LIVRE DEUXIÈME.

MÉTHODE

POUR CALCULER LES VALEURS DES RACINES DONT LES LIMITES SONT CONNUES,

ET REMARQUES DIVERSES SUR LA CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS ET SUR LA DISTINCTION DES RACINES.

(1) On connaît deux limites a et b entre lesquelles est comprise une racine réelle d'une équation algébrique

$$f(x)=0,$$

et l'on est assuré qu'aucune autre racine de l'équation ne se trouve dans le même intervalle. On propose de déterminer des valeurs de plus en plus approchées de cette racine, afin de connaître tous les chiffres qui l'expriment, si le nombre de ces chiffres est limité, ou de trouver autant de chiffres exacts qu'on le juge nécessaire.

Le procédé d'approximation le plus propre à faciliter le calcul des racines est celui que l'on doit à Newton, et qui est généralement connu. Il consiste à substituer au lieu de x dans le premier membre $f(x)$ la quantité $a+x'$, a désignant la première valeur approchée. On omet dans le résultat les termes qui contiennent les puissances de x' supérieures à la première, et l'on a pour déterminer x' une équation du premier degré. En ajoutant la valeur de x' que fournit cette équation à la première valeur approchée a, on trouve une valeur plus approchée a'; et l'on emploie cette seconde valeur approchée a' pour découvrir par le même procédé une troisième valeur approchée a''. On peut continuer indéfiniment l'application de cette règle, et l'on obtient des valeurs qui convergent de plus en plus, et très-rapidement, vers la racine cherchée. Cette méthode peut être présentée sous différentes formes : nous la regardons comme un élément fondamental de l'analyse, et il est important d'en conserver tous les avantages. Mais elle est sujette dans l'application à des difficultés singulières, qu'il faut examiner avec beaucoup de soin, et résoudre complètement.

La première condition qu'exige l'emploi de cette règle consiste à trouver une première valeur approchée. Cette question est déja résolue par notre méthode, puisque nous connaissons, pour chaque racine réelle, deux limites a et b entre lesquelles elle est seule comprise. Mais il reste à satisfaire à plusieurs autres conditions sans lesquelles l'opération pourrait être inexacte, et demeurerait toujours confuse. Nous énoncerons d'abord les conditions dont il s'agit; ensuite nous démontrerons les règles qu'il faut suivre pour y satisfaire.

(2) 1° Quoique les limites données a et b ne comprennent qu'une seule racine, elles peuvent, comme on le verra plus bas, n'être pas assez voisines pour qu'il y ait lieu de procéder à l'approximation. Dans ce cas on pourrait rapprocher les limites, en subdivisant l'intervalle; mais il est nécessaire de reconnaître, par un caractère certain, que l'on est parvenu à des limites assez rapprochées.

2° Quelque petite que soit la distance des deux limites, le procédé d'approximation ne peut être appliqué avec certitude qu'à l'une de ces limites, et non à l'autre. Nous prouverons dans un des articles suivants la vérité de cette remarque. Il faut donc distinguer la limite qui doit être choisie.

3° Les résultats successifs que l'on obtient sont des valeurs qui s'approchent continuellement de la racine cherchée : mais nous montrerons bientôt que ces valeurs ne sont pas alternativement plus grandes et plus petites que la racine. Cette propriété, qui appartient à d'autres modes d'approximation, n'a jamais lieu dans l'emploi de la méthode newtonienne : les valeurs approchées et successives a, a', a'', a''', etc. sont toutes plus grandes, ou toutes plus petites que la racine. Il en résulte que l'on ignore combien chaque opération donne de chiffres exacts, et cette incertitude est la cause principale d'imperfection de la règle. On pourrait sans doute faire varier la valeur approchée jusqu'à ce que la substitution dans la fonction donnât un signe différent de celui qu'on avait trouvé d'abord; mais ces substitutions exigeraient beaucoup de calcul, et, en opérant ainsi, on perdrait l'avantage principal de la méthode, qui consiste dans la rapidité de l'approximation. Nous résoudrons cette difficulté en assignant d'autres limites b, b', b'', b''', etc. qui sont moindres que la racine si les précédentes a, a', a'', a''', etc. sont plus grandes, et qui au contraire surpassent la racine si les précédentes sont moindres. Parlà on est assuré que les chiffres communs à l'une et l'autre limites appartiennent à la racine cherchée, et l'on ne conserve que ces chiffres exacts. Or nous démontrons que le nombre des chiffres exacts que fournit une seule opération croît rapidement, et qu'il augmente de quantités proportionnelles aux nombres 2, 4, 8, 16, etc. de la progression double. Nous en déduisons une règle certaine pour connaître d'avance, et indépendamment du calcul des secondes limites, jusqu'où l'on peut porter l'approximation des premières.

4° On doit ordonner le calcul en sorte qu'il n'y ait point d'opérations superflues, c'est-à-dire qu'on n'ait à effectuer que les opérations qui concourent à déterminer la racine, et dont aucune ne pourrait être omise.

Nous allons examiner successivement les questions que l'on vient d'énoncer, et en expliquer la solution.

(3) Les deux limites a et b, déterminées par notre méthode, comprennent une racine réelle α de l'équation $f(x)=0$, et l'on est assuré qu'il n'y a dans cet intervalle aucune autre racine de la même équation, parce que la suite (a) des résultats de la substitution de a dans les fonctions $f^{(m)}(x)$, $f^{(m-1)}(x)$, ... $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$ a seulement un changement de signe de moins que la suite (b) des résul-

tats de la substitution de la limite plus grande b dans les mêmes fonctions. En omettant dans chacune de ces deux suites (a) et (b) les deux derniers résultats, qui sont pour l'une $f'(a)$, $f(a)$, et pour l'autre $f'(b)$, $f(b)$, on comparera les deux limites restantes, et l'on connaîtra si l'équation $f''(x)=0$ peut avoir quelques racines entre les mêmes limites a et b. Or s'il existe dans cet intervalle de telles racines, c'est-à-dire des valeurs de x qui rendent nulle la fonction $f''(x)$, chacune de ces valeurs diffère de la racine α qui résout l'équation $f(x)=0$. Il faut seulement excepter le cas singulier où les fonctions $f''(x)$ et $f(x)$ auraient un diviseur commun $\psi(x)$. Il est facile de juger, par l'emploi du procédé connu, si ce facteur $\psi(x)$ existe; et, dans ce cas singulier, on aurait à résoudre séparément l'équation $\psi(x)=0$. On appliquerait donc à cette équation $\psi(x)=0$, et non à l'équation plus composée $f(x)=0$, les règles qui servent à trouver les racines.

Si le facteur $\psi(x)$ dont il s'agit n'existe pas, toute valeur qui rendrait nulle la fonction $f''(x)$ diffère de la racine α de l'équation $f(x)=0$. On pourra donc rapprocher les deux limites a et b, et les remplacer par deux autres a' et b' assez voisines pour qu'elles comprennent entre elles, comme les précédentes, la racine α de l'équation $f(x)=0$, sans comprendre aucune des racines de l'équation $f''(x)=0$. Pour obtenir ces nouvelles limites a' et b', on divisera l'intervalle des deux premières a et b en substituant un nombre intermédiaire c; et l'on connaîtra si la racine cherchée α est entre a et c, ou si elle est entre c et b. Il est évident que l'on pourra facilement continuer la subdivision de l'intervalle jusqu'à ce que l'on trouve deux nombres a' et b' qui comprendront entre eux la racine α, sans qu'il y ait dans ce même intervalle aucune racine de l'équation $f''(x)=0$.

On peut comparer de la même manière les deux fonctions $f'(x)$ et $f(x)$. Si elles avaient un facteur commun $\varphi(x)$, ce qui est le cas des racines égales, on résoudrait séparément l'équation $\varphi(x)=0$. Si ce facteur $\varphi(x)$ n'existe pas, ou si l'équation $\varphi(x)=0$ n'a aucune racine γ comprise entre les limites a et b, on peut rapprocher ces limites par la division de l'intervalle, et obtenir d'autres limites plus voisines a' et b', telles que l'équation $f(x) = 0$ ayant une seule racine dans l'intervalle de a' et b', l'équation $f'(x) = 0$ n'ait aucune racine dans ce même intervalle.

Il s'ensuit que dans la recherche qui a pour objet de calculer la valeur d'une racine, nous pouvons toujours supposer les deux limites données a et b telles que l'équation $f(x) = 0$ ayant une seule racine entre a et b, l'équation $f'(x) = 0$ ne puisse avoir aucune racine dans cet intervalle, et qu'il en soit de même de l'équation $f''(x) = 0$.

(4) Il est facile de reconnaître comme il suit si ces deux conditions sont remplies. En effet les résultats des substitutions de a et de b dans les fonctions $f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x), \ldots f''(x), f'(x), f(x)$ sont déja connus par les opérations qui ont servi à déterminer les limites, et l'on a formé la série des indices propre à l'intervalle. On examinera si le dernier indice Δ étant 1, les deux indices précédents sont 0 et 0. Si cela a lieu, on est assuré que les équations $f'(x) = 0$ et $f''(x) = 0$ n'ont aucune racine entre les limites a et b, et nous prouverons que ce cas est celui où l'on peut appliquer avec certitude la règle d'approximation. Mais si les trois derniers indices ne sont pas 0 0 1, on diminuera l'intervalle jusqu'à ce que cette condition subsiste; ou, si cela est nécessaire, on considérera séparément les facteurs communs que nous avons désignés par $\psi(x)$ et $\varphi(x)$.

Si les deux suites comparées

$$f^{(m)}(a), f^{(m-1)}(a) \ldots\ldots f''(a), f'(a), f(a),$$
$$f^{(m)}(b), f^{(m-1)}(b) \ldots\ldots f''(b), f'(b), f(b),$$

sont telles qu'en omettant les derniers résultats $f(a)$ et $f(b)$, les signes soient les mêmes, il est évident que les conditions précédentes sont remplies : car la suite terminée par $f'(a)$ aurait autant de changements de signes que la suite terminée par $f'(b)$, et il en serait de même des deux suites terminées, l'une par $f''(a)$, l'autre par $f''(b)$. Donc si les suites (a) et (b) diffèrent seulement par le dernier signe, il ne restera plus qu'à procéder au calcul de la racine. On verra dans l'article suivant que cet état des deux suites ne constitue pas un cas particulier : il forme au contraire l'état général ; et c'est pour cela qu'on doit considérer avec attention cette disposition des deux suites. Lorsqu'elle ne subsiste pas d'abord, on peut toujours l'établir en rapprochant les limites.

Par exemple si l'équation proposée est

$$x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 = 0,$$

on trouve, en désignant le premier membre de cette équation par $f(x)$, que les nombres 0 et 10 substitués dans la suite des fonctions

$$f^{\text{v}}(x), f^{\text{iv}}(x), f'''(x), f''(x), f'(x), f(x),$$

donnent ces résultats

(0) ...	+	+	+	—	—	—
	0	0	0	1	1	1
(10) ...	+	+	+	+	+	+.

Il y a une seule racine entre les limites 0 et 10 : mais ces limites ne sont point assez approchées pour que les équations $f''(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ n'aient aucune racine dans ce même intervalle ; car on voit en formant la série des indices, qui est 0 0 0 1 1 1, que l'équation $f''(x) = 0$ a une racine entre 0 et 10, et qu'il en est de même de l'équation $f'(x) = 0$. Il faut donc substituer un nombre intermédiaire. Soit 1 ce nombre ; on trouve les résultats suivants :

(1) ...	+	+	+	+	+	—
	0	0	0	0	0	1
(10) ...	+	+	+	+	+	+.

Ainsi la racine cherchée est entre 1 et 10 ; et ces limites sont telles que l'équation $f'(x) = 0$ et l'équation $f''(x) = 0$ n'ont aucune racine dans ce même intervalle. C'est ce que montre la série des indices 0 0 0 0 0 1.

(5) Nous placerons ici la démonstration de deux lemmes qui

sont d'un usage très-fréquent dans le calcul des limites et des valeurs des racines.

1° Si les deux suites

$$\begin{array}{l}(a)\ldots f^{(m)}(a), f^{(m-1)}(a)\ldots\ldots f''(a),\ f'(a), f(a)\\(b)\ldots f^{(m)}(b), f^{(m-1)}(b)\ldots\ldots f''(b), f'(b), f(b)\end{array}$$

sont telles que chaque terme de la première ait le même signe que le terme correspondant de la seconde, la même condition aura lieu lorsqu'on substituera dans les fonctions au lieu de x un nombre intermédiaire quelconque c plus grand que a et moindre que b: chaque terme de la suite

$$(c)\ldots f^{(m)}(c),\ f^{(m-1)}(c)\ldots\ldots f''(c), f'(c), f(c)$$

aura le même signe que le terme correspondant de la suite (a).

En effet le signe de $f'(a)$ est par hypothèse le même que celui de $f'(b)$. Supposons que ce signe commun soit encore celui de toutes les valeurs que l'on trouve en substituant dans $f'(x)$ une valeur intermédiaire quelconque prise entre les limites a et b, en sorte que la fonction $f'(x)$ conserve son signe pour toutes les valeurs possibles de x qui tombent dans l'intervalle de a à b. Il faudra en conclure que la fonction $f(x)$ est toujours croissante ou toujours décroissante dans ce même intervalle, puisque la fluxion du premier ordre $f'(x)$ conserve le même signe $+$ ou $-$. Donc $f(a)$ ayant le même signe que $f(b)$, et $f(x)$ étant toujours croissante ou décroissante, cette même fonction $f(x)$ ne pourra point devenir nulle dans ce même intervalle. Donc en substituant dans $f(x)$ toutes les valeurs possibles comprises entre a et b, la fonction $f(x)$ conservera le même signe, savoir celui qui est commun à $f(a)$ et $f(b)$.

On démontre de la même manière que si la fonction $f''(x)$ conserve son signe dans tout l'intervalle des limites a et b, et si les valeurs extrêmes $f'(a)$ et $f'(b)$ ont le même signe, la fonction $f'(x)$ conservera dans le même intervalle le signe commun de $f'(a)$ et $f'(b)$.

En appliquant cette démonstration aux parties qui sont correspondantes dans les deux séries, et qui sont de plus en plus reculées vers la gauche, on arrivera jusqu'aux deux signes $\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix}$ qui précèdent tous les autres. Or il est évident que la fonction $f^{(m)}(x)$ conserve son signe, puisqu'elle ne contient pas la variable x. Donc on est assuré qu'une fonction $f(x)$ conserve le même signe dans un intervalle donné, lorsque ses deux valeurs extrêmes $f(a)$ et $f(b)$ ont le même signe, et lorsqu'il en est de même des valeurs correspondantes $f'(a)$ et $f'(b)$, $f''(a)$ et $f''(b)$, $f'''(a)$ et $f'''(b)$, etc., que l'on trouve en substituant les limites dans les fonctions différentielles de tous les ordres.

Les valeurs extrêmes $f(a)$ et $f(b)$ d'une fonction $f(x)$ étant de même signe, il pourrait arriver que les valeurs de $f(x)$ qui répondent aux valeurs intermédiaires de x changeassent de signe, en devenant nulles plusieurs fois dans l'intervalle. Mais cela ne peut avoir lieu si le signe des deux valeurs extrêmes $f'(a)$ et $f'(b)$ est le même, et si cette condition subsiste pour toutes les autres fonctions différentielles.

