
EXPOSÉ SYNOPTIQUE

DES

RÉSULTATS DÉMONTRÉS DANS CET OUVRAGE.

(1) LE premier livre a pour objet une méthode générale qui sert à trouver deux limites de chaque racine réelle, et à distinguer les racines imaginaires. Pour résoudre l'équation algébrique

$$X = a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + a_3 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x^2 + a_m x + a_{m+1} = 0$$

du degré m , dans laquelle les coefficients a_1, a_2, a_3 , etc. sont des nombres connus, on considère à la fois toutes les fonctions qui sont dérivées du premier membre X par des différentiations successives. Nous désignons ces fonctions comme il suit, en les écrivant dans l'ordre inverse,

$$X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)}, \dots, X''', X'', X', X.$$

Si l'on attribue à la variable x une valeur donnée α qui croît successivement depuis $\alpha = -\frac{1}{\epsilon}$ jusqu'à $\alpha = +\frac{1}{\epsilon}$, et si l'on écrit le signe du résultat de chaque substitution, on forme une suite de signes qui répond au nombre substitué α . Dans cette suite de signes, que nous indiquons par (α) , on remarque combien de fois il arrive qu'un signe est suivi d'un signe semblable, et combien de fois un signe est suivi d'un signe différent; on nomme *variation* cette dernière succession de signes, et l'on compte combien de fois la suite (α) contient de ces variations. Cela posé, le nombre α croissant par degrés insen-

sibles, la suite de signes (α) ne conserve pas toujours le nombre de variations qu'elle avait d'abord, et que nous désignons par j : ce nombre j diminue graduellement; il était d'abord égal à m , il devient nul. On démontre qu'il ne peut que diminuer à mesure que α augmente.

Le nombre j des variations de la suite (α) ne change que s'il arrive que le nombre substitué α fait évanouir une des fonctions dérivées; il peut arriver dans ce cas que le nombre des variations qui répond à une valeur infiniment peu plus grande que α , diffère du nombre de variations qui répond à une valeur infiniment peu plus petite que α . Dans ce passage d'une première valeur de α à une seconde valeur infiniment peu différente, il est possible que la suite de signes perde un certain nombre de variations. Il est possible aussi que le nombre des variations qui répond à la première valeur de α , soit le même que le nombre des variations qui répond à la seconde valeur de α . Nous ne considérons point ce qui a lieu lorsque la suite conserve toutes les variations qu'elle avait auparavant, mais seulement ce qui a lieu lorsque la suite perd un certain nombre de variations. Or il se présente ici deux cas totalement différents: le premier, lorsque dans la suite qui perd un certain nombre de ses variations la dernière fonction X devient nulle; le second, lorsque la suite (α) perd quelques-unes de ses variations sans que la dernière fonction X devienne nulle. Le premier cas se rapporte au nombre des racines réelles, et le second au nombre des racines imaginaires. L'équation $X=0$ a autant de racines réelles que la suite perd de variations lorsque X devient nulle, et cette équation a autant de racines imaginaires que la suite des signes perd de variations sans que X devienne nulle. Ce théorème est général, il n'est sujet à aucune exception: voici les deux applications principales qu'il fournit.

1° Il est aisé de connaître combien on doit chercher de racines dans un intervalle donné. Si l'on veut savoir combien l'équation $X=0$ peut avoir de racines entre deux limites désignées par a et b , on substitue la moindre limite a dans la suite totale des fonctions,

et l'on substitue aussi la plus grande limite b dans la même suite, afin de comparer le nombre des variations de la suite (a) au nombre des variations de la suite (b) . Si ces deux nombres de variations sont les mêmes, on est assuré que la proposée $X=0$ ne peut avoir aucune racine entre a et b : il est impossible qu'aucun nombre plus grand que a et moindre que b rende X nulle.

(A) Si le nombre des variations de la suite (a) surpasse le nombre des variations de la suite (b) , et que la différence soit i , il faut chercher un nombre i de racines entre a et b . Il est impossible qu'il y ait dans cet intervalle un nombre de racines plus grand que i ; il peut y en avoir moins, et celles qui manquent sont en nombre pair.

La règle que Descartes a donnée concernant le nombre des racines positives ou le nombre des racines négatives qu'une équation peut avoir, est un corollaire du théorème précédent (A); il suffit de prendre 0 et $\frac{1}{2}$ pour les limites a et b des racines dont il s'agit. Lorsque deux des racines que le théorème général (A) indique comme devant être cherchées entre deux limites données n'existent point dans cet intervalle, elles manquent dans l'équation proposée $X=0$, c'est-à-dire qu'elles correspondent à deux racines imaginaires de cette équation.

Si pour un autre intervalle a', b' différent de a, b , il arrive aussi que deux des racines que le théorème indique comme devant être cherchées entre a et b , ne se trouvent pas dans cet intervalle, il arrive aussi que ces deux racines manquent dans l'équation $X=0$; elles correspondent à deux autres racines imaginaires de l'équation $X=0$. En général les racines imaginaires de l'équation $X=0$ sont respectivement celles qui manquent dans certains intervalles où le théorème indique qu'elles doivent être cherchées. Nous avons dit que la proposée $X=0$ ne peut avoir aucune racine dans un intervalle lorsque la substitution des deux limites a et b donne le même nombre de variations pour les deux suites de signes (a) et (b) . Il suit de là qu'une méthode de résolution qui n'indique pas les intervalles où les racines doivent être cherchées est très-défectueuse : car

les intervalles où il est impossible qu'il y ait des racines sont beaucoup plus étendus que les intervalles où les racines peuvent se trouver. C'est pour cette raison qu'on ne doit point faire usage de la méthode qui consiste à substituer successivement des nombres $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, 4\Delta$, etc., dont la différence est moindre que la plus petite différence des deux racines : car on peut opérer ainsi sur des intervalles très-grands où l'on cherche des racines, quoiqu'il soit facile de reconnaître d'avance qu'il ne peut y en avoir aucune. On ne doit procéder à la recherche des racines que pour les intervalles médiocres où le théorème (A) indique qu'il peut y en avoir.

(2) Si pour découvrir les racines de la proposée comprises entre deux nombres donnés a et b , on divise cet intervalle en parties, et que l'on y substitue des nombres intermédiaires, on pourra diminuer indéfiniment les intervalles où l'on doit chercher les racines ; mais on ne parviendrait point par ces seules substitutions à connaître avec certitude la nature des racines. Il est nécessaire de joindre au théorème précédent (A) une seconde règle qui fasse connaître avec certitude si les racines que l'on cherche dans un intervalle donné sont réelles, ou si elles sont remplacées par un pareil nombre de racines imaginaires de l'équation $X=0$.

Lorsque deux racines qui doivent d'après le théorème (A) être cherchées entre deux limites données manquent dans cet intervalle, cela provient de ce qu'un certain nombre α , compris entre ces deux limites, étant substitué à la fois dans trois fonctions dérivées consécutives, rend la fonction intermédiaire nulle, et donne pour les deux autres fonctions des résultats qui sont de même signe. C'est le caractère général des racines imaginaires, parce que la suite des signes perd dans ce cas deux variations. Lorsque la fonction intermédiaire s'évanouit, ce nombre α est une valeur *critique* qui correspond à un couple de racines imaginaires.

Ainsi en désignant par $f^{(n+1)} x, f^{(n)} x, f^{(n-1)} x$ les trois fonctions consécutives dont il s'agit, il existe dans ce cas une certaine valeur de α comprise entre a et b dont la substitution rend nulle $f^{(n)} x$, et

donne pour $f^{(n+1)}x$ et $f^{(n-1)}x$ deux résultats dont le signe est commun.

Tant que le théorème indique qu'il faut chercher deux racines entre les limites a et b , la nature de ces racines demeure incertaine; elles peuvent être toutes les deux réelles ou toutes les deux imaginaires. Pour résoudre cette ambiguïté, ce qui est une question capitale de l'analyse algébrique, et que l'on a dû regarder comme la plus difficile de toutes, il ne faut point recourir au calcul d'une équation dont les racines font connaître la moindre différence possible de deux racines consécutives, car ce calcul n'est praticable que pour les équations peu élevées; et même en perfectionnant le procédé qui donne un tel résultat, le trop grand nombre de substitutions exigerait un calcul beaucoup trop composé. Nous allons énoncer la règle qui sert à distinguer dans ce cas la nature des racines: en la joignant au théorème (A), elle complète la méthode de résolution; mais avant de rapporter cette règle, nous indiquerons quelques conséquences générales des propositions précédentes.

On voit que depuis $x = -\frac{1}{\alpha}$ jusqu'à $x = +\frac{1}{\alpha}$, il y a trois sortes d'intervalles. Les uns, d'une grandeur indéfinie, sont tels qu'il serait entièrement inutile d'y chercher des racines de l'équation $X=0$: on reconnaît immédiatement qu'il ne peut point y en avoir. Les deux autres sortes d'intervalles sont: 1° ceux où se trouvent en effet les racines réelles; 2° ceux où les racines manquent. Ce sont ces racines déficientes qui correspondent aux racines imaginaires. Pour chaque couple de racines imaginaires, il existe une valeur *réelle* de la variable x telle que x devenant égale à cette valeur, la suite des signes perd deux variations à la fois sans que x devienne nulle. Le nombre des couples de racines imaginaires est nécessairement égal aux nombres de ces valeurs *critiques*. On conclut de cette proposition générale celle de de Gua de Malves, qui exprime les conditions propres aux équations algébriques dont toutes les racines sont réelles.

Nous avons remarqué plus haut que le caractère des valeurs critiques est de rendre nulle une fonction dérivée intermédiaire, en

donnant un même signe à la fonction qui précède et à celle qui suit. Cette condition ne s'applique pas seulement à la fonction principale X . Lorsqu'elle a lieu pour une des fonctions dérivées d'un ordre quelconque $X^{(n)}$, c'est-à-dire lorsque la valeur réelle de x qui rend cette fonction $X^{(n)}$ nulle donne deux résultats de même signe pour la fonction $X^{(n+1)}$ qui précède, et pour celle qui suit, savoir $X^{(n-1)}$; ce caractère indique deux racines imaginaires de l'équation $X^{(n)} = 0$, dont le premier membre est la fonction intermédiaire. On en conclut avec certitude que l'équation principale $X = 0$ manque aussi de deux racines dans ce même intervalle de a à b . On connaît par cette remarque que les racines imaginaires de l'équation $X = 0$ ne sont pas toutes du même ordre; les unes manquent dans l'équation principale, et les autres dans les équations subordonnées qui en dérivent par la différentiation. Au reste la forme de toutes ces racines, de quelque ordre qu'elles soient, est toujours celle du binôme $\alpha + \epsilon\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que deux de ces racines conjuguées correspondent à un facteur du second degré dont les deux coefficients sont réels.

Les racines imaginaires qui manquent dans l'équation principale $X = 0$ sont indiquées par la figure de la ligne courbe dont l'équation est $y = X$; chaque couple de racines imaginaires correspond à une ordonnée dont la valeur est un minimum, abstraction faite du signe. Il n'en est pas de même des racines imaginaires qui manquent dans les équations subordonnées: leur forme n'est point indiquée de la même manière par la figure de la ligne courbe dont l'équation est $y = X$; mais si l'on se représente que toutes les lignes courbes qui correspondent aux fonctions dérivées de tous les ordres sont tracées, toutes les racines imaginaires de l'équation $X = 0$ deviendront apparentes: chaque couple de ces racines correspondront à un minimum absolu dans la courbe dont l'ordonnée est la valeur d'une fonction dérivée.

(3) Il reste à énoncer la règle que nous avons donnée autrefois pour distinguer les racines imaginaires, et qui résoud complètement cette question.

(B) On suppose que l'application du théorème (A) fasse connaître

que l'on doit chercher entre les limites a et b un certain nombre j de racines; il s'agit de reconnaître quelles sont parmi les racines ainsi indiquées celles qui existent en effet, et celles qui ne peuvent se trouver dans cet intervalle parce qu'elles correspondent à autant de racines imaginaires de la proposée: le nombre entier j est par hypothèse plus grand que 0. Or il faut remarquer que le théorème général (A) ne s'applique pas seulement à l'équation principale $X = 0$, il indique aussi combien l'équation dérivée $X' = 0$ peut avoir de racines dans un intervalle donné; il en est de même des équations dérivées des ordres suivants, savoir $X'' = 0$, $X''' = 0$, $X^{iv} = 0$, etc. : on connaît immédiatement par l'application du théorème combien on peut chercher dans un intervalle donné de valeurs de x propres à rendre nulles ces diverses fonctions. Concevons que dans la suite totale des fonctions dérivées $f^{(n)}x, f^{(n-1)}x, f^{(n-2)}x, \dots, f''x, f'x, fx$, on marque au-dessus de chacune de ces fonctions un nombre i , qui indique combien l'équation dont cette fonction est le premier membre peut avoir de racines dans l'intervalle des deux limites a et b . Les nombres désignées par i indiquent combien dans l'intervalle donné on devrait chercher de racines de l'équation correspondante, si l'on se proposait de résoudre cette équation. Ces nombres respectifs, que nous appellons *indices*, peuvent être écrits à la seule inspection de la suite totale des fonctions dérivées.

Cela posé on remarque en parcourant la suite totale de droite à gauche qu'elle est la première des fonctions dont l'indice est l'unité, et l'on s'arrête à cette fonction que nous désignons par $f^{(r)}x$. Il est démontré que l'indice précédent placé à la droite de celui-ci sera toujours 2. On examinera si l'indice suivant placé à gauche de $f^{(r)}x$ est 0. Si cela n'a point lieu, il faut diviser l'intervalle a, b des limites en deux parties, en substituant pour x un nombre intermédiaire α . On remplacera ainsi l'intervalle a, b par deux autres a, α et α, b , et l'on appliquera littéralement la présente règle à la recherche des racines dans ces deux intervalles. Or en opérant ainsi on parviendra toujours, et très-promptement, au cas mentionné ci-dessus, c'est-à-dire qu'ayant remarqué dans le nouvel état de la suite

totale des signes, et en passant de droite à gauche, la première fonction qui porte l'indice 1, on trouve que l'indice précédent à gauche est 0.

Désignant donc par $f^{(r)}x$ la fonction pour laquelle cette condition est satisfaite, on considérera les trois fonctions consécutives $f^{(r+1)}x$, $f^{(r)}x$, $f^{(r-1)}x$, dont les indices respectifs sont 0, 2, 3. On écrira la quantité $-\frac{f^{(r-1)}x}{f^{(r)}x}$, et faisant x égale à la moindre limite a , on connaît la valeur du quotient $-\frac{f^{(r-1)}a}{f^{(r)}a}$; si ce quotient est moindre que la différence $b-a$ des deux limites, on est assuré que les deux racines que l'on cherchait entre a et b manquent dans cet intervalle, et que par conséquent elles répondent à un couple de racines imaginaires de l'équation principale $X=0$. Dans ce cas on retranchera deux unités de chacun des termes de la suite des indices écrits à droite, depuis et y compris celui qui répond à $f^{(r-1)}x$, jusqu'au dernier terme X et y compris ce terme. On conservera les indices précédemment trouvés pour les termes placés à la gauche de $f^{(r-1)}x$, et, cela étant, on aura une nouvelle suite d'indices pour ce même intervalle des deux limites a et b . On continuera donc la recherche des racines comme si cette nouvelle suite d'indices eût été celle que l'on a trouvée d'abord. Par cet examen des valeurs des quotients, on parvient promptement et sans aucune incertitude à la séparation de toutes les racines.

Les cas singuliers où les fonctions différentielles ont des facteurs communs, se résolvent facilement au moyen des théorèmes connus sur les racines égales.

