
LIVRE PREMIER.

MÉTHODE

POUR DÉTERMINER DEUX LIMITES DE CHAQUE RACINE RÉELLE
ET POUR DISTINGUER LES RACINES IMAGINAIRES.

(1) L'ÉQUATION proposée est

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Nous désignons par X , ou $f(x)$, le premier membre de cette équation. L'exposant m est entier; les coefficients $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{m-1}, a_m$ sont des nombres donnés. Il s'agit de connaître combien il y a de nombres réels α, β, γ , etc. qui, substitués dans X à la place de x , réduisent cette fonction $f(x)$ à zéro, et d'assigner pour chacune de ces racines réelles α, β, γ , etc. deux limites entre lesquelles elle est seule comprise. Pour résoudre ces questions, nous considérons les fonctions $X, X', X'', X''', \dots, X^{(m)}$, dont chacune se déduit de la précédente en différentiant par rapport à x et divisant par dx . Le nombre de ces fonctions est $m + 1$, et la fonction $X^{(m)}$ ne contient pas x ; elle est une quantité constante positive. Nous écrivons cette suite de fonctions dans cet ordre,

$$X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)}, \dots, X'', X', X.$$

Concevons maintenant que l'on donne à x une valeur déterminée

a , positive ou négative, et que l'ayant substituée au lieu de x dans la suite des fonctions, on écrive le signe de chaque résultat: on formera ainsi une suite de signes, dont le premier, qui répond à $X^{(m)}$, est toujours $+$. Nous supposons que le nombre substitué a augmente par degrés infiniment petits depuis une valeur négative qui contient un nombre infini d'unités, et que l'on désigne par $-\frac{1}{\infty}$, jusqu'à une valeur positive $\frac{1}{\infty}$ qui croît aussi sans limite; et nous examinons les changements que subit la suite des résultats, à mesure que le nombre substitué a augmente. Cette suite de signes a des propriétés très-remarquables, dont l'examen attentif conduit à la détermination des limites des racines.

Lorsque le nombre substitué a est $-\frac{1}{\infty}$, chaque fonction est réduite à son premier terme: le signe du résultat de la substitution de $-\frac{1}{\infty}$ est évidemment $+$ pour la première fonction, $-$ pour la seconde, $+$ pour la troisième, ainsi de suite alternativement. Lorsque le nombre substitué est devenu égal à $+\frac{1}{\infty}$, la suite des signes ne comprend que des signes $+$. Ainsi dans le premier cas, a étant $-\frac{1}{\infty}$, chaque signe de la suite est suivi d'un signe différent; cette suite ne comprend que des *changements de signe*, dont le nombre est m : et dans le second cas, a étant $\frac{1}{\infty}$, chaque signe est suivi d'un signe semblable; la suite ne comprend que des *permanences de signes*. Nous allons prouver que le nombre m des changements de signe qui existaient dans la première suite diminue continuellement à mesure que le nombre substitué a augmente, et que cette suite perd un changement de signes toutes les fois que le nombre a devient égal à une racine réelle.

(2) Il est d'abord évident que la suite des signes demeure telle qu'elle était auparavant tant que le nombre substitué a ne rend pas nulle une ou plusieurs des fonctions $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}$, . . . X'' , X' , X : car la valeur d'une fonction telle que X , ou X' , ou X'' , etc. ne peut point changer de signe, si elle ne devient auparavant égale à zéro. Il faut donc examiner ce qui survient dans la suite des signes, lorsque le nombre substitué atteint une valeur qui rend nulle une des fonctions $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}$, $X^{(m-2)}$, . . . X'' , X' , X . Supposons en pre-

mier lieu que la seule fonction qui devient nulle soit la dernière X , ou $f(x)$. On a donc $f(a) = 0$. Quant à la fonction $f'(a)$, elle a une valeur ou positive ou négative.

Nous considérons trois états successifs et infiniment voisins du nombre substitué a , savoir

$$x = a - da,$$

$$x = a,$$

$$x = a + da;$$

et nous comparons les résultats des substitutions, savoir

$$f(a - da),$$

$$f(a),$$

$$f(a + da).$$

Puisque le terme $f(a)$ s'évanouit, ces résultats sont

$$- da f'(a),$$

$$0$$

$$+ da f'(a).$$

Si l'on écrit sur trois lignes horizontales correspondantes les signes des trois suites que l'on forme en substituant $a - da$, a , $a + da$, ces suites différeront seulement par les signes qui les terminent. En effet nous supposons que la valeur a de x rend nulle la seule fonction $f(x)$; et l'on peut toujours faire varier a d'une quantité si petite da , ou $-da$, en sorte que la substitution de $a - da$, ou de $a + da$, ne fasse évanouir aucune des autres fonctions. Donc ces autres fonctions conservent le signe qu'elles avaient lorsque la valeur de x était a . Si le signe de $f'(a)$ est $+$, les trois suites comparées seront terminées ainsi :

$$\dots + -$$

$$\dots + 0 \quad (1)$$

$$\dots + +,$$

c'est-à-dire que la fluxion $f'(a)$ étant positive, $f(x)$ augmente de valeur et est successivement négative, nulle et positive. On voit, à l'inspection de la table (1), que le changement de signes $+ -$ est devenu une permanence de signes $+ +$.

Si le signe de $f'(a)$ est négatif, les trois suites sont ainsi terminées,

$$\begin{array}{l} \dots - + \\ \dots - 0 \quad (2) \\ \dots - - , \end{array}$$

c'est-à-dire que la fluxion $f'(a)$ étant négative, la valeur de $f(x)$ est décroissante, en sorte qu'elle est successivement positive, nulle et négative. La table (2) fait connaître que le changement de signes $- +$ est remplacé par une permanence $- -$. Donc soit que le signe de $f'(a)$ soit positif ou négatif, il arrive dans l'un et l'autre cas qu'un changement de signes est remplacé par une permanence. Donc la suite des signes des résultats que l'on trouve en substituant pour x une valeur a continuellement croissante, perd un changement de signes toutes les fois que la valeur substituée atteint et dépasse infiniment peu une des racines réelles de l'équation proposée.

Nous supposerons maintenant que le nombre substitué a atteint une valeur qui rend nulle une seule des fonctions intermédiaires de la suite $X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)} \dots X'', X', X$, et ne rend point nulle la dernière fonction X . Soit $X^{(n)}$, ou $f^{(n)}(x)$, la fonction qui s'évanouit, en sorte que l'on a $f^{(n)}(a) = 0$. Nous désignons par n l'indice de différentiation, et par $n + 1$ ou $n - 1$ cet indice dans la fonction qui précède ou qui suit. On comparera, comme on l'a fait plus haut, les résultats des trois substitutions de $a - da, a, a + da$ dans la suite des fonctions; et l'on remarquera d'abord que da étant une quantité infiniment petite, les suites de signes ne diffèrent que par les signes des résultats qui proviennent des substitutions dans $f^{(n)}(x)$. Les trois résultats sont

$$f^{(n)}(a - da)$$

$$f^{(n)}(a)$$

$$f^{(n)}(a + da),$$

ou

$$- da f^{(n+1)}(a)$$

o

$$da f^{(n+1)}(a):$$

or le signe de $f^{(n+1)}(a)$ peut être $+$ ou $-$, et il en est de même du signe de $f^{(n-1)}(a)$, ce qui forme quatre combinaisons différentes.

Dans la première le résultat $f^{(n+1)}(a)$ est positif ainsi que $f^{(n-1)}(a)$: il faut donc comparer ces trois parties des suites de signe, savoir

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ + & 0 & + \\ + & + & + \end{array} \quad (3)$$

Dans un second cas le signe de $f^{(n+1)}(a)$ est $-$, et celui de $f^{(n-1)}(a)$ est $+$: les parties correspondantes qu'il faut comparer sont donc

$$\begin{array}{ccc} - & + & + \\ - & 0 & + \\ - & - & + \end{array} \quad (4)$$

La table (3) fait connaître que la suite supérieure a perdu deux de ses changements de signes, savoir $+ -$ et $- +$, qui sont remplacés par $+ +$ et $+ +$. Il n'en est pas de même de la table (4): elle montre que la suite n'a perdu aucun changement de signes; car un de ses changements $- +$ est remplacé par une permanence $- -$. Mais en même temps la permanence $+ +$ est remplacée par le changement $- +$.

Nous avons supposé que la fonction $f^{(n-1)}(x)$ a le signe $+$. Si au contraire elle devient négative lorsqu'on substitue a au lieu de x , on aura les deux tables suivantes,

$$\begin{array}{ccc} + & - & - \\ + & 0 & - \\ + & + & - \end{array} \quad (5)$$

et

$$\begin{array}{c} - + - \\ - o - \\ - - - \end{array} \quad (6)$$

L'une (5) montre que dans ce cas la suite supérieure n'a perdu aucun changement de signes; l'autre (6) répond à un cas différent, où la suite des signes a perdu deux changements, savoir $- +$ et $+ -$, remplacés par $- -$ et $- -$.

Il suit de cet examen que si le nombre substitué a atteint une valeur qui rend nulle une seule des fonctions intermédiaires, et ne fait point évanouir la fonction proposée X , la suite des signes perd à la fois deux changements, ou n'en perd aucun. Il n'arrive jamais qu'elle en perde un seul, ou qu'elle en acquière.

Lorsque le nombre substitué atteint et dépasse une racine réelle de la proposée, nous avons vu que la suite perd nécessairement un changement de signe; et l'on vient de démontrer que si la fonction rendue nulle par la substitution n'est point la dernière X , mais une des fonctions intermédiaires, la suite des signes perd deux changements à la fois, ou qu'elle n'en perd aucun. Donc le nombre substitué a croissant par degrés infiniment petits depuis $-\frac{1}{2}$ jusqu'à $+\frac{1}{2}$, la suite des signes perd au moins autant de changements qu'il existe de racines réelles. Le nombre de changements de signe de la suite ne peut jamais augmenter; il diminue nécessairement d'une seule unité, lorsque la seule fonction qui s'évanouit est la dernière X , et il peut ou diminuer de deux unités, ou demeurer le même qu'auparavant, lorsque la fonction qui s'évanouit seule est une des fonctions intermédiaires.

(3) Nous avons supposé jusqu'ici que la substitution de a fait évanouir une seule des fonctions qui forment la suite, et c'est ce qui arrive en général. Le contraire ne peut arriver qu'accidentellement, lorsqu'il existe de certaines relations entre les coefficients de la proposée. Un changement infiniment petit dans la valeur des coefficients détruirait cette relation, et une même valeur de x ne

ferait plus évanouir en même temps deux ou plusieurs des fonctions. C'est pour cette raison que l'on peut toujours, dans les recherches de ce genre, faire abstraction de ces cas singuliers. Mais il est préférable ici de les considérer séparément, parce qu'il s'agit de donner la démonstration rigoureuse d'une proposition fondamentale.

Supposons donc qu'une même valeur a , substituée au lieu de x dans la suite des fonctions rende, nulles plusieurs fonctions consécutives, et comparons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, les trois résultats des substitutions de $a - da$, a , $a + da$. Nous désignons par $f^{(n)}(x)$ la fonction qui s'évanouit lorsqu'on y substitue a au lieu de x , et nous supposons que plusieurs fonctions suivantes $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)$, etc. sont aussi rendues nulles par la même substitution. Soit i le nombre des fonctions consécutives $f^{(n)}(a)$, $f^{(n-1)}(a)$, $f^{(n-2)}(a)$, $f^{(n-3)}(a)$, etc. qui s'évanouissent. Quant à la fonction précédente $f^{(n+i)}(a)$, elle ne donne point un résultat nul : elle prend le signe $+$ ou le signe $-$; et il en est de même de la fonction $f^{(n-i)}(x)$ qui suit la dernière fonction évanouissante. Il s'agit de comparer la suite intermédiaire qui est donnée par la substitution de a , à la suite inférieure que l'on forme en substituant $a + da$, et à la suite supérieure qui répond à $a - da$. On ne considère d'abord que les parties de ces suites qui se rapportent aux fonctions évanouissantes et à la fonction qui les précède. On aura $f^{(n)}(a + da) = f^{(n)}(a) + da f^{(n+1)}(a)$, ou seulement $f^{(n)}(a + da) = da f^{(n+1)}(a)$, parce $f^{(n)}(a)$ est nulle par hypothèse ;

$$f^{(n-1)}(a + da) = f^{(n-1)}(a) + da f^{(n)}(a) + \frac{da^2}{2} f^{(n+1)}(a) = \frac{da^2}{2} f^{(n+1)}(a),$$

puisque $f^{(n)}(a)$ et $f^{(n-1)}(a)$ deviennent nulles. En général on aura cette suite d'expressions,

$$f^{(n)}(a + da) = da f^{(n+1)}(a)$$

$$f^{(n-1)}(a + da) = \frac{da^2}{2} f^{(n+1)}(a)$$

$$f^{(n-2)}(a + da) = \frac{da^3}{2 \cdot 3} f^{(n+1)}(a)$$

$$f^{(n-3)}(a + da) = \frac{da^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(n+1)}(a)$$

etc.,

et par conséquent

$$f^{(n)}(a - da) = -da f^{(n+1)}(a)$$

$$f^{(n-1)}(a - da) = \frac{da^2}{2} f^{(n+1)}(a)$$

$$f^{(n-2)}(a - da) = -\frac{da^3}{2 \cdot 3} f^{(n+1)}(a)$$

$$f^{(n-3)}(a - da) = \frac{da^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(n+1)}(a)$$

etc.

Il suit de là qu'en désignant par

$$f^{(n+1)}(a), 0, 0, 0, 0, 0, \text{ etc.}$$

la partie de la suite intermédiaire que donnent les fonctions

$$f^{(n+1)}(x), f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}(x), f^{(n-3)}(x), f^{(n-4)}(x), \text{ etc.}$$

lorsqu'on suppose $x = a$, on trouvera dans la règle que nous allons énoncer les signes de la partie correspondante de la suite inférieure que donne la substitution de $a + da$, et les signes de la partie correspondante de la suite supérieure donnée par la substitution de $a - da$.

Il faut pour la suite inférieure écrire au-dessous de chaque zéro de la suite intermédiaire le signe même de $f^{(n+1)}(a)$; et pour former la suite supérieure, il faut au-dessus du premier zéro à gauche écrire le signe de $f^{(n+1)}(a)$, au-dessus du zéro suivant écrire le signe contraire à celui de $f^{(n+1)}(a)$, et continuer ainsi à écrire alternativement le signe de $f^{(n+1)}(a)$, ou le signe contraire, au-dessus des signes zéro de la suite intermédiaire.

Cela posé, si l'on procède à la formation des suites en allant de gauche à droite, il est évident que l'application de la règle précédente introduit dans la suite supérieure des changements de signes qui deviennent autant de permanences dans la suite inférieure. i étant le nombre des fonctions évanouissantes, on trouve que la suite supérieure contient un pareil nombre i de changements de signes remplacés dans la suite inférieure par autant de permanences. Il faut remarquer aussi que dans ces deux suites les signes correspondants sont alternativement différents ou semblables. Ils sont différents pour les fonctions dont le rang est indiqué par $f^{(n)}$, $f^{(n-2)}$, $f^{(n-4)}$, $f^{(n-6)}$, etc.; et ils sont les mêmes pour les fonctions dont le rang est indiqué par $f^{(n-1)}$, $f^{(n-3)}$, $f^{(n-5)}$, etc. Enfin les fonctions qui deviennent nulles, et dont le nombre est i , sont suivies d'une fonction non évanouissante $f^{(n-i)}(x)$: la substitution de a dans cette fonction donne le même signe pour les trois suites, et ce signe peut être $+$ ou $-$.

Il est facile de connaître maintenant combien la suite supérieure a perdu de changements de signe, remplacés par autant de permanences dans la suite inférieure. En effet si i est un nombre pair, le signe de la dernière fonction évanouissante $f^{(n-i+1)}(a)$ est le même dans les suites inférieure et supérieure : il donne par conséquent dans l'une et l'autre la même combinaison de signes avec la fonction extrême non évanouissante, qui est $f^{(n-i)}(a)$. Donc la suite inférieure a perdu dans ce cas un nombre i de changements de signe remplacés par des permanences.

Mais si le nombre i est impair, ce cas se subdivise en deux autres; parce que le signe de la dernière fonction évanouissante $f^{(n-i+1)}(a)$ n'étant pas le même pour les suites supérieure et inférieure, il en résulte que ces signes différents forment deux combinaisons contraires avec le signe de $f^{(n-i)}(a)$ commun aux deux suites. Si celle de ces combinaisons qui se trouve dans la suite supérieure est un changement de signes, elle répond à une permanence dans la suite inférieure : donc le nombre de changements de signes que la suite supérieure a perdus n'est pas i : il est $i + 1$. Mais si la combinaison

de signes qui termine la suite supérieure est une permanence, elle devient un changement de signe dans la seconde suite; dans ce cas le nombre des changements de signe perdu par la suite supérieure n'est pas i , mais $i - 1$.