2° En général si l'on a comparé les deux suites

$$\begin{array}{l}(a)\ldots\ldots f^{(m)}(a),\ f^{(m-1)}(a)\ldots\ldots f''(a),\ f'(a),\ f(a),\\ (b)\ldots\ldots f^{(m)}(b),\ f^{(m-1)}(b)\ldots\ldots f''(b),\ f'(b),\ f(b);\end{array}$$

et si, ayant formé la série des indices, on trouve que le dernier indice Δ qui répond à $f(x)$ est o, on est assuré qu'en substituant un nombre intermédiaire c, et formant la série des indices propres à l'intervalle de a à c, et celle qui est propre à l'intervalle de c à b, le dernier terme de chacune de ces deux séries d'indices sera o. En effet si le dernier indice Δ' de la série propre à l'intervalle de a à c n'était pas o, mais égal à j, il s'ensuivrait que la suite des résultats perd un nombre j de changements de signe lorsque la grandeur substituée passe de la valeur a à la valeur c. Il faudrait donc qu'à partir de la valeur intermédiaire c jusqu'à la valeur extrême b, la suite des résultats pût acquérir un nombre j de changements de signes lorsqu'on augmente par degrés insensibles les grandeurs substituées. Or nous avons reconnu que cela est impossible, car le nombre des changements de signes ne peut que diminuer lorsqu'on augmente la quantité substituée.

On prouve de la même manière que le dernier terme de la série des indices propre à l'intervalle de c à b ne peut pas être un nombre j différent de o. Car il faudrait que dans l'intervalle précédent la suite des résultats eût acquis un nombre j de changements de signe, ce qui est impossible.

Donc si les deux suites comparées (a) et (b) sont telles que le dernier terme Δ de la série des indices propre à l'intervalle soit o, on trouvera toujours le dernier indice égal à o si l'on divise l'intervalle par la substitution de nombres intermédiaires : chaque intervalle partiel aura zéro pour dernier indice.

Les deux lemmes que l'on vient de démontrer sont, pour ainsi dire, évidents pour le cas où la fonction contient une seule variable, qui est le seul que nous considérons ici; et le premier lemme est un cas particulier du second. Il suffisait en quelque sorte d'énoncer ces deux propositions, qui sont des conséquences manifestes de la théorie précédente. Mais il a paru préférable de les développer, parce qu'elles s'appliquent aux fonctions formées d'un nombre quelconque de variables. Nous ne considérons point ici cette proposition générale, mais il serait facile de la démontrer par les mêmes principes; c'est un élément remarquable de l'analyse algébrique.

(6) Il nous reste maintenant à prouver que si les deux limites entre lesquelles on cherche une racine ont été assez rapprochées pour que les conditions énoncées dans l'article 3 soient remplies, on peut procéder sans aucune incertitude à l'approximation. Prenons pour exemple le cas où les derniers signes des deux suites comparées sont

$$\begin{array}{llll} & f''(x), & f'(x), & f(x) \\ (a)\ldots\ldots & + & + & - \\ & 0 & 0 & 1 \\ (b)\ldots\ldots & + & + & +, \end{array}$$

et supposons que les conditions dont il s'agit ayant lieu, c'est-à-dire que les trois derniers indices étant o o 1, il s'agît de calculer la valeur de la racine, que l'on sait être plus grande que a et moindre que b. Nous présenterons d'abord la solution analytique de la question; ensuite nous donnerons les constructions qui s'y rapportent et rendent les résultats très-sensibles, comme on peut en juger en passant d'avance à l'article 10.

Soit β la quantité inconnue qu'il faut retrancher de b pour trouver exactement la racine x, en sorte que x soit égale à $b-\beta$. On a donc

$$f(b-\beta)=0.$$

Si l'on développe cette expression jusqu'au second terme seulement, on a

$$f(b)-\beta f'(b-\beta\ldots\ldots b)=0.$$

On désigne par $f'(b-\beta\ldots\ldots b)$ ce que devient la fonction $f'(x)$ lorsqu'on met au lieu de x une certaine quantité $b-\beta\ldots\ldots b$, que l'on sait être comprise entre les valeurs extrêmes de la variable. Ces valeurs extrêmes sont $b-\beta$ et b, ou x et b. On a donc

$$\beta=\frac{f(b)}{f'(x\ldots b)}.$$

On en conclut

$$x=b-\frac{f(b)}{f'(x\ldots b)}.$$

On peut encore exprimer ainsi cette valeur de x,

$$x=b-\frac{f(b)}{f'(a\ldots b)};$$

car toute valeur comprise entre x et b est *a fortiori* comprise entre a et b.

Il faut observer que la fonction $f'(x)$, qui est par hypothèse positive lorsque $x=a$ et lorsque $x=b$, demeure constamment positive lorsqu'on donne à x une valeur quelconque comprise entre a et b; car ce signe ne pourrait changer que si une de ces valeurs intermédiaires rendait nulle la fonction $f'(x)$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc la fonction $f'(x)$ conserve le signe + dans tout l'intervalle compris entre a et b. Il en est de même de la fonction $f'''(x)$, et on le démontre de la même manière. Donc la fonction $f'(x)$, positive depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, est toujours croissante dans cet intervalle, puisque sa fluxion du premier ordre, savoir $f''(x)$, est toujours positive dans ce même intervalle.

Il suit de là que parmi toutes les valeurs que reçoit la fonction $f'(x)$ lorsqu'on fait varier x depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, la plus petite est $f'(a)$ et la plus grande $f'(b)$. Or la valeur exacte de x est ainsi exprimée,

$$x=b-\frac{f(b)}{f'(a\ldots b)}.$$

Donc en remplaçant $f'(a\ldots b)$ par $f'(b)$, on divisera $f(b)$ par une quantité trop grande. On retranchera donc de b moins qu'on ne devrait retrancher pour trouver la valeur exacte de la racine : donc $b-\frac{f(b)}{f'(b)}$ est une quantité b' moindre que b, et plus grande que la racine cherchée. Ainsi l'on a déduit de la plus grande limite b une valeur b' plus approchée de la racine que ne l'était la limite b, et qui surpasse encore la valeur de cette racine.

(7) On peut aussi employer la moindre limite pour trouver une valeur plus approchée de la racine. Soit $a+\alpha$ la valeur exacte de la racine x, α étant une quantité inconnue. On a l'équation

$$f(a+\alpha)=0,$$

ou, développant jusqu'au second terme seulement,

$$f(a)+\alpha f'(a\ldots\ldots a+\alpha)=0.$$

La valeur de la variable sous le signe f' est une certaine quantité que l'on sait être comprise entre a et $a+\alpha$, ou entre a et x. On a donc

$$\alpha=-\frac{f(a)}{f'(a\ldots x)};$$

et parce que toute quantité comprise entre a et x est l'une des valeurs comprises entre a et b, on a

$$\alpha = -\frac{f(a)}{f'(a\ldots b)}.$$

Donc

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a\ldots b)}.$$

Il faut remarquer que la valeur de $f(a)$ est négative, et que celle de $f'(a\ldots b)$ est positive: en sorte que le second terme de l'expression de x est une quantité positive ajoutée à la limite a. On a vu précédemment que la plus grande des valeurs que l'on puisse trouver en substituant dans $f'(a)$ une quantité comprise entre a et b est $f'(b)$. Si donc dans la dernière expression de la valeur de x, on écrit $f'(b)$ au lieu de $f'(a\ldots b)$, on rendra trop petite la quantité qui est ajoutée à la limite a. Donc la valeur exacte de x est certainement plus grande que

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

(8) Nous venons de déduire d'une première valeur approchée a, moindre que la racine, une seconde valeur plus approchée que a; puisque, sans cesser d'être moindre que la racine x, elle est plus grande que a. Soit a' cette nouvelle valeur approchée, on aura

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}.$$

Il ne reste plus qu'à combiner cette nouvelle limite a' avec la seconde valeur approchée b' que l'on a déduite de la première b, et qui est ainsi exprimée,

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Les limites a et b, dont l'une a est plus grande et l'autre b est moindre que x, sont donc remplacées par des limites plus voisines a' et b', dont l'une a' est moindre, et l'autre b' est plus grande que la racine cherchée x. Il faut remarquer que ce calcul des valeurs a' et b' se réduit à celui des quotients $\frac{f(a)}{f'(b)}, \frac{f(b)}{f'(b)}$. Or les trois résultats $f(a)$, $f(b)$, $f'(b)$ sont déja connus par le procédé qui a servi à déterminer les premières limites a et b. Il est donc très-facile d'obtenir les nouvelles valeurs a' et b' plus approchées que a et b.

En se bornant à l'application commune de la méthode newtonienne, on n'obtient qu'une seule limite, et par conséquent on ignore combien il faut calculer de chiffres lorsqu'on effectue la division indiquée. Mais le procédé que nous venons de démontrer n'est pas sujet à cette incertitude, puisque l'on connaît deux nouvelles limites a' et b', dont l'une est moindre et l'autre plus grande que la racine. Dans le calcul des valeurs de a' et b', qui sont $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$ et $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, on ne doit point employer les valeurs exactes des quotients, qui pourraient être trop composées. Il suffit de prolonger le calcul jusqu'à ce que les valeurs de a' et b' ne diffèrent que d'une très-petite quantité, en conservant cette condition que la valeur de a' doit être prise trop petite et la valeur de b' trop grande. Désignant donc par a' et b' les nouvelles valeurs que l'on aura ainsi déterminées, on emploiera ces secondes limites a' et b' pour en déduire suivant le même procédé de troisièmes limites a'' et b''. Si l'on continue indéfiniment ce genre d'approximation on trouvera des valeurs de plus en plus exactes, et l'on connaîtra toujours les limites de l'erreur.

(9) Nous allons maintenant chercher la mesure de la convergence, c'est-à-dire la loi suivant laquelle l'intervalle des limites diminue continuellement : l'expression de cette loi est un des éléments principaux de notre question.

Soit i la différence de deux limites a et b, entre lesquelles la racine x est comprise, et assez voisines pour que l'équation $f''(x) = 0$ et l'équation $f'(x) = 0$ n'aient aucune racine dans ce même intervalle. Nous avons vu 1° qu'il est facile de reconnaître si ces conditions sont remplies ; 2° que si elles subsistent on déduit des limites données a et b d'autres limites plus voisines a' et b', ainsi exprimées,

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Soit i' la différence $b' - a'$ des nouvelles limites; les différences $b - a$ et $b' - a'$, ou i et i', ont une relation qu'il s'agit de découvrir. On résout immédiatement cette question en substituant $b - i$ au lieu de a dans l'expression de a': on trouve ainsi les équations

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$a' = b - i - \frac{f(b-i)}{f'(b)}.$$

Développant $f(b - i)$ jusqu'au troisième terme, on a

$$a' = b - i - \frac{f(b) - if'(b) + \frac{i^2}{2} f''(b - i \ldots b)}{f'(b)}.$$

On désigne par $b - i \ldots b$ une valeur de la variable comprise entre $b - i$ et b, c'est-à-dire entre a et b. Retranchant de b' l'expression de a' ainsi développée, on trouve

$$b' - a' = i - \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{f(b)}{f'(b)} - i + \frac{i^2}{2} \frac{f''(a \ldots b)}{f'(b)},$$

ou

$$i' = i^2 \cdot \frac{f''(a \ldots b)}{2f'(b)}.$$

Ce résultat est très-remarquable: on voit que la différence i des deux premières limites étant connue, on trouverait la différence i' des deux nouvelles limites, en multipliant le carré de i par le coefficient $\frac{f''(a \ldots b)}{2f'(b)}$. Le dénominateur $2f'(b)$ est connu; le numérateur $f''(a \ldots b)$ est la valeur que l'on trouverait en substituant dans la fonction $f''(x)$ une quantité comprise entre a et b. Nous désignerons par C une valeur approchée du coefficient $\frac{f''(a \ldots b)}{2f'(b)}$, mais plus grande que ce coefficient. Il est facile, comme on le verra dans les articles suivants, de former cette limite C, et d'en déduire une valeur approchée Ci^2 de la différence i'. Nous montrerons aussi l'usage pratique que l'on doit faire de cette valeur approchée Ci^2, pour en conclure le nombre de chiffres exacts donnés par chaque opération. Nous ne voulons ici que faire remarquer le caractère de l'approximation qui résulte de l'emploi des deux limites.

En effet si la différence $b-a$ des deux premières est devenue une quantité fort petite, par exemple une unité décimale de septième ordre, ou $(\frac{1}{10})^7$, l'expression de i', ou Ci^2, montre que la différence i' des deux nouvelles limites est de même ordre que $(\frac{1}{10})^{14}$. Le nombre C a une valeur une fois déterminée, qui ne change plus dans le cours de l'approximation, et les différences i, i', i'', etc. deviennent des unités décimales d'un ordre très-élevé. Les secondes limites a' et b' pourraient encore être assez distantes, lorsque les premières a et b ont une différence considérable : mais la convergence de l'approximation devient de plus en plus rapide, et chaque opération fournit un nombre toujours croissant de chiffres exacts. Nous développerons davantage par la suite ces conséquences, et l'on reconnaîtra combien elles facilitent l'approximation.

(10) Après avoir indiqué les principes analytiques qui servent de fondement à cette recherche, nous allons faire connaître les constructions géométriques qui représentent les résultats. Ces constructions sont très-simples, et analogues à celles qui nous ont servi pour la distinction des racines imaginaires, article 23 du premier livre.

Nous prendrons pour exemple le cas cité dans l'article 6, c'est-à-dire le cas où les derniers signes des suites comparées sont

$$\begin{array}{llll} & f''(x), & f'(x), & f(x) \\ (a)\ldots\ldots & + & + & - \\ & 0 & 0 & 1 \\ (b)\ldots\ldots & + & + & +, \end{array}$$

et les trois derniers indices sont les nombres 0 0 1.

L'arc mn (fig. 7) représente une partie de la ligne courbe dont l'équation est

$$y=f(x).$$

Les abscisses oa, ob désignent les limites données a et b. Les ordonnées extrêmes am, bn sont les valeurs de $f(a)$ et $f(b)$. L'arc $m\alpha n$, qui correspond à l'intervalle ab des deux limites, n'a aucun point d'inflexion, parce que l'indice antepénultième étant o, l'équation $f''(x)=0$ n'a aucune racine entre ces limites. La courbe tourne sa convexité vers la partie inférieure de la planche, parce que la fonction $f''(x)$ conserve le signe $+$ dans tout l'intervalle ab. La fonction $f'(x)$ conservant aussi le signe $+$ dans cet intervalle, il s'ensuit que l'arc $m\alpha n$ est ascendant. Ainsi l'ordonnée $f(x)$ augmente continuellement lorsque l'abscisse augmente; cette ordonnée, d'abord négative au point a, s'approche de plus en plus de zéro, et lorsqu'elle est devenue positive elle s'éloigne de zéro : il y a un seul point d'intersection de la courbe et de l'axe au point α. Supposons que par le point n on mène une tangente à la courbe, et que l'on prolonge cette tangente jusqu'au point b' où elle rencontre l'axe, il est évident que le point b' étant compris entre α et b, l'abscisse ob' sera une valeur plus grande que la racine, mais plus approchée de cette racine que ne l'était l'abscisse ob. Si maintenant on mène par le point m une parallèle à la tangente nb', le point a' où cette parallèle coupe l'axe étant compris entre a et α, l'abscisse oa' sera une valeur moindre que la racine, et plus approchée de cette racine que ne l'était l'abscisse oa. Il ne reste plus qu'à exprimer les valeurs de ces nouvelles abscisses ob' et oa'. Or au point n le rapport de l'accroissement dy à l'accroissement dx, ou $\frac{dx f'(x)}{dx}$, est égal au rapport de l'ordonnée nb à la sous-tangente bb'. On a donc

$$\frac{dx f'(b)}{dx}=\frac{nb}{bb'}=\frac{f(b)}{bb'}:$$

donc la ligne bb' est égale à $\frac{f(b)}{f'(b)}$. Ainsi la valeur de l'abscisse ob' est

$$b-\frac{f(b)}{f'(b)},$$

ce qui est l'expression de la valeur approchée désignée par b' dans l'article 6.