Au lieu de substituer l'une des limites a dans l'expression $-\frac{f^{(r-1)}x}{f^{(r)}x}$, on peut substituer la plus grande limite b , et comparer le quotient $+\frac{f^{(r-1)}b}{f^{(r)}b}$ à la différence $b-a$. Si ce quotient n'est pas moindre que $b-a$, on est assuré qu'il manque deux racines dans l'intervalle. Enfin on tirerait la même conséquence si la somme des deux quotients $-\frac{f^{(r-1)}a}{f^{(r)}a} + \frac{f^{(r-1)}b}{f^{(r)}b}$ n'était pas moindre que $b-a$. Ainsi toutes les fois que la différence $b-a$ des deux limites n'est pas plus grande

que la somme des deux quotients, il est certain que les deux racines que l'on devait chercher entre a et b manquent dans cet intervalle, et que par conséquent elles correspondent à deux racines imaginaires de l'équation $X = 0$. Si au contraire la somme des deux quotients est plus petite que la différence $b - a$, on est averti que les limites a et b ne sont point assez voisines pour qu'on puisse reconnaître la nature des racines par une seule opération. On substituera donc dans l'intervalle de a et b un nombre intermédiaire α , et l'on formera deux intervalles a, α et α, b : le théorème (A) indiquera immédiatement celui de ces intervalles dans lequel on doit chercher les deux racines. On continuera donc l'application de la présente règle, et il est impossible qu'en continuant cet examen on ne parvienne pas à distinguer la nature des racines.

(4) Les propositions que l'on vient d'énoncer sont l'objet du premier livre : elles y sont démontrées avec tous les développements que peut exiger une étude élémentaire. Le théorème (A) et la règle que nous avons donnée pour la distinction des racines imaginaires conduisent promptement et avec certitude à séparer les racines. On reconnaîtra en multipliant les applications de cette seconde règle (B) combien son usage est facile. Cet avantage provient de ce que l'on opère d'une manière spéciale pour chacun des intervalles où l'on cherche les racines : on considère distinctement ce qui est propre à cet intervalle, et l'on ne fait que le calcul absolument nécessaire pour juger de la nature des racines qui doivent y être cherchées. Le plus généralement l'application de la règle (B) exige peu de calcul, et la première ou la seconde opération suffisent pour connaître la nature des racines : toutefois il peut y avoir des cas particuliers où la recherche ne se terminerait pas aussi promptement. Cela arriverait si la différence des deux racines réelles était extrêmement petite, ou si le point qui répond au minimum absolu était très-voisin de l'axe des x . Il faut remarquer à ce sujet 1° que le cas des racines égales est très-facile à distinguer, comme nous l'avons dit plus haut ; 2° que si dans l'intervalle a, b la ligne dont l'ordonnée représente la valeur de la fonction s'approche extrêmement de l'axe

des x , soit qu'il y ait ou non intersection, la distinction des racines nécessite dans cet intervalle un examen plus attentif, auquel rien ne peut suppléer. L'avantage de la règle, et son principal caractère, c'est qu'elle n'exige que le calcul indispensable ; et surtout qu'étant appropriée à l'intervalle, elle permet de reconnaître très-promptement la nature des racines dans les autres intervalles où deux racines consécutives ne sont pas très-peu différentes. Si au contraire on faisait dépendre la distinction des racines du calcul de la plus petite différence possible de deux racines consécutives, la recherche exigerait dans ce cas des opérations très-longues et superflues. Dans tous les cas possibles on parvient par l'application du théorème (A) et de la règle (B) à séparer entièrement les racines réelles : chacune d'elles se trouve placée dans un intervalle déterminé, et l'on est assuré qu'aucune autre ne peut y être comprise. Il s'agit ensuite de procéder le plus directement possible au calcul de chaque racine réelle, et d'évaluer exactement la convergence de l'approximation : ces deux questions sont traitées dans le second livre.

(5) L'approximation que nous appelons linéaire est dérivée de la méthode newtonienne, après que l'on a satisfait à toutes les conditions spéciales qui en assurent et règlent l'usage. Les constructions rendent ces conséquences très-sensibles. On procède à l'approximation lorsque les trois derniers indices sont devenus les nombres 0, 0, 1, condition qu'il est toujours facile d'obtenir. Il s'agissait ensuite d'éviter toute opération superflue dans le calcul des racines. Pour cela il était nécessaire de perfectionner la règle élémentaire de la division des nombres. Il faut ordonner le calcul en sorte que les chiffres du diviseur ne soient introduits que successivement, et lorsqu'ils doivent concourir à faire connaître de nouveaux chiffres exacts du quotient. Nous avons donné cette nouvelle règle arithmétique : elle diffère de celle d'Oughtred, qui n'aurait pu satisfaire à notre question. Cette même règle de la division ordonnée pourrait servir à résoudre immédiatement l'équation du second degré ; on pourrait même l'appliquer à la résolution des équations des degrés supérieurs.

(6) Il nous restait à mesurer exactement la convergence de l'approximation. L'analyse différentielle fait connaître le caractère de cette approximation linéaire; elle exprime la loi suivant laquelle le nombre des chiffres certains croît à chaque nouvelle opération. L'erreur que l'on peut commettre, ou la différence entre la valeur exacte de la racine et la valeur approchée, décroît rapidement. Chaque nouvelle approximation double le nombre des chiffres connus, ou plus exactement ajoute aux chiffres déjà déterminés un pareil nombre de chiffres certains augmenté ou diminué d'un nombre constant. La fraction qui exprime l'erreur correspondante à une certaine opération diminue de plus en plus; elle est le produit du carré de l'erreur immédiatement précédente par un facteur invariable et donné.

L'approximation linéaire est représentée par un système de tangentes successives.

L'approximation du second ordre est celle qui résulte du contact des arcs de parabole; elle a un caractère propre que l'analyse précédente fait aussi connaître. La convergence est beaucoup plus rapide: l'erreur correspondante à une opération est le produit d'un facteur constant par le cube de l'erreur précédente. On démontre assez facilement cette conséquence pour l'approximation du second ordre, mais la même considération ne pourrait pas s'étendre aux approximations de tous les ordres, parce qu'on aurait à résoudre par des formules analogues à celle de Cardan des équations élevées. Désirant connaître exactement le degré de convergence des approximations des divers ordres, et le facteur constant qui leur est propre, j'ai employé pour cette recherche une analyse très-différente qui n'exige point la résolution en fonction de radicaux. J'ai déterminé par la règle qui a reçu le nom de parallélogramme analytique les premiers termes des racines des équations littérales. Nous n'avons traité de ces équations que dans notre quatrième livre, mais j'ai appliqué d'avance à la question actuelle les règles qui y sont démontrées, et l'on trouve par ce moyen la mesure précise de la convergence des approximations qui dépendent du contact de tous les ordres. Le résultat est très-simple, et complètement exprimé comme il suit:

*

l'erreur correspondante à chacune des opérations qui se succèdent décroît comme les puissances d'une très-petite fraction ; elle est pour l'approximation d'un ordre quelconque i égale au produit de l'erreur précédente par un facteur constant. Ce facteur est $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot i} \frac{f^{(i)}x}{f'x}$ en désignant par x une certaine valeur qui demeure toujours la même : la fonction $f'x$ au dénominateur est toujours la première fluxion de la variable ; i marque l'ordre de la différentiation. Au reste, nous ne considérons ici cette question que sous le rapport théorique, afin qu'il ne reste rien d'inconnu dans l'examen des approximations algébriques. Lorsque l'on compare entre eux des procédés qui sont tous également exacts, c'est le plus simple et le plus facile que l'on doit choisir dans la pratique. C'est ici l'approximation linéaire telle que nous l'avons expliquée plus haut.

(7) Nous avons aussi considéré sous divers points de vue la question qui a pour objet de distinguer avec certitude les racines imaginaires : cette recherche est dans la théorie des équations un point capital qu'on ne peut pas trop éclairer. Premièrement toute la difficulté consiste à reconnaître le signe du résultat que l'on obtiendrait en substituant dans une fonction donnée une valeur non-exactement connue, mais seulement très-approchée, d'une racine α qui réduit à zéro une fonction donnée φx . Si cette fonction n'était point la fluxion du premier ordre $f'x$, on connaîtrait le signe cherché par les principes démontrés précédemment, et la même conséquence s'applique aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Mais dans le cas singulier où la fonction que α rend nulle est la première fonction dérivée $f'x$, le signe du résultat demeure incertain. C'est ce qui arrive lorsqu'après l'application du théorème (A), on se propose de reconnaître si les deux racines cherchées sont réelles ou imaginaires : il fallait donc résoudre cette ambiguïté dans le cas singulier où la fonction dérivée est $f'x$. Nous avons donné une première solution de cette question, et l'application est générale et facile ; mais j'ai voulu remonter à l'origine même de cette difficulté, et connaître s'il n'existe point d'autre solution. Or il résulte de cet examen

que si l'on remplace la fonction $f'x$ par $fx + f'x$, l'incertitude ne subsiste plus : on ramène ainsi la question à un cas plus général, et l'on découvre par ce moyen un procédé très-simple qui fait connaître la nature des deux racines cherchées.

Secondement on peut encore résoudre cette même question en faisant usage de l'approximation du second ordre. On considère le contact des arcs de parabole qui coïncident avec la fonction principale, aux deux extrémités de l'intervalle dans lequel on cherche les deux racines. Nous formons ainsi une règle générale pour distinguer très-rapidement les racines imaginaires : on y parvient même par cette voie avant que les limites ne soient aussi rapprochées que l'exige la règle de l'article 5 ; mais l'extrême simplicité de cette règle de l'article 5 en rendra toujours l'application préférable, si ce n'est dans des cas particuliers qu'il est facile de reconnaître.

(8) Les principes que l'on a démontrés dans les deux livres précédents s'appliquent facilement, et dans tous les cas possibles, à la distinction des racines imaginaires et au calcul des racines réelles. Ces méthodes suffiraient à l'objet de nos recherches si l'on ne considérait que le but de la résolution, qui est la connaissance effective des racines. Mais ces questions, qui se rapportent aux fondements mêmes de l'analyse, doivent être traitées sous différents points de vue ; car un objet principal n'est bien connu que si l'on se forme une idée juste de ses rapports avec tous ceux qui l'environnent. C'est pour cela que nous avons examiné les autres méthodes qui pourraient servir soit à la distinction, soit au calcul des racines. On découvre par cette comparaison les principes communs à toutes ces méthodes, et l'on acquiert ainsi des notions générales qui perfectionnent la théorie. Ces dernières considérations sont exposées dans le troisième livre.

On remarque d'abord que lorsqu'on est parvenu à séparer les racines réelles, en sorte que chacune d'elles se trouve seule dans un intervalle distinct, on peut développer la valeur de la racine par des procédés très-différents qui donnent une connaissance complète de la valeur cherchée. L'expression en chiffres décimaux est

la plus usitée et la plus claire. La méthode que nous avons expliquée donnant toujours deux valeurs qui ne diffèrent que par le dernier chiffre, et dont l'une est plus grande et l'autre moindre que la racine cherchée, il ne reste rien d'incertain. Mais ce développement élémentaire n'est pas le seul que l'on puisse déduire de l'équation algébrique; on pourrait aussi résoudre la racine, soit en fractions continues, soit en fractions de l'unité assujéties à un certain ordre que l'on peut choisir à volonté.

Par exemple, une racine étant un nombre irrationnel dont on veut développer la valeur, en exprimant par α la fraction qui doit compléter cette valeur, on pourrait chercher d'abord combien de fois l'unité contient cette fraction. On déterminerait le premier reste b . En le comparant ensuite à l'unité, et connaissant combien de fois ce premier reste y est contenu, on trouverait la valeur d'un nouveau reste c . On porterait de nouveau cette fraction c sur l'unité, et l'on continuerait ainsi indéfiniment de comparer chaque reste à l'unité, et non au reste précédent, comme on le fait dans le calcul des fractions continues. Cette opération, indéfiniment prolongée, donne un développement de la forme $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{p \cdot q} + \frac{1}{p \cdot q \cdot r} - \frac{1}{p \cdot q \cdot r \cdot s} + \text{etc.}$; p, q, r, s , etc. sont des nombres entiers que l'on détermine facilement. La valeur de α est toujours comprise entre deux limites qui ne diffèrent qu'en faisant varier d'une unité le dernier de ces nombres entiers : ainsi l'approximation est complète et très-convergente.

On pourrait encore choisir une suite M, N, P, Q , etc. de multiples de l'unité, et comparer la valeur α qu'il faut développer au premier multiple, et les restes successifs aux autres multiples; ainsi de suite.

On peut aussi comparer de la manière suivante la fraction α avec l'unité. Supposons que α soit contenue un nombre m de fois dans l'unité, et qu'il y ait un premier reste. On prendra $\frac{1}{m}$ pour la première valeur approchée de α , et la différence $\frac{1}{m} - \alpha$ sera une fraction ϵ que l'on comparera de la même manière à l'unité. En conti-

nuant ce calcul la fraction α sera développée en une suite dont chaque terme a l'unité pour numérateur, et dont les dénominateurs sont les nombres entiers que l'on a trouvés par la comparaison des restes successifs avec l'unité.

Ces divers développements, dont le calcul des fractions continues est un cas particulier, ont des propriétés qui se rapportent à la théorie des nombres; mais nous considérons ici sous un autre point de vue ces différentes formes d'approximation, comme servant à exprimer les irrationnelles algébriques en suites de nombres entiers indéfiniment continuées. On reconnaît premièrement qu'une équation numérique étant proposée, on peut développer la racine comprise entre deux limites a et b en choisissant à volonté ou l'expression en fractions continues, ou l'un des développements ci-dessus indiqués. On détermine exactement les dénominateurs partiels, de même qu'on le ferait si la valeur cherchée était donnée par une équation du premier degré dont les deux coefficients seraient connus. Dans ce dernier cas le développement serait terminé; il est indéfini lorsqu'on exprime une racine algébrique irrationnelle: or l'équation proposée fournit immédiatement les dénominateurs successifs. Quelle que soit la forme du développement que l'on a choisi, on obtient toujours pour la racine deux valeurs de plus en plus approchées, et entre lesquelles on est assuré qu'elle est comprise, car il suffit de faire varier d'une unité chaque dénominateur. Ainsi la convergence n'est pas moins démontrée que pour les fractions continues, et en général cette convergence est du même ordre.

Des exemples particuliers rendent ces conclusions très-évidentes. On voit par là qu'une racine d'une équation à laquelle on a appliqué les deux règles (A) et (B) démontrées dans le premier livre, n'est pas moins clairement connue que si elle était exprimée par une équation du premier ou du second degré; car les coefficients de la proposée d'un degré quelconque donnent sans aucune incertitude toutes les parties du développement. Ainsi la racine d'une équation algébrique quelconque n'est pas plus imparfaitement exprimée quoique le degré de l'équation soit élevé; seulement le degré déter-

mine l'ordre suivant lequel se succèdent les nombres qui entrent dans le développement. Cet ordre est propre à chaque degré : les nombres qui le forment dans tous les cas sont également connus. Il suffit donc pour exprimer complètement ces valeurs d'avoir résolu ainsi la recherche des irrationnelles algébriques. On exige seulement que l'on résolve par une méthode exacte et facile la question qui a pour objet de reconnaître si une racine est réelle, et de placer chaque racine réelle dans un seul intervalle. Lorsque cette distinction des racines est achevée, la résolution ne consiste plus que dans un développement arithmétique. La racine se trouverait toujours placée entre deux limites que l'on peut rapprocher autant qu'on le veut. Les nombres qui forment le développement ont des valeurs déterminées que l'on déduit des coefficients de la proposée, en sorte que l'on connaît de la racine cherchée tout ce qui peut servir à l'exprimer complètement.