On conclut de ces remarques que le nombre des fonctions évanouissantes étant i , le nombre des changements de signe perdus par la suite supérieure est égal à i lorsque i est pair; et que si le nombre i est impair, la suite supérieure perd dans un premier cas un nombre $i + 1$ de changements de signe, et dans un deuxième cas un nombre $i - 1$. Donc en désignant par h le nombre total des changements de signe de la suite supérieure, et par k le nombre total de changements de signe de la suite inférieure, on voit 1° que le nombre k ne peut jamais être plus grand que h ; 2° que la différence $h - k$ est égale à i lorsque i est pair; 3° que si le nombre i des fonctions évanouissantes est impair, la différence $h - k$ est $i + 1$ ou $i - 1$. Cette différence est donc toujours un nombre pair.

Lorsque la valeur de i est seulement 1, la différence $h - k$ est 2 ou 0 : c'est le cas général que nous avons examiné d'abord, en supposant qu'une seule fonction intermédiaire s'évanouît : mais si plusieurs fonctions intermédiaires consécutives s'évanouissent en même temps, la différence $h - k$ est 2, ou 4, ou 6, etc.

(4) Nous avons aussi à considérer le cas où les fonctions évanouissantes consécutives sont placées à l'extrémité de la suite des fonctions vers la droite, en sorte qu'elles comprennent le premier membre X de l'équation proposée. Or il suit de notre démonstration précédente que, désignant par j le nombre de ces fonctions extrêmes qui s'évanouissent, la suite supérieure perd un nombre de changements de signe précisément égal à j . On sait que dans ce cas, qui est celui des racines égales, la fonction X contient le facteur $(x - a)^j$. Donc la suite des signes a perdu un nombre j de ses changements de signes lorsque le nombre substitué est devenu égal à la valeur a de la racine multiple. Cette diminution du nombre de changements de signe de la suite a lieu toutes les fois que le nombre substitué a , en passant par degrés de la valeur $-\frac{1}{2}$ à la

valeur $\frac{1}{\epsilon}$, atteint et dépasse infiniment peu chacune des racines réelles; et la suite perd pour cette cause autant de changements de signe que l'équation proposée a de racines réelles égales ou inégales.

(5) On peut enfin supposer que la substitution du même nombre a fait évanouir plusieurs fonctions consécutives dans diverses parties de la suite, savoir un nombre i dans une première partie, un nombre i' dans une seconde partie, ainsi du reste; et un nombre j de fonctions extrêmes qui comprennent la fonction proposée X .

Désignant par H le nombre total de changements de signe que la suite contenait lorsque le nombre substitué avait une valeur moindre que a dont elle diffère d'une quantité infiniment petite, et par K le nombre de changements de signe que la suite conserve lorsque la valeur de x est devenue plus grande que a dont elle diffère d'une quantité infiniment petite, on voit que pour trouver la différence $H - K$, il suffit d'appliquer à chacune des parties de la suite où se trouvent les fonctions évanouissantes les conséquences que nous venons de démontrer. Si le nombre i est pair, il faut compter pour cette partie de la suite un nombre i de changements de signes remplacés par des permanences. Mais si le nombre i est impair, il peut arriver que la suite perde un nombre $i + 1$ ou $i - 1$ de changements de signes. Il en est de même des nombres $i', i'',$ etc. Quant aux fonctions extrêmes qui s'évanouissent, et dont le nombre est j , elles indiquent dans tous les cas que la suite a perdu un nombre de changements de signe précisément égal à j .

On voit que la démonstration précédente se réduit toujours à comparer les expressions analytiques des résultats que l'on trouve en substituant $a - da, a, a + da$ dans la suite des fonctions : cette comparaison rend manifestes toutes les conséquences que nous avons exposés concernant la diminution progressive du nombre des changements de signes de la suite.

(6) Ces démonstrations nous font connaître comment la suite des résultats des substitutions perd successivement les m changements de signe qu'elle avait lorsque la valeur substituée était $-\frac{1}{\epsilon}$.

1° Le nombre des changements de signe de la suite diminue continuellement; cette suite ne peut point en acquérir de nouveaux, ni reprendre aucuns de ceux qui ont disparu.

2° Lorsque la substitution fait évanouir la dernière fonction $f(x)$, la suite perd pour cette cause autant de changements de signes que l'équation $f(x)=0$ a de racines réelles égales au nombre substitué.

3° Si cette valeur substituée rend nulles une ou plusieurs des fonctions intermédiaires, et ne rend point nulle la dernière fonction $f(x)$, il peut arriver que la suite ne perde aucun changement de signe, ou qu'elle en perde un nombre pair. Il est impossible que dans ce cas il disparaisse un nombre impair de changements.

Cela posé, si l'équation a toutes ses racines réelles en nombre m , la suite perdra un nombre de changements de signes précisément égal à m , et par conséquent elle ne peut dans ce cas perdre aucun de ses changements de signes par la substitution d'une valeur qui ferait évanouir une ou plusieurs des fonctions intermédiaires sans rendre nulle la dernière fonction $f(x)$.

Si l'équation a un nombre $m-2$ de racines réelles et deux racines imaginaires, il arrivera une fois seulement que la suite perdra deux changements de signe, par la substitution d'une valeur qui rend nulle une fonction intermédiaire sans faire évanouir la fonction extrême $f(x)$; et les $m-2$ autres changements de signe disparaîtront successivement à mesure que le nombre substitué deviendra égal à chacune des $m-2$ racines réelles.

Dans tous les cas chacune des racines réelles, égales ou inégales, correspond nécessairement à un changement de signe perdu. Par conséquent le nombre de changements de signe qui disparaissent sans que la dernière fonction $f(x)$ devienne nulle, est toujours égal au nombre des racines imaginaires de la proposée.

(7) On parvient ainsi à démontrer la proposition que nous allons énoncer, et que nous regardons comme un des éléments fondamentaux de l'analyse algébrique.

Étant proposée l'équation numérique $f(x)=0$ dont le degré est

m , on considère les fonctions $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(m)}(x)$, dont chacune se déduit de la précédente en différentiant par rapport à x et divisant par dx . Après avoir écrit cette suite de fonctions suivant cet ordre $f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x), f^{(m-2)}(x), \dots, f''(x), f'(x), f(x)$, on substitue au lieu de x une valeur déterminée a , et l'on marque combien la suite des signes des résultats $f^{(m)}(a), f^{(m-1)}(a), \dots, f''(a), f'(a), f(a)$ présente de combinaisons de deux signes différents consécutifs, tels que $+ -$, ou $- +$. Le nombre h de ces *changements de signes* comptés dans la suite qui provient de la substitution de a varie lorsqu'on substitue dans les mêmes fonctions des nombres différents de a : la comparaison des résultats offre les propriétés suivantes. 1° Si l'on conçoit que la quantité substituée a augmente par degrés insensibles depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$, le nombre h des changements de signes comptés dans la suite diminue à mesure que la quantité substituée augmente. La suite des signes, qui contient un nombre m de changements lorsqu'on substitue $-\frac{\pi}{2}$, perd successivement tous ses changements de signe à mesure que l'on substitue des valeurs plus grandes. Le nombre h de changements de signe qui répond à la substitution de a ne peut jamais surpasser le nombre k de changements qui répond à la substitution d'une valeur b plus grande que a .

2° La suite perd un de ses changements de signes toutes les fois que la valeur substituée a devient égale à une des racines réelles de la proposée. Il disparaît ainsi autant de changements de signes que l'équation a de racines réelles égales ou inégales.

3° Autant l'équation $fx = 0$ a de couples de racines imaginaires, autant il arrive de fois que la suite perd deux de ses changements de signe qui disparaissent ensemble.

(8) Cette proposition indique immédiatement combien une équation proposée $f(x) = 0$ peut avoir de racines réelles comprises entre deux limites données a et b . En effet substituant la moindre limite a dans la suite des fonctions, on comptera le nombre h de changements de signe de cette suite; substituant aussi la limite b , on comptera le nombre k des changements de signe de la suite que donne

cette seconde substitution; et la différence $h - k$ fera connaître combien on doit chercher de racines entre les deux limites proposées. Nous avons démontré que cette différence $h - k$ ne peut pas être négative; elle peut être nulle, ou égale à 1, 2, 3, 4, etc.

Si elle est nulle, il est impossible que l'équation $X = 0$ ait aucune racine réelle entre les limites a et b . En effet s'il existait dans cet intervalle une racine réelle telle que α , qui rendit nulle la fonction X , il serait nécessaire que la quantité substituée au lieu de x passant par degrés infiniment petits de la valeur a à la valeur b fût disparaître au moins un changement de signes; et comme ceux de ces changements qui ont disparu ne peuvent point être rétablis, la suite donnée par la substitution de b aurait moins de changements de signes que celle qui provient de la substitution de a , ce qui est contre l'hypothèse.

Si la différence $h - k$ est 1, l'équation a une racine réelle entre a et b : car un seul changement de signe ne peut disparaître que par la substitution d'une valeur qui rend nulle la fonction X . Et il ne peut y avoir plus d'une racine réelle entre les mêmes limites a et b : car dans ce cas la suite aurait perdu plus d'un changement de signe.

Si la différence $h - k$ est 2, l'équation $X = 0$ peut avoir deux racines réelles entre les limites a et b : mais il peut arriver aussi qu'il n'y ait aucune racine réelle dans cet intervalle. Cela aurait lieu s'il existait un certain nombre μ , plus grand que a et moindre que b , qui, étant substitué dans la suite des fonctions, fût disparaître à la fois deux changements de signe sans rendre nulle la fonction X . Il est d'ailleurs certain que dans ce cas l'équation ne peut avoir plus de deux racines réelles dans l'intervalle des limites a et b : car, si cela était, la suite aurait perdu plus de deux changements de signe, ce qui est contre l'hypothèse.

Dans tous les cas, l'équation $X = 0$ ne peut pas avoir plus de racines réelles entre les limites a et b qu'il n'y a d'unités dans la différence $h - k$ des nombres de changements de signe comptés

dans les deux suites (a) et (b) . Nous désignons ainsi les suites des résultats de la substitution de a ou de b .

Si ce reste $h - k$ est un nombre impair, il y a au moins une racine réelle entre les limites a et b .

Si le reste $h - k$ est un nombre pair, l'équation $X = 0$ peut n'avoir aucune racine réelle entre a et b . En général si le nombre des racines réelles comprises entre a et b n'est pas égal au reste $h - k$, il ne peut en différer que d'un nombre pair Δ , et dans ce cas l'équation $X = 0$ a au moins autant de racines imaginaires qu'il y a d'unités dans la différence Δ .

(9) Le théorème connu sous le nom de règle de Descartes, et dont le sens général est depuis long-temps fixé, est un corollaire de la proposition précédente. Il suffit de choisir pour les deux limites a et b les quantités $-\frac{1}{\sigma}$ et 0 , ou 0 et $+\frac{1}{\sigma}$. En effet si l'on substitue la valeur 0 au lieu de x dans les fonctions $X^{(m)}$, $X^{(m-1)}$, ... X'' , X' , X , les signes de la suite des résultats sont évidemment les mêmes que les signes des coefficients $1, a_1, a_2, \dots, a_m$ de la proposée. Donc pour connaître au moyen de la proposition précédente combien il peut y avoir de racines entre $-\frac{1}{\sigma}$ et 0 , ou entre 0 et $+\frac{1}{\sigma}$, il faut marquer combien la suite des signes des coefficients, c'est-à-dire celle que donne la substitution de 0 dans la série des fonctions, contient de changements de signe, afin de la comparer à la suite que donne la substitution de $-\frac{1}{\sigma}$, et à celle que donne la substitution de $+\frac{1}{\sigma}$. Or la suite $(-\frac{1}{\sigma})$ contient un nombre m de changements de signes, et la suite $(+\frac{1}{\sigma})$ n'en contient aucun. Donc l'équation proposée ne peut pas avoir plus de racines réelles négatives qu'il n'y a de permanences de signes dans la suite des coefficients, et cette équation ne peut pas avoir plus de racines réelles positives que la suite des coefficients n'a de changements de signe.

(10) L'application de la proposition générale fait connaître clairement les intervalles dans lesquels les racines doivent être cherchées. Si deux limites a et b sont telles que les suites (a) et (b) aient le même nombre de changements de signe, il est impossible qu'il

se trouve aucune racine entre ces limites. Par conséquent toute méthode de résolution qui conduirait à substituer au lieu de x des nombres compris entre de telles limites serait par cela même très-imparfaite, puisqu'elle exigerait un grand nombre d'opérations superflues. Il est évident qu'on ne doit chercher de racines que dans quelques intervalles, savoir ceux où le théorème précédent indique qu'elles peuvent exister.

Avant de procéder à l'application de ce théorème, il est nécessaire de s'arrêter à une remarque importante concernant les substitutions qui rendent nulles une ou plusieurs des fonctions intermédiaires.

(11) Lorsqu'on a trouvé deux suites de résultats en substituant les limites proposées a et b dans les fonctions $f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x), \dots, f'''(x), f'(x), f(x)$, il arrive fréquemment qu'un ou plusieurs de ces résultats sont nuls. Il s'agit de connaître quels signes on doit attribuer aux quantités qui s'évanouissent, et comment il faut compter le nombre de changements de signe.

Nous considérons dans ce cas deux valeurs infiniment peu différentes du nombre a qui est substitué, et ces valeurs sont ainsi indiquées : $a - da, a + da$, ou $< a, > a$. Chacune de ces valeurs donnera maintenant le signe $+$ ou le signe $-$, et non un résultat nul.

Par exemple, si la suite qui provient de la substitution de a est

+ + 0 0 0 0 - 0 0 0 - + 0 + 0 0 0 0 0 - ,

on trouvera

+ + + + + + - - - - - + + + + + + + + -

pour la suite que donne la substitution de la quantité désignée par $> a$. Pour former cette seconde suite on procède de gauche à droite, et lorsqu'on trouve dans la première suite un signe qui n'est point 0, on écrit ce même signe *au-dessous* dans la seconde suite. Mais lorsqu'on arrive à un signe 0 de la première suite, on le remplace dans la seconde par un signe *semblable* à celui que l'on vient d'écrire à gauche dans cette seconde suite.

Pour former la suite qui répond à la quantité $< a$, on procède aussi de gauche à droite, et lorsqu'on trouve un signe qui n'est point 0 dans la suite donnée par la substitution de a , on répète ce même signe *au-dessus*. Mais lorsqu'on arrive à un signe 0 de la suite donnée, on le remplace dans la suite supérieure par un signe *contraire* à celui qu'on vient d'écrire à gauche dans cette suite supérieure. Nous avons démontré dans l'article 3 les deux règles que l'on vient de rappeler. Si, dans l'exemple cité, on rapproche les trois suites, on a la table suivante :

$$\begin{array}{l}
 (< a) \dots + - + - + - + - + - + - + - + - + - \\
 (a) \dots + 0 0 0 0 - 0 0 0 - + 0 + 0 0 0 0 - \\
 (> a) \dots + + + + + - - - - + + + + + + + + -
 \end{array}$$

Ayant ainsi remplacé la suite (a) par deux autres, on se servira de la suite $(> a)$ lorsqu'on aura à comparer la limite a à une limite plus grande b . Mais si l'on doit comparer la limite a à une limite b' moindre que a , on remplacera la suite (a) par la suite $(< a)$. On appliquera cette *règle du double signe* toutes les fois que la substitution d'une limite quelconque donnera un ou plusieurs résultats nuls, en sorte que dans aucun cas les suites comparées ne contiendront de signes zéro.

Il arrive le plus souvent que les deux suites $(< a)$ et $(> a)$ ne contiennent pas le même nombre de changements de signe. Le nombre h des changements de signe de la suite supérieure $(< a)$ ne peut pas être moindre que le nombre k des changements de signe de la suite inférieure, et si h surpasse k , ce qui arrive nécessairement lorsque deux ou plus de deux termes consécutifs s'évanouissent, la différence $h - k$ est un nombre pair Δ . Dans ce cas l'équation proposée $f(x) = 0$ a un pareil nombre de racines imaginaires, indépendamment des racines qui pourraient manquer en d'autres intervalles.

Dans l'exemple précédent la suite inférieure a quatorze changements de signes de moins que la suite supérieure : l'équation $f(x) = 0$ aurait donc, pour cette seule cause, quatorze racines ima-

ginaires. Ces racines manquent à l'équation dans l'intervalle infiniment petit compris entre $a - da$ et $a + da$.