Le rapport $\frac{dy}{dx}$ au point n, ou $\frac{dxf'(b)}{dx}$, est égal au rapport de l'ordonnée am (prise avec un signe contraire) à la partie aa' de l'axe interceptée entre l'ordonnée et la parallèle : on a donc

$$\frac{dxf'(b)}{dx} = -\frac{f(a)}{aa'}, \quad \text{ou} \quad aa' = -\frac{f(a)}{f'(b)}.$$

Ainsi l'abscisse oa' est égale à

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)},$$

ce qui est l'expression de la valeur approchée désignée par a' dans l'article 8.

Les deux résultats de l'approximation linéaire sont donc clairement représentés par cette construction. Les abscisses oa, ob, qui correspondent aux premières limites, sont remplacées par deux autres oa' et ob' que l'on détermine en menant par le point n une tangente à la courbe, et par le point m une parallèle à la tangente. Désignant ensuite par a' et b' les extrémités des sous-tangentes, ou plus généralement deux points dont l'un est entre a et l'extrémité a', l'autre entre b et l'extrémité b', on marquera sur la courbe les extrémités m' et n' des ordonnées qui passent par les points désignés a' et b', et l'on procédera à l'égard des points m' et n' comme on a procédé pour les points m et n. Il est évident que l'on aurait pu déduire de cette seule construction la connaissance des deux valeurs approchées $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ et $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$, que nous avons obtenue par le calcul, articles 6 et 7. La première de ces valeurs est celle que donne la règle newtonienne : en général cette règle consiste toujours à corriger la première valeur approchée, considérée comme une abscisse, en ajoutant à cette abscisse la valeur de la sous-tangente. L'autre valeur approchée $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$ complète l'approximation linéaire, ou du premier degré. Nous appelons ainsi celle qui ne dépend que des fluxions du premier ordre.

(11) La construction précédente rend manifestes les conditions qu'exige l'usage de l'approximation linéaire. En effet lorsque le point b (fig. 7) est très-voisin du point d'intersection α, la tangente menée par l'extrémité n de l'ordonnée bn rencontre l'axe en un point b' placé entre b et α, et la nouvelle valeur b' représentée par l'abscisse ob' est beaucoup plus approchée que la précédente b représentée par l'abscisse ob. Mais si la première valeur oB à laquelle le calcul s'applique correspond au point B, il est manifeste que la tangente menée par le point N peut rencontrer l'axe en un point fort éloigné de l'intersection α. Il arrive dans ce cas que la règle newtonienne ne donne point avec certitude la valeur de la racine cherchée : elle peut conduire à des résultats très-différents de celui qui est l'objet de la question. Pour que cette incertitude n'ait point lieu, il est nécessaire que le point n extrémité de l'ordonnée bn soit moins éloigné de l'origine o que le point d'inflexion le plus voisin r.

On voit aussi que l'approximation newtonienne ne peut pas être appliquée indifféremment à la limite a et à la limite b; car la tangente menée par l'extrémité m de l'ordonnée am pourrait rencontrer l'axe en un point plus éloigné de l'intersection α que ne l'était le point b. Les limites oa, ob (fig. 8), entre lesquelles il se trouve un seul point d'intersection α, pourraient être assez éloignées pour qu'il y eût dans cet intervalle ab plusieurs points p, p où la tangente est parallèle à l'axe, et plusieurs points d'inflexion r,r,r qui séparent un arc convexe d'un arc concave. Dans ce cas on ne doit point encore faire usage de l'approximation linéaire : il faut diminuer l'intervalle jusqu'à ce que l'arc qui répond au nouvel intervalle $a'b'$ ne contienne aucun point p de maximum ou minimum, ni aucun point d'inflexion r.

Dans le Traité de la Résolution des équations numériques, on avait déja montré que la règle donnée par Newton est incomplète, en ce qu'elle ne porte point un caractère qui assure l'exactitude de l'approximation. L'illustre auteur fait observer (Introduction, page x) qu'en négligeant à chaque opération des termes dont on ne connaît pas la valeur, on ne peut point juger du degré d'exactitude de chaque correction; et il ajoute (page 129, 2e édition) qu'il est difficile, et peut-être même impossible, de trouver *a priori* un caractère pour juger si la condition qui rend l'opération convergente est remplie ou non. Cette question importante est complètement résolue par la méthode que nous avons donnée dans le livre précédent pour déterminer les limites des racines : car on connaîtra par cette méthode si l'équation $f(x)=0$ a une seule racine réelle entre deux limites a et b, et si chacune des équations $f'(x)=0$ et $f''(x)=0$ n'a point de racine dans cet intervalle. De plus on peut, dans tous les cas, assigner pour chaque racine deux limites qui satisfont à ces conditions. Donc l'approximation linéaire, dont la règle newtonienne fait partie, peut toujours être appliquée.

La construction rend cette conséquence évidente pour le cas indiqué plus haut, car l'arc mn (fig. 7) ne peut avoir ni point d'inflexion, ni tangente parallèle à l'axe, puisque les équations $f''(x)=0$ et $f'(x)=0$ n'ont aucune racine réelle entre a et b. Il suffit donc dans ce cas d'appliquer la règle. La première valeur approchée b conduira à l'extrémité de la sous-tangente; ou si, pour faciliter le calcul, on s'arrête en un point β' voisin du point b', et compris entre b' et b, on passera suivant le même procédé de ce point β' à un autre point β'' plus rapproché du point d'intersection α. Cette approximation peut être continuée indéfiniment.

(12) La disposition de la figure n'est pas toujours celle que l'on vient d'indiquer. Il faut en général distinguer quatre cas, savoir ceux que représentent les figures 9, 10, 11, 12, et dont nous venons de considérer le premier. Dans ce premier cas (fig. 9), l'approximation se forme, comme nous l'avons dit, au moyen des tangentes successives, dont la première est menée par le point n. Dans le deuxième cas (fig. 10) la première tangente passe par le point m. Dans le troisième (fig. 11) elle passe aussi par l'extrémité m de l'ordonnée am. Pour le quatrième cas (fig. 12) la première tangente

part de l'extrémité n de l'ordonnée bn. La seule inspection des figures démontre la convergence des approximations : elle fait connaître aussi que, dans tous les cas, la condition de cette convergence consiste en ce que l'arc mn doit être exempt de sinuosités et de points d'inflexion. Or cela aura toujours lieu si les équations $f'(x)=0$ et $f''(x)=0$ n'ont aucune racine réelle entre a et b. On s'en assurera, comme nous l'avons dit, en substituant les limites a et b dans la suite des fonctions

$$f^{(m)}(x),\ f^{(m-1)}(x)\ldots\ldots f'''(x),\ f''(x),\ f'(x),\ f(x),$$

ce qui donnera deux suites de résultats, savoir :

$$(a)\ldots\ldots f^{(m)}(a),\ f^{(m-1)}(a)\ldots\ldots f'''(a),\ f''(a), f'(a), f(a),$$
$$(b)\ldots\ldots f^{(m)}(b),\ f^{(m-1)}(b)\ldots\ldots f'''(b),\ f''(b), f'(b),\ f(b).$$

On comparera les deux suites de signes (a) et (b). Si ces deux suites ne diffèrent que par le dernier signe, qui est positif pour l'une des limites et négatif pour l'autre, il est certain que les équations $f''(x)=0$, $f'(x)=0$ n'ont aucune racine dans l'intervalle. Donc l'arc mn n'a aucune tangente parallèle à l'axe, et n'a aucune inflexion. Par conséquent les limites sont assez voisines pour que l'on puisse, sans aucune incertitude, faire usage de la règle d'approximation.

On voit aussi qu'il n'est pas nécessaire que les deux suites de signes (a) et (b) ne diffèrent que par le dernier signe ; il suffit de comparer les nombres de changements de signes de ces deux suites. On procédera à cette comparaison, en allant de gauche à droite, et l'on s'arrêtera d'abord à la fonction $f''(x)$ inclusivement. Si l'on trouve que les deux limites ont jusqu'à ce terme le même nombre de changements de signes, on en conclura que l'équation $f''(x)=0$ n'a aucune racine entre les limites a et b. On comparera aussi les deux suites (a) et (b) en s'arrêtant à la fonction $f'(x)$ inclusivement, et s'il arrive que les deux suites aient encore le même nombre de changements de signes, on en conclura que l'équation $f'(x)=0$ n'a aucune racine entre les limites a et b. On pourra alors procéder immédiatement à l'application de la règle, et l'on sera assuré de trouver des limites a' et b' plus approchées que les précédentes a et b.

Cette comparaison des deux suites (a) et (b) se réduit, comme on le voit, à former la série des indices propre à l'intervalle des limites a et b, et à examiner si les trois derniers indices sont 0 0 1 : cette condition est nécessaire et suffisante. Si elle n'était pas remplie l'approximation serait erronée, ou du moins incertaine; on ne doit y procéder qu'après avoir rapproché les limites. Mais lorsque les trois derniers indices sont devenus 0 0 1, on est averti que les deux limites a et b sont assez voisines pour que l'on puisse faire usage de l'approximation linéaire. On passera ainsi des limites a et b à deux autres a' et b', qui auront la même propriété que a et b: l'une de ces nouvelles limites est donnée par la règle newtonienne; elle est représentée dans le premier cas (fig. 9) par

$$b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

(13) Les constructions font connaître très-clairement que la règle newtonienne ne doit pas être appliquée indifféremment à l'une ou à l'autre limite; dans le premier cas (fig. 9) l'arc est ascendant et concave; il tourne sa convexité vers la partie inférieure de la planche. Dans le second cas (fig. 10) l'arc est descendant et concave. Dans le troisième (fig. 11) l'arc est ascendant et convexe; il tourne sa convexité vers la partie supérieure de la planche. Dans le quatrième cas (fig. 12) l'arc est descendant et convexe.

Pour le premier cas les trois derniers signes de la suite (a) que l'on forme en substituant a dans les fonctions

$$f''(x),\ f'(x),\ f(x)$$

sont

$$+\quad +\quad -$$

et ceux de la suite (b) sont

$$+\quad +\quad +.$$

Pour le second cas, les trois derniers termes des deux suites sont

$$\begin{array}{llll} (a)\ldots\ldots & + & - & + \\ (b)\ldots\ldots & + & - & -. \end{array}$$

Pour le troisième cas, les trois derniers termes des deux suites, sont

$$\begin{array}{llll} (a)\ldots\ldots & - & + & - \\ (b)\ldots\ldots & - & + & +. \end{array}$$

Enfin pour le quatrième cas, les derniers termes des suites sont

$$\begin{array}{llll} (a)\ldots\ldots & - & - & + \\ (b)\ldots\ldots & - & - & -. \end{array}$$

Dans le premier et le quatrième cas c'est à la plus grande limite b que le procédé d'approximation doit être appliqué, parce que la tangente menée par le point n donne certainement une seconde valeur b' plus approchée que b. Dans le second et le troisième cas, c'est à la moindre limite a qu'il faut appliquer la règle, car la tangente menée par le point m donne certainement une valeur a' plus approchée que a.

Pour distinguer celle des deux abscisses qui représente la limite que l'on doit choisir, il suffit de remarquer que de l'extrémité de cette abscisse on voit la convexité de l'arc mn, et non point sa concavité. Cette limite peut être appelée *extérieure*, parce que le point qui la termine est hors de l'espace que la courbe renferme. L'autre limite est *intérieure*.

Il n'est pas moins facile de reconnaître les limites par les signes des deux suites (a) et (b). La limite extérieure est toujours celle qui donne le même signe pour $f(x)$ et $f''(x)$.

(14) On a vu que, pour l'application régulière de la règle, il est nécessaire de connaître deux limites a et b entre lesquelles est seule comprise la racine dont on calcule la valeur, et de s'assurer, en substituant les deux nombres a et b dans la suite des fonctions $f^{(m)}(x)\ldots f''(x), f'(x), f(x)$, que l'équation $f(x)=0$ ayant une

seule racine entre a et b, l'équation $f'(x)=0$ n'a aucune racine dans cet intervalle, et qu'il en est de même de l'équation $f''(x)=0$. On détermine ces limites par la méthode que nous avons expliquée dans le premier livre, et si elles n'étaient point d'abord assez rapprochées pour que la série des indices propre à l'intervalle eût pour derniers termes 0 0 1, il faudrait diminuer l'intervalle jusqu'à ce que cette condition fût remplie. Il est toujours facile d'obtenir ce dernier résultat, et les constructions rendent cette conséquence manifeste. L'arc de courbe mn dont l'intersection avec l'axe détermine la racine cherchée pourrait être assez étendu pour qu'il présentât des sinuosités et des inflexions, quoiqu'il n'eût qu'un seul point d'intersection : c'est ce qui arriverait, par exemple, si cet arc était celui que représente la figure 8. On pourrait supposer les limites a et b assez éloignées pour que l'arc mn eût deux points p et p de maximum ou de minimum, et trois points d'inflexion r, r, r, quoiqu'il eût un seul point d'intersection α. Mais il est manifeste qu'en rapprochant les limites on parviendrait à des valeurs plus voisines a' et b', telles que l'arc mn fût entièrement exempt de sinuosités. Il faut seulement remarquer les cas singuliers où l'on ne pourrait pas séparer ainsi les points d'inflexion, d'intersection, et de maxima ou minima. Cela arrive 1° si deux racines sont égales, 2° si le point d'inflexion r coïncide avec le point d'intersection α. On ne considère point ici le premier cas, parce que les deux racines n'étant point séparées, la série des indices propres à l'intervalle ne serait pas terminée, comme on le suppose, par le nombre 1 : le dernier indice serait 2. Quant au second cas, il est analogue à celui des racines égales, et l'un et l'autre sont faciles à distinguer. Pour le premier, les deux fonctions $f'(x)$ et $f(x)$ ont un facteur commun, et pour le second les deux fonctions $f''(x)$ et $f(x)$ ont un facteur commun. Il suffit donc de comparer ces fonctions afin de reconnaître si elles ont un diviseur commun, et nous avons vu précédemment que cette comparaison fait partie de la règle qui sert à déterminer les limites des racines.

(15) Nous résumerons maintenant l'énoncé général des conséquences que l'on vient de démontrer.

En appliquant à une équation proposée $f(x)=0$ la méthode que nous avons donnée pour la détermination des limites, on est parvenu à distinguer un intervalle terminé par deux nombres a et b, et dans lequel il se trouve une seule racine : on continuera comme il suit le calcul de cette racine. La série des indices propre à l'intervalle a, par hypothèse, pour dernier terme 1. On examinera si les deux suites de signes données par la substitution des limites a et b ne diffèrent que par le dernier signe, ce qui arrive le plus communément. Lorsque cette condition a lieu, on peut appliquer immédiatement la méthode d'approximation. On peut aussi procéder à cette application si les deux suites de signes étant différentes, les trois derniers termes de la série des indices sont 0 0 1. Si cette dernière condition n'est pas remplie, on est averti que les limites ne sont point encore assez voisines pour que l'on puisse faire usage avec certitude de la règle d'approximation : il faut diminuer l'intervalle des limites par la substitution d'un nombre intermédiaire. Mais avant de procéder à cette subdivision de l'intervalle, on examine si les fonctions $f''(x)$ et $f(x)$ ont un diviseur commun $\varphi(x)$. Si ce cas singulier se présentait, et si de plus l'équation $\varphi(x)=0$ avait une racine réelle α entre a et b, ce qu'il est très-facile de connaître d'après les principes que nous avons établis, il ne resterait plus qu'à déterminer cette racine α. On appliquerait donc la règle actuelle à l'équation $\varphi(x)=0$.

Lorsque le facteur commun n'existe pas, on arrive certainement, par la division de l'intervalle, à deux limites a et b telles que les trois derniers indices sont 0 0 1. On distingue alors celle des deux limites qui donne le même signe étant substituée dans $f''(x)$ et $f(x)$, et désignant par c cette limite extérieure, on substitue $c+\gamma$ au lieu de c dans l'équation $f(x)=0$; on omet dans le résultat les puissances de γ supérieures à la première, et l'on détermine ainsi, par la seule division numérique, une valeur approchée de γ, en prenant le quotient trop faible, abstraction faite du signe. On trouve ainsi une seconde valeur approchée c', et l'on pourrait continuer le même procédé de calcul en opérant sur la nouvelle limite c' de même que l'on a opéré sur la limite c.

