Man nennt $\pi_1(G, z_0) := X/\sim_G$ die *Fundamentalgruppe* von G bezüglich z_0. Die Elemente der Fundamentalgruppe sind also Äquivalenzklassen von Kurven (bezüglich der Äquivalenzrelation Homotopie).

Für $\alpha, \beta \in X$ ist die Summe $\alpha + \beta$ definiert. Entsprechend kann man eine Verknüpfung auf $\pi_1(G, z_0)$ definieren. Diese schreibt man aber im Allgemeinen als Multiplikation, da sie nicht kommutativ ist. Für $a = [\alpha]$ und $b = [\beta]$ setzt man also $ab = [\alpha + \beta]$. Dies ist wohldefiniert, und mit der so definierten Verknüpfung ist $\pi_1(G, z_0)$ eine Gruppe. Das neutrale Element e ist natürlich die Äquivalenzklasse der nullhomotopen Kurven. Die Wahl des Punktes z_0 ist dabei unwesentlich: Ist z_1 ein anderer Punkt in G, so sind $\pi_1(G, z_0)$ und $\pi_1(G, z_1)$ isomorph.

Die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$ wird von zwei Elementen erzeugt: einer Schlaufe a um -1 und einer Schlaufe b um 1. Man kann zeigen, dass $ab \neq ba$ gilt, was anschaulich auch klar ist. Die Fundamentalgruppe ist also nicht abelsch. Für den Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$ gilt also $aba^{-1}b^{-1} \neq e$, das heißt, die Repräsentanten des Kommutators sind nicht nullhomotop. Die in Abbildung 10 skizzierte Kurve ist ein Repräsentant des Kommutators $aba^{-1}b^{-1}$.

Anschaulich kann man dies wie folgt interpretieren: Entsprechen die Punkte ± 1 Nägeln in einer Wand und die Kurve γ aus Abbildung 10 einem Seil, so wird ein an diesem Seil aufgehängtes Bild nicht herunterfallen – denn γ ist nicht nullhomotop in $\mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$. Entfernt man aber einen der Nägel, ersetzt also das Gebiet $\mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$ durch $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ oder $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$, so wird das Bild herunterfallen, denn in diesen Gebieten ist γ nullhomotop. Mathematisch entspricht das Entfernen eines Nagels dem Ersetzen von a oder b durch das neutrale Element – und dies zeigt, dass γ im neuen Gebiet nullhomotop ist.

Analog kann man ein Bild an 3 Nägeln aufhängen, so dass es herunterfällt, wenn einer der 3 Nägel entfernt wird; vgl. Abbildung 11.

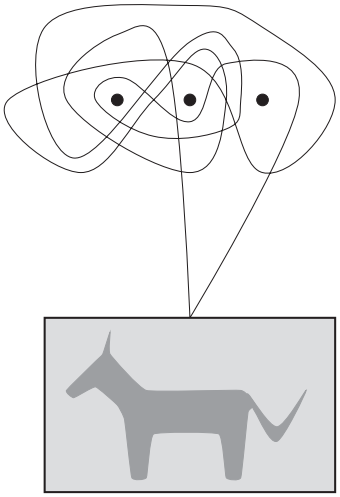

Abbildung 11: Ein an drei Nägeln aufgehängtes Bild.

Denn sind a, b, c Erzeuger der entsprechenden Fundamentalgruppe, so wählt man γ als Repräsentant des Kommutators von $aba^{-1}b^{-1}$ und c, also

$$aba^{-1}b^{-1}c(aba^{-1}b^{-1})^{-1}c^{-1} = aba^{-1}b^{-1}cbab^{-1}a^{-1}c^{-1}.$$