(12) Les propositions qui ont été démontrées jusqu'ici donnent un moyen facile de distinguer les seuls intervalles dans lesquels les racines doivent être cherchées. Nous citerons divers exemples de l'application de ces théorèmes. Le premier exemple est celui de l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0.$$

On a pour la suite des fonctions

$$X \dots x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101$$

$$X' \dots 5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46$$

$$X'' \dots 20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$$

$$X''' \dots 60x^2 - 72x - 144$$

$$X^{iv} \dots 120x - 72$$

$$X^v \dots 120.$$

Si l'on substitue au lieu de x les nombres $\dots -10, -1, 0, 1, 10, \dots$, et si l'on écrit les signes des fonctions

$$X^v \quad X^{iv} \quad X'' \quad X'' \quad X' \quad X,$$

on trouve

$$(-10) \dots + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$$

$$(-1) \dots + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad +$$

$$(0) \dots + \quad - \quad - \quad + \quad - \quad -$$

$$(1) \dots + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad -$$

$$(10) \dots + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +.$$

En comparant la suite des signes qui provient de la substitution ou de -10 à celle qui provient de la substitution de $+10$, on voit que la première suite (-10) a cinq changements de signes et que la suite (10) n'a aucun changement de signes : donc l'équation ne peut avoir de racine que dans cet intervalle de -10 à $+10$. En comparant les deux suites (-10) et (-1), on conclut qu'une

des racines réelles existe dans cet intervalle ; car la seconde suite n'a que quatre changements de signe, et la première en a cinq. Les deux suites (— 1) et (0) étant comparées de la même manière, on voit qu'il existe une seconde racine réelle dans cet intervalle ; car le nombre des changements de signe de la première suite surpasse d'une unité le nombre des changements de signe de la seconde. L'intervalle suivant de 0 à 1 ne peut contenir aucune racine ; car la suite (0) a trois changements de signe, et la suite (1) en a un pareil nombre. Quant à l'intervalle compris entre 1 et 10, on trouve dans la première suite (1) trois changements de signe, et la seconde (10) n'en a aucun. Donc on doit chercher trois racines entre 1 et 10 : l'une de ces racines est réelle, et l'on ignore jusqu'ici si les deux autres sont réelles, ou si elles manquent dans l'intervalle.

Les seuls intervalles dans lesquels on doit chercher les racines sont donc celui de — 10 à — 1, celui de — 1 à 0, et celui de 1 à 10. Dans chacun des deux premiers il se trouve une racine réelle entièrement séparée des autres ; et dans le troisième, savoir entre 1 et 10, il existe aussi une racine réelle, mais il reste à découvrir si les deux autres racines indiquées dans cet intervalle sont réelles ou imaginaires : nous résoudrons bientôt cette question. Il serait entièrement inutile de chercher des racines de la proposée dans d'autres intervalles que ceux qui viennent d'être désignés.

(13) Soit l'équation proposée

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0.$$

La suite des fonctions est

$$X \dots x^4 - 4x^3 - 3x + 23$$

$$X' \dots 4x^3 - 12x^2 - 3$$

$$X'' \dots 12x^2 - 24x$$

$$X''' \dots 24x - 24$$

$$X^{iv} \dots 24.$$

Si l'on substitue les nombres 0, 1, 10, et si l'on marque les signes

des résultats dans les fonctions

$$X^{\text{iv}} \quad X^{\text{iii}} \quad X'' \quad X' \quad X,$$

on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} (< 0) \dots + - + - + \\ (0) \dots + - 0 - + \\ (> 0) \dots + - - - + \\ (< 1) \dots + - - - + \\ (1) \dots + 0 - - + \\ (> 1) \dots + + - - + \\ (10) \dots + + + + + \end{array} \right.$$

Dans cet exemple la substitution de 0 au lieu de x fait évanouir la fonction X'' : il faut donc employer la règle du double signe. Elle montre que dans la suite supérieure (< 0) on doit écrire le signe + au-dessus du signe 0, et que dans la suite inférieure on doit écrire le signe —. Si actuellement on compare les deux suites (< 0) et (> 0), on trouve quatre changements de signe dans la première, et seulement deux dans la seconde. Donc l'équation a deux racines imaginaires qui manquent dans l'intervalle infiniment petit de < 0 à > 0 .

La substitution du nombre 1 fait évanouir la fonction intermédiaire X''' , et en appliquant de nouveau la règle du double signe, on voit que le signe 0 de la suite intermédiaire (1) doit être remplacé par — dans la suite supérieure (< 1), et par + dans la suite inférieure (> 1). Si maintenant on compare les deux suites (< 1) et (> 1), on y trouve le même nombre de changements de signe : donc il ne manque point de racine dans l'intervalle de < 1 à > 1 . Cette substitution du nombre 1, qui rend nulle une des fonctions intermédiaires, conserve le nombre de changements de signes. Il n'en est pas de même de la substitution de 0, qui, faisant disparaître deux changements de signe, montre que l'équation manque de deux racines, dans l'intervalle de < 0 à > 0 .

Pour comparer la suite des signes que donne la substitution de 0 à celle que donne la substitution de 1, il faut employer les suites

(> 0) et (< 1): mais pour comparer la suite que donne la substitution de 1 à celle que donne la substitution de 10, il faut employer les suites (> 1) et (10). La comparaison des suites (> 0) et (< 1) montre qu'il ne peut y avoir aucune racine entre 0 et 1; car les deux suites ont le même nombre de changements de signe. La comparaison des suites (> 1) et (10) montre que l'on doit chercher deux racines dans l'intervalle de 1 à 10; car la seconde suite n'a aucun changement de signe et la première en a deux. L'équation proposée a donc deux racines imaginaires, et les deux autres racines ne peuvent exister que dans l'intervalle de 1 à 10. Il restera à découvrir si elles sont réelles ou si elles manquent dans cet intervalle, ce que nous examinerons ultérieurement.

(14) L'équation

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

donne les résultats suivants :

$$X = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

$$X' = 3x^2 + 4x - 3$$

$$X'' = 6x + 4$$

$$X''' = 6,$$

et

| | X''' | X'' | X' | X |
|-----------|------|-----|----|---|
| (-10).... | + | - | + | - |
| (-1).... | + | - | - | + |
| (0).... | + | + | - | + |
| (1).... | + | + | + | + |

La comparaison des suites (-10) et (-1) montre que l'équation a une racine réelle entre -10 et -1, et qu'il ne peut y en avoir plus d'une dans cet intervalle. Car la première suite a trois changements de signes et la seconde en a deux seulement.

On voit aussi en comparant les suites (-1) et (0) que l'on ne doit chercher aucune racine entre -1 et 0; car les deux suites ont le même nombre de changements de signe, savoir deux.

Quant à l'intervalle suivant de 0 à 1, on doit y chercher deux racines, parce que la suite que donne la substitution de 0 au lieu de x a deux changements de signes, et que la suite qui répond à 1 n'a plus aucun changement. Il reste à connaître si ces deux racines indiquées entre 0 et 1 sont réelles, ou si elles manquent dans l'intervalle.

(15) Si l'équation proposée est

$$x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0,$$

on aura cette suite de fonctions,

$$X = x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36$$

$$X' = 5x^4 + 4x^3 + 2x - 25$$

$$X'' = 20x^3 + 12x^2 + 2$$

$$X''' = 60x^2 + 24x$$

$$X^{iv} = 120x + 24$$

$$X^v = 120;$$

et substituant les nombres

$$-1, -10, \text{ etc.}$$

$$0$$

$$1, 10, \text{ etc.}$$

on trouve

| | X^v | X^{iv} | X''' | X'' | X' | X |
|---------------|---------------|----------|--------|-------|------|-----|
| $(-10) \dots$ | + | - | + | - | + | - |
| $(-1) \dots$ | + | - | + | - | - | - |
| { | $(< 0) \dots$ | + | + | - | + | - |
| | $(0) \dots$ | + | + | 0 | + | - |
| $(> 0) \dots$ | + | + | + | + | - | - |
| $(1) \dots$ | + | + | + | + | - | - |
| $(10) \dots$ | + | + | + | + | + | + |

On conclut de la comparaison de ces résultats

1° Que toutes les racines doivent être cherchées dans l'intervalle

de -10 à $+10$, puisque l'une des suites a cinq changements de signe, et que l'autre n'en a aucun;

2° que deux de ces racines doivent être cherchées entre -10 et -1 , parce que la première suite a cinq changements de signe et que la seconde en a trois seulement, mais qu'il reste à découvrir si ces deux racines existent en effet, ou si elles sont imaginaires;

3° que la suite (< 0) ayant deux changements de plus que la suite (> 0), l'équation a deux racines imaginaires qui manquent en cet intervalle infiniment petit;

4° qu'il ne peut y avoir aucune racine entre -1 et 0 , parce que les suites ($--1$) et (< 0) ont l'une et l'autre trois changements de signes;

5° qu'il ne peut y avoir aucune racine entre 0 et 1 , parce que les suites (> 0) et (1) ont l'une et l'autre un changement de signe;

6° que l'équation a une racine réelle entre 1 et 10 , parce que la seconde suite a un changement de moins que la première: cette racine est entièrement séparée.

(16) Lorsqu'on applique la proposition énoncée à la fin de l'article 11 aux équations binomes de la forme

$$x^m + a_m = 0,$$

ou à celles qui manquent de plusieurs termes consécutifs, comme

$$x^m + a_i x^{m-i} + a_m = 0,$$

on connaît immédiatement, par l'emploi de la règle du double signe, le nombre des racines imaginaires qui proviennent de l'omission des termes. Si les équations sont binomes, la substitution de 0 au lieu de x dans la suite des fonctions

$$X^{(m)} X^{(m-1)} X^{(m-2)} X^{(m-3)} \dots X' X$$

donne les résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (< 0) \dots + - + - \dots + a_m \\ (0) \dots + 0 0 0 \dots 0 + a_m \\ (> 0) \dots + + + + \dots + a_m \end{array} \right.$$

Lorsque le nombre m est pair, et le coefficient a_m positif, la suite (< 0) n'a que des changements de signes, et la suite (> 0) n'en a aucun : ainsi toutes les racines sont imaginaires. Leur nombre est m . Mais si le degré m étant pair, le coefficient a_m est négatif, l'équation manque d'un nombre $m - 2$ de racines dans l'intervalle infiniment petit de < 0 à > 0 . Elle a une racine réelle entre $-\frac{1}{m}$ et 0 , et une autre racine réelle entre 0 et $\frac{1}{m}$.

Si le degré m est impair, on conclut à l'inspection des suites que l'équation a un nombre $m - 1$ de racines imaginaires, et une seule racine réelle dont le signe est contraire à celui de a_m .

Quant aux équations telles que

$$x^m + a_i x^{m-i} + a_m = 0$$

qui manquent de plusieurs termes consécutifs, on reconnaît par la même règle qu'elles ont nécessairement, à raison de cette omission, des racines imaginaires, et l'on en détermine le nombre comme il suit. Lorsque, entre deux termes subsistants, il manque dans l'équation un nombre $1 + n$ de termes consécutifs, le nombre des racines imaginaires qui proviennent de cette seule cause est n ou $n + 2$; savoir n lorsque les deux termes subsistants entre lesquels manquent les termes consécutifs ont le même signe, et $n + 2$ lorsque ces deux termes sont de signes différents.

Par exemple on voit immédiatement que l'équation

$$x^5 + x + 1 = 0$$

a quatre racines imaginaires, parce qu'il manque trois termes consécutifs entre les termes x^5 et x qui ont le même signe.

Les conséquences que nous venons d'énoncer sont trop faciles à déduire de la proposition citée dans l'article 11 pour qu'il soit nécessaire de les développer; et d'ailleurs elles sont pour la plupart connues, et on les démontre aisément par d'autres principes.

(17) En appliquant la même analyse à l'équation

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0,$$

on trouve

$$X = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

$$X' = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5$$

$$X'' = 42x^5 - 40x^3 - 18x + 8$$

$$X''' = 210x^4 - 120x^2 - 18$$

$$X^{iv} = 840x^3 - 240x$$

$$X^v = 2520x^2 - 240$$

$$X^{vi} = 5040x$$

$$X^{vii} = 5040,$$

et l'on forme cette table

| | X^{vii} | X^{vi} | X^v | X^{iv} | X''' | X'' | X' | X |
|-----------|-----------|----------|-------|----------|--------|-------|------|-----|
| (-10) ... | + | - | + | - | + | - | + | - |
| (-1) ... | + | - | + | - | + | + | - | + |
| } | (< 0) ... | + | - | - | + | - | + | - |
| | (0) ... | + | 0 | - | 0 | - | + | - |
| | (> 0) ... | + | + | - | - | - | + | - |
| (1) ... | + | + | + | + | + | - | - | |
| (10) ... | + | + | + | + | + | + | + | |

1° En comparant les deux suites (-10) et (-1), on voit que la seconde a seulement un changement de signe de moins que la première. Donc l'équation a une seule racine réelle entre les limites -10 et -1.

2° La substitution de 0 au lieu de x donne plusieurs résultats nuls. On formera donc les deux suites (< 0) et (> 0); et l'on voit

en comparant ces suites que l'une a six changements de signe et l'autre quatre. Donc l'équation a deux racines imaginaires qui manquent en cet intervalle.

3° Les suites (-1) et (< 0) étant comparées, on connaît que l'équation ne peut avoir aucune racine réelle entre -1 et 0 .

4° Les suites (> 0) et (1) étant comparées, on connaît qu'il ne peut pas y avoir plus de deux racines réelles entre 0 et 1 . Il restera à distinguer si ces racines existent en effet, ou si elles manquent dans cet intervalle.

5° On conclut à l'inspection des deux suites (1) et (10) que l'on doit chercher deux racines entre les limites 1 et 10 .

Ainsi les seuls intervalles dans lesquels on ait à chercher les racines de la proposée sont celui de -10 à -1 , où il existe certainement une seule racine réelle; celui de 0 à 1 , où l'on ne peut trouver plus de deux racines réelles; et celui de 1 à 10 où l'on doit aussi chercher deux racines. On est assuré d'ailleurs que l'équation a deux racines imaginaires; elles manquent dans l'intervalle infiniment petit de < 0 à > 0 .

(18) Nous citerons encore deux exemples du procédé qu'il faut suivre pour distinguer facilement les intervalles où les racines doivent être cherchées.

Le premier est celui de l'équation

$$x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0.$$

On a

$$X \dots x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2$$

$$X' \dots 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 6x - 2$$

$$X'' \dots 20x^3 + 36x^2 + 12x - 6$$

$$X''' \dots 60x^2 + 72x + 12$$

$$X^{IV} \dots 120x + 72$$

$$X^V \dots 120;$$

et substituant les nombres -1 , 0 , 1 , 10 , on trouve

| | X^5 | X^4 | X^3 | X^2 | X^1 | X^0 |
|---|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| { | (< -1) | ... | + | - | + | - |
| | (-1) | ... | + | - | 0 | - |
| | (> -1) | ... | + | - | - | - |
| | (0) | ... | + | + | + | - |
| | (1) | ... | + | + | + | - |
| | (10) | ... | + | + | + | + |

On voit à l'inspection de ces suites

1° que la proposée ne peut avoir aucune racine au-dessous de -1 , puisque la suite (< -1) a cinq changements de signe;

2° qu'il manque deux racines dans l'intervalle dont les limites sont < -1 et > -1 , puisque la limite < -1 répond à cinq changements de signe, et qu'il y a seulement trois changements de signe dans la suite (> -1) ;

3° que l'on doit chercher deux racines entre -1 et 0 , car la suite (> -1) a trois changements de signe, et la suite 0 en a seulement un;

4° qu'il ne peut y avoir aucune racine entre 0 et 1 , car les deux suites (0) et (1) ont le même nombre de changements de signes, savoir un;

5° que l'équation a une seule racine réelle entre 1 et 10 , car la suite (10) a un seul changement de moins que la suite (1) .

(19) Le second exemple est celui de l'équation

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0.$$

On a

$$X = x^5 - 10x^3 + 6x + 1$$

$$X' = 5x^4 - 30x^2 + 6$$

$$X'' = 20x^3 - 60x$$

$$X''' = 60x^2 - 60$$

$$X^{iv} = 120x$$

$$X^v = 120,$$

et l'on forme la table suivante :

| | X^v | X^{iv} | X''' | X'' | X' | X | |
|---------------|---------------|----------|--------|-------|------|-----|---|
| $(-10) \dots$ | + | - | + | - | + | - | |
| { | $(<-1) \dots$ | + | - | + | + | - | + |
| | $(-1) \dots$ | + | - | o | + | - | + |
| | $(>-1) \dots$ | + | - | - | + | - | + |
| { | $(<0) \dots$ | + | - | - | + | + | + |
| | $(0) \dots$ | + | o | - | o | + | + |
| | $(>0) \dots$ | + | + | - | - | + | + |
| { | $(<1) \dots$ | + | + | - | - | - | - |
| | $(1) \dots$ | + | + | o | - | - | - |
| | $(>1) \dots$ | + | + | + | - | - | - |
| $(10) \dots$ | + | + | + | + | + | + | |

On conclut

des suites (-10) et (<-1) , qu'il y a une seule racine réelle entre -10 et 1 ;

des suites (>-1) et (<0) , que l'on doit chercher deux racines entre -1 et 0 ;

des suites (>0) et (<1) , que l'équation a une racine réelle et seule entre 0 et 1 ;

des suites (>1) et (10) , que l'on doit chercher deux racines entre 1 et 10 .

(20) Il serait inutile de multiplier ces applications : nous les avons choisies telles qu'elles offrissent un assez grand nombre de cas différents.