(16) On voit par ce qui précède que cette application de la règle donnerait des valeurs de plus en plus approchées, mais qui seraient, comme nous l'avons dit article 2, ou toutes plus grandes que la racine cherchée, ou toutes moindres que cette racine. Il en résulterait qu'en effectuant la division numérique pour connaître une nouvelle partie de la racine, on ignorerait jusqu'à quel terme cette opération doit être portée. Si l'on se bornait à un seul chiffre du quotient on perdrait un des plus grands avantages du procédé; car une seule opération peut donner plusieurs chiffres exacts, et elle en donne d'autant plus que l'on en connaît déja un plus grand nombre. Si au contraire on portait le quotient au-delà du terme où les chiffres cessent d'appartenir à la racine, on rendrait les opérations ultérieures compliquées et confuses. Il est évident que l'application régulière d'un tel procédé exige que l'on connaisse, par une règle certaine, combien chaque opération donne de chiffres qui appartiennent effectivement à la racine. Or nous avons établi plus haut les principes qui résolvent complètement cette question. On en déduit la règle suivante pour le calcul des valeurs approchées des racines, lorsqu'on a trouvé deux limites a et b qui, substituées dans les fonctions $f^{(m)}(x) \ldots f''(x), f'(x), f(x)$, donnent deux suites de résultats dont les signes sont les mêmes, excepté ceux des deux derniers résultats; ou plus généralement lorsqu'on a trouvé deux limites a et b qui, substituées dans ces fonctions, donnent des résultats tels que la série des indices a pour ses trois derniers termes 0 0 1. Il faut, désignant par β celle des deux limites qui, substituée dans les fonctions $f''(x)$ et $f(x)$, donne deux résultats de même signe, former l'expression

$$\beta' = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)};$$

et désignant par α l'autre limite qui donne des signes différents pour $f''(\alpha)$ et $f(\alpha)$, on formera l'expression

$$\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\beta)}.$$

Les deux quantités α' et β' sont de nouvelles valeurs entre lesquelles la racine x est comprise, et qui sont plus approchées que α et β.

(17) Ces nouvelles limites $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ et $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\beta)}$, déduites des premières β et α, ne sont pas les seules que l'on puisse employer pour le calcul des racines : l'approximation linéaire comprend en général cinq limites qui dérivent des deux premières α et β. La construction (fig. 13) suffit pour indiquer ces cinq limites, et leurs propriétés. Il faut par l'extrémité de l'ordonnée qui répond à l'une des limites, mener une tangente à l'arc, et prolonger cette tangente jusqu'à sa rencontre avec l'axe des abscisses. On menera aussi une seconde tangente par l'extrémité de l'ordonnée qui répond à l'autre limite; puis on menera par l'extrémité de chacune de ces deux ordonnées une droite parallèle à la tangente qui passe par l'extrémité de l'autre ordonnée. Enfin on fera passer par les extrémités des deux mêmes ordonnées une sécante, en marquant son point d'intersection avec l'axe des abscisses. Cela posé, le système de ces cinq lignes droites représente toutes les conditions de l'approximation linéaire, ou du premier degré; c'est-à-dire que l'on connaîtra ainsi les nouvelles valeurs approchées que l'on peut déduire des deux limites primitives α et β par la seule résolution des équations du premier degré. On peut choisir, selon la nature des cas particuliers, celle des cinq limites qu'il est le plus facile de calculer; mais il n'arrive pas toujours que l'on est fondé à conclure que les deux nouvelles limites sont nécessairement plus approchées que les deux précédentes. Cette propriété n'appartient qu'aux deux quantités exprimées dans l'article précédent par

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \quad \text{et} \quad \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\beta)},$$

et à celle des cinq limites qui est indiquée par la sécante. Cette dernière a pour expression

$$\beta - f(\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}.$$

Le facteur qui multiplie $-f(\beta)$ est le quotient de la différence $\beta-\alpha$ des deux abscisses par la différence $f(\beta)-f(\alpha)$ des deux ordonnées; et dans l'expression précédente $\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$ le facteur qui multiplie $-f(\beta)$ est le quotient de la différentielle $d\beta$ de l'abscisse par $d\beta.f'(\beta)$, ou $d.f(\beta)$, qui est la différentielle de l'ordonnée : ainsi les deux expressions diffèrent en ce que le signe de la différentielle est remplacé par celui de la différence finie.

Lorsque la différence des limites est encore assez grande, les cinq nouvelles limites qui en dérivent diffèrent très-sensiblement les unes des autres, et il convient de choisir celles qui donnent les valeurs le plus approchées. Mais à mesure que l'intervalle des premières limites diminue, les nouvelles limites que l'on en peut déduire se rapprochent continuellement, et l'ordre de la convergence devient le même pour toutes. Nous ferons connaître par la suite la mesure de cette convergence.

(18) Le cas le plus simple de l'approximation linéaire est celui que présentent les équations à deux termes de la forme

$$x^m - A = 0.$$

L'exposant m est connu, et A est un nombre positif : ainsi le calcul se réduit à extraire la racine $m^{ième}$ du nombre A. Or l'opération arithmétique qui donne cette racine se déduit immédiatement des principes que nous avons exposés. En effet, si l'on applique à la fonction $f(x)$, ou $x^m - A$, les règles énoncées dans le premier livre, on connaît aussitôt le nombre des chiffres dont la racine est formée, et le premier de ces chiffres; on connaît donc ainsi deux premières limites α et β entre lesquelles la racine est comprise, et qui diffèrent d'une seule unité décimale d'un certain ordre. Les trois dernières fonctions sont

$$\begin{array}{ccc} f''(x) \quad , & f'(x), & f(x) \\ m(m-1)x^{m-2} & mx^{m-1} & x^m - \mathrm{A}. \end{array}$$

La suite de signes qui répond à la limite a est

$$(a) \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \qquad + \qquad -,$$

et la suite (b) est

$$(b) \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \qquad + \qquad +;$$

la série des indices a donc pour ses trois derniers termes

$$0 \qquad 0 \qquad 1,$$

et l'arc est celui que représente la figure 13. Si par le point m qui répond à la moindre limite a on mène la tangente $m\alpha$, on trouvera une sous-tangente $a\alpha$ qui, étant ajoutée à l'abscisse $\mathrm{o}a$, donnera une nouvelle abscisse $\mathrm{o}\alpha$ nécessairement plus grande que l'abscisse $\mathrm{o}x$ du point d'intersection. Ayant mené la tangente $n\beta$ par l'extrémité n de l'ordonnée qui répond à la plus grande limite b, si par le point m on fait passer une droite ma' parallèle à cette tangente, l'interceptée aa' étant ajoutée à l'abscisse $\mathrm{o}a$, donnera une nouvelle abscisse $\mathrm{o}a'$ nécessairement moindre que l'abscisse $\mathrm{o}x$ du point d'intersection. Par conséquent la racine est comprise entre $\mathrm{o}a'$ et $\mathrm{o}\alpha$: il faut donc ajouter à la partie déja connue a la valeur de $a\alpha$, qui est $\frac{f(a)}{f'(a)}$, ou $\frac{a^m - \mathrm{A}}{m a^{m-1}}$, et la somme surpassera certainement la racine x. Mais si l'on ajoute à la partie connue a la valeur de l'interceptée aa', la somme sera certainement moindre que la racine. Or la ligne aa' a pour expression $\frac{f(a)}{f'(b)}$, ou $\frac{a^m - \mathrm{A}}{mb^{m-1}}$: le numérateur $a^m - \mathrm{A}$ est le reste R donné par l'opération arithmétique qui a fait connaître une première partie de la racine. On en conclut la proposition suivante : si l'on divise le reste R par m fois la puissance $m-1^{\text{ième}}$ de la partie a déja écrite à la racine, le quotient surpassera ce qu'il faut ajouter pour compléter la racine; mais si l'on augmente d'une unité le dernier chiffre écrit à la racine, ce qui donne par hypothèse une valeur b plus grande que cette racine, et si l'on divise le même reste R par m fois la puissance $m-1^{ième}$ de b, le quotient sera plus petit que ce qu'il faut ajouter à a pour compléter la racine. Les deux quotients $\frac{R}{ma^{m-1}}$, $\frac{R}{mb^{m-1}}$ diffèrent assez au commencement de l'opération pour que la comparaison de ces quotients ne serve point d'abord à faciliter le calcul de la racine; mais lorsqu'on est parvenu à connaître un plus grand nombre de chiffres exacts, le deux quotients $\frac{R}{ma^{m-1}}$, $\frac{R}{mb^{m-1}}$ diffèrent extrêmement peu; et comme on est assuré que les chiffres communs aux deux limites appartiennent à la racine cherchée, il s'ensuit que chaque opération fait connaître un certain nombre de chiffres exacts, et qu'il ne peut y avoir aucune incertitude sur le terme où l'on doit s'arrêter dans la division numérique.

Il est facile de déterminer suivant quelle loi augmente le nombre des chiffres exacts que fournit chaque division numérique, et l'on a fait depuis long-temps des remarques de ce genre au sujet des opérations qui servent à extraire les racines carrées et cubiques. Mais ces conséquences ne sont point bornées à des cas aussi simples : nous prouverons bientôt qu'elles conviennent aux racines de toutes les équations algébriques, quel que soit le nombre des termes. Ces propriétés sont même beaucoup plus générales; elles ne dépendent point de la nature de l'équation déterminée dont on cherche la racine; elles dérivent du caractère de l'approximation linéaire.

(19) On voit par l'article précédent que les règles élémentaires qui servent à extraire les racines numériques ne sont autre chose que des applications très-particulières d'une méthode générale qui embrasse les équations de tous les degrés. C'est sous ce point de vue que Viete, Harriot, Ougthred, Newton et Wallis ont d'abord considéré la question de la résolution des équations. Ils pensaient qu'il devait exister une opération *exégétique* générale, propre à donner successivement toutes les parties d'une racine quelconque d'une équation *affectée*. Ils désignaient par cette dernière expression l'équation algébrique qui contient outre la puissance x^m de l'in-

connue et le dernier terme connu A, différents autres termes formés des produits de coefficients donnés et des puissances inférieures de l'inconnue. Newton découvrit la partie de cette méthode générale qui s'applique aux équations littérales à une seule inconnue, et il en a fait un usage très-étendu dans l'analyse des séries. Long-temps auparavant François Viete avait proposé les mêmes vues; mais les théories mathématiques étaient trop imparfaites pour que l'on pût former à cette époque une méthode aussi étendue. Le cas très-simple des équations à deux termes avait été facilement résolu parce que la nature des racines est manifeste, et que l'on n'avait besoin d'aucune règle pour en déterminer les limites. Mais si l'on suppose un nombre de termes et de coefficients quelconque, la distinction des racines réelles ou imaginaires, et la recherche de deux limites pour chaque racine réelle, nécessitent un examen très-approfondi : c'est cette question que nous avons traitée dans notre premier livre.

Le calcul de la valeur numérique de chaque racine est fondé, comme on l'a vu dans les articles 16 et 17, sur la comparaison de deux limites de plus en plus approchées entre lesquelles cette racine est nécessairement comprise. Les propositions que nous avons démontrées suffiraient à la rigueur pour l'exactitude du calcul; mais il importe beaucoup de donner à cette méthode un nouveau degré de perfection, afin d'en rendre l'application usuelle et très-facile. En général on ne doit pas regarder cette recherche comme terminée tant que l'on n'est point parvenu à réduire l'opération aux seuls calculs qu'il est indispensable d'effectuer. Il ne s'agit pas seulement d'arriver avec certitude à la connaissance de la racine, il faut donner à la méthode toute la simplicité qu'elle peut admettre sans cesser d'être générale. Pour atteindre ce but nous avons à résoudre trois questions différentes dont on va faire connaître l'objet.

La première est purement arithmétique : elle consiste à ordonner l'opération qui sert à diviser un nombre par un autre, en sorte qu'on ne fasse concourir chaque chiffre du diviseur à la détermination du quotient que lorsqu'il est devenu nécessaire d'appeler ce chiffre du diviseur pour qu'il n'y ait point d'incertitude sur celui que l'on va écrire au quotient.

La seconde question a pour objet d'effectuer les substitutions successives nécessaires au calcul de la racine dans un tel ordre qu'aucune partie de l'opération ne soit répétée, et que l'on poursuive le calcul en ajoutant seulement aux opérations précédentes le résultat correspondant à la nouvelle partie de la racine.

La troisième question consiste à assigner la mesure exacte de la convergence de l'approximation, afin que l'on connaisse sans aucune incertitude combien chaque division numérique donne de chiffres qui doivent être conservés comme faisant partie de la racine.

(20) Si l'on examine la première question, on reconnaît d'abord que la règle commune pour la division des nombres donnerait lieu ici à des calculs superflus. En effet, pour déterminer les limites a et b, on doit calculer les valeurs de quotients tels que $\frac{f(a)}{f'(a)}$; et le dénominateur $f'(a)$ provenant de la substitution de la partie déja connue a dans la fonction $f'(x)$, peut contenir plusieurs chiffres décimaux, et contient en effet un grand nombre de chiffres si l'opération est déja très-avancée. Or les derniers de ces chiffres du diviseur placés à la droite ne contribuent point à former les premiers chiffres du quotient $\frac{f(a)}{f'(a)}$, et ce sont ces premiers chiffres qu'il s'agit de connaître. Il faut donc n'employer que les chiffres du diviseur qu'on ne peut pas se dispenser d'introduire dans le calcul.

L'auteur du traité intitulé *Artis analycæ praxis,* Oughtred, a laissé une règle de ce genre pour la multiplication des nombres; et l'on connaît aussi un procédé analogue pour simplifier le calcul de la division numérique lorsqu'on veut seulement connaître un certain nombre de chiffres du quotient. Mais nous devons satisfaire ici à une autre considération : elle consiste à n'appeler que successivement les chiffres du diviseur, afin de pouvoir continuer l'opération à volonté; et surtout il faut reconnaître avec certitude que le chiffre écrit au quotient est exact. Voici la règle que l'on doit suivre dans tous les cas pour effectuer cette *division ordonnée.*

On marquera dans le diviseur quelques-uns des premiers chiffres seulement, par exemple les deux premiers, ou les trois premiers, ou les quatre premiers; nous appelons *diviseur désigné* celui qui est ainsi formé des chiffres que l'on a marqués. Cela étant, on divisera le dividende proposé par *le diviseur désigné,* en effectuant cette opération selon une règle qui ne diffère de la règle commune qu'en un seul point. Voici en quoi cette différence consiste : toutes les fois qu'on abaisse un chiffre du dividende à la suite du reste donné par une opération précédente, et que l'on forme ainsi un dividende partiel, il faut corriger ce dernier dividende en en retranchant une certaine quantité; on obtient ainsi un *dividende partiel corrigé.* Alors on cherche combien de fois ce dernier dividende contient le diviseur désigné, et l'on écrit au quotient le chiffre qui exprime ce nombre de fois. On multiplie donc le diviseur désigné par le chiffre écrit au quotient, et l'on retranche le produit du dividende partiel corrigé. On abaisse à la suite du reste un nouveau chiffre du dividende, et l'on continue l'opération suivant la même règle.

Pour trouver la correction qui doit être faite à un *dividende partiel,* c'est-à-dire la quantité qu'on en doit retrancher, il faut comparer comme il suit tous les m chiffres déja écrits au quotient avec un pareil nombre m de chiffres pris à la suite du diviseur désigné. On suppose que les m chiffres du quotient sont écrits dans *l'ordre inverse*, et placés respectivement au-dessous des m chiffres pris à la suite du diviseur désigné. On multiplie chacun de ces chiffres par celui qui est placé au-dessous de lui, et ajoutant les m produits, on connaît ce qui doit être retranché du dividende partiel, et l'on effectue la correction.