(9) Pour donner plus d'étendue à cet examen de la nature des irrationnelles algébriques, nous avons montré dans ce même livre qu'elles peuvent être aussi développées en fonctions continues, et l'on a rapporté les constructions géométriques qui rendent les résultats très-sensibles. On ne pourrait point indiquer clairement cet usage des fonctions continues sans des détails et des exemples que l'on ne peut donner dans un exposé général : nous nous bornons aux remarques suivantes. On considère une certaine relation entre une première valeur approchée x que l'on supposerait à la racine cherchée, et une seconde valeur x' plus approchée que la première x . Par exemple soit entre x et x' la relation très-simple $x' = 1 + \frac{1}{x}$. On donnerait à x une valeur quelconque que l'on peut ici regarder comme arbitraire, et l'on en conclurait la valeur correspondante de x' . Prenant ensuite pour seconde valeur de x celle que l'on vient de trouver pour x' , on déduirait de la même relation une nouvelle valeur x'' , qui étant prise pour x donnerait une valeur suivante x''' . En continuant ainsi on obtient des valeurs de plus en plus approchées de la racine inconnue. La valeur de cette irrationnelle est ici $\sqrt{2}$, car l'approximation a pour limite une valeur de x telle que

la relation $x' = 1 + \frac{1}{x}$ n'apporterait plus aucun changement à la valeur que l'on donne à x : on aurait donc $x = 1 + \frac{1}{x}$, ou $x^2 = 2$.

On trouverait une conséquence analogue pour une autre relation récurrente, et ce procédé s'applique aux équations de tous les degrés. La racine inconnue est une limite dont on s'approche indéfiniment, et la différence devient plus petite que toute quantité assignable. Les constructions qui répondent à ce genre d'approximation sont remarquables. Par exemple elles consistent ici dans une spirale rectangulaire, dont le point extrême s'approche continuellement du point d'intersection correspondant à la valeur de la racine.

On trouve aussi par ce même procédé les racines des équations exponentielles ou transcendantes : nous en avons cité divers exemples dans la Théorie analytique de la chaleur, pag. 343 et suivantes.

Il faut remarquer que l'approximation indiquée par ces méandres rectangulaires, quoique régulière, serait trop lente pour devenir une méthode usuelle : notre but est seulement de rendre manifeste le rapport singulier de la figure avec la marche de l'approximation, et de prouver que l'on connaît un moyen certain d'approcher indéfiniment de la racine des équations. Mais ce même procédé des fonctions continues donne des approximations beaucoup plus convergentes lorsque la spirale orthogonale est remplacée dans la construction par la suite des tangentes inclinées, et l'on pourrait augmenter la convergence de l'approximation en considérant le contact du second ordre.

La fonction continue qui donne les valeurs approchées a un rapport nécessaire avec l'équation proposée. Il n'y a aucune équation algébrique pour laquelle il ne soit facile de déterminer les fonctions correspondantes aux tangentes inclinées. L'approximation newtonienne n'est elle-même qu'un exemple de ce procédé général. J'ai fait un usage fréquent de cette forme d'approximation dans diverses recherches, et particulièrement pour la résolution d'une équation transcendante qui m'avait été indiquée par mon illustre confrère M. le baron de Prony.

Cet emploi des fonctions continues doit être dirigé par les propriétés de la figure. On pourrait y suppléer par des considérations purement analytiques; mais en omettant l'examen de la figure on ajouterait beaucoup à la difficulté de la recherche, qui au contraire devient très-simple au moyen de la construction. C'est un des cas, d'ailleurs fort rares, où la construction est pour ainsi dire nécessaire. Il peut arriver qu'on ne trouve par ce moyen que des valeurs approchées, toutes moindres que la racine, ou toutes plus grandes que cette racine; mais il est toujours facile de former une seconde limite qui complète l'approximation: elle est clairement indiquée par la construction même. Il n'est pas moins facile de distinguer les cas où la fonction continue, au lieu de donner des valeurs plus approchées, conduirait à des résultats de plus en plus éloignés de celui que l'on cherche: c'est ce qui arriverait si l'on traçait la spirale orthogonale dans une direction opposée à celle que la figure indique.

Les considérations que l'on vient de présenter dirigent et facilitent l'emploi des fonctions continues; elles excluent les expressions analytiques divergentes, et montrent qu'il suffit de calculer les premiers chiffres des résultats successifs. Au reste l'emploi des approximations de ce genre n'est point nécessaire pour la résolution des équations numériques, et les méthodes que nous avons expliquées conduisent plus simplement encore à la connaissance des racines; mais il importait de remarquer des procédés généraux qui donnent une étendue nouvelle à la théorie des fractions continues et montrent les rapports de ces fractions avec les propriétés des figures.

(10) Après avoir exposé dans le troisième livre l'usage des fractions continues pour approcher de plus en plus et indéfiniment des racines irrationnelles dont chacune est placée entre deux limites connues, nous avons considéré une propriété fort générale commune à toutes les méthodes exactes d'approximation. Elle consiste en ce qu'il n'y a aucune de ces méthodes qui ne suffise pour distinguer les racines imaginaires lorsqu'on dirige le calcul par l'application du théorème général (A). Cette conséquence est pour ainsi dire évi-

dente pour l'approximation linéaire dérivée de la méthode newtonienne. En effet ce procédé d'approximation est représenté, comme nous l'avons dit, par la suite des tangentes inclinées indiquées par les figures 1 ou 2. Supposons qu'il résulte du théorème (A) que l'on doit chercher deux racines entre les limites a et b , et que l'on connaisse par les principes démontrés dans les deux premiers livres que l'arc mn n'a aucune sinuosité dans l'intervalle ab . On ignore si les deux racines cherchées sont réelles (fig. 1), ou si elles manquent dans cet intervalle (fig. 2). Or le procédé d'approximation peut résoudre cette question. En effet, ce procédé consiste à déduire de la première valeur approchée a une valeur plus approchée a' , qui répond à l'extrémité a' de la sous-tangente; ensuite on passe de a' à une nouvelle valeur approchée a'' ; ainsi de suite, en continuant le même calcul. Or dans le premier cas toutes les valeurs approchées $a, a', a'',$ etc. ne peuvent dépasser le point d'intersection qui répond à la racine réelle: par conséquent si l'on détermine par le théorème (A) combien on doit chercher de racines entre a et b , ou entre a' et b , ou entre a'' et b , etc., on trouvera toujours que ce nombre des racines indiquées est 2, comme il l'était d'abord. Mais le contraire arrivera dans le second cas (fig. 2) où les deux racines cherchées manquent dans l'intervalle: il est impossible dans ce dernier cas que si l'on continue l'approximation, on ne parvienne pas à une valeur telle que a'' , au-delà du point où l'arc mn est le plus rapproché de l'axe ab ; et lorsqu'on sera arrivé à un tel point a'' , si l'on détermine par le théorème (A) combien on doit chercher de racines entre la dernière valeur a'' et b , on trouvera que le nombre des racines indiquées entre a'' et b n'est plus 2, mais zéro. Cette condition peut ne point arriver pour les premières valeurs approchées telles que a' , mais il est impossible que si l'on continue le calcul, et si la forme de l'arc est celle que représente la figure 2, on ne trouve point une valeur approchée telle que l'extrémité a'' devienne très-voisine du point b , ou ne se porte au-delà de ce point. Le seul cas singulier où l'on ne pourrait obtenir un tel résultat est celui des deux racines égales, détermi-

nées par le contact de l'arc mn et de l'axe ab . On sait que ce cas intermédiaire est très-facile à distinguer : il suppose que les fonctions $f x$ et $f' x$ ont un facteur commun, ce que l'on peut connaître d'abord, comme nous l'avons expliqué précédemment. Ainsi la méthode d'approximation jointe au théorème (A) suffit toujours pour reconnaître la situation de l'arc mn par rapport à l'axe ab . Voici le procédé qui indiquera la nature des deux racines. On calcule une première valeur approchée a' qui répond à l'extrémité a' de la première soutangente. S'il arrive que cette seconde valeur a' soit plus grande que la seconde limite b , il est évident que les racines cherchées sont imaginaires. Mais si a' est moindre que b , on désigne une valeur intermédiaire α moindre que b et plus grande que a' , et on la substitue dans $f x$. Si par cette substitution les deux racines sont séparées, c'est-à-dire si le résultat de la substitution est négatif, les deux racines cherchées sont réelles : l'une est entre a et α et l'autre entre α et b . Mais si la substitution donne un résultat positif, on déterminera par le théorème (A) le nombre des racines qui doivent être cherchées entre α et b . Si ce nombre est 0, les deux racines sont imaginaires; mais si aucune des deux conclusions n'a lieu, c'est-à-dire si les racines ne sont point séparées, et si le théorème (A) indique que l'on doit chercher deux racines entre α et b , on a deux limites α et b entre lesquelles on doit chercher deux racines, et l'on ignore jusqu'ici si ces deux racines sont réelles ou si elles manquent dans l'intervalle : la question est donc la même que celle que l'on avait eue à résoudre, et alors les limites α et b sont plus voisines que les premières limites a et b . On procédera donc, et de la même manière, à une seconde épreuve; c'est-à-dire que l'on ajoutera à la nouvelle valeur α un second accroissement qui répond pour cette nouvelle valeur à l'extrémité de la soutangente. On suivra littéralement le procédé qui vient d'être indiqué pour la valeur approchée a , et l'on en déduira les conséquences précédemment énoncées. Il est impossible qu'en continuant ce calcul, on n'arrive pas par la voie la plus brève à reconnaître la nature des racines. Il faut seulement ajouter que le cas singulier des

racines égales doit être examiné séparément, ce qui n'a aucune difficulté. On voit par ce qui précède que la règle donnée dans le premier livre, article 3, pour reconnaître la nature des deux racines que l'on cherchait dans un intervalle donné, n'est autre chose que l'approximation linéaire appliquée à la distinction des racines. Or cette conséquence n'est point bornée à l'approximation linéaire : nous démontrons dans ce troisième livre qu'il n'y a aucun procédé d'approximation qui ne donne un résultat semblable. En général toute méthode exacte propre au calcul des valeurs approchées suffit pour la distinction des racines imaginaires, lorsqu'on joint à cette méthode l'usage du théorème (A) qui fait connaître combien de racines doivent être cherchées dans un intervalle donné. Nous entendons par méthodes exactes d'approximation celles qui étant fondées sur les principes exposés dans le premier livre, donnent continuellement deux valeurs dont l'une est plus grande et l'autre moindre que la racine.

(11) Nous avons appliqué principalement cette remarque à l'approximation qui résulte de l'emploi des fractions continues, parce que cette méthode est plus généralement connue. Voici la conséquence remarquable que fournit cet examen.

Le théorème (A) du premier livre indique combien on doit chercher de racines dans un intervalle donné. Considérons le cas où l'on serait assuré que toutes les racines d'une équation sont réelles. Il faut se représenter d'abord que l'on opère sur une équation de ce genre, et que l'on cherche la valeur des racines par la méthode d'approximation des fractions continues. Cette méthode est expliquée de la manière la plus claire dans les ouvrages de Lagrange. L'illustre auteur suppose qu'au moyen d'une équation auxiliaire on est assuré qu'il n'existe qu'une racine dans chaque intervalle; mais ici nous ferons abstraction de tout calcul précédent, et nous admettons que la réalité des racines est connue d'avance. Cela posé la seule application du théorème (A), combinée avec le calcul des fractions continues, suffirait pour trouver les valeurs de toutes ces racines. En renouvelant après chaque opération partielle l'application du même

théorème (A), il arriverait toujours qu'en joignant aux racines déjà séparées par les opérations précédentes celles que l'on aurait à chercher dans l'intervalle restant, on trouverait précisément autant de racines que le théorème en avait primitivement indiqué. Mais cela ne peut arriver que si l'équation proposée a en effet toutes ses racines réelles. Si au contraire plusieurs de ces racines manquent dans des intervalles où le théorème indique qu'elles doivent être cherchées, nous démontrons que le calcul des fractions continues fera disparaître ces racines déficientes; par là on reconnaîtra que l'équation n'avait pas toutes ses racines réelles, comme on l'avait supposé, et l'on saura avec précision quel est le nombre des couples de racines imaginaires.

La remarque que l'on vient de faire exige une démonstration complète, que nous avons rapportée dans le troisième livre. Elle prouve que le calcul de l'équation auxiliaire qui ferait connaître la limite de la moindre différence des racines est entièrement superflu, de sorte que la partie de cette méthode que l'on peut justement regarder comme impraticable est celle qui doit être omise; il suffit 1° d'employer le calcul des fractions continues tel qu'il est exposé par l'inventeur de cette méthode; 2° de combiner chaque opération partielle avec l'emploi du théorème général (A). Par ce moyen il ne reste rien d'incertain, ni sur la nature des racines, ni sur les valeurs de plus en plus approchées qui proviennent de la convergence rapide des fractions continues.

Toutefois nous ne proposons point de recourir à cette dernière méthode pour le calcul des racines. L'approximation linéaire, telle que nous l'avons expliquée dans le premier livre, est plus commode et aussi convergente. Nous avons voulu seulement exposer une propriété singulière et nouvelle des fractions continues.

Notre objet principal est de prouver dans ce troisième livre 1° que les irrationnelles qui expriment les racines des équations peuvent être développées sous différentes formes, et que ces approximations sont exactes, parce qu'elles donnent toujours deux valeurs entre lesquelles la racine est comprise;

2° que ces quantités irrationnelles ne sont pas moins clairement définies et connues que si elles étaient des fractions simples, en sorte que l'on peut toujours déduire facilement des coefficients de la proposée les dénominateurs qui entrent dans un développement quelconque;

3° que toute méthode exacte d'approximation résoud la question difficile de la distinction des racines imaginaires, pourvu qu'on y joigne l'emploi de notre théorème (A) du premier livre;

4° que cette remarque s'applique surtout au développement en fractions continues, et que cette dernière méthode n'exige aucunement le calcul de l'équation aux différences, ou tout autre résultat déduit des propriétés des fonctions invariables.

On a vu précédemment que la méthode d'approximation newtonienne ne pourrait point être appliquée généralement à la détermination exacte des racines, et qu'il était nécessaire de résoudre les difficultés auxquelles elle est sujette. Il en est de même du procédé des fractions continues, tel qu'il a été proposé par les inventeurs, car il exigerait que l'on connût d'avance la plus petite différence de deux racines consécutives. Or cette recherche suppose un calcul que l'on doit regarder comme impraticable, si ce n'est pour les équations des premiers degrés. C'est pour cela que nous avons examiné avec beaucoup de soin si cette difficulté peut être résolue, et nous y sommes parvenus en prouvant que le calcul de la plus petite différence des racines est superflu. La suite des opérations à effectuer est toujours la même quelle que puisse être cette différence. Ces opérations sont celles que l'on ferait si l'on connaissait d'avance que toutes les racines sont réelles. Seulement elles deviennent moins nombreuses et plus simples lorsque plusieurs des racines sont imaginaires, parce que l'application du théorème principal (A) indique que ces racines manquent en nombre pair dans les intervalles où on les cherchait.