Il est évident que ce procédé fait connaître sans aucune incertitude les lieux des racines, c'est-à-dire les limites entre lesquelles on doit les chercher : mais il ne détermine pas toujours la nature de ces racines. On voit au contraire que si l'application du théorème indique un nombre pair de racines dans un intervalle donné, il peut arriver que toutes ces racines soient imaginaires. Nous avons donc une seconde question à résoudre, celle qui a pour objet

de découvrir la nature des racines indiquées. Nous donnerons par la suite une solution complète de cette seconde question : elle est fort différente de la première que nous avons traitée jusqu'ici, et qui avait pour objet de désigner les seuls intervalles où l'on doit chercher les racines.

Il faut se représenter que l'on a divisé en une multitude d'intervalles la différence de deux valeurs attribuées à x , et dont l'une est au-dessous de 0 à une très-grande distance, et l'autre au-dessus de 0 à une très-grande distance. Chacun de ces intervalles partiels a deux limites a et b . Or ces intervalles sont de deux sortes.

1° Ceux dans lesquels on ne doit chercher aucune des racines de l'équation. On reconnaît ces intervalles au caractère suivant : qu'en substituant leurs limites a et b dans la suite des fonctions $f^{(m)}x$, $f^{(m-1)}x$, ..., $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$, ce qui donne deux séries de résultats, la seconde suite a autant de changements de signe que la première.

2° Les intervalles dans lesquels on doit procéder à la recherche des racines. On reconnaît ces intervalles au caractère suivant : qu'en substituant les limites a et b dans la série des fonctions, la suite donnée par la substitution de la plus grande limite b a moins de changements de signe que la suite donnée par la substitution de a .

Les premiers intervalles sont exclus, et leur étendue totale est incomparablement plus grande que celle des autres. A l'égard des seconds intervalles, ils sont eux-mêmes de deux espèces différentes : savoir ceux où les racines existent en effet, et ceux où les racines manquent. Il nous reste à expliquer clairement cette distinction, et à donner des règles certaines et d'une application facile pour distinguer ces deux espèces d'intervalles.

(21) La question se présente, par exemple, dans l'analyse de l'équation $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$, citée art. 12. Le théorème général indique que l'on doit chercher trois racines entre les limites 1 et 10. On pourrait diviser cet intervalle en deux parties, en substituant dans la série des fonctions un nombre c plus grand que 1 et moindre que 10; et l'on appliquerait les règles précédentes aux

intervalles partiels 1 et c , et c et 10. Or en continuant ainsi de substituer des nombres intermédiaires, et de diviser les intervalles, on parviendrait à séparer les trois racines, si elles sont toutes réelles, et l'on connaîtrait pour chacune d'elles un intervalle où elle est seule comprise, ce qui est le but de la recherche. Mais si deux des racines cherchées sont imaginaires, la subdivision de l'intervalle n'aura aucun terme, et l'on ignorera toujours si la séparation des racines est impossible, parce qu'elles sont imaginaires, ou si elle est seulement retardée, parce que leur différence est extrêmement petite.

On ne peut point résoudre cette difficulté en se bornant à substituer des valeurs intermédiaires, et à comparer les signes des résultats : la question exige une règle spéciale. C'est pour cette raison que la méthode proposée par Rolle, sous le nom de *Méthode des cascades*, ne peut servir à la détermination des limites des racines : car elle manque d'un caractère pour la distinction des racines imaginaires.

La règle d'approximation que l'on doit à Newton ne résoud point cette question ; elle la suppose résolue. Cette méthode newtonienne est un des éléments les plus précieux de l'analyse parce qu'elle s'étend à toutes les branches du calcul ; mais elle n'a point pour objet de distinguer les racines imaginaires. C'est pour y parvenir que Lagrange et Waring ont proposé de rechercher la plus petite différence des racines de l'équation, ou une quantité moindre que cette plus petite différence. Considérée sous le rapport théorique, la solution est exacte. En effet si l'on était parvenu à connaître que la différence des racines réelles qui diffèrent le moins est plus petite qu'une certaine quantité Δ , il suffirait de substituer pour la variable x des nombres consécutifs dont la différence serait Δ , ou moindre que Δ . On serait assuré de distinguer ainsi toutes les racines ; et si l'on n'en trouvait pas autant qu'il y a d'unités dans le degré m de la proposée, celles que l'on ne séparerait point par ces substitutions seraient en nombre pair, égal au nombre des racines imaginaires de la proposée. Mais il est facile

de juger qu'on ne peut point admettre une telle méthode de résolution. En effet 1° le calcul qui ferait connaître cette valeur de la limite Δ est impraticable pour les équations d'un degré un peu élevé; 2° on effectuerait des substitutions dans des intervalles où le théorème général, art. 7, prouve qu'il ne peut y avoir aucune racine. Il faudrait donc appliquer d'abord ce théorème, et ne faire des substitutions que dans les intervalles où les racines doivent être cherchées. Cette opération diminuerait la longueur du calcul, mais elle ne dispenserait pas de trouver la valeur de Δ , ce qui est la difficulté principale. Il était donc nécessaire de traiter par d'autres principes cette question très-importante qui a pour objet de reconnaître avec certitude la nature des racines. Je suis parvenu depuis long-temps à la résoudre par des procédés dont l'application est prompte et facile. La solution que nous allons exposer dans les articles suivants a été donnée autrefois dans les cours de l'École Polytechnique de France; elle est la plus claire et la plus simple de toutes celles que j'ai pu découvrir pour cet objet. Il s'agit ici d'un élément essentiel, et que l'on a pu regarder comme le point le plus difficile de toute la théorie: nous avons dû nous attacher à l'éclaircir entièrement. Il ne suffisait pas de donner le principe analytique dont nous avons déduit autrefois la solution: il est préférable de rendre les conséquences très-sensibles par l'emploi des constructions. Rien n'est plus propre à montrer distinctement la nature de la question. Nous rapporterons ensuite plusieurs exemples de la règle générale qui sert à la résoudre.

(22) On suppose qu'après avoir substitué deux nombres a et b , dont b est le plus grand, dans la suite des fonctions

$$f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x) \dots f'''(x), f''(x), f'(x), f(x),$$

il arrive que la suite (a) des signes des résultats, c'est-à-dire celle qui provient de la substitution de a , diffère de la suite (b) en ce que la seconde contient deux changements de signes de moins que la première. Par exemple la suite (a) est terminée par les trois

signes

$$+ \quad - \quad + ,$$

et la suite (b) par ceux-ci

$$+ \quad + \quad + .$$

Nous supposons aussi que dans toutes les parties de ces deux suites qui sont placées à la gauche des trois signes que l'on vient d'écrire, chaque signe de la suite (a) est le même que le signe correspondant de la suite (b). On voit que le nombre substitué passant de la valeur a à la valeur b , la suite des signes perd deux changements. Il suit donc du théorème précédent, article 7, que l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas avoir plus de deux racines entre a et b ; mais on ignore si les deux racines indiquées sont réelles, ou si elles manquent dans cet intervalle : c'est la question qu'il faut résoudre. Or si dans chacune des deux suites (a) et (b) on omettait le dernier signe, la première contiendrait seulement un changement de signes de plus que la seconde. Donc l'équation $f'(x) = 0$ ne peut avoir qu'une racine entre a et b , et l'on est assuré que cette racine est réelle.

De plus, en omettant les deux derniers signes de chacune des suites (a) et (b), on trouve, par hypothèse, que la première suite n'a pas plus de changements de signe que la seconde. Donc l'équation $f''(x) = 0$ n'a aucune racine entre a et b ; c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir dans cet intervalle aucun nombre qui, mis au lieu de x , rende nulle la fluxion du second ordre $f''(x)$.

(23) Il est facile de représenter par les propriétés des figures les relations qu'ont entre elles les fonctions $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$. L'ordonnée y de la courbe mpn (fig. 4 et 5) exprime la valeur que reçoit la fonction $f(x)$ lorsqu'on donne à la variable x une valeur quelconque mesurée par l'abscisse ox . Les limites a et b sont les abscisses oa , ob . L'arc mpn qui répond à cet intervalle ab n'a aucun point d'inflexion, car la valeur de l'abscisse correspondante à chaque point d'inflexion est celle qui rend nulle la fluxion du second ordre

$f''(x)$, ou $\frac{d^2y}{dx^2}$. Ainsi l'arc mpn est exempt de sinuosités, et comme la valeur de $f''(x)$ est positive aux deux extrémités de l'arc, on voit que cet arc a la forme que la figure indique. Il est concave dans toute son étendue : sa concavité regarde le haut de la planche. En un certain point p de cet arc la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Ce point répond à la valeur de x qui rend nulle la fluxion du premier ordre $f'(x)$; et l'équation $f'(x)=0$ ayant une seule racine entre les limites a et b , il n'existe qu'un seul point p où l'inclinaison soit nulle. Si l'on ajoute à ces conditions que les ordonnées extrêmes $f(a)$ et $f(b)$ sont positives, on voit que la partie de la ligne courbe que l'on considère est celle que représente la figure 4 ou la figure 5. Dans la première il existe deux points d'intersection α et β , et les abscisses $o\alpha$, $o\beta$ expriment les valeurs des deux racines réelles. Dans la seconde figure, l'arc n'atteint pas l'axe des abscisses; il n'y a aucun point d'intersection, en sorte que les deux racines que l'on cherche sont imaginaires. La question consiste à distinguer celle des deux constructions qui représente la fonction proposée dans l'intervalle des limites a et b . Cette question serait facilement résolue, si l'on connaissait la valeur exacte γ de l'abscisse $o\gamma$ qui répond au point p où la tangente est parallèle à l'axe; car il suffirait de substituer cette valeur γ dans la fonction $f(x)$, et d'examiner le signe du résultat. Si ce signe est différent de celui qui est commun aux deux résultats $f(a)$ et $f(b)$, il existe deux points α et β d'intersection. Mais si le signe de $f(\gamma)$ est le même que celui de $f(a)$ et $f(b)$, les deux points d'intersection manquent, et les racines sont imaginaires.

On pourrait substituer dans $f(x)$ au lieu de x une valeur approchée de la racine γ de l'équation $f'(x)=0$. Si le résultat de cette substitution a un signe différent de celui de $f(a)$ et $f(b)$, on est assuré que les deux racines sont réelles, et elles se trouvent séparées. Mais si le signe du résultat est le même que celui de $f(a)$ et $f(b)$, la nature des racines demeure incertaine : car on ignore si en substituant dans $f(x)$ une valeur encore plus approchée de γ , on ne

trouverait point un signe différent de celui de $f(a)$ et $f(b)$. Cette difficulté se présenterait nécessairement toutes les fois que les racines seraient imaginaires, et elle subsisterait toujours quoique l'intervalle des deux limites pût être rendu extrêmement petit.

(24) Pour résoudre cette ambiguïté nous considérons que la seconde construction (fig. 5) diffère de la première (fig. 4) par un caractère propre que le calcul peut exprimer. En effet concevons que dans la construction représentée par la fig. 5 on mène par les points m et n deux tangentes jusqu'à la rencontre de l'axe en a' et b' ; qu'en ces points a' et b' on élève des ordonnées $a'm'$, $b'n'$; qu'aux points m' et n' on mène deux nouvelles tangentes jusqu'à la rencontre de l'axe. Il est évident qu'après une ou plusieurs opérations semblables, il arrivera nécessairement qu'on ne pourra point tracer ces tangentes successives sans qu'elles finissent par sortir de l'intervalle ab ; et la distance du point a à l'intersection de la tangente et de l'axe, c'est-à-dire la sous-tangente, deviendra certainement plus grande que l'intervalle ab . Si au contraire l'arc mn a deux points d'intersection entre a et b , comme le représente la figure 4, la condition qu'on vient d'énoncer n'aura jamais lieu; chacune des sous-tangentes aa' , $a'a''$, etc. sera toujours moindre que l'intervalle ab , $a'b'$, etc. Il en sera de même des sous-tangentes successives bb' , $b'b''$, etc., comparées aux intervalles ba , $b'a'$, etc. Dans cette même construction de la figure 4, si l'on prend les valeurs de deux sous-tangentes aa' , bb' , et si on les ajoute sans avoir égard aux signes, c'est-à-dire en attribuant le signe $+$ à chacune de ces quantités, la somme sera toujours moindre que l'intervalle ab des deux limites. Il en sera de même de toutes les sous-tangentes suivantes: la somme des deux sous-tangentes portées aux deux extrémités d'un intervalle quelconque $a'b'$, $a''b''$, etc. sera moindre que cet intervalle. C'est un caractère distinctif du cas où l'arc mpn a ses deux points d'intersection.

Nous avons supposé que le point m' (fig. 4 et fig. 5) répond précisément à l'extrémité a' de la sous-tangente aa' . Les conséquences

seraient les mêmes si ce point m' répondait à un point voisin de a' , et compris entre les points a' et a .

(25) On appliquera aisément le calcul à l'énoncé de la proposition précédente, en se servant de l'expression connue de la sous-tangente bb' . Le rapport $\frac{dy}{dx}$ est égal à celui des deux lignes nb et bb' , d'où l'on conclut

$$bb' = nb : \frac{dy}{dx} = f(b) : \frac{dx f'(b)}{dx}, \text{ ou } bb' = \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

On aura donc la valeur numérique de la sous-tangente bb' en formant le quotient des deux résultats $f(b)$ et $f'(b)$. On trouvera de même, abstraction faite du signe, la valeur de la sous-tangente aa' en divisant $f(a)$ par $f'(a)$. En général l'expression de l'abscisse ob' , qui répond à l'intersection b'_* de la tangente nb' et de l'axe, est $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. En substituant dans cette expression a pour x , et ensuite b pour x , le second résultat $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ sera toujours plus grand que le premier $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, si la ligne courbe est celle que représente la figure 4. Cette condition ne peut cesser de subsister que si la position de l'arc est celle que représente la figure 5; et dans ce cas il arrive nécessairement, lorsqu'on trace les tangentes successives, que la condition cesse d'avoir lieu. Le caractère propre aux racines réelles est donc ainsi exprimé :

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \text{ ou } \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{f(a)}{-f'(a)} < b - a.$$

Il s'ensuit que les deux limites a et b étant proposées, et les résultats $f'(a)$, $f(a)$, $f'(b)$, $f(b)$ étant connus, il faudra premièrement, pour reconnaître la nature des deux racines indiquées, diviser $f(a)$ par $f'(a)$, et $f(b)$ par $f'(b)$. Si l'un des deux quotients, pris abstraction faite du signe, ou si la somme de ces deux quotients, surpasse ou égale la différence $b - a$ des deux limites, on est assuré que les deux racines ne sont point réelles.

Mais si la différence $b - a$ des deux limites est plus grande que la somme des deux quotients, on est averti que la distance des deux limites entre lesquelles on cherche les racines n'est pas devenue assez petite pour qu'on puisse reconnaître la nature de ces racines au moyen d'une seule opération. Il faut diviser l'intervalle ab des deux limites, en substituant dans $f(x)$ un nombre intermédiaire c plus grand que a et moindre que b , et marquer le signe du résultat. Lorsque le signe de $f(c)$ n'est pas le même que le signe commun de $f(a)$ et $f(b)$, on connaît que les deux racines sont réelles : l'une est entre a et c , et l'autre entre c et b . L'intervalle $b - a$ est ainsi divisé en deux parties dont chacune contient une racine réelle entièrement séparée.

Il arrive le plus souvent qu'un premier examen suffit pour indiquer la nature des racines cherchées. On trouve que la somme des quotients $\frac{f(a)}{-f'(a)}$, $\frac{f(b)}{f'(b)}$ surpasse la différence $b - a$, ou que la substitution d'un nombre intermédiaire c donne un résultat $f(c)$ dont le signe diffère de celui qui est commun à $f(a)$ et $f(b)$. Si aucune de ces deux conditions n'a lieu, il faut conclure que les limites a et b ne sont point assez approchées pour qu'une seule opération détermine la nature des racines. Dans ce cas la substitution du nombre intermédiaire c donne pour le signe de $f(c)$ le signe commun de $f(a)$ et $f(b)$. Il n'en est pas de même des résultats $f'(a)$, $f'(b)$ et $f'(c)$: les deux premiers sont de signes différents, par hypothèse. Donc un de ces deux résultats $f'(a)$ et $f'(b)$ a le même signe que $f'(c)$; l'autre a un signe contraire. Désignons par d celle des limites a et b qui, étant substituée dans $f'(x)$, donne un résultat de signe contraire à celui de $f'(c)$. On voit que l'équation $f'(x) = 0$ aura une racine réelle entre les nouvelles limites c et d ; et les deux racines, dont la nature est encore incertaine, doivent être cherchées dans l'intervalle de c à d . On appliquera donc à ce second intervalle de c à d la règle qu'on avait appliquée à l'intervalle de a à b , et l'on recherchera la nature de ces racines par un procédé entièrement semblable à celui que nous venons de décrire.