Toutes les fois qu'en suivant cette règle on doit abaisser un chiffre du dividende à la suite d'un reste donné par l'opération précédente, on examine si ce reste surpasse, ou du moins égale la somme des chiffres déja écrits au quotient, et que l'on ajoute ensemble, comme s'ils exprimaient des unités. Lorsque cette condition a lieu, on est assuré que le chiffre qui a été écrit précédemment au quotient est exact.

(21) Si l'on n'a marqué pour former le diviseur désigné qu'un chiffre, ou deux, ou en général un trop petit nombre de chiffres, il arrivera que la condition ci-dessus énoncée n'aura pas lieu; c'est-à-dire que le reste d'une opération précédente sera moindre que la somme des chiffres déja écrits au quotient: alors le dernier de ces chiffres est encore incertain, et l'on est averti qu'on n'a pas marqué un assez grand nombre de chiffres pour former le diviseur désigné. Dans ce cas, on continuera d'abord d'appliquer la règle précédente, en abaissant un chiffre du dividende et en effectuant la correction prescrite. Si elle ne pouvait être faite on en conclurait que le chiffre écrit au quotient est trop fort: il faudrait donc le diminuer d'une unité. Mais si la correction peut être faite, on abaisse à la suite du résultat de cette dernière soustraction un nouveau chiffre du dividende, ce qui donnera un nouveau dividende partiel. En même temps on marquera un chiffre de plus à la suite du diviseur déja désigné, ce qui donnera un nouveau diviseur désigné. On procédera, selon la règle énoncée, à la correction du nouveau dividende partiel, c'est-à-dire que l'on comparera les m chiffres déja écrits au quotient à un pareil nombre m de chiffres pris à la suite du nouveau diviseur désigné. Ayant formé par cette correction le nouveau dividende partiel corrigé, on continuera l'application de la présente règle en faisant usage du nouveau diviseur désigné. On pourrait aussi revenir au premier diviseur désigné : en général on peut, dans le cours de l'opération, augmenter ou diminuer à volonté le nombre des chiffres que l'on désigne au diviseur, il suffit d'augmenter en même temps ou de diminuer le nombre des corrections; ces détails se présentent d'eux-mêmes.

On reconnaîtra par la pratique combien l'opération que nous venons de décrire est facile lorsqu'elle est faite avec ordre. On peut former à la seule inspection des nombres le résultat de chaque correction. En effet si, après avoir écrit sur une feuille séparée, et dans l'ordre inverse, les m chiffres du quotient, on les présente aux m chiffres pris à la droite du diviseur désigné, en sorte qu'ils se correspondent chacun à chacun, il est facile de compter la somme des produits des chiffres correspondants, sans qu'il soit nécessaire d'écrire ces produits partiels. Car il suffit d'ajouter ensemble les seuls chiffres des unités de ces produits en comptant de la droite à la gauche : on ajoute ensuite en revenant vers la droite les seuls chiffres de ces produits qui expriment les dixaines.

Cette remarque conduit à une conclusion singulière, savoir que l'on peut effectuer à vue la multiplication de deux facteurs proposés, quel que soit le nombre des chiffres qui forment chaque facteur. Par exemple si les facteurs proposés sont 234567 et 8909876, et si on les écrit sur deux feuilles séparées, on pourra, à la seule inspection de ces deux nombres, dicter successivement les chiffres de leur produit 2089962883692 sans écrire aucun des produits partiels, comme l'exigerait la règle commune.

Le procédé de la division ordonnée, tel qu'il est décrit article 20, fait connaître avec certitude les chiffres exacts du quotient, et l'on n'a employé de nouveaux chiffres du diviseur que lorsqu'il est nécessaire de les introduire pour trouver de nouvelles parties du quotient. Cette règle a l'avantage de prévenir tous les calculs superflus, et surtout de pouvoir être prolongée autant qu'il est nécessaire jusqu'à ce que l'on ait trouvé le nombre de chiffres exacts que l'on veut obtenir. On doit en faire usage toutes les fois que le diviseur contenant un grand nombre de chiffres, il s'agit de déterminer seulement quelques-uns des premiers chiffres du quotient.

Nous pourrions indiquer des applications très-utiles de la règle de la division ordonnée, mais notre objet principal est ici de perfectionner le calcul des racines des équations numériques. Je ne rapporterai pas la démonstration de cette règle : il est facile de la suppléer. Elle consiste à remarquer avec soin l'ordre des divers produits. Chaque correction a pour objet de retrancher du dividende la somme des produits dont l'ordre est le même que celui du chiffre du dividende qui vient d'être abaissé.

PREMIER EXEMPLE.

Premier dividende partiel, 1234; diviseur désigné, 234.

$$\begin{array}{l|l} 1234\,5'6'7'8'9'8'7'3647 & 234\,5'6'7'8'9'8'7'65 \\ \hline & 52\dot{6}31589\ldots\ldots \\ & \quad 7 \end{array}$$

1170

645′ ($64 > 5$: le chiffre 5 est bon)
25 $= 5.5$

2^e^ divid. part. cor...... 620
468

1526′ ($152 > 5+2$: le chiffre 2 est bon)
40 $= 5.6 + 2.5$

3^e^ divid. part. cor....... 1486
1404

827′ ($82 > 5+2+6$: le chiffre 6 est bon)
77 $= 5.7 + 2.6 + 6.5$

4^e^ divid. part. cor........ 750
702

488′ ($48 > 5+2+6+3$: le chiffre 3 est bon)
105 $= 5.8 + 2.7 + 6.6 + 3.5$

5^e^ divid. part. cor.......... 383
234

1499′ ($149 > 5+2+6+3+1$: le chiffre 1 est bon)
126 $= 5.9 + 2.8 + 6.7 + 3.6 + 1.5$

6^e^ divid. part. cor.......... 1373
1170

2038′ ($203 > 5+2+6+3+1+5$: le ch. 5 est bon)
158 $= 5.8 + 2.9 + 6.8 + 3.7 + 1.6 + 5.5$

7^e^ divid. part. cor............ 1880
1872

87′ ($8 < 5+2+6+3+1+5+8$: le chiffre 8 est incertain)
206 (la correction ne peut s'effectuer : le chiffre 8 est trop fort)

1638 (on a écrit 7 au lieu de 8 au quotient)

2427′ ($242 > 5+2+6+3+1+5+7$: le chiffre 7 est bon)
201 $= 5.7 + 2.8 + 6.9 + 3.8 + 1.7 + 5.6 + 7.5$

8^e^ divid. part. cor.............. 2226
2106

120 ($120 > 5+2+6+3+1+5+7+9$: le chiffre 9 est bon).

DEUXIÈME EXEMPLE.

Premier dividende partiel, 24; diviseur désigné, 9.

	$\overline{24}6'8'3'5'7'9'24$	$\overline{9}7'5'3'8'6'4'579$
	18	253064....
	66' (6 > 2 : le chiffre 2 est bon)	
	14 = 2.7	
2^e divid. part. cor....	52	
	45	
	78' (7 = 2 + 5 : le chiffre 5 est bon)	
	45 = 2.5 + 5.7	
3^e divid. part. cor......	33	
	27	
	63' (6 < 2 + 5 + 3 : le chiffre 3 est incertain)	
	52 = 2.3 + 5.5 + 3.7	
Nouveau divid. partiel....	115' (la correction pouvant être faite, le chiffre 3 est bon : mais on abaisse immédiatement le chiffre suivant 5 du dividende, et l'on prend 97 pour *nouveau diviseur désigné*).	
	46 = 2.8 + 5.3 + 3.5	
Nouv. divid. part. cor.....	69	
	0	
	697'	
	61 = 2.6 + 5.8 + 3.3 + 0.5	
2^e nouv. divid. part. cor....	636	
	582	
	549' (54 > 2 + 5 + 3 + 0 + 6 : le chiffre 6 est bon)	
	92 = 2.4 + 5.6 + 3.8 + 0.3 + 6.5	
3^e nouv. divid. part cor.....	457	
	388	
	59 (59 > 2 + 5 + 3 + 0 + 6 + 4 : le chiffre 4 est bon).	

(22) La règle que l'on vient de proposer pour la division des nombres résout aussi l'équation du second degré, et elle peut s'appliquer en général au développement de la racine d'une équation quelconque. Nous ne ferons qu'indiquer ce procédé de calcul.

Si l'on propose l'équation du second degré

$$x^2 + 765432\,x = 123456,$$

on l'écrira sous cette forme :

$$x = \frac{123456}{765432 + x}.$$

On divisera donc 123456 par 765432 suivant la règle de l'art. 20, et l'on pourra prendre 765 pour diviseur désigné. Le premier chiffre 1 du quotient exprimera des dixièmes, et l'on trouvera ensuite 6, en sorte que la valeur de ce quotient x est 0,16..... Or il faut, pour former le dénominateur, ajouter au nombre 765432 le quotient x, ou 0,16..... On écrira donc les chiffres 16 à la suite du diviseur 765432, et l'on continuera la division. Chacun des nouveaux chiffres trouvés au quotient sera écrit à la place qu'il doit occuper, et il sera employé dans le cours de l'opération suivant que la règle l'exige. La racine de l'équation du second degré est, comme on le voit, le quotient d'une division dont le diviseur est variable. Or la règle de l'article 20 n'employant que successivement les chiffres du diviseur, il n'est pas nécessaire de les connaître tous au commencement de l'opération : il suffit de les découvrir les uns après les autres, et d'écrire chaque fois à la suite du diviseur celui que l'on vient de trouver au quotient. On ne pourrait point faire le même usage de la règle commune, parce qu'elle suppose que tous les chiffres du diviseur sont connus au commencement de l'opération.

Nous rapportons ici le détail du calcul, comme un troisième exemple de la division ordonnée.

$$
\begin{array}{r|l}
\overline{1234}\,5'\,6',0'\,0'\,0'\,0'\,0'\ldots & \overline{765}\,4'\,3'\,2',1'\,6'\,1'\,2'\ldots \\
\underline{765} & \overline{0,16128927\ldots} \\
4695' & \\
\underline{4} & \\
4691 & \\
\underline{4590} & \\
1016' & \\
\underline{27} & \\
989 & \\
\underline{765} & \\
2240' & \\
\underline{24} & \\
2216 & \\
\underline{1530} & \\
6860' & \\
\underline{24} & \\
6836 & \\
\underline{6120} & \\
7160' & \\
\underline{52} & \\
7108 & \\
\underline{6885} & \\
2230' & \\
\underline{102} & \\
2128 & \\
\underline{1530} & \\
5980' & \\
\underline{67} & \\
5913 & \\
\underline{5355} & \\
558 &
\end{array}
$$

(23) Dans l'exemple qui précède le diviseur variable se forme d'un nombre constant auquel on ajoute le quotient. Cette partie variable du diviseur pourrait être le carré du quotient, ou ce carré divisé par un certain nombre, ou en général une petite quantité équivalente à une certaine fonction du quotient. Il suffit de connaître d'abord les premiers chiffres exacts du quotient, et l'on forme suc-

cessivement la partie variable qui doit être écrite à la suite du diviseur. Il en résulte que les nouveaux chiffres du diviseur sont connus lorsqu'il devient nécessaire de les introduire dans le calcul pour effectuer les corrections indiquées par la règle. On parvient ainsi à l'expression des racines des équations d'un degré quelconque, ou même de celles que l'on a appelées transcendantes. Nous ne nous arrêterons point à cette méthode exégétique, quelque générale qu'elle soit, parce que les règles dont nous nous servons pour le calcul des racines sont d'une application plus prompte et plus facile. Cet emploi de la division ordonnée suppose que l'équation est convenablement préparée. A la vérité cette transformation, et celles qui peuvent devenir nécessaires dans la suite de l'opération, se réduisent toujours à diminuer la valeur de la racine d'une quantité qui en est très-approchée, et l'on y parvient facilement au moyen des règles données dans cet ouvrage. Or connaissant deux premières limites très-approchées, il est plus simple de continuer les premières opérations en suivant une méthode uniforme pour découvrir successivement toutes les parties de la racine. Nous nous sommes proposé seulement, dans les articles qui précèdent, d'indiquer des applications singulières de la nouvelle règle que nous avons donnée pour la division numérique.

C'est dans cette vue que nous ajoutons l'exemple suivant. L'équation proposée est celle-ci,

$$x^3 + 345x = 12:$$

on l'écrira sous cette forme,

$$x = \frac{12}{345 + x^2}.$$

On divisera donc 12 par 345 selon la règle de la division ordonnée, et l'on écrira successivement à la suite du diviseur les chiffres qui doivent le compléter. Il faut remarquer que ces chiffres ne sont point connus au commencement de l'opération, mais on les trouve successivement en élevant au carré la valeur du quotient, et l'on procède comme il suit.

Lorsqu'on connaît quelques-uns des premiers chiffres du quotient, on détermine les premiers chiffres du carré du quotient, en ne retenant dans cette valeur du carré que les chiffres qui sont connus avec certitude : ce sont ces chiffres exacts qui doivent être écrits successivement à la suite du diviseur. On obtient ainsi la racine de l'équation $x^3 + 345x = 12$, savoir $x = 0{,}034782486\ldots$

Ces calculs sont présentés dans les tableaux suivants.

```
12,0'0'0'0'0'0'0'0'  | 345,0'0'1'2'0'9'8'...
 1035                |---------------------
                     | 0,034782486,...
  1650'
     0
  1650
  1380
   2700'
      0
   2700
   2415
    2850'
       3
    2847
    2760
      870'
       10
      860
      690
       1700'
         15
       1685
       1380
        3050'
          49
        3001
        2760
         2410'
            78
         2332
         2070
          262
```

$$\begin{array}{r}
34\\
34\\
\hline
136\\
102\\
\hline
0{,}001156 = (0{,}034)^2\\
68\\
1\\
\hline
0{,}001225 = (0{,}035)^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
1156\\
238\\
238\\
49\\
\hline
0{,}00120409 = (0{,}0347)^2\\
694\\
1\\
\hline
0{,}00121104 = (0{,}0348)^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
120409\\
2776\\
2776\\
64\\
\hline
0{,}0012096484 = (0{,}03478)^2\\
6956\\
1\\
\hline
0{,}0012103441 = (0{,}03479)^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
12096484\\
6956\\
6956\\
4\\
\hline
0{,}001209787524 = (0{,}034782)^2\\
69564\\
1\\
\hline
0{,}001209857089 = (0{,}034783)^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
1209787524\\
139128\\
139128\\
16\\
\hline
0{,}00120981534976 = (0{,}0347824)^2\\
695648\\
1\\
\hline
0{,}00120982230625 = (0{,}0347825)^2
\end{array}$$

(24) Nous avons énoncé dans l'article 19 les questions qu'il était nécessaire de résoudre pour réduire le calcul des racines aux procédés les plus simples, en sorte que l'on ne puisse arriver par aucune voie plus briève à la connaissance effective des valeurs de ces racines. La première de ces questions est purement arithmétique : elle est résolue par la règle de la division ordonnée. La seconde, dont la solution est très-facile, consiste à régler le calcul des substitutions successives de manière qu'il n'y ait aucune opération superflue. La troisième question a pour objet de déterminer avec certitude le nombre des chiffres exacts que donne chaque nouvelle opération. Nous allons montrer quelle doit être la marche du calcul pour satisfaire à ces dernières conditions.