(12) L'objet du quatrième livre est la résolution des équations littérales. Les coefficients de ces équations sont des polynomes algébriques dont chaque terme est de la forme $h a^x b^y c^z$ Les

lettres a, b, c , etc. sont des quantités connues. Les exposants n, p, q , etc. sont des nombres donnés. Si A, B, C , représentent de tels polynômes, et si l'on considère un produit $(x-A)(x-B)(x-C)\dots$ formé de plusieurs de ces facteurs, le résultat de la multiplication est un polynôme d'un certain degré en x . On suppose que ce produit complet est donné, et que le nombre des facteurs est m : il s'agit de trouver tous les polynômes du premier degré $x-A, x-B, x-C$, etc., qu'il est nécessaire de réunir pour former le premier membre de l'équation proposée. Il faut donc découvrir une méthode générale qui étant appliquée à une équation d'un degré quelconque m , fasse connaître les facteurs simples qui répondent aux racines de la proposée. Si quelques-uns des polynômes A, B, C , etc. contiennent un nombre fini de termes, la méthode doit faire connaître les racines exprimées par ces polynômes finis; mais si l'on propose une équation littérale quelconque du degré m , la méthode de résolution donnera le plus souvent des polynômes dont le nombre des termes est infini. Chacune de ces racines aura toujours la propriété essentielle de réduire à zéro le premier membre de la proposée, lorsqu'on y substituera cette racine au lieu de x . Ainsi la méthode qui est l'objet de notre recherche reproduira toutes les racines exprimées en un nombre fini de termes lorsqu'il existe de telles racines, et doit servir à développer en séries infinies celles qui ne peuvent point avoir la forme de polynôme fini.

Cette question appartient à l'analyse *spécieuse* dont Viète est l'inventeur. Elle peut être résolue complètement, et le principe de la solution existe déjà dans les écrits de Newton, de Stirling et de Lagrange. A la vérité on a toujours considéré cette recherche comme un élément de la doctrine des séries, mais on verra bientôt qu'elle se rapporte directement à l'analyse algébrique. C'est sous ce point de vue que nous la considérons ici.

Newton a ramené la partie principale de cette question à une construction singulière, qui sera toujours regardée comme une des plus belles inventions analytiques que nous ayons reçues de ce grand géomètre. Lagrange en a donné une démonstration qui ne laisse

rien à désirer. Sans reproduire dans notre ouvrage ces premières découvertes, nous nous attachons principalement à compléter la méthode, et à montrer qu'elle peut devenir à la fois plus facile et beaucoup plus étendue.

Nous avons employé une construction différente de celle de Newton, mais susceptible d'une application plus générale. Elle conduit pour le cas d'une seule variable au même résultat, savoir à la règle analytique que Lagrange a démontrée.

Parmi les lettres qui expriment les quantités connues on en désigne une quelconque a , afin d'ordonner le calcul selon les puissances de cette quantité, et l'on regarde comme le premier terme d'une racine celui qui, dans l'expression de cette racine, contient le plus haut exposant de la lettre choisie a . Cela posé on cherche d'abord les premiers termes de toutes les racines. L'exposant de la lettre a dans un de ces premiers termes est une inconnue qui doit satisfaire à certaines conditions : il faut déterminer cet exposant, et en trouver autant de valeurs que la proposée a de racines. Or on trouve ces exposants, qui sont en nombre m , par une règle spéciale dont l'application est facile. Voici la construction que nous avons employée pour représenter les résultats de cette règle analytique. On considère une multitude de lignes droites différentes, tracées sur un même plan. La position de chacune de ces lignes est donnée par une équation du premier degré, dont les deux coefficients sont connus, parce qu'ils se forment immédiatement de l'exposant de la variable dans certains termes de la proposée et de l'exposant de la lettre principale a dans ces mêmes termes. Le système de toutes ces droites est toujours limité à sa partie supérieure par un polygone dont les deux côtés extrêmes à droite et à gauche sont infinis. Toutes les parties des droites tracées qui ne se confondent point avec les côtés de ce polygone sont placées au-dessous de ces côtés. Or on prouve que les sommets des angles de ce polygone correspondent aux exposants cherchés. Toute abscisse d'un de ces angles est une des valeurs que l'on peut donner à l'exposant de a pour former le premier terme d'une racine. Les

seuls exposants que la lettre choisie a puisse avoir dans les premiers termes cherchés sont les abscisses des sommets du polygone. La figure indique clairement le moyen de déterminer ces abscisses. Il faut descendre en suivant un des côtés extrêmes jusqu'à la rencontre du premier sommet, continuer en suivant le côté que l'on vient d'atteindre jusqu'à la rencontre d'un second côté, puis suivre ce nouveau côté jusqu'à ce qu'on atteigne le côté contigu; ainsi de suite. La règle analytique que ce procédé indique est celle que Newton, Stirling et Lagrange ont considérée. Le calcul est très-simple, et il n'y a aucune voie plus courte pour découvrir les exposants des premiers termes. On en déduit immédiatement les coefficients dans les premiers termes cherchés, et l'on forme tous ces premiers termes. La règle fait ainsi connaître autant de premiers termes que la proposée a de racines, et il n'est pas moins facile de former les termes suivants.

Nous avons supposé que les termes sont ordonnés selon les puissances décroissantes de la lettre principale a . On pourrait aussi suivre un ordre contraire, et il faudrait trouver en premier lieu le terme de chacune des racines dans lequel cette lettre a le moindre exposant. Dans ce cas la racine cherchée serait ordonnée selon les puissances croissantes de a . Pour résoudre cette seconde question on emploie une règle semblable à celle qui donne pour premier terme celui où la lettre a a le plus grand exposant. En effet ce même système de lignes droites que nous avons considérées plus haut est limité à sa partie inférieure par un autre polygone, et toutes les parties de ces lignes droites qui ne se confondent point avec un côté de ce polygone inférieur sont placées au-dessus de ces mêmes côtés. Il en résulte un procédé parfaitement analogue à celui que nous avons décrit plus haut, et l'on trouve par ce calcul les abscisses des sommets de ce polygone inférieur. Ces abscisses sont les exposants de la lettre a dans les premiers termes des racines ordonnées selon les puissances croissantes de a . Les exposants étant ainsi déterminés, on trouve immédiatement les termes correspondants, et l'on forme les premières parties des racines cherchées. Il est également facile

de trouver par la même règle tous les termes subséquents, et l'on parvient ainsi à former tous les facteurs du premier degré dont le produit est le premier membre de l'équation proposée.

En général l'application de ces règles donne sans aucune difficulté les valeurs de toutes les racines de la proposée ordonnées selon les puissances décroissantes ou selon les puissances croissantes de la lettre choisie. S'il existe des polynomes finis qui satisfassent à la proposée, on découvre successivement toutes les parties de ces polynomes, et l'on arrive à une dernière opération qui montre que le nombre des termes est fini : mais si la racine cherchée n'est pas formée d'un nombre fini de termes, l'opération se prolonge continuellement et la racine est donnée par une série infinie. Cette expression est toujours telle qu'étant substituée dans la proposée au lieu de la variable, tous les termes du résultat se réduisent successivement à zéro.

Cette méthode de résolution est générale. Elle s'applique aux équations d'un degré quelconque, et la lettre principale par rapport à laquelle le calcul est ordonné peut toujours être prise à volonté. Si l'équation proposée est très-simple, par exemple si elle n'a que deux termes, en sorte que les racines cherchées contiennent un seul radical, la méthode générale se réduit à celles que l'on connaît depuis long-temps pour extraire la racine littérale d'un polynome donné. Non-seulement le résultat est le même, mais les procédés de calcul sont précisément ceux des règles élémentaires de l'algèbre. On voit par là que la méthode comprend comme des cas particuliers les extractions des racines des quantités littérales.

Nous avons dit que la première partie d'une racine étant déterminée par la règle précédente, on découvre par le même procédé toutes les parties subséquentes. En effet désignant par p la première partie déjà connue de la racine, il suffit de substituer le binome $p + q$ au lieu de la variable x : on aura ainsi une transformée du degré m dont la variable q sera l'inconnue. On pourrait donc appliquer à cette transformée la règle que nous avons exposée, et chercher la première partie de la valeur de q : il est évident que

ces substitutions successives feront connaître toutes les parties de la racine convenablement ordonnées. Pour faciliter les applications, nous nous sommes proposé d'exclure de ce calcul toutes les opérations superflues, et nous avons formé une règle spéciale qui donne la seconde partie de chaque racine. Les mêmes considérations réduisent aux formes les plus élémentaires le calcul des troisième, quatrième, etc. termes, en sorte qu'il ne reste plus à effectuer que les seules opérations sans lesquelles les valeurs des racines ne pourraient être connues. La règle se réduit à substituer dans le premier membre de l'équation la partie déjà connue de la racine, et à multiplier le résultat par une valeur constante. Quant à la convergence de l'approximation, on la déterminerait par les mêmes principes que ceux qui ont été expliqués dans le second livre. Cette convergence est, généralement parlant, celle qui résulte de l'approximation numérique linéaire.

Le caractère de cette méthode exégétique qui résoud toutes les équations littérales ne peut être bien expliqué que par divers exemples. Le quatrième livre en présente plusieurs. Nous citerons seulement l'équation littérale

$$x^5 + x^4(-a^2 + a + b) + x^3(-a^3 - a^2b) + x^2(a + 1) + x(-a^3 + ab + a + b) + (a^4 + a^3b + a^3 + a^2b) = 0.$$

En appliquant la règle générale à cette équation, et en ordonnant le calcul suivant les puissances décroissantes de la lettre a , on trouve facilement que les premiers termes des racines sont $x = a^2 + \text{etc.}$; $x = -a + \text{etc.}$; $x = \sqrt[3]{-a} + \text{etc.}$ Les termes suivants contiennent de moindres puissances de a . Si l'on cherche ces termes suivants par l'application des mêmes règles, on reconnaît que les termes qui suivent a^2 sont tous nuls, que tous les termes qui suivent $-a$ équivalent à $-b$. Quant à la troisième racine dont le premier terme est $\sqrt[3]{-a}$, elle serait d'abord développée en série infinie, mais la même analyse ferait connaître que la valeur complète est $\sqrt[3]{-(a+1)}$.

On obtiendrait ainsi par un calcul régulier tous les facteurs de la proposée, savoir

$$(x - a^2), (x + a + b), (x^3 + a + 1).$$

On pourrait aussi ordonner le calcul par rapport à la lettre b , et les opérations ne seraient pas moins faciles. Les mêmes règles s'appliquent à tous les cas, et il n'y a aucune équation littérale, quelque composée qu'elle soit, qu'on ne puisse ainsi résoudre en ses facteurs.

Nous avons dit que la règle qui fait connaître les premiers termes des racines est représentée par une construction formée d'un système de lignes droites. La figure 3 présente ce système de lignes pour l'exemple que nous venons de citer. Les équations des lignes droites sont

$$y = 5x, y = 4x + 2, y = 3x + 3, y = 2x + 1, y = x + 3, y = 4.$$

Les coefficients de ces équations sont formés des termes de la proposée où la lettre a a les plus grands exposants. La limite supérieure est le polygone MABCN : le système est limité au-dessous par le polygone $\mu\alpha\beta\gamma\nu$.

Toute équation littérale d'un degré quelconque est complètement résolue par cette méthode en ses facteurs simples, et il n'est pas moins facile de trouver ses racines que celles des équations à deux termes que l'on sait résoudre depuis long-temps par des règles algébriques élémentaires. On trouve dans les ouvrages de Newton (Arithmétique universelle), et dans ceux de Clairaut et autres, des procédés particuliers pour découvrir les racines commensurables des équations littérales : ils consistent dans une suite d'essais dont le calcul est incertain. Il est plus facile et plus exact de résoudre l'équation proposée par la méthode générale que l'on vient de décrire. Newton n'a employé la règle du parallélogramme analytique que pour le calcul des séries, qui est le vrai fondement de sa méthode des fluxions.

On pourrait faire usage de ces développements des racines en séries pour le calcul de leurs valeurs approchées, et si l'on ne possédait point aujourd'hui une méthode très-simple pour la recherche directe des limites, il faudrait recourir à cette résolution des équations littérales. Mais les règles que nous avons expliquées dans les deux premiers livres conduisent bien plus rapidement à la connaissance effective des racines, et dispensent de toute discussion de la convergence des séries. La règle précédente qui sert à former les premiers termes des racines des équations littérales est nécessaire pour l'analyse des lignes courbes considérées dans leur cours infini. On en trouve des exemples remarquables dans les ouvrages de Newton, Stirling, Cramer et divers auteurs. On peut déduire cette règle des constructions, ou la réduire, comme l'a fait Lagrange, à un procédé purement analytique. A proprement parler, cette recherche appartient à l'analyse des inégalités linéaires dont nous exposons les principes dans notre septième livre : c'est le point de vue le plus général sous lequel les recherches de ce genre puissent être considérées.

(13) Nous avons indiqué aussi dans le quatrième livre une question beaucoup plus composée que la recherche des racines d'une seule équation littérale : elle a pour objet la résolution simultanée de deux équations littérales à deux inconnues. Chacun des termes de ces équations est de la forme $Hx^m y^n$: x et y désignent les inconnues, H est un polynome littéral formé des grandeurs connues a, b, c , etc. La question consiste à trouver pour x et y deux polynomes contenant les lettres a, b, c , etc., et tels que si on les substitue en même temps au lieu de x et de y dans les équations proposées $A=0$, $B=0$, l'une et l'autre substitution rendent nulles les fonctions A et B . Le système des deux valeurs de x et de y qui ont cette propriété forme une solution des deux proposées. Il s'agit de découvrir toutes les solutions possibles, en assignant les termes dont se composent les valeurs de x et de y . Si les équations $A=0$, $B=0$ admettent des valeurs commensurables de x et y , en sorte que les polynomes qui expriment ces valeurs ne contiennent qu'un

nombre fini de termes, il faut que ces polynomes soient déterminés par la règle générale que nous avons en vue. Mais si les valeurs de x et y n'admettent point ces expressions finies, la règle doit produire successivement tous les termes du développement de ces valeurs.

Ainsi nous étendons à deux équations, et en général aux équations littérales multiples lorsqu'il y a autant d'équations que d'inconnues, les principes de résolution que nous avons appliqués précédemment aux équations littérales où il n'entre qu'une seule inconnue.

Ces développements des racines des équations multiples offrent dans l'analyse des usages importants. Par exemple, pour le cas de deux équations, ils servent à connaître la nature des surfaces courbes dans leur cours infini et leurs nappes asymptotiques.

On pourrait aussi employer ces expressions des racines pour résoudre d'une manière approchée les équations qui contiennent plusieurs inconnues, mais ces applications ne sont point ici l'objet de notre recherche. Nous avons seulement voulu connaître s'il existe pour les équations littérales à plusieurs inconnues des règles algébriques analogues à celles qui donnent les racines des équations littérales : et en effet nous avons démontré que les méthodes de résolution ne sont point bornées aux équations littérales qui ont une seule inconnue. Elles s'étendent à toutes les équations multiples dans lesquelles le nombre des inconnues est égal au nombre des équations : le calcul est plus composé, mais il est de la même nature. On trouve d'abord le premier terme de chaque racine, c'est-à-dire celui où la lettre choisie pour ordonner le calcul contient un exposant plus grand que celui de la même lettre dans tous les termes suivants. On forme ainsi autant de premiers termes qu'il y a de solutions différentes. Chaque solution comprend deux valeurs de x et y qui, étant substituées simultanément dans les deux équations proposées, satisfont à l'une et à l'autre. C'est le calcul de ces premiers termes qui fait connaître le cours infini des surfaces.

Si l'on considérait trois équations et trois inconnues, chaque so-

lution serait formée de trois valeurs simultanées de x, y, z . En général cette méthode de résolution des équations littérales consiste à trouver successivement toutes les parties des racines où la lettre choisie a le plus grand exposant. On peut désigner une lettre quelconque parmi celles qui expriment les grandeurs connues. Lorsqu'on a ainsi trouvé les premiers termes de toutes les solutions, on peut calculer les termes suivants par l'application de la même méthode.