(26) Il est nécessaire de remarquer que si les deux racines cherchées étaient réelles, mais égales, on n'en reconnaîtrait pas la nature par la règle précédente. Mais on distingue facilement ce cas intermédiaire et singulier, puisqu'il suffit de comparer les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$, afin de savoir si elles ont un commun diviseur $\varphi(x)$, et si ce commun diviseur a une racine réelle comprise entre a et b . Lorsqu'un tel diviseur $\varphi(x)$ n'existe pas, ou si l'équation $\varphi(x)=0$ n'a point une racine réelle entre a et b , on parviendra toujours par le procédé que nous avons décrit, et en continuant l'examen autant que la forme de la courbe peut l'exiger, à reconnaître que les racines cherchées sont imaginaires, ou à les séparer si elles sont réelles. Dans ce dernier cas, l'intervalle ab des deux limites proposées sera divisé en deux autres, dans chacun desquels se trouve une seule racine.

(27) Les figures 4 et 5 se rapportent au cas où le signe commun de $f(a)$ et $f(b)$ est $+$. Si les deux suites de signes (a) et (b) que l'on doit comparer, et qui ne diffèrent que par l'avant-dernier signe $-$, sont ainsi terminées,

— + —

et

— — —,

la construction est celle des figures 4' et 5'. L'arc mpn n'a aucune sinuosité, mais seulement un point p où l'inclinaison est nulle. Cet arc est convexe dans toute son étendue, parce que le signe de la fluxion du second ordre est $-$. Il existe deux points d'intersection α et ϵ si la position de l'arc est celle que représente la fig. 4', et ces deux points d'intersection manquent à la fois dans l'intervalle si la position de l'arc est celle que représente la figure 5'. La règle qu'il faut suivre pour reconnaître si les deux racines cherchées sont réelles ou imaginaires est exactement la même que celle que nous venons d'exposer.

(28) Nous résumerons comme il suit, l'énoncé de cette règle.

Si après avoir substitué deux limites a et b dans la suite des fonc-

tions $f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x) \dots f''(x), f'(x), f(x)$, et comparé les signes des résultats de la suite (a) à ceux des résultats de la suite (b), on remarque que la seconde suite (b) a deux changements de signes de moins que la suite (a), et qu'en omettant les deux derniers signes de chaque suite, la seconde a autant de changements de signes que la première, il faut pour juger si les deux racines indiquées sont réelles, comparer les résultats $f'(a), f(a)$, et $f'(b), f(b)$, abstraction faite de leurs signes, c'est-à-dire en attribuant à toutes ces quantités le signe +. Si l'un des deux quotients $\frac{f(a)}{f'(a)}, \frac{f(b)}{f'(b)}$, ou si la somme de ces quotients, surpasse ou égale $b - a$, on est assuré que les deux racines cherchées sont imaginaires.

Si la condition précédente n'a pas lieu, en sorte que la somme des deux quotients soit moindre que la différence $b - a$, on examinera si les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ ont un facteur commun $\varphi(x)$, et si l'équation $\varphi(x) = 0$ a une racine réelle entre a et b . Si ce diviseur commun $\varphi(x)$ existe, et si de plus l'équation $\varphi(x) = 0$ a une racine réelle c comprise entre a et b , l'équation a deux racines réelles égales à c .

Mais si les deux fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ n'ont pas de diviseur commun, ou si ce diviseur $\varphi(x)$ existant, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a pas une racine réelle entre a et b , ce que l'on connaît facilement par les principes ci-dessus exposés, il faudra examiner si les deux racines de l'équation $f(x) = 0$ indiquées entre a et b peuvent être séparées par la substitution d'un nombre intermédiaire c plus grand que a et moindre que b . On substituera donc un tel nombre c dans $f(x)$. Si le signe de $f(c)$ n'est pas le même que celui de $f(a)$ et $f(b)$, les deux racines cherchées sont réelles; l'une est entre a et c , et l'autre entre c et b . Si au contraire le signe de $f(c)$ est le même que celui de $f(a)$ et $f(b)$, on en conclura que les deux limites a et b n'étaient pas assez approchées pour que l'on pût connaître par un premier examen la nature des racines. Choissant donc celle des deux limites a et b dont la substitution dans $f'(x)$ donne un résultat de signe contraire à celui de $f'(c)$, et désignant par d cette

limite, on opérera pour l'intervalle compris entre c et d de même qu'on vient d'opérer pour l'intervalle compris entre a et b . En continuant ainsi l'emploi de ce procédé, dont la pratique est très-simple, on parviendra par une voie certaine à reconnaître qu'il n'y a point de racines dans l'intervalle proposé, ou à séparer ces racines si elles existent.

(29) Nous appliquerons cette règle à divers exemples, et premièrement à l'équation

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

citée dans l'article 14. On a vu que cette équation a une racine réelle comprise entre -10 et -1 , et qui se trouve entièrement séparée. La comparaison des suites qui répondent aux limites 0 et 1 indique que l'on doit chercher les deux autres racines dans cet intervalle; mais on ignore si ces racines existent en effet, ou si elles sont imaginaires.

Pour faire usage de la règle précédente, on compare les deux suites

$$\begin{array}{cccc} f'''(x), f''(x), f'(x), f(x) \\ (0) \dots + & + & - & + \\ & & 3 & 2 \\ (1) \dots + & + & + & + \\ & & 4 & 2 \end{array}$$

On écrit au-dessous des deux derniers signes les valeurs numériques des résultats : car il est nécessaire de considérer ces valeurs pour connaître la nature des racines. Les suites présentent le cas que nous avons d'abord examiné, c'est-à-dire que l'équation $f''(x) = 0$ ne peut avoir aucune racine entre 0 et 1, et que l'équation $f'(x) = 0$ a une seule racine réelle dans cet intervalle. Il s'agit de reconnaître si l'équation $f(x) = 0$ a deux racines réelles entre ces limites, ou si les deux racines indiquées sont imaginaires. On écrira conformément à la règle, et abstraction faite des signes, les deux quotients $\frac{f(a)}{f'(a)}$ et $\frac{f(b)}{f'(b)}$, savoir $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{4}$; et l'on examinera si l'un de ces quotients, ou si leur somme, surpasse ou égale la différence 1 des

deux limites. Cette condition ayant lieu, on est assuré que les deux racines indiquées sont imaginaires. Ainsi l'équation proposée a une seule racine réelle entre -10 et -1 . Elle manque de deux racines dans l'intervalle de 0 à 1 .

(30) Nous choisirons pour second exemple de l'application de la même règle l'équation

$$x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0$$

citée dans l'article 15. On a vu que deux racines sont indiquées dans l'intervalle de -10 à 1 : il s'agit de reconnaître si les deux racines sont réelles, ou si elles manquent entre ces limites. On résoud cette question en comparant, selon la règle de l'article 28, les deux suites

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & f''(x), & f'(x), & f(x) \\ (-10) \dots & + & - & + & - & + & - \\ & & & & 45955 & 89686 & \\ (-1) \dots & + & - & + & - & + & - \\ & & & & 26 & 10 & \end{array}$$

Nous avons écrit au-dessous des deux derniers signes de chaque suite les valeurs numériques des résultats. Les deux suites comparées satisfont aux conditions que suppose l'énoncé de la règle. On examinera donc si l'un de ces quotients $\frac{89686}{45955}$ et $\frac{10}{26}$, ou si leur somme, surpasse ou égale la différence 9 des deux limites; et comme cela n'a pas lieu, on en conclut qu'il faut subdiviser l'intervalle de -10 à -1 . Mais avant de procéder à la substitution d'un nombre intermédiaire, on doit examiner si les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$, ou

$$x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 \text{ et } 5x^4 + 4x^3 + 2x - 25,$$

ont un diviseur commun, et si ce diviseur a une racine réelle entre -10 et -1 . Ce diviseur n'existant pas, on substitue au lieu de x un nombre compris entre -10 et -1 , et exprimé par un seul chiffre. Si l'on prend -2 pour ce nombre intermédiaire, et si l'on cherche les signes de la suite des résultats que donne la substitution

de -2 dans les fonctions

$$f^v(x), f^{iv}(x), f'''(x), f''(x), f'(x), f(x),$$

on trouve

$$\begin{array}{cccccc} (-10) \dots & + & - & + & - & + \\ (-2) \dots & + & - & + & - & + \\ (-1) \dots & + & - & + & - & - \end{array}$$

On compte cinq changements de signe dans la suite (-10) , quatre dans la suite (-2) et trois dans la suite (-1) . Par conséquent la substitution du nombre intermédiaire a séparé les racines indiquées. Elles sont donc réelles : l'une est entre -10 et -2 , et l'autre entre -2 et -1 .

Ainsi l'opération qui a pour objet de déterminer la nature et les limites des racines, est achevée. L'équation a deux racines imaginaires et trois racines réelles : l'une est comprise entre -10 et -2 , la seconde entre -2 et -1 , et la troisième entre 1 et 10 .

(31) Nous avons supposé jusqu'ici que les deux suites comparées sont telles 1° que la seconde a seulement deux changements de signes de moins que la première, et 2° qu'en omettant les deux derniers signes, les deux suites ont le même nombre de changements de signes. Mais la succession des signes dans les deux suites est susceptible d'un très-grand nombre de combinaisons, et le nombre des racines indiquées peut être plus grand que 2. Il nous reste à montrer que, dans tous les cas possibles, l'application de la même règle suffit pour distinguer facilement les racines imaginaires. Cette distinction s'opère par la comparaison des résultats que donne la substitution des limites a et b dans les fonctions

$$f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x), f^{(m-2)}(x), \dots, f''(x), f'(x), f(x).$$

Ces résultats sont

$$\begin{array}{l} f^{(m)}(a), f^{(m-1)}(a), f^{(m-2)}(a), \dots, f''(a), f'(a), f(a), \\ f^{(m)}(b), f^{(m-1)}(b), f^{(m-2)}(b), \dots, f''(b), f'(b), f(b). \end{array}$$

On comptera dans la première suite combien il se trouve de chan-

gements de signes depuis le premier terme $f^{(m)}(a)$ jusqu'au second, au troisième, au quatrième, etc., en procédant de gauche à droite. On marquera au-dessus de chaque terme, tel que $f^{(m-i)}(a)$, le nombre h de changements de signes contenus dans la suite jusqu'au terme $f^{(m-i)}(a)$, en y comprenant ce terme. On désignera de la même manière dans la seconde suite combien il se trouve de changements de signes depuis le premier terme jusqu'à un terme quelconque $f^{(m-i)}(b)$. Soit k le nombre de changements comptés dans la seconde suite jusqu'à ce terme $f^{(m-i)}(b)$. On prendra la différence $h - k$ des deux nombres correspondants marqués dans l'une et l'autre suites, et l'on écrira entre les deux termes cette différence, que nous désignons par δ , et qui ne peut jamais être négative (art. 7). On forme ainsi à l'inspection des deux suites une série d'indices placés entre les termes de ces suites.

(32) Par exemple si les signes des résultats dans les suites comparées sont tels que les représente la table suivante,

| | | | | | | | | | | | | |
|-------------|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|-----------|----------|---------|--------|
| | $f^{(m)}(x)$ | $f^{(m-1)}(x)$ | $f^{(m-2)}(x)$ | $f^{(m-3)}(x)$ | $f^{(m-4)}(x)$ | $f^{(m-5)}(x)$ | $f^{(m-6)}(x)$ | | $f'''(x)$ | $f''(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ |
| (a) | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 4 5 6 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | + | - | + | + | + | - | - | + + - + | + | - | + | - |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 2 3 4 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| (b) | + | - | - | - | - | - | + | + + + + | - | - | + | + |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 2 2 2 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |

la série des indices formée selon la règle précédente sera

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5.$$

Nous désignons en général cette série par

$$0 \ \delta \ \delta' \ \delta'' \ \delta''' \ \dots \ \Delta.$$

Le dernier indice Δ montre que l'équation proposée $f(x) = 0$ ne peut pas avoir entre les limites a et b plus de racines réelles qu'il n'y a d'unités dans Δ . En général un indice quelconque δ qui correspond à la fonction $f^{(n)}(x)$ fait connaître que l'équation $f^{(n)}(x) = 0$ ne peut pas avoir entre les limites a et b un nombre de racines

plus grand que δ . Ainsi, dans l'exemple cité, l'équation proposée $f(x) = 0$ ne peut pas avoir entre a et b plus de cinq racines : on est assuré que l'une de ces racines est réelle. Quant à l'équation $f'(x) = 0$, le nombre des racines indiquées est 4 : cette équation ne peut donc avoir entre les mêmes limites a et b plus de quatre racines. Il en est de même à l'égard de l'équation $f''(x) = 0$. Pour l'équation $f'''(x) = 0$ le nombre des racines indiquées est 3 : une de ces racines est certainement réelle.

La valeur d'un indice quelconque étant désignée par δ , celle de l'indice suivant est δ , ou $\delta - 1$, ou $\delta + 1$: cela est une conséquence évidente de la formation de la série. Il est nécessaire d'insister sur cette dernière remarque, parce que nous devons en faire usage dans la suite de cet ouvrage en traitant des fonctions transcendentes.

(33) Lorsque le dernier indice Δ est 0, l'intervalle des limites a et b est, comme nous l'avons dit, un de ceux où l'on ne peut chercher aucune racine de la proposée $f(x) = 0$.

Si ce dernier indice Δ est 1, l'équation $f(x) = 0$ a une seule racine réelle entre a et b . Les indices précédents, qui répondent à $f'(x)$ et $f''(x)$, peuvent être différents de zéro ou de 1 ; mais il est facile de voir qu'en diminuant à volonté l'intervalle de a à b par la substitution de nombres intermédiaires, on peut faire en sorte que l'indice pénultième qui répond à $f'(x)$ soit 0. En effet $f(x)$ et $f'(x)$ n'ont point de diviseur commun $\varphi(x)$ qui puisse devenir nul par la substitution d'un nombre compris entre a et b : car si cela était, l'équation $f(x) = 0$ aurait deux racines réelles égales dans l'intervalle de a à b . Or le dernier indice étant 1, l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas avoir plus d'une racine réelle α entre a et b . Donc on peut diminuer et ensuite augmenter la valeur de la racine réelle jusqu'à des limites a' et b' , telles que l'équation $f'(x) = 0$ ne puisse avoir aucune racine entre ces mêmes limites. Donc pour les limites a' et b' le dernier indice sera 1, et le pénultième zéro.

Les constructions rendent très-sensible la vérité de cette conséquence. En effet on est assuré que la ligne dont l'équation est $y = f(x)$

coupe l'axe des abscisses (fig. 6) en un certain point α placé entre a et b , puisque l'équation $f(x)=0$ a, par hypothèse, une racine réelle dans cet intervalle. Or il est évident que, de part et d'autre de ce point α d'intersection, il existe un intervalle $a'b'$ tel que l'arc $\mu\alpha\nu$ situé au-dessus de cet intervalle n'a aucun point où l'inclinaison de la tangente soit nulle. Il n'y aurait qu'une seule exception, celle où, dans le point même d'intersection, l'inclinaison serait nulle. Mais dans ce cas les deux fonctions $f(x)$ et $f'(x)$ s'évanouiraient ensemble pour cette valeur α de x . Par conséquent l'équation $f(x)=0$ aurait au moins deux racines réelles égales dans l'intervalle de a à b . Donc le dernier indice ne serait pas 1, comme on le suppose; il serait au moins 2, puisque l'équation $f(x)=0$ ne peut avoir plus de racines réelles inégales ou égales dans l'intervalle des deux limites, qu'il n'y a d'unités dans le dernier indice.

Lorsque l'intervalle des deux limites satisfait à cette condition, qui peut toujours être remplie, savoir que le dernier indice est 1 et que le pénultième est 0, nous disons que la racine réelle comprise dans l'intervalle est entièrement séparée; et nous donnons dans le second livre de cet ouvrage les règles propres à en calculer la valeur par la voie la plus brève.

(34) Si le dernier indice n'est ni 0, ni 1, l'intervalle est un de ceux dans lesquels on doit chercher plusieurs racines. C'est alors seulement qu'il peut devenir nécessaire d'appliquer la règle qui sert à distinguer les racines imaginaires.

Supposons donc que le dernier indice soit 2, ou plus grand que 2: on procédera comme il suit à la séparation des racines.

Ayant formé, comme nous l'avons dit ci-dessus, la série des indices entre les termes correspondants des deux suites (a) et (b), on parcourra cette série de droite à gauche jusqu'à ce qu'on trouve pour la première fois l'indice 1. Soit $f^{(n)}(x)$ celle des fonctions de la suite

$$f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x) \dots f^{(n)}(x) \dots f''(x), f'(x), f(x)$$

qui répond à cet indice. On voit que les racines sont séparées jus-

qu'à ce terme, c'est-à-dire qu'en s'arrêtant à $f^{(n)}(x)$ on est assuré que l'équation $f^{(n)}(x) = 0$ a une seule racine réelle entre a et b . Il faut maintenant poursuivre cette séparation en sorte que l'indice 1 s'approche de plus en plus de l'extrémité de la série à droite, jusqu'à ce que le dernier indice Δ soit l'unité, ce qui est le terme de l'opération.