Premièrement supposons que l'on ait substitué dans le premier membre $f(x)$ de la proposée une valeur b, déja approchée, de la racine x, et que l'on ait déterminé par ces substitutions les valeurs numériques des fonctions $f(b), f'(b), f''(b), \ldots f^{(n-1)}(b)$. On a trouvé en divisant $f(b)$ par $f'(b)$ une nouvelle partie β de la racine, et pour continuer l'approximation il faut substituer $b+\beta$ dans les fonctions $f(x), f'(x), f''(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$. Il est manifeste que le calcul serait mal ordonné si l'on substituait la quantité entière $b+\beta$, car on répéterait sans nécessité une grande partie des opérations précédentes : il faut donc se réduire aux seuls calculs dont on ne peut se dispenser pour ajouter aux résultats déja trouvés les parties qui proviennent de l'addition du terme β. On peut négliger cette réduction lorsqu'on n'a en vue qu'une approximation très-bornée, mais si l'on veut déterminer un très-grand nombre de chiffres de la racine on reconnaît combien il est préférable de donner une autre forme au calcul. Or il est aisé de conclure des éléments du calcul algébrique que pour substituer la valeur $b+\beta$ dans les fonctions $f(x)$, $f'(x), f''(x), f'''(x)$, on doit observer la règle suivante.

Ayant écrit sur une première ligne les valeurs déja connues $f(b)$, $f'(b), f''(b), \ldots f^{(n-1)}(b), f^{(n)}(b)$, on place la fraction β au-dessous de chacune des fonctions qui suivent la première $f(b)$, et on multiplie par ce facteur commun β, ce qui donne les termes d'une seconde ligne.

On écrit le facteur β au-dessous de chacun des termes de cette seconde ligne qui suivent le premier à gauche; on multiplie par le facteur commun β, et l'on divise chaque produit par 2, ce qui donnera les termes d'une troisième ligne.

On écrit β au-dessous de tous les termes qui suivent le premier terme à gauche de cette troisième ligne; on multiplie par le facteur β, et l'on divise les produits par 3.

On continue ainsi à multiplier par β tous les termes de chaque ligne, excepté le premier à gauche, et l'on divise tous les produits par l'indice du rang de cette même ligne.

Après ces opérations on ajoute ensemble les seuls premiers termes des différentes lignes : on connaît ainsi $f(b+\beta)$. On ajoute ensemble tous les seconds termes des différentes lignes, et la somme est $f'(b+\beta)$. On continue ainsi de prendre la somme de tous les troisièmes termes, ou de tous les quatrièmes termes des différentes lignes, ce qui donne $f''(b+\beta)$, $f'''(b+\beta)$; ainsi de suite jusqu'à ce que l'on connaisse les valeurs numériques de toutes les fonctions $f(b+\beta)$, $f'(b+\beta)$, $f''(b+\beta)$, etc.

Lorsqu'on a formé ces valeurs numériques, on trouve une nouvelle partie γ de la racine en divisant $f(b+\beta)$ par $f'(b+\beta)$. Il reste donc à faire connaître combien cette division doit donner de chiffres exacts, c'est-à-dire de chiffres décimaux qui appartiennent certainement à la racine, parce qu'ils sont communs à deux des limites dont on a expliqué les propriétés dans les articles 16 et 17.

(25) Après avoir calculé une des limites, par exemple celle qui résulte de l'approximation newtonienne, on pourrait calculer la seconde limite que nous avons proposé de joindre à cette première, et qui est en effet nécessaire pour définir l'approximation. Ce second calcul étant effectué, on ne conserverait comme exacts que les chiffres communs aux deux limites, et l'on trouverait ainsi la fraction γ qui doit être ajoutée à la suite de β. Mais en opérant de cette manière on répéterait une grande partie du calcul numérique précédent: nous parvenons à réduire cette opération à sa forme la plus simple en ne considérant que la différence de la seconde limite à

la première. En effet il a été démontré article 9 que l'on peut déterminer immédiatement la seconde limite lorsque la première est connue.

Nous désignons par a et b deux premières valeurs approchées, dont l'une a est moindre que la racine, et l'autre b est plus grande que la racine. Ces valeurs sont telles, par hypothèse, que l'équation proposée $f(x)=0$ ayant une seule racine comprise entre les limites a et b, les trois équations subordonnées $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ et $f'''(x)=0$ n'ont aucune racine comprise entre ces mêmes limites. On reconnaît que les deux nombres a et b remplissent cette condition lorsque en comparant les deux suites de signes (a) et (b), on trouve que les indices correspondants aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$ sont égaux à zéro; c'est-à-dire lorsque la série des indices est ainsi terminée, 0 0 0 1. Si les indices correspondants à chacune des fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ n'étaient pas égaux à zéro, on resserrait l'intervalle des deux nombres en substituant des nombres intermédiaires, et l'on parviendrait bientôt à trouver deux limites a et b, par lesquelles la condition dont il s'agit serait satisfaite. Nous ne considérons pas ici, conformément à ce qui a été dit art. 14, les cas particuliers où l'une des fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ aurait un facteur commun avec la fonction proposée.

Cela posé, on distinguera entre les deux limites a et b, celle de ces deux limites qui, étant substituée dans les fonctions $f(x)$ et $f''(x)$, donne deux résultats de même signe. Nous désignerons, comme dans l'article 16, par β la limite dont il s'agit, que nous avons nommée limite extérieure, et qui répond au point de la courbe par lequel la tangente doit être menée. α représentera l'autre limite, c'est-à-dire la limite intérieure. Or on déduit de ces premières valeurs β et α, comme on l'a vu dans l'article cité, de nouvelles valeurs plus approchées β' et α', entre lesquelles la racine est également comprise et qui sont ainsi exprimées

$$\beta'=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}, \quad \alpha'=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\beta)}.$$

De plus, si l'on nomme i la différence $\beta-\alpha$ des deux premières limites, et i' la différence $\beta'-\alpha'$ des nouvelles limites plus rapprochées, la différence i' sera beaucoup plus petite que i, et l'on aura (article 9) entre ces deux quantités la relation

$$i'=i^2\cdot\frac{f''(\alpha\ldots\beta)}{2f'(\beta)}.$$

$f''(\alpha\ldots\beta)$ représente la valeur que prend $f''(x)$ lorsqu'on donne à x une certaine valeur qui est comprise entre les nombres connus α et β.

Si la différence i devenait infiniment petite, la différence i' deviendrait infiniment petite du second ordre; et le rapport de cette quantité i' au carré de i est une quantité finie que l'on peut déterminer. En effet les limites α et β devenant alors toutes deux égales à l'abscisse du point d'intersection, c'est-à-dire à la racine x, l'expression du rapport dont il s'agit est

$$\frac{f''(x)}{2f'(x)}.$$

Plus les limites α et β sont rapprochées, et plus le rapport de la différence i' des deux nouvelles limites α' et β' au carré de la différence i des deux premières limites α et β approche d'être égal à $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$, en sorte que ce rapport peut différer aussi peu qu'on le voudra de cette quantité.

La valeur de la quantité $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$, c'est-à-dire de la dernière raison de la différence des deux limites au carré de la différence des limites précédentes, ne peut être déterminée exactement, puisqu'elle dépend de la racine inconnue x; mais l'expression $\frac{f''(\alpha\ldots\beta)}{2f'(\beta)}$ donne un moyen facile de connaître entre quelles limites est comprise cette dernière raison. En effet comme l'on a supposé que l'équation $f'''(x)=0$ n'avait point de racine entre les limites α et β, la fonction $f''(x)$ sera constamment croissante ou décroissante dans l'intervalle de ces mêmes limites. Il en est de même de la fonction $f'(x)$, puisque l'équation $f''(x)=0$ n'a point de racine entre α et β. Si l'on désigne donc par $f''(B)$ la plus grande des deux quantités $f''(\alpha)$ et $f''(\beta)$, abstraction faite du signe, et par $f'(\mathrm{a})$ la plus petite des quantités $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$, abstraction faite du signe, le quotient

$$\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})}$$

sera nécessairement plus grand que $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$; et en général ce quotient sera toujours plus grand que $\frac{f''(\alpha\ldots\beta)}{2f'(\beta)}$, quelle que soit la quantité désignée par $\alpha\ldots\beta$, qui doit toujours être comprise entre α et β.

Il résulte de ce qui précède que si, après avoir formé au moyen des valeurs approchées α et β, dont la différence est i, une valeur plus approchée β' exprimée par

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)},$$

on ajoute à cette dernière valeur le terme

$$-i^2 \cdot \frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})},$$

on aura ajouté une quantité plus grande, abstraction faite du signe, que la différence des nouvelles limites α' et β'. Par conséquent on a la certitude que la racine cherchée est comprise entre les quantités

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)},$$

et

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - i^2 \cdot \frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})}.$$

i désigne la différence $\beta - \alpha$. On a représenté par B celle des quantités α et β qui, étant substituée à la place de x, donne la plus grande valeur, abstraction faite du signe, à la fonction $f''(x)$; et par a celle des mêmes quantités α et β qui donne à la fonction $f'(x)$ la plus petite valeur, abstraction faite du signe.

(26) Pour déduire de la première valeur approchée β', qui répond à l'abscisse $o\beta'$ (fig. 14), une seconde valeur approchée telle que la

racine fût nécessairement comprise entre ces deux valeurs, on pourrait, au lieu de la seconde limite α' qui répond à l'abscisse $o\alpha'$, considérer la limite os donnée par le point d'intersection de la sécante mn avec l'axe. L'abscisse ox du point d'intersection de la courbe est certainement comprise entre les abscisses os et $o\beta'$; et ces nouvelles limites étant moins distantes que les limites $o\alpha'$ et $o\beta'$, l'emploi que l'on en ferait aurait l'avantage de faire approcher plus promptement de la valeur de la racine.

On connaîtra la différence $\beta's$ entre la première valeur approchée et l'abscisse du point d'intersection de la sécante en partageant l'intervalle $\alpha'\beta'$, que l'on a désigné ci-dessus par i', en deux parties proportionnelles aux ordonnées $n\beta$ et $m\alpha$. Ces ordonnées sont exprimées respectivement par $f(\beta)$ et $-f(\alpha)$: la première partie $\beta's$ est donc égale à

$$i^2 \cdot \frac{f''(\alpha\ldots\beta)}{2f'(\beta)} \cdot \frac{f(\beta)}{f(\beta)-f(\alpha)}.$$

Cette différence étant moindre, abstraction faite du signe, que

$$i^2 \cdot \frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})} \cdot \frac{f(\beta)}{f(\beta)-f(\alpha)};$$

on en conclut que la racine est certainement comprise entre ces deux quantités,

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)},$$

et

$$\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - i^2 \cdot \frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})} \cdot \frac{f(\beta)}{f(\beta)-f(\alpha)}.$$

Mais quoique ces nouvelles limites offrent l'avantage d'une approximation plus rapide, l'usage des précédentes est plus facile, et l'on trouvera qu'il est préférable de s'en servir dans le calcul des racines. Il reste à montrer comment, au moyen de la connaissance de la seconde limite $\beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - i^2 \cdot \frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})}$, on peut régler le calcul de manière à ne déterminer jamais que des chiffres exacts, c'est-à-dire des chiffres qui appartiennent à la véritable valeur de la racine.

(27) Si la différence i des deux premières valeurs approchées α et β est une unité décimale d'un ordre assez élevé, la différence i' des nouvelles valeurs approchées α' et β' est en général une unité décimale d'un ordre beaucoup plus élevé. Par exemple si la valeur du coefficient $\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})}$ ne surpasse point l'unité, la différence i' est plus petite que le carré de la différence précédente i. On en conclut que si le dernier chiffre décimal de la valeur approchée β est de l'ordre n, et que l'on forme une valeur plus approchée β' en ajoutant à β le quotient $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$, on est assuré de l'exactitude de tous les chiffres décimaux du résultat qui précèdent le chiffre décimal de l'ordre $2n$. En effet la valeur $\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$, qui est plus grande que la racine, deviendrait plus petite si l'on en retranchait i^2, ou une unité décimale de l'ordre $2n$. Ainsi en calculant le quotient $-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$, on peut conserver tous les chiffres décimaux jusqu'à celui qui est de l'ordre $2n$: mais on ne doit point regarder les chiffres suivants comme appartenant à la racine; il est donc inutile de les déterminer, et l'on ne doit pousser la division que jusqu'au chiffre qui exprime un certain nombre d'unités égales à $(\frac{1}{10})^{2n}$. On voit que chaque opération donne alors à la racine cherchée un nombre de chiffres décimaux exacts égal au double du nombre des chiffres décimaux qui étaient déja connus.

Lorsque la valeur du coefficient $\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})}$ est plus grande ou moins grande que l'unité, le nombre de nouveaux chiffres décimaux exacts que l'on obtient en divisant $f(\beta)$ par $f'(\beta)$, est moins grand ou plus grand que le nombre des chiffres décimaux qui étaient déja connus. Pour déterminer avec certitude jusqu'à quel chiffre du quotient cette division doit être continuée, on fera usage de la règle suivante.

On examinera quel est le rang du premier chiffre du quotient

$\frac{f''(B)}{2f'(a)}$, et l'on remarquera quelle est l'unité décimale immédiatement supérieure à la valeur de ce quotient. Si, par exemple, le quotient $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ avait pour premiers chiffres 0,003, on prendrait 0,01 pour cette unité décimale; et si le même quotient avait pour premier chiffre 3 au rang des mille, on prendrait 10000 pour cette unité décimale. Cela posé, soit $(\frac{1}{10})^k$ cette unité décimale plus grande que la valeur du quotient dont il s'agit, l'exposant k pouvant être positif ou négatif; et soit aussi $(\frac{1}{10})^n$ l'unité décimale qui est égale à la différence i des deux premières limites désignées par α et 6. Le coefficient $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ étant moindre que $(\frac{1}{10})^k$, le terme $i^2.\frac{f''(B)}{2f'(a)}$ sera moindre que $(\frac{1}{10})^{2n+k}$. Alors en effectuant la division de $f(6)$ par $f'(6)$, il faudra s'arrêter au chiffre de l'ordre décimal $2n+k$. En effet lorsqu'on ajoute le quotient $-\frac{f(6)}{f'(6)}$ à la partie 6 de la valeur de la racine qui est déja connue, on obtient un résultat qui diffère de la véritable valeur de la racine d'une quantité moindre que la différence des deux quantités $6-\frac{f(6)}{f'(6)}$ et $\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(6)}$. Or cette différence, exprimée par $-i^2.\frac{f''(\alpha\ldots6)}{f'(\alpha\ldots6)}$, est elle-même moindre, abstraction faite du signe, que $(\frac{1}{10})^{2n}.(\frac{1}{10})^k$: donc en continuant la division indiquée par $-\frac{f(6)}{f'(6)}$ jusqu'au chiffre décimal de l'ordre $2n+k$, on est assuré que l'erreur du résultat que l'on obtiendra est moindre qu'une unité décimale de cet ordre. Il ne restera plus qu'à avoir égard à la partie du quotient que l'on aura négligée.

(28) Il faut maintenant considérer que la limite désignée par 6, et que l'on emploie pour former une valeur plus approchée $6'$, en ajoutant à 6 le quotient $-\frac{f(6)}{f'(6)}$, est toujours la limite appelée extérieure, c'est-à-dire celle qui, étant substituée dans les fonctions $f(x)$ et $f''(x)$, donne deux résultats de même signe. Dans les cas représentés par les figures 9 et 12 cette limite 6 répond au point b; et dans les cas représentés par les figures 10 et 11 la même limite 6

répond au point a. Or l'inspection seule des figures indique que, dans tous les cas, on s'éloignerait de la valeur de la racine en prenant la valeur de la sous-tangente un peu trop faible, abstraction faite du signe, et que l'on s'en approchera au contraire en prenant cette même valeur un peu trop forte. Il en serait autrement si la tangente était menée par le point m dans les figures 9 et 12, ou par le point n dans les figures 10 et 11 : on devrait alors au contraire prendre un nombre inférieur plutôt que supérieur à la véritable valeur de la sous-tangente. Mais en employant la limite extérieure 6, qu'il est toujours facile de distinguer d'après la condition énoncée ci-dessus, il est évident que l'on doit, pour former la nouvelle valeur approchée $6'$, ajouter à 6 une quantité qui soit plutôt au-dessus de la valeur du quotient $-\frac{f(6)}{f'(6)}$ qui représente la sous-tangente, qu'au-dessous de la véritable valeur de ce quotient.