S'il arrive qu'une ou plusieurs des racines puissent être exprimées par un nombre fini de termes, la méthode s'arrête au dernier terme subsistant; on reconnaît que tous les autres seraient nuls. Mais en général ces opérations conduisent à des séries. Elles pourraient servir à déterminer les valeurs approchées des racines des équations numériques multiples, mais nous n'avons pas traité cette dernière question. Si plusieurs équations algébriques sont proposées, et que leur nombre soit égal à celui des inconnues, on sait qu'on peut éliminer une de ces inconnues prise à volonté, puis une seconde, une troisième, ainsi de suite, et parvenir ainsi à une équation finale qui ne contient qu'une seule inconnue. Il y a plusieurs cas simples dans lesquels cette élimination peut faire connaître les solutions cherchées, et il est remarquable que dans tous les cas il existe une équation finale. Mais cette conséquence est purement théorique: elle prouve que toutes les racines des équations algébriques ont une nature commune, parce qu'il n'y a aucune de ces racines qui ne soit l'inconnue d'une certaine équation algébrique. Toutefois il n'en faut point conclure que ce procédé d'élimination représente la méthode que l'on doit suivre pour parvenir à la connaissance effective des racines: cette voie serait beaucoup trop compliquée. Elle serait impraticable pour des équations élevées, et même, dans la plupart des cas, cette méthode nécessiterait un examen très-attentif pour éviter l'introduction des facteurs étrangers à la question, c'est-à-dire de ceux qui ne rendent point nuls à la fois les premiers membres de toutes les équations proposées. Quoique l'on puisse éviter ou distinguer ces facteurs superflus que proviendraient de l'élimination, l'extrême complica-

tion des calculs, et la difficulté de former séparément toutes les différentes solutions, excluraient toujours l'usage effectif de ces règles, si ce n'est dans des cas très-simples choisis d'avance comme exemples. On peut dire qu'il faudrait se résoudre à ignorer les solutions des équations multiples, si l'analyse ne pouvait les déterminer que par les procédés d'élimination.

Nous envisageons la résolution des équations littérales multiples sous un point de vue très-différent. Nous conservons aux équations proposées leurs formes primitives, et comparant à la fois tous leurs coefficients, nous cherchons les racines par la résolution simultanée de ces équations. Nous prouvons en effet qu'aucune élimination n'est nécessaire, et que l'on peut déterminer immédiatement les premiers termes des racines d'après la seule condition que la substitution simultanée de ces racines doit satisfaire en même temps à toutes les proposées.

L'objet de notre quatrième livre est donc d'expliquer les principes qui servent à cette résolution des équations littérales. Nous employons immédiatement les équations telles qu'elles ont été proposées, sans altérer en rien leurs coefficients, et nous parvenons à connaître les termes successifs qui doivent former les racines. Chaque solution est composée d'autant de racines qu'il y a d'inconnues différentes, et la substitution simultanée doit rendre nuls à la fois tous les premiers membres des équations. Il faut d'abord découvrir les premiers termes des racines qui forment une même solution. Cette dernière question est beaucoup plus composée que celle qui se rapporte à une seule équation littérale, mais elle se résoud aussi par un règle certaine qui s'applique à des équations d'un degré quelconque.

Nous citerons ici l'exemple suivant, qui présente deux équations à deux inconnues, savoir

$$\begin{aligned}x^3 y^3 - y^3 x a^5 + 1 &= 0, \\x^4 y^2 a - y^4 x a^2 + 3 &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on applique à ces deux équations les principes qui nous venons

d'indiquer, on trouve deux solutions différentes : la première est formée de deux valeurs conjuguées de x et y dont les premiers termes sont

$$\begin{aligned}x &= a^{\frac{1}{6}} \sqrt[6]{3}, \\y &= a^{-\frac{5}{6}} \sqrt[6]{3};\end{aligned}$$

la seconde solution comprend les deux autres valeurs de x et y qui ont pour premiers termes

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{27} a^{-14}, \\y &= -3 a^{-3};\end{aligned}$$

ce sont les premières parties des inconnues x et y .

Pour découvrir les termes subséquents, il faut substituer le binôme $p + q$ au lieu de x et $p' + q'$ au lieu de y ; p et p' désignant les premiers termes connus, et q et q' les sommes des termes subséquents. Les nouvelles inconnues sont q et q' , et l'on a deux équations pour les déterminer. On applique la même règle afin de trouver les premiers termes de q et q' , qui seront les seconds termes des racines cherchées. En poursuivant le calcul d'après les mêmes principes, on trouverait les parties suivantes des racines.

On voit que les deux équations proposées n'ont que deux solutions possibles. L'une contient aux premiers termes les puissances $\frac{1}{6}$ et $-\frac{5}{6}$ de a : aucune autre combinaison ne pourrait satisfaire à la fois aux deux proposées.

Quant à la règle qui fait connaître les premiers termes des racines, nous nous bornons à dire ici qu'on peut aussi ramener cette recherche à des constructions, et c'est par ce moyen que nous avons formé les premiers termes des deux solutions ci-dessus indiquées. Au reste la recherche des exposants de ces premiers termes est un problème de l'analyse des inégalités linéaires; mais l'usage des constructions peut ici suppléer à cette analyse. On parviendrait à découvrir les premiers termes des solutions par les essais successifs des combinaisons de différentes valeurs attribuées aux exposants :

l'emploi de l'analyse des inégalités, ou celui des constructions, suppléent à ces essais. Au reste, cet emploi n'est indispensable que si le nombre des termes qui entrent dans les proposées était trop grand; et dans ce cas les règles elles-mêmes ne peuvent pas toujours prévenir la longueur du calcul. Quoi qu'il en soit, il demeure certain que l'on parviendra toujours à la détermination exacte des premiers termes de toutes les solutions possibles. Quant aux termes subséquents, non-seulement on les découvre par l'application des mêmes règles, mais la marche des opérations se simplifie de plus en plus, parce que ces termes ne peuvent avoir que des exposants inférieurs à ceux que l'on a déjà déterminés, condition qui facilite la recherche.

Les conséquences que l'on vient d'énoncer s'appliquent à toutes les équations multiples, quels qu'en soient le nombre et le degré; mais les opérations sont d'autant plus composées que le nombre des équations est plus grand. Toutefois il est manifeste que la résolution des équations littérales multiples s'opère au moyen de ces principes, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux éliminations successives. La méthode de résolution donne en général les développements des solutions en séries infinies. L'usage de ces séries, ou plutôt le calcul des seuls premiers termes, doit s'appliquer principalement à la discussion des propriétés des lignes ou des surfaces courbes considérées dans leur cours infini. La conséquence la plus générale de cette analyse est que la résolution des équations multiples est indépendante de tout procédé d'élimination, et qu'elle doit consister dans le calcul simultané des équations proposées, sans apporter aucun changement à leurs coefficients primitifs.

(14) L'objet du cinquième livre est de montrer comment les principes de l'analyse algébrique exposés dans les livres précédents s'appliquent aux fonctions transcendentes. Nous avons principalement en vue celles de ces fonctions que les géomètres ont considérées jusqu'ici, par exemple celles que l'on trouve dans les ouvrages d'Euler, ou que plusieurs géomètres ont successivement employées dans des recherches de dynamique ou de physique mathématique,

et spécialement celles que nous avons nous-même introduites dans la théorie de la chaleur.

Nous considérons les équations déterminées formées d'expressions transcendantes dont la valeur change par degrés insensibles, quelle que soit d'ailleurs la nature de la fonction; ou du moins nous considérons les parties des fonctions transcendantes quelconques qui varient ainsi par degrés insensibles. Ainsi on ne suppose point que dans les parties de fonctions auxquelles ces recherches s'appliquent les valeurs passent du positif au négatif sans devenir nulles dans l'intervalle: mais lorsque cette condition n'a pas lieu, rien n'empêche d'examiner séparément chacune des parties où la continuité subsiste.

Le caractère propre des fonctions algébriques entières est de se réduire toujours à une valeur constante par des différentiations continues, et nous avons jusqu'ici admis cette condition. Il faut remarquer maintenant que les conséquences principales auxquelles nous avons été conduits ne dépendent point de cette même condition. Nous l'avons d'abord supposée pour rendre les démonstrations plus simples; mais en examinant avec soin ces démonstrations, on reconnaîtra qu'elles ont un objet beaucoup plus étendu, et qu'il n'est nullement nécessaire que la différentiation indéfinie réduise les fonctions à des valeurs constantes.

Par exemple, on a démontré dans le premier livre que si la substitution d'une limite a dans la suite des fonctions dérivées de tous les ordres donne des résultats qui soient les mêmes, terme pour terme, que ceux qui proviennent de la substitution d'une autre limite b dans les mêmes fonctions, l'équation principale $fx = 0$ ne peut avoir aucune racine dans l'intervalle des deux limites. Ce lemme est important, et nous en avons souvent fait usage dans diverses recherches d'analyse algébrique. Or il est certain que cette proposition ne s'applique point de la même manière aux fonctions algébriques et aux expressions transcendantes. Par exemple si la fonction principale est $\sin. x$, et si les deux limites a et b sont respectivement a et $a + 2\pi$, les deux suites de résultats seront les mêmes,

terme pour terme. Or il est manifeste qu'on ne peut point en conclure que l'équation $\sin. x = 0$ n'a pas de racines dans cet intervalle de a à $a + 2\pi$: mais la démonstration que nous avons donnée du lemme dont il s'agit prouve dans ce cas qu'une équation dérivée d'un ordre quelconque, telle que $f^{(n)} x = 0$, ne peut pas avoir entre les deux limites a et b plus de racines que n'en a dans le même intervalle l'équation $f^{(n+i)} x = 0$ d'un ordre plus élevé, quel que soit le nombre i . Or cette proposition est indépendante de la nature de la fonction différentielle, et l'on doit se borner à cette conclusion, parce que l'intervalle des limites est trop grand pour que les premières substitutions puissent indiquer les limites de chaque racine.

(15) Nous allons maintenant énoncer quatre propositions générales qui servent à déterminer les limites et les valeurs des racines, lorsqu'on applique les principes de l'analyse algébrique aux fonctions transcendantes.

I^{re}. On a expliqué dans le premier livre les relations qu'ont entre eux les nombres entiers appelés indices qui correspondent aux fonctions dérivées. Si l'on connaissait l'indice i pour une certaine fonction $f^{(n)} x$ comprise dans la suite des dérivées de $f x$, a et b désignant les deux limites auxquelles cet indice se rapporte, on en conclurait que l'équation $f^{(n)} x = 0$ ne peut pas avoir plus de i racines dans l'intervalle de ces limites ; c'est-à-dire que si l'on avait à résoudre l'équation $f^{(n)} x = 0$, il faudrait chercher un nombre i de ces racines entre a et b . Considérant ensuite l'équation dérivée placée à gauche de $f^{(n)} x$, savoir $f^{(n+1)} x$, et désignant par i' le nouvel indice correspondant à $f^{(n+1)} x$, on en conclurait que si l'on avait à résoudre l'équation $f^{(n+1)} x = 0$, il faudrait chercher un nombre i' de ces racines dans le même intervalle des limites a et b . Or les indices i et i' peuvent être d'abord inconnus, lorsque la fonction $f x$ est transcendante, mais ces deux indices ont une relation nécessaire. Le nombre i' est i , ou $i - 1$, ou $i + 1$, et l'on connaît toujours lequel de ces trois cas a lieu. Il suffit de comparer les résultats de la substitution de a dans $f^{(n)} x$ et $f^{(n+1)} x$ aux résultats de la substitution de b dans les mêmes fonctions. On les écrira donc comme il suit

$$\begin{array}{l} f^{(n+1)} a, \quad f^{(n)} a, \\ f^{(n+1)} b, \quad f^{(n)} b, \end{array}$$

et l'on examinera si la combinaison provenant des deux termes consécutifs $f^{(n+1)} a, f^{(n)} a$ est une variation de signe, ou si elle est une permanence. Ensuite on examinera si la combinaison des deux termes consécutifs $f^{(n+1)} b, f^{(n)} b$ est une variation de signe, ou si elle est une permanence. Lorsque la combinaison provenant des substitutions est une variation dans la première suite et une variation dans la seconde, ou lorsque cette combinaison est une permanence dans la première suite, et une permanence dans la seconde, le nouvel indice i' est le même que le précédent i . Mais si la première suite donne une permanence qui correspond à une variation dans la seconde, on a $i' = i - 1$. Enfin si une variation dans la première suite répond à une permanence dans la seconde, on a $i' = i + 1$. Ces conséquences résultent de la règle que nous avons donnée dans le premier livre pour former les indices correspondants aux dérivées successives, et elles ne dépendent point de la nature de la fonction $f^{(n)} x$. En effet ces conséquences sont fondées sur cette proposition générale que le nombre substitué augmentant par degrés insensibles, la suite des signes perd une variation lorsque le nombre substitué devient égal à une racine. Or la vérité de cette remarque n'est pas bornée aux fonctions algébriques; c'est une propriété de tout point d'intersection, quelle que soit la figure de la courbe qui coupe l'axe des x .

On voit donc que si l'indice correspondant à une fonction dérivée est connu, on peut facilement déterminer les indices qui, pour le même intervalle des deux limites a et b , répondent aux fonctions précédente ou suivante. Par exemple si les résultats de la substitution de a dans la suite entière des fonctions dérivées sont les mêmes que les résultats de la substitution de b dans ces fonctions, la valeur de l'indice i ne subit aucun changement, en sorte que l'équation $f^{(n)} x = 0$ ne peut avoir entre les limites a et b plus de racines qu'une autre équation dérivée $f^{(n+j)} = 0$ n'en peut avoir entre ces mêmes limites, quel que soit le nombre j . Si la fonction principale $f x$ était algébrique, on serait assuré que la différentia-

tion indéfinie donne une constante $f^{(m)}x$, m étant le degré de la proposée. On arriverait ainsi à un premier indice, qui est évidemment nul; et comme tous les indices sont les mêmes, il s'ensuit que l'équation principale $f(x) = 0$ ne pourrait avoir aucune racine dans ce même intervalle: c'est le lemme de l'article 34 du premier livre. Si l'équation principale $fx = 0$ n'est pas algébrique, il est manifeste qu'on ne doit pas tirer la même conclusion, mais on connaîtra la relation qui subsiste entre un indice i correspondant à une quelconque des dérivées désignée par $f^{(i)}x$, et l'indice i' correspondant à la dérivée de l'ordre moins élevé d'une unité, savoir $f^{(i-1)}x$. Par conséquent on déterminera par le même moyen la relation de l'indice i de la fonction $f^{(i)}x$ avec l'indice j de la fonction principale $f(x)$, et si l'on connaissait i on en conclurait la valeur de j . Or nous démontrerons que l'on peut toujours assigner un certain intervalle Δ pour lequel l'indice correspondant à une fonction $f^{(i)}x$ est nul. Donc à partir de cette fonction jusqu'à la fonction principale fx , on déterminera les indices des autres fonctions pour ce même intervalle, et l'on connaîtra ainsi combien on y doit chercher de racines de la proposée $fx = 0$.