L'indice 1 auquel on s'est d'abord arrêté, et qui répond à la fonction $f^{(n)}(x)$, est nécessairement suivi à droite de l'indice 2. Car nous avons remarqué plus haut que l'indice δ' qui suit l'indice δ ne peut être que δ , ou $\delta - 1$, ou $\delta + 1$: donc l'indice 1 dont il s'agit ne pourrait être suivi que de 1, ou 0, ou 2. Or cet indice suivant n'est pas 1, puisqu'on s'est arrêté au terme que l'on trouve égal à 1 pour la première fois. Si l'indice suivant était 0, il faudrait que cet indice 0 augmentât dans la partie ultérieure de la série, puisque sa dernière valeur est par hypothèse 2, ou plus grande que 2. Donc l'indice 0 augmentant, passerait par la valeur 1 ; donc l'indice auquel on s'est arrêté ne serait pas, comme on le suppose, le premier terme que l'on trouve égal à 1 en procédant de droite à gauche. Ainsi l'indice 1 le plus voisin de l'extrémité à droite est certainement suivi de 2. Or si ce même indice 1 n'est pas précédé de zéro, on peut diminuer l'intervalle des limites a et b , en sorte que cette dernière condition soit remplie. En effet supposons que les indices qui répondent aux fonctions $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$ étant 1 et 2, celui qui répond à la fonction précédente $f^{(n+1)}(x)$ ne soit pas zéro. On formera dans l'intervalle des limites a et b un intervalle moindre compris entre a' et b' , et dans lequel l'équation $f^{(n+1)}(x) = 0$ n'ait aucune racine. Nous avons prouvé précédemment, art. 33, qu'il est toujours facile de satisfaire à cette condition. On a donc à considérer dans l'intervalle des limites données a et b un intervalle partiel compris entre les nouvelles limites a' et b' , et tel que les indices correspondants aux fonctions $f^{(n+1)}(x)$ et $f^{(n)}(x)$ soient respectivement 0 et 1. Ainsi l'intervalle primitif de a à b se trouve formé de trois autres, savoir celui de a à a' , celui de a' à b' , et celui de b' à b .

Il est manifeste que dans le premier de ces intervalles terminé par les limites a et a' , et dans le troisième entre les limites b et b' , l'équation $f^{(n)}(x) = 0$ ne peut avoir aucune racine, puisque la seule racine réelle entre les limites a et b est placée entre les nouvelles limites a' et b' . Donc pour chacun de ces intervalles extrêmes a et a' , ou b' et b , l'indice correspondant à la fonction $f^{(n)}(x)$ serait 0. Il s'ensuit que pour chacun de ces intervalles a et a' , ou b' et b , la séparation des racines est portée au-delà de la fonction $f^{(n)}(x)$; c'est-à-dire que si dans l'un ou l'autre de ces intervalles partiels, il existe après l'indice 0 un indice égal à 1, il répond à une fonction plus avancée que $f^{(n)}(x)$ vers la droite. Quant à l'intervalle partiel de a' à b' , on sait que l'indice qui répond à $f^{(n)}(x)$ est 1; et il peut arriver que le terme 1 ne soit plus le dernier indice égal à 1, en sorte qu'on y trouverait un autre terme égal à 1 et plus avancé vers la droite. Dans ce cas, la séparation des racines est continuée au-delà de la fonction $f^{(n)}(x)$. Mais il peut arriver aussi que l'indice 1 qui répond à $f^{(n)}(x)$ soit encore pour cet intervalle de a' et b' le terme 1 le plus voisin de l'extrémité à droite. Dans ce second cas l'indice 1 dont il s'agit est suivi de 2; par conséquent les indices correspondants aux fonctions

$$f^{(n+1)}(x), f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x),$$

sont

$$0 \qquad 1 \qquad 2.$$

Il résulte de cet examen qu'en divisant l'intervalle primitif des limites a et b , on fait avancer de plus en plus vers la droite, dans chaque intervalle partiel, l'indice 1 le plus voisin de l'extrémité, à moins que dans certaines parties de l'intervalle on ne vienne à remarquer que le dernier indice égal à 1 étant suivi de 2 est précédé de 0. C'est seulement lorsque cette dernière condition se présente, qu'il convient d'examiner si les racines indiquées sont imaginaires. Dans tous les autres cas, on doit poursuivre la séparation des racines jusqu'à ce que le dernier indice de la série soit 1.

(35) Il ne nous reste par conséquent qu'un seul cas à considérer,

celui pour lequel on trouve que le dernier indice égal à 1 étant suivi de 2 est précédé de 0.

Soit donc un intervalle compris entre deux limites a et b , et qui a les propriétés suivantes.

En comparant la suite (a) des signes qui proviennent de la substitution de la limite a dans les fonctions

$$f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x), f^{(m-2)}(x), \dots, f''(x), f'(x), f(x)$$

à la suite (b) que donne la substitution de l'autre limite b , et formant par cette comparaison la série des indices, on marque dans cette série le terme 1 le plus voisin de l'extrémité à droite, et l'on voit que ce dernier indice égal à 1 est précédé de 0 et suivi de 2. Ces indices consécutifs

0 1 2

répondent aux fonctions

$$f^{(n+1)}(x), f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x).$$

Ainsi l'équation $f^{(n+1)}(x) = 0$ ne peut avoir aucune racine entre a et b . L'équation $f^{(n)}(x) = 0$ a dans cet intervalle une racine réelle, et n'en peut avoir qu'une. Quant à l'équation $f^{(n-1)}(x) = 0$, elle ne peut pas avoir entre a et b plus de deux racines réelles. Il s'agit de reconnaître si ces racines existent, ou si elles manquent entre les mêmes limites. Dans le premier cas la racine exacte de l'équation $f^{(n)}(x) = 0$ étant substituée dans $f^{(n-1)}(x)$ et dans $f^{(n+1)}(x)$, donnerait deux résultats de signe contraire, et dans le second cas les résultats des deux substitutions auraient le même signe. La question consiste à distinguer lequel de ces deux cas a lieu. Or nous avons résolu cette question par la règle énoncée dans l'article 28 : il suffira donc d'appliquer cette règle aux trois fonctions $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$, et aux limites a et b . Si l'on reconnaît que les deux racines de l'équation $f^{(n-1)}(x) = 0$ sont réelles, elles seront séparées, et l'intervalle des limites a et b se trouvera divisé en deux autres, pour chacun desquels on aura la série d'indices qui lui est

propre. Dans l'une et l'autre série l'indice 1 le plus voisin de l'extrémité à droite sera porté au-delà de la fonction $f^{(n)}(x)$.

Mais si l'on reconnaît que l'équation $f^{(n-1)}(x) = 0$ manque de deux racines dans l'intervalle de a à b , on en conclura qu'il en est de même de toutes les équations suivantes

$$f^{(n-2)}(x) = 0, f^{(n-3)}(x) = 0 \dots f''(x) = 0, f'(x) = 0, f(x) = 0.$$

En effet l'équation $f^{(n-1)}(x) = 0$ manque de deux racines parce qu'il se trouve entre ces mêmes limites une racine réelle γ de l'équation $f^{(n)}(x) = 0$ qui, substituée dans $f^{(n+1)}(x)$ et $f^{(n-1)}(x)$, donne deux résultats de même signe. Donc la suite des signes des résultats perd deux changements de signe lorsque la valeur de x devient égale à celle qui rend nulle la fonction $f^{(n)}(x)$; donc l'équation proposée $f(x) = 0$ manque aussi de deux racines dans l'intervalle des limites a et b . Il s'ensuit que dans chacun des indices correspondants aux fonctions

$$f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}(x), f^{(n-3)}(x) \dots f''(x), f'(x), f(x),$$

il se trouve une partie de cet indice égale à 2, et correspondante aux deux racines qui manquent en cet intervalle dans les équations

$$f^{(n)}(x) = 0, f^{(n-1)}(x) = 0, f^{(n-2)}(x) = 0, \dots f''(x) = 0, f'(x) = 0, f(x) = 0.$$

Cette partie de chaque indice qui est égale à 2 doit donc être distinguée de la partie restante, et on peut l'omettre. Il n'y a plus que la partie restante qui indique combien on doit encore chercher de racines dans l'intervalle des limites. Par conséquent on retranchera 2 de chacun des indices qui répondent aux fonctions

$$f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}(x), f^{(n-3)}(x), \dots f''(x), f'(x), f(x),$$

en sorte que celui de $f^{(n-1)}(x)$ deviendra zéro.

En rapprochant les propositions qui viennent d'être démontrées on voit que dans tous les cas, soit que les deux racines de l'équation $f^{(n-1)}(x) = 0$ soient réelles, soit qu'elles manquent dans l'intervalle

des limites a et b , l'opération précédente donne de nouvelles séries d'indices dans lesquelles le terme 1 le plus voisin de l'extrémité à droite est plus avancé vers cette extrémité qu'il ne l'était auparavant. On appliquera donc la présente règle à chacune de ces séries, et l'on parviendra nécessairement à des séries d'indices dont le dernier terme sera 0, ou dont le dernier terme sera 1.

(36) Les deux exemples suivants offrent des applications de la règle que l'on vient de donner pour la séparation des racines.

On a vu article 12 par l'analyse de l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$$

que l'on doit chercher entre les limites 1 et 10 trois racines, dont une est certainement réelle. Il s'agit de reconnaître si les deux autres existent, ou si l'équation a deux racines imaginaires qui manquent dans cet intervalle. On procédera comme il suit à cette distinction.

Les deux suites que l'on doit comparer sont

| | $f^v(x)$ | $f^{iv}(x)$ | $f'''(x)$ | $f''(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ |
|----------|----------|-------------|-----------|----------|---------|--------|
| (1) ... | + | + | — | + | + | — |
| | 120 | 48 | 156 | 30 | 65 | 78 |
| | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| (10) ... | + | + | + | + | + | + |
| | 120 | 1128 | 5136 | 15150 | 32654 | 54939 |

La série des indices, formée selon le procédé de l'article 31, est 0 0 1 2 2 3. Le dernier indice étant 3, l'intervalle est un de ceux auxquels on doit appliquer la règle de l'article 35. On a écrit au-dessous des signes des résultats les valeurs numériques des fonctions correspondantes.

En parcourant de droite à gauche la série de ces indices depuis le dernier terme 3, on trouve pour la première fois l'indice 1 correspondant à la fonction $f'''(x)$: ce terme 1 est suivi de 2, et précédé de 0. Ainsi les trois indices consécutifs font connaître que l'on doit appliquer aux fonctions $f^v(x)$, $f'''(x)$, $f''(x)$ la règle de l'article 28 qui sert à distinguer les racines imaginaires. On écrira donc

les quotients $\frac{30}{156}$, $\frac{15150}{5136}$; et l'on examinera si l'un de ces quotients, ou si leur somme, surpasse ou égale la différence 9 des deux limites. Cette condition n'ayant pas lieu, on en conclut que les limites 1 et 10 ne sont pas encore assez approchées pour que l'on puisse déterminer par une seule opération la nature des racines. On substituera donc un nombre intermédiaire : mais il faut auparavant, conformément à la règle énoncée, examiner si les fonctions $f''(x)$ et $f'''(x)$, qui sont

$$20x^3 - 36x^2 - 144x + 190 \text{ et } 60x^2 - 72x - 144,$$

ont un diviseur commun. Ce facteur commun n'existant pas, on substituera dans les fonctions un des nombres compris entre 1 et 10, et exprimé par un seul chiffre.

La substitution des nombres 2 et 3 donne les résultats suivants, que nous joignons aux suites (1) et (10).

| | $f^v(x)$ | $f^{iv}(x)$ | $f'''(x)$ | $f''(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ |
|---------|----------|-------------|-----------|----------|---------|--------|
| (1)... | + | + | — | + | + | — |
| | 120 | 48 | 156 | 30 | 65 | 78 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| (2)... | + | + | — | — | + | — |
| | 120 | 168 | 48 | 82 | 30 | 21 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| (3)... | + | + | + | — | — | — |
| | 120 | 288 | 180 | 26 | 43 | 32 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| (10)... | + | + | + | + | + | + |
| | 120 | 1128 | 5136 | 15150 | 32654 | 54939 |

La comparaison des suites (1) et (2) montre qu'il ne peut y avoir aucune racine réelle entre les limites 1 et 2, car les deux suites ont le même nombre de changements de signe. Cela résulte aussi de la série des indices 0 0 0 1 0 0, puisque le dernier indice est 0. Il s'ensuit que l'on doit chercher les trois racines entre 2 et 10 : si l'on comparait ces deux limites 2 et 10, on trouverait

$$\begin{array}{rcccccc}
 (2) \dots & + & + & - & - & + & - \\
 & & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\
 (10) \dots & + & + & + & + & + & + & +
 \end{array}$$

Le dernier indice est 3. Si, à partir de ce terme et en se portant vers la droite, on s'arrête au premier indice 1, on voit qu'il est suivi de 2, ce qui a lieu nécessairement. Mais il n'est pas précédé de 0, et par conséquent on doit immédiatement diviser l'intervalle de 2 à 10. On a donc substitué un des nombres intermédiaires, savoir 3. La comparaison des deux suites (2) et (3) montre que l'on doit chercher les deux racines entre ces limites. La série des indices est 0 0 1 0 1 2. L'indice égal à 1, et le plus voisin de l'extrémité, étant suivi de 2 et précédé de 0, on connaît par là qu'il faut appliquer à cet intervalle la règle qui sert à distinguer les racines imaginaires. On écrit donc les quotients $\frac{21}{30}$, $\frac{32}{43}$, et leur somme étant plus grande que la différence 1 des deux limites, on est assuré que les deux racines indiquées entre 2 et 3 sont imaginaires. Il reste l'intervalle de 3 à 10, pour lequel la série des indices est 0 0 0 1 1 1. L'équation a donc une seule racine réelle entre ces limites.

Ainsi l'opération qui a pour objet de déterminer la nature des racines de la proposée, et d'en assigner les limites, est terminée.

L'intervalle de -10 à -1 comprend une seule racine réelle.

Une seconde racine est entre les limites -1 et 0.

Il ne peut y avoir aucune racine entre 0 et 1.

Il en est de même de l'intervalle des limites 1 et 2.

L'équation a deux racines imaginaires qui manquent entre 2 et 3.

Elle a une troisième racine réelle entre 3 et 10.

Les seuls intervalles dans lesquels se trouvent les racines réelles et séparées sont celui de -10 à -1 , celui de -1 à 0, et celui de 3 à 10.

(37) On propose pour second exemple l'équation

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$$

citée article 13.

on trouve que deux racines sont indiquées entre 2 et 10. La série des indices est 0 0 0 1 2. L'indice 1 le plus voisin de l'extrémité à droite est suivi de 2 et précédé de 0 : par conséquent on doit appliquer la règle qui sert à distinguer les racines imaginaires. Écrivant les quotients $\frac{1}{19}$ et $\frac{5993}{2797}$, on voit que la somme de ces nombres est moindre que la distance 8 des deux limites : donc on doit substituer un des nombres compris entre 2 et 10, et exprimé par un seul chiffre. Mais il faut auparavant s'assurer que l'équation $X=0$ n'a point deux racines égales dans l'intervalle dont il s'agit. Or cela n'a point lieu puisque les fonctions X et X' , qui sont

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 \text{ et } 4x^3 - 12x^2 - 3,$$

n'ont pas de diviseur commun. Substituant le nombre intermédiaire 3, on trouve ces résultats que nous comparons à ceux des suites (2) et (10),

$$(2) \dots\dots + + + - +$$

$$(3) \dots\dots + + + - -$$

$$(10) \dots\dots + + + + +.$$

Done les racines qui étaient indiquées entre 1 et 10 sont réelles. Elles ont été séparées par la substitution du nombre 3: l'une est entre 2 et 3, et l'autre entre 3 et 10.

Ainsi l'opération qui avait pour but de découvrir la nature des racines de l'équation

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0,$$

et d'en assigner les limites, est achevée.

En rappelant les conséquences énoncées art. 13, on reconnaît que l'équation a deux racines imaginaires entre les limites infiniment peu distantes au-dessous et au-dessus de zéro;

qu'il ne peut y avoir de racine dans l'intervalle de 0 à 1, et qu'il en est de même de l'intervalle de 1 à 2;

que l'équation a une racine réelle entre 2 et 3, et une seconde racine réelle entre 3 et 10.

(38) On voit par ce qui précède que la détermination des limites des racines réelles, et la distinction des racines imaginaires, se réduisent à l'application de deux règles principales. L'une est déduite du théorème qui exprime les changements que subit la suite des signes lorsque le nombre substitué augmente par degrés infiniment petits depuis $-\frac{1}{10}$ (articles 7, 8, 10). La seconde règle fait connaître, par un calcul numérique très-simple, si le nombre substitué qui rend nulle une des fonctions intermédiaires donne deux signes semblables ou deux signes différents à la fonction qui précède et à celle qui suit (art. 28, 31, 35). L'opération qui résulte de ces deux règles combinées indique d'abord les seuls intervalles dans lesquels on doit chercher les racines; ensuite elle partage ces intervalles en plusieurs autres, dont chacun contient une seule racine réelle. Pour montrer l'ensemble de cette opération, nous en résumerons l'énoncé en rappelant les règles qui ont été précédemment expliquées.