Il résulte de cette remarque qu'après avoir continué la division indiquée par $-\frac{f(6)}{f'(6)}$ jusqu'au chiffre de l'ordre décimal $2n+k$, y compris ce même chiffre, on doit, au lieu de négliger tous les chiffres suivants, augmenter d'une unité le chiffre de l'ordre $2n+k$ auquel on s'est arrêté. On ajoutera donc le résultat obtenu de cette manière à la limite 6, en ayant égard au signe de ce résultat, et l'on connaîtra la nouvelle limite plus approchée $6'$ qui est l'objet de la recherche.

Nous observerons d'ailleurs qu'en formant ainsi cette nouvelle limite plus approchée $6'$, c'est-à-dire en arrêtant la division indiquée par $-\frac{f(6)}{f'(6)}$ au chiffre décimal de l'ordre $2n+k$ et augmentant ce chiffre d'une unité, on ajoute à la véritable valeur de la quantité $6-\frac{f(6)}{f'(6)}$ une quantité qui ne peut surpasser $(\frac{1}{10})^{2n+k}$, et qui par conséquent ne peut surpasser la différence $-i^2.\frac{f''(\alpha\ldots 6)}{2f'(\alpha\ldots 6)}$ des deux nouvelles limites. Donc la nouvelle limite $6'$ diffère à plus forte raison de la racine d'une quantité moindre qu'une unité décimale de l'ordre $2n+k$. Mais cette limite $6'$ peut se trouver plus grande ou plus petite que la racine : c'est ce qu'on reconnaîtra en la substituant dans la fonction $f(x)$. Si la limite β' est plus grande que la racine, on retranchera une unité du dernier chiffre décimal, ce qui donnera la seconde limite α'. Si au contraire la limite β' est moindre que la racine, on formera la seconde limite en ajoutant une unité au dernier chiffre décimal. On parvient donc de cette manière à obtenir deux nombres entre lesquels la racine est nécessairement comprise, et qui ne diffèrent plus l'un de l'autre que d'une unité décimale de l'ordre $2n + k$.

Si l'on veut pousser plus loin l'approximation, on opérera sur les deux nouvelles limites que l'on vient d'obtenir comme on l'avait fait sur les deux limites précédentes. On distinguera celle de ces deux limites qui, étant substituée dans les fonctions $f(x)$ et $f''(x)$, donne deux résultats de même signe : soit β_1 la limite dont il s'agit, et n_1 l'ordre décimal du dernier chiffre de cette limite. On calculera le quotient $-\frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)}$, qui doit être ajouté à β_1 pour former une nouvelle limite plus approchée, jusqu'au chiffre décimal de l'ordre $2n_1 + k$, et y compris ce chiffre : on augmentera ensuite ce même chiffre d'une unité. Ainsi le nombre des chiffres décimaux exacts que l'on obtient à chaque nouvelle opération augmente de plus en plus. Si n désigne le nombre des chiffres décimaux primitivement connus, c'est-à-dire si les limites données α et β ne diffèrent l'une de l'autre que par une unité décimale égale à $(\frac{1}{10})^n$, le nombre de chiffres décimaux exacts qui sera connu par une première opération sera $2n + k$; ce même nombre sera $4n + 3k$ après une seconde opération, $8n + 7k$ après une troisième, et ainsi de suite.

Le procédé d'approximation de la racine ne commence à avoir un cours régulier et rapide que lorsque le nombre $2n + k$ est plus grand que n, ou lorsque l'on a $n > -k$, ce qui pourrait ne pas arriver si k ou n étaient négatifs. Il est donc nécessaire, après avoir déterminé le nombre k, qui est l'exposant de l'unité décimale de l'ordre immédiatement supérieur à celui du premier chiffre du quotient $\frac{f''(B)}{2f'(a)}$, de s'assurer si la condition $n > -k$ est satisfaite. Si elle ne l'était pas on devrait rapprocher les limites données a et b, par la substitution de nombres intermédiaires, jusqu'à ce que la différence de ces deux limites fût égale au plus à $(\frac{1}{10})^n$, le nombre n étant égal à $1-k$.

(29) Les considérations qui viennent d'être exposées conduisent à la règle suivante.

Étant données deux limites a et b entre lesquelles est comprise une seule racine de l'équation proposée $f(x) = 0$, tandis que les équations subordonnées $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$ n'ont point de racines entre ces mêmes limites, il s'agit d'obtenir deux nouvelles limites aussi rapprochées qu'il est possible, et entre lesquelles la racine de l'équation proposée soit également comprise.

On choisira la plus grande en nombre des deux quantités $f''(a)$ et $f''(b)$, et on commencera à la diviser par la plus petite en nombre des deux quantités $2f'(a)$ et $2f'(b)$: il suffit de connaître le rang du premier chiffre du quotient, et de remarquer quelle est l'unité de l'ordre décimal immédiatement plus grande que ce quotient. Soit $(\frac{1}{10})^k$ cette unité : on connaîtra ainsi le nombre k qui peut être positif ou négatif.

Soit $(\frac{1}{10})^n$ l'unité décimale qui est au moins égale à la différence des deux limites données a et b. On examinera si le nombre n est au moins égal à $1-k$. Si cette condition n'était pas remplie, il faudrait rapprocher les limites a et b par la substitution de nombres intermédiaires.

Ayant donc reconnu que la condition $n = 1-k$, ou $n > 1-k$, est satisfaite, on distinguera entre les limites a et b celle de ces limites qui, étant substituée dans les fonctions $f(x)$ et $f''(x)$, donne deux résultats de même signe : soit β cette limite. On divisera, suivant la règle de la division ordonnée, $f(\beta)$ par $f'(\beta)$, en continuant l'opération jusqu'à ce que le dernier chiffre trouvé au quotient soit de l'ordre décimal $2n+k$. On augmentera ce dernier chiffre d'une unité, et l'on ajoutera le quotient ainsi obtenu à la limite β, ou on le retranchera de cette limite, suivant que les quantités $f(\beta)$ et $f'(\beta)$ seront de signes différents ou de même signe. La nouvelle limite β' formée de cette manière pourra être plus grande ou moindre que la véritable valeur de la racine, ce qu'il sera facile de reconnaître en substituant cette valeur β' dans $f(x)$; mais elle différera toujours de la racine d'une quantité moindre que $(\frac{1}{10})^{2n+k}$. Par conséquent en diminuant ou en augmentant d'une unité le dernier chiffre de β', on formera une seconde limite moindre que la racine si la limite β' qu'on vient d'obtenir est plus grande, et plus grande que la racine si la limite β' était plus petite.

On opérera ensuite sur ces nouvelles limites comme on l'avait fait sur les premières limites données a et b, et ainsi de suite. Chaque nouvelle opération fera connaître un nombre de chiffres appartenant à la valeur de la racine de plus en plus grand. Les nombres des chiffres décimaux exacts qui suivent la virgule après la première, la seconde, la troisième, etc. opération sont respectivement $2n+k$, $4n+3k$, $8n+7k$, etc. La marche du calcul est assurée et régulière; elle ne donne lieu à aucune opération superflue, et l'on n'est jamais exposé à déterminer aucun chiffre qui n'appartienne point à la véritable valeur de la racine.

Nous avons d'ailleurs regardé l'exposant k comme un nombre constant. Il peut arriver quelquefois qu'en calculant de nouveau sa valeur au moyen des limites de plus en plus rapprochées que donne la suite de l'opération, on trouve pour ce nombre k une valeur plus grande que la première, ce qui rendrait l'approximation plus rapide.

(30) Nous appliquerons les règles précédentes à l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

La suite des fonctions est

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x - 5 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6; \end{aligned}$$

et en substituant d'abord les nombres de la progression décuple, on trouve

	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(-1)....	$+$	$-$	$+$	$-$
			1	4
(<0)....	$+$	$-$	$-$	$-$
			2	5
(0)....	$+$	0	$-$	$-$
(>0)....	$+$	$+$	$-$	$-$
(1)	$+$	$+$	$+$	$-$
(10)	$+$	$+$	$+$	$+$

L'équation a deux racines indiquées entre -1 et 0, et une autre racine indiquée entre 1 et 10 : on reconnaît immédiatement que les deux premières racines sont imaginaires, parce que la somme des quotients $\frac{4}{1}+\frac{5}{2}$ surpasse la différence 1 des deux limites. Par conséquent cette équation a une seule racine réelle comprise entre 1 et 10.

Pour avoir deux limites qui ne diffèrent entre elles que par une unité de l'ordre du dernier chiffre, on substituera des nombres intermédiaires et l'on trouvera

(2)......	$+$	$+$	$+$	$-$
		12	10	1
	0	0	0	1
(3)......	$+$	$+$	$+$	$+$.
		18	25	16

Ainsi la racine est comprise entre 2 et 3, et la suite des indices étant $0\,0\,0\,1$, on pourrait procéder à l'approximation. Mais en divisant la plus grande des valeurs de $f''(x)$, qui est 18, par la plus petite des valeurs de $2f'(x)$, qui est 2.10, on obtient pour quotient $\frac{18}{20}=0,9$: l'unité décimale de l'ordre immédiatement supérieur au premier chiffre de ce quotient étant 1, on a donc $k=0$. La différence des deux limites entre lesquelles la racine est comprise étant aussi égale à 1, on a également $n = 0$. Par conséquent la condition $n =$ ou $> 1 - k$ n'étant pas satisfaite, on est averti que les limites 2 et 3 ne sont pas assez rapprochées pour que l'on doive commencer immédiatement l'approximation.

En substituant donc des nombres intermédiaires de l'ordre décimal immédiatement inférieur, il viendra

	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(2,0)	$+$	$\underset{12}{+}$	$\underset{10}{+}$	$\underset{1}{-}$
(2,1)	$+$	$\underset{12,6}{+}$	$\underset{11,23}{+}$	$\underset{0,061}{+}$.

Ainsi la racine est comprise entre les limites 2,0 et 2,1. La différence de ces limites est $\frac{1}{10}$: donc $n = 1$. La plus grande des valeurs de $f''(x)$ divisée par la plus petite des valeurs de $2f'(x)$ est $\frac{12,6}{20} = 0,6\ldots$: l'unité décimale immédiatement supérieure au premier chiffre du quotient étant toujours 1, nous avons comme ci-dessus $k = 0$. La condition $n = 1 - k$ est satisfaite : on peut procéder à l'approximation, sans chercher à resserrer davantage les limites par la substitution de nouveaux nombres intermédiaires.

La plus grande limite 2,1 est ici la limite extérieure, qui a été désignée par β, puisque cette valeur donne le même signe $+$ aux deux fonctions $f(x)$ et $f''(x)$. Par conséquent la première valeur approchée se formera en retranchant de $\beta = 2,1$ le quotient $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{0,061}{11,23}$: la division doit être continuée jusqu'au chiffre décimal de l'ordre $2n + k$, c'est-à-dire ici jusqu'aux centièmes; et avant d'opérer la soustraction, on doit augmenter le dernier chiffre d'une unité. Comme l'on trouve $\frac{0,061}{11,23} = 0,00\ldots$, le nombre à retrancher de 2,1 est 0,01 : il vient donc pour *première valeur approchée* 2,09. Cette valeur est exacte à moins de $\frac{1}{100}$ près : mais on ignore jusqu'ici si elle est moindre ou plus grande que la racine.

Pour le reconnaître, et continuer l'approximation, on substituera 2,09 dans la suite des fonctions, conformément à la règle de calcul expliquée dans l'article 24. Le tableau suivant présente cette opération.

$f(2)$,	$f'(2)$,	$f''(2)$,	$f'''(2)$
-1	10	12	6
	0,09	0,09	0,09
	0,90	1,08	0,54
		9	9
		972	486
		0,0486	0,0243
			9
			2187
			0,000729

d'où l'on déduit

$f(2,09)=$,	$f'(2,09)=$,	$f''(2,09)=$,	$f'''(2,09)=6.$
0,90	10	12	
486	1,08	0,54	
729	243	12,54	
0,949329	11,1043		
-1			
$=-0,050671$			

Le résultat de la substitution de 2,09 dans $f(x)$ étant négatif, cette quantité est plus petite que la valeur de la racine, qui par conséquent est comprise entre les limites 2,09 et 2,10. La différence de ces limites étant $\frac{1}{100}$, ou $\left(\frac{1}{10}\right)^2$, le nombre n est maintenant égal à 2 : ainsi l'approximation suivante peut être portée jusqu'au chiffre décimal du quatrième ordre. On continuera donc la division $\frac{0,061}{11,23}$ jusqu'au quatrième chiffre après la virgule inclusivement, ce qui donnera 0,0054, et en augmentant le dernier chiffre d'une unité, 0,0055. Ce résultat étant retranché de 2,10, donne 2,0945 pour la *deuxième valeur approchée*. Cette valeur est exacte à moins de $\frac{1}{10000}$ près.

On ignore si le nombre 2,0945 est plus petit ou plus grand que la racine : la substitution de ce nombre dans la fonction $f(x)$ et dans les fonctions dérivées s'effectue de la manière suivante.

$f(2,09)$	$f'(2,09)$	$f''(2,09)$	$f'''(2,09)$
—0,050671	11,1043	12,54	6
	0,0045	0,0045	0,0045
	555215	6270	30
	444172	5016	24
	0,04996935	0,056430	0,0270
		45	45
		282150	1350
		225720	1080
		2539350	12150
		0,0001269675	0,00006075
			45
			30375
			24300
			273375
			0,000000091125

d'où l'on déduit

$$
\begin{array}{rl}
f(2,0945) = & 0,04996935 \\
 & 0,0001269675 \\
 & 0,000000091125 \\ \hline
 & 0,050096408625 \\
 - & 0,050671 \\ \hline
= - & 0,000574591375
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f'(2,0945) = & 11,1043 \\
 & 0,056430 \\
 & 0,00006075 \\ \hline
 & 11,16079075
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
f''(20945) = & 12,54 \\
 & 0,0270 \\ \hline
 & 12,5670
\end{array}
$$

$$f'''(2,0945) = 6.$$

Le résultat de cette substitution donnant une valeur négative à $f(x)$, on conclut que le nombre 2,0945 est plus petit que la racine, qui est par conséquent comprise entre les limites 2,0945 et 2,0946. Le dernier de ces deux nombres est la limite appelée extérieure, et par conséquent il est nécessaire, pour continuer l'opération, de substituer le nombre dont il s'agit dans les fonctions proposées : mais on peut se dispenser de répéter le calcul qui vient d'être effectué en employant la formule

$$f(6+i)=f(6)+if'(6)+\frac{i^2}{2}f''(6)+\frac{i^3}{2.3}f'''(6)+\text{etc.}$$

On déduira donc immédiatement des résultats précédents

$$\begin{array}{rl}
f(2{,}0946)= & 0{,}0011160790\,75 \\
 & 628\,35 \\
 & 1 \\ \hline
 & 0{,}0011161419\,11 \\
 & -\ 0{,}0005745913\,75 \\ \hline
= & 0{,}0005415505\,36 \\[1ex]
f'(2{,}0946)= & 11{,}16079075 \\
 & 125670 \\
 & 3 \\ \hline
= & 11{,}16204748 \\[1ex]
f''(2{,}0946)= & 12{,}5670 \\
 & 6 \\ \hline
= & 12{,}5676 \\[1ex]
f'''(2{,}0946)= & 6.
\end{array}$$

Comme nous avons maintenant $n=4$, nous devons, en calculant le quotient $\frac{f(6)}{f'(6)}=\frac{0{,}000541550536}{11{,}16204748}$, continuer la division jusqu'au huitième chiffre après la virgule inclusivement. La valeur de ce quotient étant 0,00004851, on retranchera donc le nombre 0,00004852 de la limite 2,0946, ce qui donnera pour *troisième valeur approchée* 2,09455148.

Le tableau suivant présente le calcul de la substitution de cette valeur dans les fonctions proposées.