II^e. fx désignant une fonction transcendante *déterminée*, et A une valeur donnée de la variable x , on peut toujours assigner un intervalle Δ tel qu'on soit assuré qu'une équation dérivée quelconque $f^{(i)}x = 0$ ne peut avoir aucune racine dans l'intervalle de A à $A + \Delta$, en sorte que l'indice i propre à cet intervalle est certainement zéro. En effet la proposée $fx = 0$ est, selon notre hypothèse, une équation déterminée, c'est-à-dire que l'expression $f(x)$ détermine entièrement la valeur de la fonction $f(x)$ pour toute valeur de la variable x , soit qu'elle donne cette valeur exactement par un nombre fini d'opérations, soit qu'elle en donne des valeurs approchées qui en diffèrent aussi peu qu'on le veut, comme cela a lieu par exemple lorsque $f(x)$ est donnée en série convergente. Si l'expression $f(x)$ ne déterminait pas la valeur de la fonction pour toute valeur de la variable, il n'y aurait pas lieu de proposer de résoudre l'équation $f(x) = 0$. Il est nécessaire que l'expression $f(x)$, quelle qu'en soit

la nature, puisse servir à connaître si, pour une valeur quelconque A de la variable x , la valeur de la fonction $f(x)$ est plus grande ou moins grande qu'un nombre proposé B . Ainsi l'expression $f(x)$ donne la fonction $f(A)$, ou exactement, ou par une série convergente, ou par tout autre procédé qui tiendrait lieu de cette série, en sorte que l'on puisse rapprocher indéfiniment les limites de la valeur de $f(A)$. Il en est de même d'une fonction dérivée de $f(x)$ d'un ordre quelconque : car la fonction principale étant entièrement déterminée, la fluxion d'un ordre quelconque est aussi déterminée. Cela étant, il s'ensuit rigoureusement qu'en désignant par A une valeur quelconque et donnée de la variable x , on peut toujours assigner un intervalle Δ tel que pour une dérivée d'un ordre quelconque $f^{(i)}x$, l'équation $f^{(i)}x = 0$ ne peut avoir aucune racine dans l'intervalle de A à $A + \Delta$, c'est-à-dire que toutes les valeurs de $f^{(i)}x$ dans cet intervalle ont un même signe. En effet quelle que soit l'expression de $f(x)$, par exemple si cette fonction est donnée en une série, la convergence de la série suppose une condition d'inégalité, qui par conséquent subsiste dans toute l'étendue d'un certain intervalle. On connaît dans cet intervalle deux fonctions différentes qui servent de limites à la valeur de $f^{(i)}x$, et l'on peut déterminer l'accroissement Δ en sorte que l'une et l'autre limites donnent pour $f^{(i)}x$, dans l'intervalle $A + \Delta$, des résultats qui ont un même signe. On en conclut qu'on ne doit chercher aucune racine de l'équation $f^{(i)}x = 0$ entre A et $A + \Delta$: c'est un intervalle pour lequel l'indice i est certainement nul.

On détermine ensuite, conformément à la proposition I^{re}, la valeur de l'indice qui, pour ce même intervalle, répond à l'équation principale. On parvient ainsi, quoique la fonction proposée $f(x)$ ne soit point algébrique, à connaître combien on doit chercher de racines de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle dont il s'agit, et il n'y a aucun des intervalles suivants auxquels le même procédé ne s'applique. On connaîtra donc les intervalles où les racines doivent être cherchées, et l'on déterminera par les règles expliquées dans les premiers livres la nature et les limites des racines.

Nous avons rapporté dans ce cinquième livre divers exemples

propres à éclairer cette application des principes de l'analyse algébrique. Elle est fondée sur la notion générale des variations et des permanences de signe : ce serait retrancher une partie considérable de l'art analytique que de ne point introduire cette notion dans la théorie des équations transcendantes.

(16) III^e. Une fonction transcendante ou algébrique φx étant proposée, si l'on fait l'énumération de toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x , savoir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. qui rendent nulle la fonction φx , et si l'on désigne par $f(x)$ le produit $(1 - \frac{x}{\alpha}), (1 - \frac{x}{\beta}), (1 - \frac{x}{\gamma}), \dots$ de tous les facteurs simples qui correspondent aux racines de l'équation $\varphi x = 0$, ce produit pourra différer de la fonction φx , en sorte que cette fonction, au lieu d'être équivalente à $f(x)$, sera le produit d'un premier facteur $f(x)$ par un second $F(x)$. Cela pourra arriver si le second facteur $F(x)$ ne cesse point d'être une grandeur finie, quelque valeur réelle ou imaginaire que l'on donne à x , ou si ce second facteur $F(x)$ ne devient nul que par la substitution de valeurs de x qui rendent infini le premier facteur $f(x)$.

Et réciproquement si l'équation $F(x) = 0$ a des racines, et si elles ne rendent point infini le facteur $f(x)$, on est assuré que le produit de tous les facteurs du premier degré correspondant aux racines de $\varphi x = 0$ équivaut à cette fonction φx (*).

(*) En effet 1^o s'il existait un facteur $F(x)$ qui ne pût devenir nul pour aucune valeur réelle ou imaginaire de x , par exemple si $F(x)$ était une constante A et si $f(x)$ était $\sin. x$, toutes les racines de $A.\sin. x = 0$ seraient celles de $\sin. x = 0$, et le produit de tous les facteurs simples correspondant aux racines de $A.\sin. x = 0$ serait seulement $\sin. x$, et non $A.\sin. x$. Il en serait de même si le facteur $F(x)$ n'était pas une constante A . Mais s'il pouvait exister un facteur $F(x)$ qui ne cesserait point d'avoir une valeur finie, quelque valeur réelle ou imaginaire que l'on attribuât à x , toutes les racines de l'équation $\sin. x.F(x) = 0$ seraient celles de $\sin. x = 0$, puisqu'on ne pourrait rendre nul le produit $\sin. x.F(x)$ qu'en rendant $\sin. x$ nul. Donc le produit de tous les facteurs correspondants aux racines de $\varphi x = 0$ serait $\sin. x$, et non $\sin. x.F(x)$. On voit donc que dans ce second cas il serait possible que le produit de tous les facteurs simples ne donnât pas φx .

IV^e. Étant proposée une équation algébrique ou transcendante $\varphi x = 0$ formée d'un nombre fini ou infini de facteurs réels ou imaginaires

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right), \left(1 - \frac{x}{\beta}\right), \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right), \left(1 - \frac{x}{\delta}\right), \text{ etc.},$$

on trouve le nombre des racines imaginaires, les limites des racines réelles, les valeurs de ces racines, par la méthode de résolution qui a été exposée dans les premiers livres, et qui sera la même soit que la différentiation répétée réduise φx à une valeur constante, soit que la différentiation puisse être indéfiniment continuée. L'équation $\varphi x = 0$ a précisément autant de racines imaginaires qu'il y a de valeurs réelles de x qui, substituées dans une fonction dérivée intermédiaire d'un ordre quelconque, rendent cette fonction nulle, et donnent deux résultats de même signe pour la fonction dérivée qui la précède et pour celle qui la suit. Par conséquent si l'on parvient à prouver qu'il n'y a aucune valeur réelle de x qui, en faisant évanouir une fonction dérivée intermédiaire, donne le même signe à celle qui la précède, et à celle qui la suit, on est assuré que la proposée ne peut avoir aucune racine imaginaire. Par exemple en examinant l'origine de l'équation transcendante

2^o Si l'équation $F x = 0$ a des racines, ou réelles ou imaginaires, ce qui exclut le cas où $F x$ serait une constante A , ou serait un facteur dont la valeur est toujours finie, et si les racines de $F x = 0$ rendent $f x$ infini, le produit $f x \cdot F x$ devient $\frac{0}{0}$, et peut avoir une valeur très-différente de φx . Mais si les racines de $F x = 0$ donnent pour $f x$ une valeur finie, le produit $f x \cdot F x$ deviendrait nul lorsque $F x = 0$: donc l'énumération complète des racines de l'équation $\varphi x = 0$, ou $f x \cdot F x = 0$, comprendrait les racines de $F x = 0$. Or nous avons représenté par $f x$ le produit de tous les facteurs simples qui répondent aux racines de $\varphi x = 0$: il serait donc contraire à l'hypothèse d'admettre qu'il y a un autre facteur $F x$, tel que les racines de $F x = 0$ sont aussi des facteurs de $\varphi x = 0$. Cela supposerait que l'on n'a pas fait une énumération complète des racines de l'équation $\varphi x = 0$, puisqu'on a exprimé seulement par $f x$ le produit des facteurs simples qui correspondent aux racines de cette équation.

$$(1) \quad 0 = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \text{etc.},$$

nous avons prouvé qu'elle est formé du produit d'un nombre infini de facteurs; et en considérant une certaine relation récurrente qui subsiste entre les coefficients des fonctions dérivées des divers ordres, on reconnaît qu'il est impossible qu'une valeur réelle de x , substituée dans trois fonctions dérivées consécutives, réduise la fonction intermédiaire à zéro, et donne deux résultats de même signe pour la fonction précédente et pour la fonction suivante. On en conclut avec certitude que l'équation (1) ne peut point avoir de racines imaginaires.

La règle que nous avons donnée dans le premier livre pour reconnaître facilement si les deux racines que l'on doit chercher dans un intervalle donné sont réelles, ou si elles manquent dans cet intervalle, s'applique directement à toute équation algébrique ou transcendante ainsi formée d'un nombre fini ou infini de facteurs réels ou imaginaires. Il en est de même des théorèmes que nous avons donnés dans les premiers livres pour régler l'approximation linéaire, en déterminant deux limites l'une toujours plus grande et l'autre toujours moindre que la racine. La mesure de la convergence est du même ordre que si l'équation était algébrique. Ainsi le nombre des chiffres exacts que l'on détermine à chaque opération croît suivant la même loi, quelle que soit la nature de la fonction algébrique ou transcendante : le caractère de l'approximation linéaire n'est point propre aux seules fonctions algébriques; il est déterminé par le mode des substitutions successives, et convient à toutes les fonctions.

On vient d'énoncer dans cette analyse du cinquième livre les propositions qui servent à généraliser la méthode de résolution des équations déterminées. Si l'on bornait cette méthode aux fonctions algébriques, on ne s'en formerait qu'une idée très-incomplète. Il est évident qu'elle convient à tous les genres de fonctions. Les divers exemples auxquels nous avons appliqué ces principes rendent cette conclusion encore plus manifeste.

(17) L'objet du sixième livre est de démontrer les rapports des séries récurrentes avec la théorie des équations. Ces rapports sont beaucoup plus étendus qu'on ne l'a pensé jusqu'ici. Nous avons reconnu qu'ils comprennent toutes les racines, soit réelles, soit imaginaires, et que l'on peut en général déterminer par cette méthode tous les coefficients de tous les facteurs d'un degré quelconque. On pourrait trouver dans les ouvrages de Newton la première vue qui a conduit à cet usage des séries récurrentes, mais Daniel Bernoulli doit être considéré comme le principal inventeur.

Nous rappellerons d'abord la propriété qui sert de fondement à cette méthode. Dans les séries qui ont été nommées récurrentes chaque terme est dérivé de ceux qui le précèdent, au moyen d'une relation constante et très-simple. En général pour former un terme d'une série récurrente, on désigne un certain nombre de termes qui le précèdent immédiatement; on multiplie ces termes respectivement par des nombres constants, positifs ou négatifs; on ajoute les produits, et la somme est le terme cherché. La série est de l'ordre m lorsque, pour former un terme, on prend les m termes qui le précèdent immédiatement. On a appelé échelle de relation la suite des m nombres constants. Pour former une série de cet ordre, il suffit de connaître les m premiers termes de la série, et l'échelle de relation. Il est évident que l'on en peut déduire tous les termes qui suivent, et prolonger la série indéfiniment. Ces définitions étant posées, voici en quoi consiste la règle de Daniel Bernoulli.

Soit proposée une équation algébrique

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} \dots + gx + h = 0,$$

dans laquelle les coefficients $a, b, c \dots g, h$ sont des nombres connus. On écrira un nombre m de valeurs numériques prises à volonté pour les m premiers termes d'une série récurrente; par exemple on peut supposer que ces premiers termes sont tous égaux à l'unité. On prendra pour l'échelle de relation les coefficients $a, b, c \dots g, h$ de l'équation, et l'on prolongera indéfiniment la série, en calculant chaque nouveau terme au moyen des m termes qui le précèdent

immédiatement. On formera donc ainsi une série récurrente dont les premiers termes sont arbitraires, mais qui a dans tout le reste de la suite une relation nécessaire avec l'équation proposée.

Cela étant, si l'on divise chaque terme de la série récurrente par celui qui le précède, on forme une suite de quotients : or l'auteur de la règle démontre que cette suite de quotients converge de plus en plus vers une racine de l'équation. Chaque quotient est une valeur approchée de cette racine, et ces valeurs deviennent de plus en plus exactes. Elles ne diffèrent plus que par les derniers chiffres décimaux, et l'on parvient ainsi, par les seules opérations élémentaires du calcul, à connaître la racine aussi exactement qu'on peut le désirer.

Euler a expliqué en détail la règle que l'on vient d'énoncer ; c'est l'objet du chapitre dix-septième de l'Introduction à l'Analyse infinitésimale. Celle des racines qui est ainsi déterminée par la série récurrente est la plus grande de toutes, c'est-à-dire celle qui contient le plus d'unités, abstraction faite du signe.

Il faut concevoir que l'on a élevé au carré chacune des racines, et que les carrés sont rangés par ordre de grandeur : on marquerait ainsi l'ordre des racines depuis la plus grande jusqu'à la plus petite. Si l'équation a des racines imaginaires, on détermine encore l'ordre suivant lequel les racines doivent être rangées. Pour cela on conçoit que deux des racines imaginaires conjuguées ont été multipliées l'une par l'autre : le produit est toujours réel, et c'est ce produit qui, étant comparé au carré de chaque racine réelle, marque la place que doit occuper dans l'ordre des racines le couple des deux racines imaginaires conjuguées.

La série récurrente fait connaître la première racine, lorsqu'elle est réelle ; elle fait aussi connaître la plus petite racine lorsqu'elle est réelle. Quant aux racines imaginaires, si elles sont subordonnées à la plus grande racine, c'est-à-dire si le produit des deux conjuguées est moindre que le carré de la première racine, on détermine par le procédé qui vient d'être énoncé cette première racine ; elle est encore la limite dont s'approche continuellement la suite con-

vergente des quotients continus. Mais si un couple de racines imaginaires occupe le premier rang, la série récurrente ne donne aucun résultat. En prenant le quotient de chaque terme par celui qui le précède, la suite de ces quotients continus n'est pas convergente : elle donne des valeurs vagues et inégales, qui ne s'approchent d'aucune limite déterminée.

Dans les notes jointes au *Traité de la Résolution des équations numériques*, Lagrange rappelle la règle découverte par Daniel Bernoulli, et les remarques d'Euler concernant l'exception des racines imaginaires. L'auteur de ce *Traité* ajoute que l'on pourrait déterminer par le même procédé une racine quelconque, comme l'inventeur l'a proposé, si l'on connaissait d'avance les limites qui séparent cette racine de toutes les autres, et il montre que la marche de l'opération est analogue à celle de la règle d'approximation de Newton. Mais comme cette application exigerait que l'on eût une méthode certaine pour déterminer les limites des racines, il considère avec raison cet usage des séries récurrentes comme très-imparfait, soit parce que la règle est en défaut dans le cas des racines imaginaires, soit parce qu'il est nécessaire de déterminer d'avance les limites de chaque racine.

(18) Les détails que je viens d'exposer font connaître d'une manière positive la nature de la question que l'on avait à traiter, et son état actuel. L'extrême simplicité de cette méthode, et l'utilité de ses applications qu'Euler a mise dans tout son jour, m'ont porté à rechercher avec soin si elle peut s'étendre à toutes les racines, soit réelles, soit imaginaires, et quels sont les rapports les plus généraux des séries récurrentes avec la théorie des équations. Voici les questions que cette analyse présentait, et que j'ai toutes résolues.