L'équation $X=0$ étant proposée, on formera par des différenciations successives la suite des fonctions $X, X', X'', \dots X^{(m-1)}, X^{(m)}$, qui seront écrites dans cet ordre

$$X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)}, \dots X'', X', X;$$

et l'on substituera au lieu de x dans cette suite de fonctions, les nombres

$$-1, -10, -100, -1000, \text{ etc.}$$

$$0$$

$$1, 10, 100, 1000, \text{ etc.}$$

jusqu'à ce que l'on trouve deux suites de résultats telles que l'une ne contienne que des changements de signes, et que l'autre n'en ait aucun. On connaîtra ainsi les limites décimales des racines, c'est-à-dire le nombre des chiffres qui les expriment, si elles sont réelles, et les divers intervalles dans lesquels ces racines doivent être cherchées.

Pour chacun des intervalles partiels, dont a et b désignent les limites, on comparera comme il suit la suite (a) des signes que

donne la substitution de a , à la suite (b) que donne la substitution de la limite plus grande b . Il faut marquer dans chaque suite combien il se trouve de changements de signe depuis le premier terme à gauche jusqu'à un terme quelconque, et former, selon la règle énoncée article 31, la série

$$0 \delta \delta' \delta'' \dots \Delta$$

des indices propres à l'intervalle. Si le dernier indice Δ est 0, l'intervalle ne peut contenir aucune racine. Si le dernier indice Δ est 1, l'intervalle contient une seule racine réelle. Les autres racines doivent être cherchées dans les intervalles dont le dernier indice est 2, ou plus grand que 2.

Lorsqu'un ou plusieurs des résultats des substitutions sont nuls, on emploie le double signe suivant la règle que nous avons donnée article 11; et l'on connaît par la comparaison de ces signes multiples si la proposée a des racines imaginaires qui manquent entre les limites infiniment voisines des valeurs substituées, et le nombre de ces racines imaginaires.

Considérant un des intervalles dont le dernier indice est 2, ou plus grand que 2, on remontera dans la série des indices depuis l'extrémité à droite en se portant vers la gauche, jusqu'à ce que l'on trouve pour la première fois le terme 1 : il sera toujours suivi à droite de l'indice 2. Quant à l'indice placé à la gauche du terme 1 auquel on s'est arrêté, cet indice précédent peut être 0, ou 1, ou 2. S'il n'est pas 0, l'intervalle des limites a et b est trop grand pour que l'on puisse immédiatement distinguer la nature des racines. Il faut choisir, conformément à la remarque de l'article 34, un nombre intermédiaire c du même ordre décimal que les limites a et b , ou de l'ordre immédiatement suivant, et le substituer dans la suite des fonctions afin de former deux intervalles partiels a et c , et c et b . Par ces substitutions des nombres intermédiaires on rapprochera de plus en plus de l'extrémité à droite l'indice 1 le plus voisin de cette extrémité; et il arrivera nécessairement, ou que le dernier indice Δ d'un intervalle sera zéro ou 1, ou que l'indice 1 le plus voisin de l'extrémité étant toujours suivi de 2 sera précédé de zéro.

Lorsque cette dernière condition se présente, on est averti qu'il faut employer la règle qui sert à distinguer les racines imaginaires.

Désignant par

$$f^{(n+1)}(x), f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x)$$

les fonctions auxquelles répondent les indices consécutifs

$$0 \quad 1 \quad 2,$$

on examinera si les valeurs numériques des résultats

$$f^{(n+1)}(a), f^{(n)}(a), f^{(n-1)}(a)$$

et

$$f^{(n+1)}(b), f^{(n)}(b), f^{(n-1)}(b)$$

sont telles, abstraction faite des signes, que l'un des quotients

$$\frac{f^{(n-1)}(a)}{f^{(n)}(a)}, \frac{f^{(n-1)}(b)}{f^{(n)}(b)},$$

ou leur somme, surpasse ou égale la différence $b - a$ des limites; et l'on procédera à cette comparaison suivant la règle spéciale expliquée dans l'article 28. L'emploi de cette règle fera connaître si les deux racines de l'équation $f^{(n-1)}(x) = 0$, qui étaient indiquées dans l'intervalle dont il s'agit, sont réelles et inégales, ou réelles et égales, ou imaginaires.

Si ces racines sont réelles et inégales, elles se trouveront séparées par l'opération que l'on vient de faire; et l'on continuera de procéder de la même manière à la séparation des racines dans les intervalles dont le dernier indice ne serait ni 0, ni 1.

Si au contraire les deux racines de $f^{(n-1)}(x) = 0$ sont imaginaires, il faut, à partir de l'indice 2 qui répond à $f^{(n-1)}(x)$ jusqu'à l'extrémité de la série à droite, retrancher deux unités de chaque indice, ce qui donnera pour ce même intervalle une autre série d'indices dont les derniers termes seront moindres que dans la série précédente.

Lorsque les deux racines de l'équation $f^{(n-1)}(x) = 0$ seront égales, on examinera selon les procédés connus si ces racines égales font aussi évanouir toutes les fonctions suivantes $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-3)}(x)$, etc.,

en y comprenant la dernière $f(x)$: dans ce cas, on connaîtrait les racines égales que l'équation $f(x) = 0$ aurait entre les limites proposées. Mais s'il n'y a point de facteur commun à la fonction $f^{(n-1)}(x)$ et à toutes celles qui sont placées à sa droite, les conséquences relatives à la nature des racines seront exactement les mêmes que si les deux racines de l'équation $f^{(n-1)}(x) = 0$ étaient imaginaires. On retranchera donc deux unités de chacun des indices correspondants aux fonctions $f^{(n-1)}(x), f^{(n-2)}(x), \dots, f'(x), f(x)$, et l'on continuera, s'il est nécessaire, d'appliquer les mêmes règles aux nouvelles séries d'indices jusqu'à ce que les racines soient entièrement séparées. L'opération se termine lorsqu'il ne reste plus que des intervalles dont le dernier indice Δ est 0 ou 1.

(39) Nous proposons, pour premier exemple de l'application de cette règle générale, l'équation

$$x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0.$$

Les fonctions dans lesquelles on doit substituer sont

$$X \dots x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4$$

$$X' \dots 4x^3 - 3x^2 + 8x + 1$$

$$X'' \dots 12x^2 - 6x + 8$$

$$X''' \dots 24x - 6$$

$$X^{iv} \dots 24.$$

Substituant les nombres

$$-1, -10, \text{ etc.}$$

$$0$$

$$1, 10, \text{ etc.}$$

on trouve

| | X^{iv} | X''' | X'' | X' | X |
|---------|----------|--------|-------|------|-----|
| (-10) | ... | + | - | + | - |
| (-1) | ... | + | - | + | - |
| (0) | ... | + | - | + | - |
| (1) | ... | + | + | + | + |

Toutes les racines doivent être cherchées entre -10 et 1 , parce que la suite (-10) n'a que des changements de signe, et que la suite (1) n'a que des permanences de signe.

1° En formant, selon la règle énoncée article 31, la série des indices entre les limites -10 et -1 , on a

$$\begin{array}{cccccc} (-10) \dots & + & - & + & - & + \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-1) \dots & + & - & + & - & - \end{array}$$

Dans cette série 00001 , le dernier indice est 1 : donc l'équation a une seule racine réelle entre les limites -10 et -1 . Cette racine est séparée de toutes les autres.

2° En comparant les deux suites (-1) et (0) , on voit que cet intervalle est un de ceux où l'on ne doit chercher aucune racine, parce que les deux suites ont le même nombre de changements de signe. Si l'on formait pour ces deux suites la série des indices, on trouverait

$$\begin{array}{cccccc} (-1) \dots & + & - & + & - & - \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (0) \dots & + & - & + & + & - \end{array};$$

il s'ensuit que l'intervalle ne peut contenir aucune racine.

3° Les deux suites (0) et (1) donnent pour la série des indices

$$\begin{array}{cccccc} & X^{iv} & X''' & X'' & X' & X \\ (0) \dots & + & - & + & + & - \\ & 24 & 6 & 8 & 1 & 4 \\ & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ (1) \dots & + & + & + & + & + \\ & 24 & 18 & 14 & 10 & 1 \end{array}$$

Il s'agit de procéder à la séparation de ces racines, et de reconnaître si elles sont toutes les trois réelles, ou si deux sont imaginaires. On parcourra la série des indices de droite à gauche, depuis le dernier terme 3 jusqu'à ce l'on trouve pour la première fois l'indice 1 : on le trouve sous la fonction X''' . Cet indice est suivi de 2 , ce qui a lieu nécessairement ; et comme il est précédé de 0 , on

voit que la condition des trois indices consécutifs 0 1 2 est satisfaite. On est averti par cette condition qu'il faut procéder à l'application de la règle (article 28) pour la distinction des racines imaginaires.

Nous avons placé au-dessous des signes les valeurs numériques qui proviennent des substitutions. Les fonctions auxquelles répondent les trois indices consécutifs 0 1 2 sont $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''(x)$. On considérera, suivant la règle énoncée, les quotients $\frac{8}{6}$ et $\frac{14}{18}$, sans avoir égard aux signes de ces résultats. Si l'un de ces quotients, ou si leur somme, surpasse la différence 1 des deux limites, on est assuré que deux des racines indiquées dans l'intervalle sont imaginaires. Or cette condition a lieu, puisque la différence des limites est seulement 1 : donc deux racines de l'équation proposée manquent entre les limites 0 et 1. On doit maintenant, comme la règle le prescrit, retrancher 2 de chaque indice à partir du dernier des trois indices consécutifs 0 1 2. On formera ainsi la nouvelle série de l'intervalle,

$$\begin{array}{cccccc} & X'' & X''' & X'' & X' & X \\ (0) \dots & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1. \\ (1) \dots & & & & & \end{array}$$

Le dernier indice de la nouvelle série étant 1, il s'ensuit que la proposée a entre 0 et 1 une seule racine réelle : elle est entièrement séparée des autres.

L'opération de la distinction des racines est terminée, parce qu'il n'y a maintenant aucun des intervalles partiels dont le dernier indice ne soit ou 0, ou 1. On en conclut qu'une première racine réelle est comprise — 10 et — 1, qu'une seconde racine réelle est comprise entre 0 et 1, et que les deux autres racines sont imaginaires.

(40) Nous déduirons de la même règle la résolution de l'équation

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Ayant formé les fonctions

$$X \dots x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$X' \dots 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2$$

$$X'' \dots 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4$$

$$X''' \dots 60x^2 + 24x + 6$$

$$X^{iv} \dots 120x + 24$$

$$X^v \dots 120,$$

on trouve

| | X ^v | X ^{iv} | X ^{'''} | X ^{''} | X' | X |
|-----------|----------------|-----------------|------------------|-----------------|----|---|
| (-1)..... | + | - | + | - | + | - |
| | | 96 | 42 | 18 | 10 | 2 |
| | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| (0)..... | + | + | + | - | + | - |
| | | 24 | 6 | 4 | 2 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| (1)..... | + | + | + | + | + | + |
| | | 144 | 90 | 36 | 10 | 2 |

Nous avons écrit les valeurs numériques au-dessous de leur signe, et la série des indices propre à chaque intervalle : voici les conséquences que donne la comparaison des suites.

1° Toutes les racines doivent être cherchées dans l'intervalle de -1 à $+1$, parce que l'une des suites a cinq changements de signes et que l'autre n'en a aucun.

2° Deux racines sont indiquées entre -1 et 0 . Le dernier indice étant 2 , il faut, à partir de l'extrémité à droite, remonter vers la gauche dans cette série des indices, jusqu'à ce qu'on trouve 1 pour la première fois. Cet indice 1 correspond à la fonction X^{iv} ; il est suivi de 2 et précédé de 0 ; on appliquera donc la règle de l'article 28 aux fonctions X^v , X^{iv} , X''' , qui répondent aux trois indices consécutifs $0\ 1\ 2$. Il faut considérer les valeurs des quotients $\frac{42}{96}$ et $\frac{6}{24}$, abstraction faite des signes, et examiner si l'un de ces quotients, ou leur somme, surpasse ou du moins égale la différence 1

des deux limites 0 et -1 . Cette condition n'ayant point lieu, on en conclut que les limites -1 et 0 ne sont point encore assez approchées pour que l'on puisse distinguer par une seule opération si les deux racines indiquées sont réelles ou imaginaires : il faut diviser cet intervalle. Mais avant de procéder à la substitution d'un nombre intermédiaire, on doit, conformément à la règle de l'article 28, s'assurer que l'équation $X''' = 0$ n'a pas deux racines égales comprises entre les limites -1 et 0. Si cela avait lieu, les deux fonctions

$$60x^2 + 24x + 6 \text{ et } 120x + 24$$

auraient un facteur commun; ce facteur n'existant pas, le cas des racines égales est exclus.

Il reste à substituer un nombre compris -1 et 0, et de l'ordre décimal immédiatement suivant, c'est-à-dire exprimé par un seul chiffre décimal. Substituant $-0,5$, on forme cette table :

| | | | | | | |
|------------------------|---|----|---|----------------|-----------------|-----------------|
| $(-1) \dots$ | + | - | + | - | + | - |
| $(-\frac{1}{2}) \dots$ | + | - | + | - | + | - |
| | | 36 | 9 | $\frac{52}{8}$ | $\frac{73}{16}$ | $\frac{83}{32}$ |
| | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| $(0) \dots$ | + | + | + | - | + | - |
| | | 24 | 6 | 4 | 2 | 1 |

Le premier intervalle partiel, qui est celui de -1 à $-\frac{1}{2}$, ne peut contenir aucune racine, puisque les deux séries sont les mêmes. Pour le second intervalle partiel la série des indices est 0 1 2 2 2 2. L'indice 1 le plus voisin de l'extrémité à droite étant suivi de 2 et précédé de 0, on doit, selon la règle de l'article 28, considérer les valeurs numériques des quotients $\frac{9}{36}$ et $\frac{6}{24}$, pour connaître si l'un de ces quotients, ou si leur somme, surpasse ou du moins égale la différence $\frac{1}{2}$ des deux limites. Cette condition ayant lieu, on est assuré que les deux racines indiquées dans l'intervalle de $-\frac{1}{2}$ à 0 sont imaginaires.

Il ne reste plus que l'intervalle de 0 à $+1$, dans lequel trois ra-

cines sont indiquées. Il s'agit de découvrir si ces trois racines sont réelles, ou si deux d'entre elles sont imaginaires. Il suffit pour cela d'appliquer la même règle à l'intervalle

| | X ^v | X ^{iv} | X ⁱⁱⁱ | X ⁱⁱ | X ⁱ | X |
|---------|----------------|-----------------|------------------|-----------------|----------------|---|
| (0) ... | + | + | + | — | + | — |
| | | 24 | 6 | 4 | 2 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| (1) ... | + | + | + | + | + | + |
| | | 144 | 90 | 36 | 10 | 2 |

On voit que dans la série des indices 0 0 0 1 2 3, l'indice 1 le plus voisin de l'extrémité à droite est précédé de 0. La condition relative aux trois indices consécutifs 0 1 2 subsistant, on écrira les quotients $\frac{2}{4}$ et $\frac{10}{36}$, pour connaître si l'un de ces quotients, ou si leur somme, surpasse ou égale la différence 1 des deux limites. Cette condition n'ayant pas lieu, on en conclut que les limites 0 et 1 ne sont pas assez voisines pour qu'on puisse distinguer la nature des racines par une seule opération.

Il faut donc substituer un nombre compris entre 0 et 1, et exprimé par un seul chiffre décimal. Mais avant de faire cette substitution, il faut s'assurer que l'équation $X' = 0$ n'a point de racines réelles égales comprises entre 0 et 1. Or cela est certain, parce que les polynomes X' et X'' , ou

$$5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \text{ et } 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4,$$

n'ont pas de facteur commun.

Si l'on substitue le nombre intermédiaire 0,5 on aura les résultats suivants :

| | X ^v | X ^{iv} | X ⁱⁱⁱ | X ⁱⁱ | X ⁱ | X |
|------------------------|----------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|----------------|
| (0) | + | + | + | — | + | — |
| | | 24 | 6 | 4 | 2 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| ($\frac{1}{2}$) | + | + | + | + | + | — |
| | | 84 | 33 | $\frac{9}{2}$ | $\frac{25}{16}$ | $\frac{9}{32}$ |
| (1) | + | + | + | + | + | + |

Le second intervalle partiel compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 contient une seule racine réelle, qui est entièrement séparée. Quant à l'intervalle partiel de 0 à $\frac{1}{2}$, deux autres racines sont indiquées. La série des indices 0 0 0 1 2 2 offrant la condition des trois intervalles consécutifs 0 1 2, on formera les quotients $\frac{2}{4}$ et $\frac{25}{16} : \frac{9}{2}$, pour connaître si l'un de ces quotients, ou si leur somme, surpasse ou égale la différence $\frac{1}{2}$ des deux limites. Cette condition ayant lieu, on connaît avec certitude que les deux racines indiquées dans l'intervalle de 0 à $\frac{1}{2}$ sont imaginaires. En retranchant 2 de chaque indice à partir du terme 2 qui est le dernier des trois indices consécutifs 0 1 2, on aura pour la nouvelle suite des indices 0 0 0 1 0 0. Donc l'équation proposée a une seule racine réelle entre 0,5 et 1 : les quatre autres racines sont imaginaires.

