数为$f(t) = 1$, 精确解为$y(t) = E_{1-\mu}(\lambda\Gamma(1-\mu)t^{1-\mu})$, 其中

$$E_{1-\mu}(\lambda\Gamma(1-\mu)t^{1-\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\Gamma(1-\mu)t^{1-\mu})^k}{\Gamma(1+k(1-\mu))}.$$

为了能更有效地处理奇性问题，我们使用几何网格和线性增加的多项式次数。更精确地，选用

(i). 网格点: $t_0 = 0, \quad t_n = T\rho^{N-n}, \quad 1 \leqslant n \leqslant N, \quad \forall \rho \in (0,1)$。

(ii). 多项式的次数:

$$M_1 = 1, \quad M_n = \max(1,[rn]), \quad 2 \leqslant n \leqslant N, \quad \forall \mu > 0,$$

其中 $[rn]$ 表示不大于rn的最大整数。

这里我们在第一个区间使用Legendre多项式，并结合几何网格和线性增长的多项式次数来求解方程(5.5)。取定$r = 1.5$，$\rho = 0.2$并且记“DOF”为自由度。图8给出了方程(5.5)的最大误差，其中$\mu = 1/3$, $1/2$以及$\lambda = 1/2$。数值结果表明，随着$\mathrm{DOF}^{1/2}$的增长，我们能获得指数的收敛率。类似的理论分析可以参考文献 [1]和 [25]。

6 结论

本文中，我们提出了用混合广义Jacobi函数和Legendre多项式的谱元法求解线性和非线性弱奇异Volterra积分方程。该方法结构简单且容易实现。我们分析了混合谱元法的存在性、唯一性以及收敛性，同时获得了该方法在L^2 范数下的hp-型误差估计。数值结果表明了所提方法具有高精度，且长时间计算快速稳定。

参考文献

1 Brunner H. Collocation methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. vol. 15. Cambridge: Cambridge University, 2004
2 Lubich C. Runge-Kutta theory for Volterra and Abel integral equations of the second kind. Math Comp, 1983, 41: 87–102
3 Brunner H, Pedas A, Vainikko G. The piecewise polynomial collocation method for nonlinear weakly singular Volterra equations. Math Comp, 1999, 227: 1079–1095
4 Diogo T, Lima P. Superconvergence of collocation methods for a class of weakly singular Volterra integral equations. J Comput Appl Math, 2008, 218: 307-316
5 Wu Q H. On graded meshes for weakly singular Volterra integral equations with oscillatory trigonometric kernels. J Comput Appl Math, 2014, 263: 370–376
6 Bernardi C, Maday Y. Spectral Method. Handbook of Numerical Analysis, 1997, 5: 209–485
7 Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, Zang T A. Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains. Berlin: Springer-Verlag, 2006
8 Boyd J P. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1989
9 Funaro D. Polynomial Approximations of Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992
10 Guo B Y. Spectral Methods and Their Applications. Singapore: World Scientific, 1998
11 Shen J, Tang T. Spectral and High-order Methods with Applications. Beijing: Science Press, 2006
12 Shen J, Tang T, Wang L L. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Springer Series in Computational Mathematics, vol. 41. Berlin: Springer-Verlag, 2011
13 Li X J, Tang T, Xu C X. Parallel in time algorithm with spectral-subdomain enhancement for Volterra integral equations. SIAM J Numer Anal, 2013, 51: 1735–1756
14 Sheng C T, Wang Z Q, Guo B Y. A multistep Legendre-Gauss spectral collocation method for nonlinear Volterra integral equations. SIAM J Numer Anal, 2014, 52: 1953–1980
15 Wang Z Q, Sheng C T. An $hp-$spectral collocation method for nonlinear Volterra integral equations with vanishing variable delays. Math Comp, 2016 85: 635–666
16 Chen Y P, Tang T. Spectral methods for weakly singular Volterra integral equations with smooth solutions. J Comput Appl Math, 2008, 233: 938–950
17 Chen Y P, Tang T. Convergence analysis of the Jacobi spectral-collocation methods for Volterra integral equations with a weakly singular kernel. Math Comp, 2010, 79: 147–167
18 Huang C, Tang T, Zhang Z M. Supergeometric convergence of spectral collocation methods for weakly singular Volterra and Fredholm integral equations with smooth solutions. J Comput Math, 2011, 29: 698–719
19 Brunner H. Nonpolynomial spline collocation for Volterra equations with weakly singular kernels. SIAM J Numer Anal, 1983, 20: 1106–1119
20 Cao Y Z, Herdman T, Xu Y S. A hybrid collocation method for Volterra integral equations with weakly singular kernels. SIAM J Numer Anal, 2003, 41: 364–381

21 Shen J, Sheng C T, Wang Z Q. Generalized Jacobi spectral-Galerkin method for nonlinear Volterra integral equations with weakly singular kernels. J Math Study, 2015, 48: 315–329
22 Chen S, Shen J, Wang L L. Generalized Jacobi Functions and Their Applications to Fractional Differential Equations. Math Comp, http://dx.doi.org/10.1090/mcom3035.
23 Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 2010
24 Podlubny I. Fractional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering. vol 198, San Diego: Academic Press, 1999
25 Brunner H, Schötzau D. $hp-$discontinuous Galerkin time-stepping for Volterra integrodifferential equations. SIAM J Numer Anal, 2006, 44: 224–245

SCIENCE CHINA Mathematics: A hybrid spectral element method for Volterra integral equations with weakly singular kernel

Changtao Sheng & Jie Shen

Abstract In this paper, we propose a hybird generalized Jacobi function and Legendre spectral element method for the linear and nonlinear Volterra integral equations (VIEs) with weakly singular kernels. It is shown that the suggested method is easy to implement and possesses the high-order accuracy. We also establish the existence and uniqueness of the numerical solution, and characterize the hp-error analysis of the suggested method under $L^2(I)$-norm. Numerical results confirm the theoretical analysis.

Keywords spectral element method, Volterra integral equations with weakly singular kernels, generalized Jacobi function, convergence analysis

MSC(2010) 45D05, 41A10, 65N35, 65L70

doi: 10.1360/N012015-XXX