Premièrement : quelle est la mesure exacte de la convergence de l'approximation ?

Secondement : peut-on employer un procédé analogue pour découvrir la seconde racine, la troisième, et en général toutes les racines réelles de la proposée, sans recourir à aucune autre méthode pour déterminer les limites de ces racines ?

Troisièmement : lorsque les racines cherchées sont imaginaires, ce même emploi des séries récurrentes peut-il encore avoir lieu, et comment en déduira-t-on les valeurs de plus en plus approchées de la partie réelle de chaque racine et de la partie imaginaire?

Je vais rapporter maintenant la solution des trois questions précédentes : cet exposé suffira pour faire connaître clairement l'objet et les résultats du sixième livre.

Lorsqu'on applique la série de Daniel Bernoulli à une équation dont la première racine est réelle, la suite des quotients converge vers la valeur de cette racine, et les erreurs finales des approximations diminuent comme les termes d'une progression géométrique dont la racine est une fraction. Cette fraction est le rapport de la seconde racine à la première, comme on le reconnaît au premier examen. Si la première racine et la seconde ont des signes différents, condition qu'il est toujours facile d'obtenir, les valeurs approchées sont alternativement trop grandes et trop petites. Ainsi les chiffres communs à deux valeurs consécutives appartiennent nécessairement à la racine cherchée. Cette propriété ne se rencontre point dans les approximations newtoniennes.

Les applications très-remarquables qu'Euler a faites de la méthode des séries récurrentes prouvent qu'elle est utile dans un grand nombre de cas; mais la marche du calcul ne nous paraît pas en général assez rapide. Ce n'est donc point sous ce rapport que nous considérons ici les propriétés des séries récurrentes. Le caractère principal que nous avons en vue, et qui distingue cette méthode de toutes les autres, est qu'elle n'exige aucune connaissance antérieure, et il résulte de nos recherches que le même procédé détermine les parties, soit réelles, soit imaginaires de toutes les racines. Cette conséquence paraît en quelque sorte indiquée dans l'ouvrage de Daniel Bernoulli, et surtout dans celui d'Euler, mais elle exigeait la solution complète de la seconde et de la troisième question. Voici en quoi consiste cette solution.

Concevons que l'on ait formé la série récurrente primitive qui dérive immédiatement des coefficients de la proposée, et de pre-

miers termes pris à volonté. Désignons par s, t, u, v, x , etc. les racines de l'équation rangées par ordre de grandeur. Soient A, B, C, D, E, etc. les termes de la série récurrente. Si la racine qui occupe le premier rang est réelle, on en approchera de plus en plus, et indéfiniment, en divisant chaque terme par celui qui le précède : c'est en cela que consiste la règle déjà connue ; mais on ne trouve ainsi que la première racine. Pour déterminer les racines suivantes on prendra quatre termes consécutifs A, B, C, D ; on formera le produit AD des deux termes extrêmes, on en retranchera le produit BC des deux termes moyens ; on écrira le reste AD — BC au-dessous de la première série, et l'on opérera de la même manière pour quatre autres termes consécutifs B, C, D, E ; C, D, E, F ; ainsi de suite. On aura donc une seconde suite $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ dérivée de la première. Or nous démontrons 1^o que la seconde série est récurrente ; 2^o que le quotient continu $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta}{\gamma}, \dots$ etc. a pour limite la somme $s + t$ des deux premières racines de la proposée : et comme la première est connue par une opération précédente, on connaît aussi la valeur t de la seconde racine.

Si au lieu de choisir quatre termes consécutifs de la première série, on prend seulement trois termes consécutifs A, B, C ; si du produit AC des extrêmes on retranche le carré B² du terme moyen, en écrivant tous les restes au-dessous de la série primitive : on formera une seconde série, et l'on démontre 1^o que cette seconde série est récurrente ; 2^o que la suite des quotients continus que donne cette série est convergente, et a pour limite le produit st des deux premières racines de la proposée.

On déterminerait pareillement les trois premières racines s, t, u de l'équation. Pour cela on formerait la série primitive, et l'on en déduirait par les règles que nous avons énoncées trois autres séries récurrentes. La première ferait connaître, par la suite convergente de ses quotients, la somme $s + t + u$ des trois premières racines ; la seconde déterminerait la somme $st + su + tu$ des produits deux à deux ; la troisième série déterminerait le produit stu .

Il en est de même de toutes les racines de l'équation proposée :

on les déterminerait par ordre, en quelque nombre qu'elles fussent. En général, pour déterminer par ordre toutes les racines, on forme en premier lieu la suite des quotients continus dont la limite est la valeur de s . On déduit ensuite de la première série récurrente celles qui sont propres à faire connaître la somme $s + t$, puis la somme $s + t + u$, puis la somme des quatre premières racines; ainsi de suite.

Il nous reste à énoncer la solution de la troisième question concernant les racines imaginaires. On peut former d'après ce qui vient d'être dit :

1° la série récurrente d'où l'on déduit les valeurs approchées de la première racine s ;

2° une seconde suite de quotients qui donne la valeur du produit st ;

3° une troisième suite qui donne la valeur du produit stu des trois premières racines; ainsi de suite.

Cela posé, si la première racine est imaginaire, c'est-à-dire si le produit des deux imaginaires conjuguées surpasse le carré de chaque racine réelle, la première série ne donnera aucun résultat; la suite des quotients continus sera divergente et vague, comme Euler la remarqué. Or nous démontrons que, dans ce même cas, la seconde suite de quotients est convergente, et que la limite de ces quotients continus est le produit réel st des deux racines imaginaires.

Si la troisième racine u est réelle, la troisième suite de quotients est convergente.

Le contraire aurait lieu si la troisième racine était imaginaire; mais dans ce cas la quatrième suite de quotients, qui répond à $stuv$, est nécessairement convergente.

Les mêmes conséquences s'appliquent aux séries que l'on formerait d'après les règles précédentes pour déterminer les sommes $s + t$, $s + t + u$, etc. En général toutes les fois qu'on applique ces règles au calcul des quantités successives s, st, stu , etc., ou $s + t, s + t + u$, etc., il ne peut pas arriver deux fois de suite que la suite des quotients soit divergente. Deux suites consécutives peuvent donner

toutes les deux des résultats convergents, mais elles ne peuvent pas toutes les deux être divergentes : il y en a nécessairement une des deux pour laquelle la suite des quotients a une limite fixe, qui est la valeur cherchée.

Il résulte de ces théorèmes que, pour connaître dans tous les cas les racines de la proposée, il suffit de former les séries qui se rapportent aux produits successifs des racines, et celles qui se rapportent aux sommes successives des racines. On aura ainsi les valeurs de plus en plus approchées de toutes les racines réelles, et, ce qui est remarquable, on connaîtra pour chaque racine imaginaire la partie réelle de cette racine et le coefficient de l'imaginaire. Voilà l'usage le plus étendu que l'on puisse faire de la méthode de séries récurrentes. Ces séries ont donc en effet des propriétés très-générales, relatives à la théorie des équations, et c'est l'étude de ces rapports qui est le véritable objet de notre sixième livre.

(19) On sait depuis long-temps qu'une fonction algébrique invariable de toutes les racines d'une équation, c'est-à-dire une expression dans laquelle elles entrent toutes de la même manière, est donnée par une équation du premier degré au moyen des coefficients de l'équation. Cette proposition remarquable a sa première origine dans les théorèmes de François Viète, l'un des premiers fondateurs de l'analyse des équations. Albert Girard a déduit des théorèmes de Viète l'expression de la somme des puissances entières des racines. On trouve ensuite ces formules dans les ouvrages de Newton. Les nouveaux théorèmes que l'on vient d'énoncer font connaître que les fonctions qui ne contiennent qu'un certain nombre de racines ont des propriétés d'un ordre différent, mais qui ne sont pas moins générales. Ainsi, dans une équation d'un degré plus élevé que le troisième, la somme de trois racines n'est point donnée par une équation du premier degré, mais par une limite dont on approche de plus en plus. Cette limite est le quotient continu de deux termes consécutifs d'une série qu'il est très-facile de former. Il n'y a aucun facteur provenant d'un nombre quelconque des facteurs simples de l'équation proposée rangés par ordre, dont on ne puisse

déterminer ainsi tous les coefficients. L'examen de ces propriétés générales nous fait mieux connaître la nature des nombres irrationnels exprimés par les racines des équations algébriques. Ces racines sont les limites de certaines suites, qui dérivent selon une loi très-simple des coefficients de la proposée. Ce procédé, fondé sur l'usage des séries récurrentes, est principalement remarquable parce qu'il tient lieu de toute autre méthode pour la distinction des racines et de leurs limites, et parce qu'il s'applique à la recherche des coefficients des racines imaginaires. Au reste nous ne pensons point que l'on parvienne assez promptement par cette voie à la connaissance des racines. Les exemples cités par Euler sont ingénieusement choisis, mais ce mode d'approximation exige en général trop de calcul. Nous ne considérons donc cette question que sous les rapports théoriques. Les propriétés que nous venons d'énoncer sont incomparablement plus générales que celles qui ont été connues des inventeurs, et des auteurs qui ont traité depuis la même question : elles intéressent surtout la théorie. Nous avons eu pour but dans cette recherche de compléter un des principaux éléments de l'analyse algébrique.

(20) Dans le septième et dernier livre, on expose les principes de l'analyse des inégalités. Cette partie de notre ouvrage concerne un nouveau genre de questions qui offrent des applications variées à la géométrie, à l'analyse algébrique, à la mécanique et à la théorie des probabilités. Nous allons indiquer le caractère principal de ces recherches, et nous citerons quelques exemples propres à en faire connaître l'objet.

Une question est en général déterminée lorsque le nombre des équations qui expriment toutes les conditions proposées est égal au nombre des inconnues. Dans la théorie dont il s'agit les conditions ne sont pas exprimées par des équations ; c'est-à-dire qu'au lieu d'égaliser à une constante ou à zéro une certaine fonction des inconnues, on indique au moyen des signes $>$ ou $<$ que cette fonction est plus grande ou moindre que la constante. C'est ce qui constitue une inégalité.

On suppose, par exemple, que quatre indéterminées doivent être assujéties à un certain nombre d'inégalités du premier degré, et qu'il faut trouver toutes les valeurs possibles de ces inconnues. Le nombre des inégalités pourrait être moindre que celui des inconnues, ou lui être égal, et même il peut être beaucoup plus grand : il est ; en général, indéfini. Il s'agit de trouver les valeurs des quatre inconnues, qui étant substituées simultanément, satisfont à toutes les conditions proposées, soit que ces conditions consistent seulement dans certaines inégalités, soit quelles comprennent aussi des équations. Une question de cette espèce admet une infinité de solutions ; elle est indéterminée : il faut donner une règle générale qui servé à trouver facilement toutes les solutions possibles. Il est évident que des problèmes de ce genre doivent se présenter fréquemment dans les applications des théories mathématiques.

Dans plusieurs cas on peut arriver à la solution par des remarques particulières propres à la question que l'on veut résoudre : mais si le nombre des conditions est assez grand, et si elles se rapportent à trois ou à plus de trois variables, la suite des raisonnements devient si composée qu'il serait presque toujours impossible à l'esprit le plus exercé de la saisir tout entière. Il faudrait d'ailleurs recourir à des considérations différentes, selon la nature de la question, comme cela arrive à l'égard de plusieurs problèmes simples que l'on résoud sans le secours de l'analyse. Il était donc nécessaire de ramener à un procédé général et uniforme le calcul des conditions d'inégalité. On supplée ainsi, par une combinaison régulière et constante des signes, aux raisonnements les plus difficiles et les plus étendus, ce qui est le propre des méthodes algébriques. Nous citerons en premier lieu un exemple très-simple de ce genre de questions.

On suppose qu'un plan triangulaire horizontal est porté par trois appuis verticaux placés aux sommets des angles. La force de chaque appui est donnée et exprimée par 1, c'est-à-dire que si l'on plaçait sur cet appui un poids moindre que l'unité, ce poids serait supporté, mais que l'appui serait aussitôt rompu, si le poids surpassait l'unité.

On propose de placer un poids donné, par exemple 2, sur la table triangulaire, en sorte qu'aucun des trois appuis ne soit rompu. La question serait déterminée si le poids donné était 3; elle n'a point de solution possible si ce poids surpasse 3; elle est indéterminée s'il est moindre que 3. Désignant par deux inconnues les coordonnées du point où l'on doit placer le poids proposé, par trois autres inconnues les pressions exercées sur les appuis; et supposant, pour simplifier le calcul, que le triangle est isocèle rectangle, on voit que la question renferme cinq quantités inconnues, et une qui est connue, savoir le poids proposé. Or les principes de la statique donnent immédiatement trois équations, et l'on y joindra pour chaque sommet deux inégalités, qui expriment que la pression est positive et moindre que 1, ou plutôt ne peut pas surpasser 1. Il est évident que toutes les conditions de la question seront alors exprimées: il ne s'agit plus que d'appliquer les règles générales du calcul des inégalités linéaires; on en déduira toutes les valeurs possibles des coordonnées inconnues, et l'on déterminera ainsi tous les points du triangle où le poids donné peut être placé.

Si l'on forme cette solution, on trouve que les points dont il s'agit se réunissent dans l'intérieur de la table, et composent un hexagone lorsque le poids donné est compris entre 1 et 2. Cette figure devient le triangle lui-même si le poids est moindre que l'unité; elle est un triangle plus petit si le poids est compris entre 2 et 3; elle se réduit à un seul point si le poids est égal à 3; enfin lorsqu'il surpasse 3 la figure n'existe plus, parce que les lignes qui doivent la former cessent de se rencontrer.

Voici la construction qui sert à tracer ces lignes. Désignant par 1 le côté du triangle isocèle-rectangle, on divise l'unité par le poids donné qu'il s'agit de placer, et l'on porte la longueur mesurée par le quotient 1^o sur chaque côté de l'angle droit, à partir du sommet de cet angle, ce qui donne deux points 1 et 2; 2^o sur un des côtés de l'angle droit, à partir du sommet de l'angle aigu, ce qui donne un troisième point 3; 3^o sur l'autre côté de l'angle droit, à partir du sommet de l'angle aigu, ce qui donne un quatrième point 4.

On élève par le point 1 une ligne perpendiculaire sur le côté où se trouve ce point, et par le point 2 une seconde ligne perpendiculaire sur l'autre côté; enfin on mène une troisième ligne droite par les points 3 et 4. Ces trois lignes ainsi tracées terminent sur la surface du triangle l'espace où le poids donné peut être placé sans qu'aucun des appuis soit rompu.

Il serait facile de résoudre sans calcul une question aussi simple; mais si le nombre des appuis est plus grand que trois, si leur force est inégale, si la table horizontale porte déjà en certains points des masses données, ou si l'on doit y placer non un seul poids, mais plusieurs, on ne peut se dispenser de recourir au calcul des inégalités. L'avantage de ce calcul consiste en ce qu'il suffit dans tous les cas d'exprimer les conditions de la question, ce qui est facile, et de combiner ensuite ces expressions au moyen de règles générales qui sont toujours les mêmes. On forme ainsi la solution, à laquelle on n'aurait pu parvenir que par une suite de raisonnements très-complicés.

Les questions de ce genre sont toutes indéterminées, parce qu'elles admettent une infinité de solutions; mais elles diffèrent entre elles quant à l'étendue. Dans les unes, les conditions exigées restreignent beaucoup cette étendue; pour d'autres, l'énumération de toutes les solutions possibles est moins limitée. Il est nécessaire; dans certaines recherches, de considérer les questions sous ce rapport.