(41) On propose, pour troisième exemple, de résoudre l'équation

$$x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^3 + 4567x - 89012 = 0.$$

On écrit ces fonctions

$$X = x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^3 + 4567x - 89012$$

$$X' = 6x^5 - 60x^4 + 240x^3 + 246x + 4567$$

$$X'' = 30x^4 - 240x^3 + 720x^2 + 246$$

$$X''' = 120x^3 - 720x^2 + 1440x$$

$$X^{iv} = 360x^2 - 1440x + 1440$$

$$X^v = 720x - 1440$$

$$X^{vi} = 720;$$

et substituant les nombres

$$-1, -10, \text{ etc.}$$

$$0$$

$$1, 10, \text{ etc.},$$

on trouve les résultats suivants :

| | X^v | X^v | X^{iv} | X''' | X'' | X' | X |
|---------------|-------|-------|----------|--------|-------|------|-----|
| $(-10) \dots$ | + | - | + | - | + | - | + |
| $(-1) \dots$ | + | - | + | - | + | - | - |
| $(0) \dots$ | + | - | + | 0 | + | + | - |
| $(1) \dots$ | + | - | + | + | + | + | - |
| | | 720 | 360 | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| $(10) \dots$ | + | + | + | + | + | + | + |
| | | 5760 | 23040 | | | | |

A l'inspection de cette table on voit que toutes les racines doivent être cherchées entre les limites -10 et $+10$, puisque l'une des suites a six changements, et que l'autre n'en a aucun.

La comparaison des suites (< 0) et (> 0) montre qu'il manque deux racines dans l'intervalle des limites < 0 et > 0 .

La suite (-1) ayant cinq changements de signe, et la suite (-10) ayant six changements de signe, l'équation a une seule racine réelle entre -10 et -1 .

Les suites (-1) et (< 0) ont le même nombre de changements de signe; par conséquent il ne peut y avoir aucune racine entre les limites -1 et 0 . Il en est de même des suites (> 0) et (1) qui ont l'une et l'autre trois changements de signes. Ainsi l'on ne peut chercher aucune racine entre les limites 0 et 1 .

Il reste l'intervalle des limites 1 et 10 , dans lequel trois racines sont indiquées. La série des indices propres à cet intervalle est

$$0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3.$$

Le premier indice que l'on trouve égal à 1 , en parcourant la série des indices de droite à gauche à partir du dernier 3 , est placé entre les indices 0 et 2 . On est averti par ces trois indices consécutifs $0 \ 1 \ 2$ qu'il faut appliquer immédiatement la règle de l'article 28. On écrira donc les quotients $\frac{360}{720}$ et $\frac{23040}{5760}$, pour connaître si l'un de ces quotients, ou leur somme, surpasse ou égale la différence 9 des deux

limites. Cette condition n'ayant pas lieu, on conclut que l'intervalle de 1 à 10 est trop grand pour qu'une seule opération fasse connaître la nature des racines. Mais avant de diviser cet intervalle, il faut examiner si les fonctions X'' et X' , qui répondent aux deux derniers des trois indices consécutifs 0 1 2, n'ont point un facteur commun, et si ce facteur n'est point rendu nul par une valeur de x comprise entre les limites. La comparaison des fonctions

$$360x^2 - 1440x + 1440 \text{ et } 720x - 1440$$

montre qu'elles ont un facteur commun, savoir $\frac{1}{2}x - 1$, et que ce facteur est rendu nul par une valeur 2 comprise entre 1 et 10. Le même facteur $\frac{1}{2}x - 1$ n'est pas commun à toutes les fonctions X''' , X'' , X' , X : il faut en conclure, conformément à la règle de l'art. 35, que l'équation proposée manque de deux racines dans l'intervalle de 1 à 10. Par conséquent on retranchera 2 de tous les indices, depuis le dernier des trois indices consécutifs 0 1 2, et l'on aura pour la nouvelle série des indices de l'intervalle compris entre 1 et 10

0 1 0 0 0 0 1.

Ainsi la séparation des racines est achevée : l'équation proposée a une racine réelle entre -10 et 1 ; deux racines manquent dans l'intervalle infiniment petit compris entre <0 et >0 ; deux racines manquent également dans l'intervalle compris entre 1 et 10 ; enfin, dans ce même intervalle, l'équation a une seconde racine réelle entièrement séparée.

(42) Afin de mieux faire connaître la diversité des cas et l'usage de la règle, nous réunissons dans un seul tableau les exemples cités dans les articles précédents.

P. Art.

| | |
|---|---|
| <p>104. (12) X ... $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$
 135. (36) X' ... $5x^4 - 12x^3 - 72x^2 + 190x - 46$
 X'' ... $20x^3 - 36x^2 - 144x + 190$
 X''' ... $60x^2 - 72x - 144$
 X^{iv} ... $120x - 72$
 X^v ... 120</p> | $\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccc} X^v & X^{iv} & X''' & X'' & X' & X \\ (-10) & + & - & + & - & + & - \\ (-1) & + & - & + & - & + & + \\ (0) & + & - & - & + & - & - \\ (1) & + & + & - & + & + & - \\ (2) & + & + & - & - & + & - \\ & & & & & 30 & 21 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & & 43 & 32 \end{array} \\ \text{une racine.} \\ \text{une racine.} \\ \text{deux racines indiq.} \\ \frac{21}{30} + \frac{32}{43} > 1. \text{ imag.} \\ \text{une racine.} \end{array} \right.$ |
| <p>105. (13) X ... $x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$
 137. (37) X' ... $4x^3 - 12x^2 - 3$
 X'' ... $12x^2 - 24x$
 X''' ... $24x - 24$
 X^{iv} ... 24</p> | $\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{ccccc} X^{iv} & X''' & X'' & X' & X \\ (0) & \dots & + & - & + \\ & & & 0 & - \\ (1) & \dots & + & 0 & - & + \\ & & & + & - & \\ (2) & \dots & + & + & 0 & - & + \\ (3) & \dots & + & + & + & - & - \\ (10) & \dots & + & + & + & + & + \end{array} \\ \text{deux racines imag.} \\ \text{règle du doub. signe} \\ \text{une racine.} \\ \text{une racine.} \end{array} \right.$ |
| <p>107. (14) X ... $x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$
 125. (29) X' ... $3x^2 + 4x - 3$
 X'' ... $6x + 4$
 X''' ... 6</p> | $\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccc} X''' & X'' & X' & X \\ (-10) & \dots & + & - & + & - \\ (-1) & \dots & + & - & - & + \\ (0) & \dots & + & + & - & + \\ & & & & 3 & 2 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \\ (1) & \dots & + & + & + & + \\ & & & & 4 & 2 \end{array} \\ \text{une racine.} \\ \text{deux racines indiq.} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{14} > 1. \text{ imagin.} \end{array} \right.$ |
| <p>143. (39) X ... $x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0$
 X' ... $4x^3 - 3x^2 + 8x + 1$
 X'' ... $12x^2 - 6x + 8$
 X''' ... $24x - 6$
 X^{iv} ... 24</p> | $\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccc} X^{iv} & X''' & X'' & X' & X \\ (-10) & \dots & + & - & + & - & + \\ (-1) & \dots & + & - & + & - & - \\ (0) & \dots & + & - & + & + & - \\ & & & & 6 & 8 \\ & & & & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ (1) & \dots & + & + & + & + & + \\ & & & & 18 & 14 \end{array} \\ \text{une racine.} \\ \text{trois racines indiq.} \\ \frac{8}{6} > 1. \text{ deux imagin.} \end{array} \right.$ |
| <p>149. (41) X ... $x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^3 + 4567x - 89012 = 0$
 X' ... $6x^5 - 60x^4 + 240x^3 + 246x + 4567$
 X'' ... $30x^4 - 240x^3 + 720x^2 + 246$
 X''' ... $120x^3 - 720x^2 + 1440x$
 X^{iv} ... $360x^2 - 1440x + 1440$
 X^v ... $720x - 1440$
 X^{vi} ... 720</p> | $\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{cccccc} X^{vi} & X^v & X^{iv} & X''' & X'' & X' & X \\ (-10) & \dots & + & - & + & - & + & - \\ (-1) & \dots & + & - & + & - & + & - \\ (0) & \dots & + & - & + & 0 & + & + & - \\ & & & & & + & & & \\ (1) & \dots & + & - & + & + & + & + & - \\ & & & & & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ (10) & \dots & + & + & + & + & + & + & + & + \end{array} \\ \text{une racine.} \\ \text{deux imaginaires.} \\ \text{règle du doub. signe} \\ \text{trois racines indiq.} \\ \text{deux imaginaires.} \\ X^{iv} \text{ a deux racines égales qui ne sont pas racines de X.} \end{array} \right.$ |

P. Art.

108. (15) $X \dots x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36 = 0$
 126. (30) $X' \dots 5x^4 + 4x^3 + 2x - 25$
 $X'' \dots 20x^3 + 12x^2 + 2$
 $X''' \dots 60x^2 + 24x$
 $X^{IV} \dots 120x + 24$
 $X^V \dots 120$

| | | | | | | | |
|-------|-------|----------|--------|-------|------|-----|---|
| | X^V | X^{IV} | X''' | X'' | X' | X | |
| (-10) | + | - | + | - | + | - | une racine. |
| (-2) | + | - | + | - | + | + | |
| (-1) | + | - | + | - | - | - | deux imaginaires.
règle dudoub.signe |
| (0) | + | + | 0 | + | - | - | |
| (1) | + | + | + | + | - | - | une racine. |
| (10) | + | + | + | + | + | + | |

111. (17) $X \dots x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$
 $X' \dots 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5$
 $X'' \dots 42x^5 - 40x^3 - 18x + 8$
 $X''' \dots 210x^4 - 120x^2$
 $X^{IV} \dots 840x^3 - 240x - 18$
 $X^V \dots 2520x^2 - 240$
 $X^{VI} \dots 5040x$
 $X^{VII} \dots 5040$

| | | | | | | | | | |
|-------|-----------|----------|-------|----------|--------|-------|------|-----|---------------------|
| | X^{VII} | X^{VI} | X^V | X^{IV} | X''' | X'' | X' | X | |
| (-10) | + | - | + | - | + | - | + | - | une racine. |
| (-1) | + | - | + | - | + | + | - | + | |
| (0) | + | 0 | - | 0 | - | + | - | + | deux racines indiq. |
| (1) | + | + | + | + | + | - | - | + | |
| (10) | + | + | + | + | + | + | + | + | |

112. (18) $X \dots x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0$
 $X' \dots 5x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 6x - 2$
 $X'' \dots 20x^3 + 36x^2 + 12x - 6$
 $X''' \dots 60x^2 + 72x + 12$
 $X^{IV} \dots 120x + 72$
 $X^V \dots 120$

| | | | | | | | |
|------|-------|----------|--------|-------|------|-----|---|
| | X^V | X^{IV} | X''' | X'' | X' | X | |
| (-1) | + | - | 0 | - | + | - | deux imaginaires.
règle dudoub.signe |
| (0) | + | + | + | - | - | - | |
| (1) | + | + | + | + | + | - | une racine. |
| (10) | + | + | + | + | + | + | |

113. (19) $X \dots x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$
 $X' \dots 5x^4 - 30x^2 + 6$
 $X'' \dots 20x^3 - 60x$
 $X''' \dots 60x^2 - 60$
 $X^{IV} \dots 120x$
 $X^V \dots 120$

| | | | | | | | |
|-------|-------|----------|--------|-------|------|-----|-------------|
| | X^V | X^{IV} | X''' | X'' | X' | X | |
| (-10) | + | - | + | - | + | - | une racine. |
| (-1) | + | - | 0 | + | - | + | |
| (0) | + | 0 | - | 0 | + | + | une racine. |
| (1) | + | + | 0 | - | - | - | |
| (10) | + | + | + | + | + | + | |

145. (40) $X \dots x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$
 $X' \dots 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2$
 $X'' \dots 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4$
 $X''' \dots 60x^2 + 24x + 6$
 $X^{IV} \dots 120x + 24$
 $X^V \dots 120$

| | | | | | | | |
|--------|-------|----------|--------|-------|------|-----|---|
| | X^V | X^{IV} | X''' | X'' | X' | X | |
| (-1) | + | - | + | - | + | - | deux racines indiq. |
| (-1/2) | + | - | + | - | + | - | |
| (0) | + | + | + | - | + | - | deux racines indiq.
$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. imaginaires. |
| (1/2) | + | + | + | + | + | - | |
| (1) | + | + | + | + | + | + | |

(43) Nous avons exposé jusqu'ici la première partie de notre méthode de résolution, celle qui avait pour objet de déterminer les limites et la nature des racines. On écrit les fonctions différentielles des divers ordres, on substitue les nombres les plus simples dans la série de ces fonctions, et l'on marque les signes des résultats. A l'inspection de ces suites on connaît les seuls intervalles où les racines doivent être cherchées. Il reste à découvrir si les racines indiquées dans un intervalle donné sont réelles, ou s'il en manque un nombre égal à 2, ou 4, ou 6, etc.; car il ne peut en manquer qu'un nombre pair. Une seconde règle résout complètement cette question, et par un procédé d'une application facile. Alors la nature et les limites des racines sont déterminées; chacune des racines réelles est placée seule dans un intervalle dont les limites sont connues. Il faut maintenant poursuivre le calcul de chaque racine, afin de connaître tous les chiffres qui l'expriment, si le nombre en est déterminé, ou de trouver autant de chiffres décimaux exacts qu'on peut le juger nécessaire. Cette question est l'objet de la seconde partie de la méthode. Avant de passer à cette autre recherche, nous insisterons sur une des conséquences principales des théorèmes précédents, celle qui concerne les propriétés générales des racines.

Nous avons vu, article 7, qu'en substituant dans la suite des fonctions un nombre a qui croît par degrés insensibles depuis $-\frac{1}{2}$ jusqu'à $+\frac{1}{2}$, la suite des signes perd successivement tous les changements de signe qu'elle contenait. Il est évident que cette diminution du nombre des changements ne peut s'opérer que lorsque la substitution de a fait évanouir une ou plusieurs des fonctions. Ces valeurs de a dont la substitution rend une des fonctions nulle sont de deux sortes: les unes sont telles que la suite des signes ne perd aucun changement, et cela arrive parce que la même substitution qui rend nulle une des fonctions, telle que $f^{(n)}(x)$, donne deux signes différents aux fonctions précédente et suivante, savoir $f^{(n+1)}(x)$ et $f^{(n-1)}(x)$; les autres valeurs de a sont telles que la suite des signes perd un certain nombre de changements. Ces valeurs du nombre

substitué sont elles-mêmes de deux espèces : les unes indiquent les racines réelles, et les autres les racines imaginaires. Lorsque la substitution fait évanouir la fonction $f(x)$ qui est le premier membre de l'équation proposée, la valeur substituée est une des racines réelles de l'équation. Lorsque la substitution d'une valeur a ne fait pas évanouir $f(x)$, mais rend nulle une des fonctions intermédiaires $f^{(n)}(x)$, et en même temps donne deux signes semblables aux fonctions précédente et suivante $f^{(n+1)}(x)$ et $f^{(n-1)}(x)$, le nombre substitué a n'est pas une racine réelle de l'équation, mais une valeur *indicatrice de deux racines imaginaires*.

Il y a donc deux espèces d'intervalles, ceux où il existe une seule racine réelle, et ceux où il manque deux racines. Ainsi les racines appelées imaginaires manquent en de certains intervalles, et non entre d'autres limites; c'est-à-dire qu'il y a de certaines limites a et b , telles que si l'on prouve d'une manière quelconque que l'équation n'a point deux racines réelles dans cet intervalle, on est assuré par cela même que l'équation a, pour cette cause, deux racines imaginaires. La valeur *indicatrice de deux racines imaginaires conjuguées* est celle dont la substitution fait évanouir une des fonctions intermédiaires, et donne deux signes semblables aux fonctions précédente et suivante. Si l'équation proposée a toutes ses racines réelles, il n'existe aucune de ces valeurs *indicatrices* que l'on vient de définir. Dans ce cas toute substitution qui rend nulle une des fonctions intermédiaires donne deux signes différents à la fonction qui précède et à celle qui suit. En général l'équation a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de ces valeurs *indicatrices*. Au reste plusieurs de ces mêmes valeurs peuvent être égales, soit entre elles, soit aux racines réelles.

La première partie de notre méthode de résolution numérique a proprement pour objet de marquer 1° les intervalles dont chacun contient une racine réelle, 2° les intervalles dont chacun contient une valeur indicatrice des racines imaginaires. On a désigné les uns et les autres dans le tableau des équations choisies pour exemples.