Un examen attentif prouve que l'étendue propre à chaque question est une quantité que l'on peut toujours évaluer en nombres: c'est en cela que la théorie dont on expose les principes se lie à celle des probabilités, et il y a en effet divers problèmes dépendants de cette dernière science qui se résolvent par le calcul des inégalités. Or on ne peut mesurer l'étendue ou capacité d'une question sans comprendre dans l'énumération toutes les solutions possibles, en sorte qu'on doit ici faire usage du calcul intégral; et en effet le nombre qui mesure l'étendue d'une question quelconque est toujours exprimé par une intégrale définie multiple, dont les limites sont données. Il est toujours possible et très-facile d'effectuer ces

intégrations successives, quel qu'en soit le nombre; et si l'on écrit les limites des intégrales en se servant de la notation que j'ai proposée dans la Théorie analytique de la chaleur, la quantité que l'on veut déterminer est exprimée sous la forme la plus générale et la plus simple.

Il est évident que les conditions proposées pourraient être telles que la question n'admît aucune solution possible. Dans ce cas le calcul développe l'opposition réciproque des conditions, et montre l'impossibilité d'y satisfaire. Ainsi la méthode a pour objet de reconnaître si la question peut être résolue; de trouver dans ce cas toutes les solutions qu'elle admet; enfin de mesurer par un nombre l'étendue propre à la question.

Il arrive souvent aussi, dans ce genre de recherches, que l'objet principal est de trouver les limites des solutions: alors la question n'est pas indéterminée; et il en est de même de celle qui consiste à en mesurer l'étendue: mais ces questions dépendent de la même analyse.

Nous avons rapporté un premier exemple d'une question de statique que l'on résoud par le calcul des inégalités. Voici une seconde question du même genre, mais qui diffère de la première en ce que la quantité inconnue est une limite, et par conséquent a une seule valeur.

On suppose qu'une surface plane et horizontale, de figure carrée, est portée sur quatre appuis verticaux, placés aux sommets des angles; chacun des appuis peut supporter un poids moindre que l'unité, mais il romprait aussitôt s'il était chargé d'un poids plus grand que cette unité. On marque un point quelconque sur la table horizontale, et l'on demande quel est le plus grand poids que l'on puisse placer en ce point donné sans qu'aucun des appuis soit rompu. Ce plus grand poids, ou la force de la table en ce lieu, dépend évidemment de la position du point. Concevons qu'on y élève une ordonnée verticale pour représenter le plus grand poids qui répond à ce lieu, et qui détermine ce plus grand poids pour chaque point de la table horizontale; il s'agit de tracer la sur-

face courbe qui passe par toutes les extrémités supérieures des ordonnées.

Cette recherche appartient à la théorie analytique de l'élasticité : il faudrait considérer les appuis comme compressibles, et exprimer aussi par le calcul les changements que subit le plan élastique dans toutes ses parties. Cette question, quelque composée qu'elle paraisse, peut être résolue aujourd'hui ; car les méthodes qui servent à intégrer les équations différentielles propres à la Théorie de la chaleur ont donné à l'analyse une étendue nouvelle, qui permet de soumettre au calcul les effets de l'élasticité. Mais nous considérons ici la question sous un autre point de vue. On suppose que la table élastique ayant reçu la figure qui convient à l'équilibre, devient parfaitement rigide, ce qui ne peut point détruire l'équilibre subsistant. Il faut donc que les conditions nécessaires à l'équilibre soient satisfaites, soit que la table soit flexible, comme tous les corps le sont en effet, soit qu'on la suppose rigide. Ce sont ces dernières conditions que l'on veut exprimer par l'analyse des inégalités, et l'on n'a ici aucune hypothèse physique à former.

On se propose de découvrir la nature et les dimensions de la surface dont les coordonnées expriment le plus grand poids que la table puisse supporter en chaque lieu donné. Or la solution déduite de notre calcul prouve que la surface dont il s'agit n'est point assujettie à une loi continue : elle est formée de plusieurs surfaces hyperboliques, différemment situées. La question est résolue par la construction suivante. On divise le carré en huit parties égales, au moyen des deux diagonales et de deux droites transversales, dont chacune joint le milieu d'un côté au milieu du côté opposé. Chacune de ces huit parties est un triangle rectangle que l'on divise en deux segments, dont l'un a trois fois plus de surface que l'autre. Cette division s'opère en menant une ligne droite de l'angle droit du triangle à l'un des angles du carré. On considère comme base de chacun de ces segments celui de ses trois côtés qui est parallèle à un côté du carré. Pour trouver le plus grand poids qui puisse être placé en un point donné du plus grand segment, il faut, par ce point, mener une parallèle à la base du

segment, jusqu'à la rencontre de celle des deux diagonales dont le point est le plus éloigné, et mesurer sur cette parallèle la longueur interceptée entre le point de rencontre et le point donné. L'unité, divisée par cette longueur interceptée, est la valeur cherchée du plus grand poids.

Si ce point donné est situé dans le petit segment, il faut, par ce point, mener une parallèle à la base du segment, jusqu'à la rencontre de celui des côtés du carré dont le point donné est le plus distant, et mesurer la partie de cette parallèle qui est interceptée entre le point de rencontre et le point donné. L'unité, divisée par la moitié de la longueur interceptée, exprime la valeur cherchée du plus grand poids. En appliquant l'une ou l'autre règle à chacun des seize compartiments du carré, on connaîtra le plus grand poids qui puisse être placé en chaque point de la table rectangulaire.

On voit que la valeur de l'ordonnée verticale qui mesure le plus grand poids n'est pas assujettie à une loi continue. Cette loi change tout-à-coup lorsqu'on passe du grand segment au petit segment. Il serait facile de trouver cette solution sans calcul, et nous l'avons remarquée depuis long-temps. Mais si la figure du plan est différente; si le nombre des appuis est plus grand que quatre; si la table supporte déjà en certains points des masses données; il est nécessaire de recourir aux règles qui servent à la combinaison des inégalités.

(21) Parmi les applications que nous avons rapportées dans ce septième livre, les unes ont, comme les deux précédentes, pour principal objet de faire connaître la nature de ce nouveau genre de problèmes, et la forme générale du calcul. D'autres concernent des questions plus générales, dont la solution est nécessaire au progrès des théories analytiques. L'une se rapporte à l'usage des équations de condition, si important pour la formation des tables astronomiques. Il s'agit de trouver les valeurs des inconnues telles que la plus grande erreur, abstraction faite du signe, soit la moindre possible; ou telles que l'erreur moyenne, c'est-à-dire

la somme des erreurs, abstraction faite du signe, divisée par leur nombre, soit la moindre possible.

Une seconde application est celle que nous avons donnée dans le quatrième livre; elle a pour objet de former les termes successifs de la valeur de chacune des inconnues qui doivent satisfaire à des équations littérales données. Nous avons fait voir que la résolution de ces équations dépend de l'analyse des inégalités linéaires.

Quel que soit le nombre des inconnues, il suffit d'exprimer les conditions propres à la question, et d'appliquer aux inégalités écrites les règles générales de ce calcul. On supplée ainsi par un procédé algorithmique à des raisonnements très-composés, qu'il faudrait changer selon la nature de la question, et qu'il serait pour ainsi dire impossible de former, si le nombre des inconnues surpassait trois. Toutefois on ne peut pas toujours éviter que le nombre des opérations ne devienne très-grand, mais on réduit beaucoup ce nombre, en considérant les propriétés des fonctions extrêmes. Nous appelons ainsi celles qui deviennent ou plus grandes ou plus petites que toutes les autres.

Nous indiquerons maintenant le principe de la solution d'une des questions les plus remarquables, celle qui se rapporte aux erreurs des observations.

On considère des fonctions linéaires de plusieurs inconnues x, y, z , etc. Les coefficients numériques qui entrent dans les fonctions sont des quantités données. Si le nombre des fonctions n'était pas plus grand que celui des inconnues, on pourrait trouver pour x, y, z , etc. un système de valeurs numériques tel que la substitution simultanée de ces valeurs dans les fonctions donnerait pour chacune un résultat nul. Mais on ne peut pas en général satisfaire à cette condition lorsque le nombre des fonctions surpasse celui des inconnues. Supposons maintenant que l'on attribue à x, y, z , etc. des valeurs numériques X, Y, Z , etc., et qu'en les substituant dans une fonction, on calcule la valeur positive ou négative du résultat de la substitution. On considère comme une erreur, ou écart, le résultat positif ou négatif qui diffère de zéro; et, faisant abstrac-

tion du signe, on prend pour mesure de l'erreur le nombre d'unités positives ou négatives que le résultat exprime.

Cela posé, il faut donner à x, y, z , etc. des valeurs X, Y, Z , etc. telles que le plus grand écart, provenant de la substitution dans les diverses fonctions proposées, soit moindre que le plus grand écart que l'on trouverait en substituant dans les fonctions tout autre système de valeurs différent de celui-ci, X, Y, Z , etc. On pourrait aussi chercher un système X, Y, Z , etc. de valeurs simultanées de x, y, z , etc. tel que la somme des erreurs, abstraction faite du signe, soit moindre que la somme des erreurs provenant de la substitution de tout système différent de X, Y, Z , etc.

La construction suivante représente clairement la méthode qui doit être suivie pour trouver sans calcul inutile les quantités X, Y, Z , etc. qui donnent au plus grand écart sa moindre valeur. Cette construction, que nous avons donnée depuis long-temps, est le point capital de la question : elle en résoud seule toutes les difficultés. Non-seulement elle rend la solution sensible et la fixe dans la mémoire, mais elle sert à la découvrir ; et quoique propre au cas de deux variables x et y , elle suffit pour faire bien connaître le procédé général. On suppose d'ailleurs que le nombre des fonctions proposées est quelconque.

x et y sont dans le plan horizontal les coordonnées d'un point. L'ordonnée verticale z mesure la valeur de la fonction linéaire. A chaque fonction correspond un plan. La distance z d'un point du plan au plan horizontal est exprimée en x et y . Dans chaque fonction linéaire on changera les signes de x et y , ce qui double le nombre des fonctions proposées, et par conséquent le nombre des plans que l'on considère. Cela posé, on se représente que tous les plans sont tracés, et l'on ne porte son attention que sur les parties des plans qui sont placées au-dessus du plan horizontal. Ces parties supérieures des plans donnés sont indéfiniment prolongées. Il faut principalement remarquer que le système de tous ces plans forme un vase qui leur sert de limite ou d'enveloppe. La figure de ce vase extrême est celle d'un polyèdre dont la convexité est tournée

vers le plan horizontal. Le point inférieur du vase ou polyèdre a pour ordonnées les valeurs X, Y, Z , qui sont l'objet de la question; c'est-à-dire que Z est la moindre valeur possible du plus grand écart, et que X et Y sont les valeurs de x et y propres à donner ce minimum, abstraction faite du signe.

Pour atteindre promptement le point inférieur du vase on élève en un point quelconque du plan horizontal, par exemple à l'origine des x et y , une ordonnée verticale jusqu'à la rencontre du plan le plus élevé, c'est-à-dire que parmi tous les points d'intersection que l'on trouve sur cette verticale on choisit le plus distant du plan des x et y . Soit m_1 ce point d'intersection : on connaît le plan sur lequel il est placé. On descend sur ce même plan, et dans un plan vertical, depuis le point m_1 jusqu'à un point m_2 d'une arête du polyèdre; et en suivant cette arête on descend de nouveau depuis le point m_2 jusqu'à un sommet m_3 commun à trois plans extrêmes. A partir du point m_3 on continue de descendre suivant une seconde arête jusqu'à un autre sommet m_4 ; et l'on continue l'application du même procédé, en suivant toujours celle des deux arêtes qui conduit à un sommet moins élevé. On arrive ainsi au point le plus bas du polyèdre. Or cette construction représente exactement la série des opérations numériques que la règle analytique prescrit. Elle rend très-sensible la marche de la méthode, qui consiste à passer successivement d'une fonction extrême à une autre, en diminuant de plus en plus la valeur du plus grand écart.

Le calcul des inégalités fait connaître que le même procédé convient à un nombre quelconque d'inconnues, parce que les fonctions extrêmes ont dans tous les cas des propriétés analogues à celles des faces du polyèdre qui sert de limites aux plans inclinés. En général les propriétés des faces, des arêtes, des sommets et des limites de tous les ordres, subsistent dans l'analyse générale, quel que soit le nombre des inconnues.

(22) Les analyses que l'on vient de rapporter présentent l'ensemble de nos recherches. Cette exposition était nécessaire pour que l'on pût se former une idée générale de la théorie des équa-

tions, et porter un jugement exact des méthodes qui étaient déjà connues. On voit que la notion la plus claire, et qui eût été la plus propre à diriger toutes les recherches, est aussi la plus simple : c'est celle que Viète avait proposée dès l'origine de l'analyse moderne. Il pensait que la résolution des équations algébriques doit dépendre d'une méthode universelle, qu'il appelait *exégétique*, et qui consiste à considérer simultanément tous les coefficients de la proposée pour en déduire par des opérations successives toutes les parties de chaque racine. Viète n'a point formé la méthode universelle dont il proposait la recherche; il l'a seulement entrevue, et il en a indiqué le caractère par divers exemples : on ne pouvait point la découvrir sans connaître quelques éléments de l'analyse différentielle. La justesse de cette vue générale n'a point échappé à Newton; il l'a même confirmée en donnant une première partie de la méthode exégétique, celle qui fait connaître les premiers termes des séries. Mais il n'a point découvert le moyen de reconnaître les racines imaginaires des équations numériques, et de trouver deux limites pour chaque racine réelle. On peut résoudre aujourd'hui toutes les difficultés que ces recherches présentaient, et suppléer aux imperfections des premières tentatives : c'est le but que l'on s'est proposé dans cet ouvrage. Il contient l'exposition d'une méthode qui sert à déterminer facilement les racines de toutes les équations.

On peut maintenant se former une idée complète de l'objet et des résultats de nos recherches. Les points principaux sont premièrement la démonstration du théorème général qui fait connaître combien on doit chercher de racines dans un intervalle donné, et de la proposition relative au nombre des racines imaginaires. La règle de Descartes est un corollaire de ces théorèmes, et je pense qu'on ne peut pas les considérer sous un point de vue plus simple et plus étendu.

2^o La règle qui sert à reconnaître avec certitude si les deux racines cherchées sont réelles ou si elles manquent dans l'intervalle.

3^o La résolution de toutes les questions que présente l'approxi-

mation newtonienne. Ce procédé, l'un des plus simples et des plus féconds de toute l'analyse, serait incomplet et vague si ces questions n'eussent été résolues.

4° L'examen de la méthode qui suppose que l'on calcule d'abord la moindre valeur de la différence de deux racines. Il résulte de la discussion que ce calcul est inutile. Il faut appliquer immédiatement les procédés des fractions continues, et la nature des racines devient manifeste.

5° L'exposé des principes qui servent à résoudre les équations littérales, et l'extension de cette méthode au cas de plusieurs inconnues.

6° L'extension singulière de la méthode des séries récurrentes. Nous avons prouvé que cette méthode suffit pour faire connaître toutes les racines, les facteurs de tous les degrés, et les coefficients des expressions imaginaires. Cette règle était bornée aux deux racines extrêmes et aux racines réelles; nous avons montré qu'elle donne toutes les racines réelles ou imaginaires.

On voit par cette énumération que nous n'avons omis aucune des recherches qui peuvent éclairer la théorie des équations; on a recherché dans chaque question les principes les plus généraux, et qui pouvaient conduire par la voie la plus brève à la connaissance effective des racines. On doit regarder aujourd'hui cette question célèbre comme complètement résolue. Nous pensons que la science du calcul conservera toujours cet élément principal.