$f(2,0945)$	$f'(2,0945)$	$f''(2,0945)$	$f'''(2,0945)$
—0,000574591375	11,16079075	12,5670	6
	0,00005148	0,00005148	0,00005148
	8928632600	1005360	48
	4464316300	502680	24
	1116079075	125670	6
	5580395375	628350	30
	0,0005745575078100	0,000646949160	0,00030888
		5148	5148
		5175593280	247104
		2587796640	123552
		646949160	30888
		3234745800	154440
		3330494275680	159011424
		0,00000001665247137840	0,0000000079505712
			5148
			636045696
			318022848
			79505712
			397528560
			409295405376
			0,000000000000136431801792

d'où l'on déduit

$f(2,09455148) =$ 0,0005745575078100
1665247137840
136431801792

0,0005745741604178102017 92
— 0,000574591375

$= —$ 0,0000000172145821897982 08

$f'(2,09455148) =$ 11,16079075
646949160
79505712

$=$ 11,1614377071105712

$f''(2,09455148) =$ 12,5670
30888

$=$ 12,56730888

$f'''(2,09455148) =$ 6.

Comme le résultat de la substitution donne une valeur négative à $f(x)$, on est averti que le nombre substitué est plus petit que la racine : ainsi la racine est comprise entre les nombres 2,09455148 et 2,09455149.

Les résultats de la substitution du dernier de ces deux nombres, qu'il est nécessaire de connaître pour porter plus loin l'approximation, se déduisent presque sans calcul de ceux qui viennent d'être obtenus, par le procédé que l'on a déja employé. On aura

$$
\begin{array}{rr}
f(2{,}09455149) = & 0{,}0000001116143770711105712 \\
 & 628365444 \\
 & 1 \\
\hline
 & 0{,}0000001116143776994711157 \\
 & -\,0{,}0000000172145821897982 08 \\
\hline
= & 0{,}0000000943997955096729 49 \\
f'(2{,}09455149) = & 11{,}16143770711105712 \\
 & 1256730888 \\
 & 3 \\
\hline
= & 11{,}161437832783660 3 \\
f''(2{,}09455149) = & 12{,}56730888 \\
 & 6 \\
\hline
 & 12{,}56730894 \\
f'''(2{,}09455149) = & 6.
\end{array}
$$

Le nombre n étant maintenant égal à 8, la division indiquée par $\frac{f(6)}{f'(6)}$ doit être continuée jusqu'au seizième chiffre après la virgule inclusivement. Le quotient de cette division, que l'on obtient facilement au moyen de la règle de la division ordonnée, étant 0,0000000084576734, on retranchera ce nombre, après avoir augmenté le dernier chiffre d'une unité, de la valeur précédente, ce qui donnera pour *quatrième valeur approchée* 2,0945514815423265, nombre qui ne diffère pas en plus ou en moins de la racine d'une unité décimale du seizième ordre.

Dans l'exemple qui a été choisi, chaque opération double le nombre des chiffres exacts qui suivent la virgule : par conséquent une opération de plus fera connaître la valeur de la racine jusqu'à la trente-deuxième décimale. En continuant à opérer de la même manière la substitution de la valeur précédente est facile, et donne les résultats suivants :

$$f(x) = -\ 0{,}000000000000001021074960443679845432495185865375$$
$$f'(x) = 11{,}16143772649346472644563309780675$$
$$f''(x) = 12{,}56730888925395 90.$$

La valeur trouvée pour $f(x)$ étant négative, on est averti que le nombre substitué est plus petit que la racine : ce nombre forme donc la limite inférieure, et la limite supérieure est par conséquent 2,0945514815423266. Les résultats de la substitution de ce dernier nombre se déduisent immédiatement des précédents, et sont

$$f(x) = 0{,}0000000000000000950688122056666900486125701850 96$$
$$f'(x) = 11{,}1614377264934659831765220232 0268$$
$$f''(x) = 12{,}567308889253959 6.$$

On divisera donc $f(x)$ par $f'(x)$, en continuant la division jusqu'au trente-deuxième chiffre après la virgule inclusivement, ce qui donnera pour quotient 0,00000000000000000851761345942069. Ajoutant une unité au dernier chiffre de ce nombre, que l'on retranchera ensuite de la valeur précédente, il viendra pour *cinquième valeur approchée* 2,09455148154232659148238654057930. Le dernier chiffre de cette valeur est exact, c'est-à-dire que l'on s'éloignerait de la véritable valeur de la racine si l'on augmentait ou si l'on diminuait ce chiffre d'une unité : mais si l'on voulait pousser plus loin la division, les chiffres que l'on obtiendrait à la suite du trente-deuxième n'appartiendraient plus à la racine.

(31) Nous avons fait connaître dans les articles 6 et suivants les propriétés de l'approximation du premier ordre, c'est-à-dire de celle qui résulte de l'omission des termes contenant des puissances de l'inconnue supérieures à la première. Plusieurs analystes ont considéré l'approximation du second ordre, qui est beaucoup plus con-

vergente, et ont proposé d'en faire usage pour le calcul des racines. Ce procédé peut en effet être appliqué avec avantage dans un grand nombre de cas, mais il laissait à résoudre les difficultés principales que présentait aussi l'approximation newtonienne. Elles consistent à distinguer avec certitude les racines imaginaires, à régler exactement le calcul en assignant une seconde limite, et à mesurer la convergence de l'approximation. Je vais exposer dans les articles suivants les principes qui servent à résoudre ces questions.

Pour éviter l'incertitude qui provient de l'omission des termes subordonnés, nous avons introduit dans le calcul l'expression de deux limites entre lesquelles la racine est toujours comprise. Nous ferons usage de ce même principe, sans reproduire les détails de calcul que nous avons donnés en traitant de l'approximation linéaire; car après avoir montré l'exactitude rigoureuse des conséquences de ce genre, il importe beaucoup de conserver toute la simplicité de l'analyse différentielle.

Nous examinerons d'abord sous ce point de vue la question suivante, qui se rapporte à l'approximation du premier degré.

L'arc mxn (fig. 15) appartient à une ligne dont l'ordonnée est $f(x)$: le point o est l'origine des abscisses : l'abscisse ox du point d'intersection est la valeur d'une racine de l'équation $f(x)=0$. Concevons qu'à partir du point d'intersection x on porte sur l'axe des abscisses, et vers la gauche, une quantité très-petite xa, que nous désignerons par ω. Au point a on élève l'ordonnée am; par le point m on mène deux lignes $m\mu$, $m\nu$. La première $m\mu$ est tangente à l'arc au point m, la seconde $m\nu$ est parallèle à la droite txt' qui touche l'arc au point x. On forme ainsi sur l'axe un intervalle $\mu\nu$, qui serait beaucoup plus petit si le premier intervalle xa avait reçu lui-même une valeur beaucoup moindre. Il s'agit de connaître la relation qui existe entre ce premier intervalle xa, que l'on peut regarder comme arbitraire, et l'intervalle $\mu\nu$ qui en dérive selon la construction précédente. On considère ici la dernière relation qui subsiste entre les intervalles ax et $\mu\nu$, c'est-à-dire qu'on suppose que l'intervalle initial ax, désigné par ω, diminue continuellement et a zéro pour limite: que par exemple il devient successivement ω, $\frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{4}\omega$, etc. : il s'agit de déterminer les valeurs correspondantes de $\mu\nu$, et d'en conclure ce que devient la relation de $\mu\nu$ à ax lorsque $\mu\nu$ atteint sa limite zéro.

La question étant ainsi distinctement posée est très-facile à résoudre. x désignant la valeur de l'abscisse ox, et ω l'intervalle xa, on voit que l'ordonnée am est égale à $f(x-\omega)$. La sous-tangente $a\mu$ est ainsi exprimée, $-\frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}$; la valeur de la ligne $a\nu$ est $-\frac{f(x-\omega)}{f'(x)}$: par conséquent la longueur de l'intervalle $\mu\nu$ est

$$-\frac{f(x-\omega)}{f'x}+\frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}, \quad \text{ou } f(x-\omega).\left(\frac{1}{f'(x-\omega)}-\frac{1}{f'x}\right).$$

Il ne reste plus qu'à supposer ω une quantité infiniment petite. $f(x-\omega)$ est la valeur de $f(x)$ diminuée de sa différentielle $dxf'(x)$, et fx est nulle par hypothèse, puisque x est l'abscisse d'un point d'intersection : donc le premier facteur $f(x-\omega)$ de l'expression de $\mu\nu$ est $-dxf'x$. Le second facteur est la différentielle de $\frac{1}{f'x}$, où l'on supposera dx négative. Ce second facteur est donc $dx\frac{f''x}{(f'x)^2}$. Donc la valeur de $\mu\nu$ est

$$-\omega^2\frac{f''x}{f'x}.$$

Il est évident qu'on trouvera ce même résultat en développant l'expression précédente selon la puissance de ω, et omettant les termes subordonnés.

On connaît par cette valeur de la ligne infiniment petite $\mu\nu$ que cet intervalle devient incomparablement plus petit que l'intervalle ω : il est égal au carré de ω multiplié par le quotient $-\frac{f''x}{f'x}$, quantité finie qui exprime le rapport des deux fluxions $f''x$ et $-f'x$ au point d'intersection x, et qui dépend de la forme de la courbe en ce point.

(32) Considérons ω comme une première erreur, parce que cet

intervalle est la différence de la valeur approchée oa à la valeur exacte ox. En menant la tangente $m\mu$ on détermine un point μ plus approché du point x; et si l'on ajoute à l'abscisse oa la sous-tangente $a\mu$ pour former une nouvelle valeur oμ de l'abscisse, on voit que l'erreur restante μx est devenue plus petite que la précédente ax. Soit ω' cette nouvelle erreur : on conclut de l'expression $-\frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}$ de la sous-tangente,

$$\omega' = \omega + \frac{f(x-\omega)}{f'(x-\omega)}.$$

Si l'on développe selon les puissances de ω, en omettant les termes subordonnés ; ou, ce qui est la même chose, si l'on emploie les expressions différentielles, on a

$$\omega' = \omega + \frac{fx - \omega . f'x + \frac{1}{2}\omega^2 . f''x + \text{etc.}}{f'x - \omega . f''x + \text{etc.}}.$$

On omet le terme fx, qui est nul par hypothèse, et l'on trouve

$$\omega' = \omega + \frac{-\omega . f'x + \frac{1}{2}\omega^2 . f''x + \text{etc.}}{f'x - \omega . f''x + \text{etc.}};$$

ou, ω étant une quantité infiniment petite,

$$\omega' = -\frac{\omega^2}{2} . \frac{f''x}{f'x}.$$

Ainsi l'erreur ω, supposée d'abord très-petite, diminue très-rapidement, puisqu'elle devient égale au carré de l'erreur précédente multiplié par une quantité déterminée et constante, savoir $-\frac{1}{2} . \frac{f''x}{f'x}$, valeur finie qui se rapporte au point x de l'arc mxn.

L'équation $\omega' = -\frac{\omega^2}{2} . \frac{f''x}{f'x}$ exprime, comme nous l'avons dit, la relation finale d'une erreur à celle qui la suit. Cette condition subsiste rigoureusement au point d'intersection x; c'est-à-dire qu'elle fait connaître la convergence *finale* de l'approximation linéaire. Ces résultats sont ceux que nous avons déja démontrés : on se propose maintenant d'étendre ces considérations au contact parabolique des courbes.

(33) Soit oa (fig. 16) une première valeur approchée de l'abscisse ox d'un point d'intersection. L'arc mxn appartient à une courbe dont l'ordonnée est exprimée par $f(x)$. Nous désignons par a la valeur approchée oa, et par x la valeur exacte ox. Soit $x = a + \varepsilon$, en sorte que ε est l'erreur de la première approximation, et que l'on a $f(a+\varepsilon) = 0$. Nous développons cette expression en omettant les termes où il entre des puissances de ε supérieures à la seconde : on a ainsi pour déterminer ε l'équation

$$fa + \varepsilon f'a + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f''a = 0.$$

fa, $f'a$, $f''a$ sont des coefficients connus. Si l'on résout cette équation

$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon\frac{f'a}{f''a} + 2\frac{fa}{f''a} = 0,$$

on trouve

$$\varepsilon = -\frac{f'a}{f''a} \pm \left[\left(\frac{f'a}{f''a}\right)^2 - 2\frac{fa}{f''a}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Soit ω l'erreur de la première valeur approchée a, et ω' l'erreur de la valeur plus approchée que l'on trouve en ajoutant à la quantité a la racine ε que l'on vient de déterminer : on a $x = a + \omega$ et $x = a + \varepsilon + \omega'$. Donc $\omega' = \omega - \varepsilon$. La question consiste à trouver la dernière relation de ω et ω' : on y parviendra comme il suit. On déterminera ε au moyen de l'équation précédente, en remplaçant a par sa valeur $x - \omega$; ensuite on supposera que ω est infiniment petite. On a donc

$$\omega' = \frac{\omega f''(x-\omega) + f'(x-\omega) \mp \left\{[f'(x-\omega)]^2 - 2f(x-\omega).f''(x-\omega)\right\}^{\frac{1}{2}}}{f''(x-\omega)}.$$

ω étant infiniment petite, on conservera le premier terme subsistant du résultat. Or on reconnaît que dans le numérateur, il ne reste, en attribuant le signe — au radical, que des termes multipliés par ω^3; toutes les puissances de ω inférieures à la troisième disparaîtront. Quant au dénominateur $f''(x-\omega)$, il se réduit à $f''(x)$ lorsque ω est infiniment petite. Il reste donc à former le numérateur : voici le détail de ce calcul.

Si dans la première partie $\omega f''(x-\omega)+f'(x-\omega)$ on développe selon les puissances de ω, en ne conservant que la troisième puissance et n'écrivant point la variable x sous le signe de fonction, on trouve

$$f'-\frac{\omega^2}{2}f'''+\frac{\omega^3}{3}f^{\text{IV}}.$$

Dans le produit $f(x-\omega).f''(x-\omega)$ qui entre sous le radical, le facteur $f(x-\omega)$ se réduit à $-\omega f'+\frac{\omega^2}{2}f''-\frac{\omega^3}{2.3}f'''$, parce que fx est nulle par hypothèse. Donc pour s'arrêter à ω^3 dans l'expression du produit, on écrira au lieu du second facteur $f''(x-\omega)$ la quantité $f''-\omega f'''+\frac{\omega^2}{2}f^{\text{IV}}$. Le produit cherché $f(x-\omega).f''(x-\omega)$ est donc

$$-\omega f'f''+\omega^2\left(\frac{1}{2}f''^2+f'f'''\right)-\omega^3\left(\frac{2}{3}f''f'''+\frac{1}{2}f'f^{\text{IV}}\right).$$

Le carré de $f'(x-\omega)$, ou de $f'-\omega f''+\frac{\omega^2}{2}f'''-\frac{\omega^3}{2.3}f^{\text{IV}}$, est

$$f'^2-2\omega f'f''+\omega^2(f''^2+f'f''')-\omega^3\left(f''f'''+\frac{1}{3}f'f^{\text{IV}}\right).$$

Par conséquent la quantité affectée de l'exposant $\frac{1}{2}$ est

$$f'^2-\omega^2f'f'''+\omega^3\left(\frac{1}{3}f''f'''+\frac{2}{3}f'f^{\text{IV}}\right).$$

Si on élève à la puissance $\frac{1}{2}$ on trouve, en attribuant le signe $-$ au radical,

$$-f'\left[1-\omega^2.\frac{1}{2}\frac{f'''}{f'}+\omega^3\left(\frac{1}{2.3}\frac{f''f'''}{f'^2}+\frac{1}{3}\frac{f^{\text{IV}}}{f'}\right)\right],$$

ou

$$-f'+\omega^2.\frac{1}{2}f'''-\omega^3\left(\frac{1}{2.3}\frac{f''f'''}{f'}+\frac{1}{3}f^{\text{IV}}\right);$$

et ajoutant la première partie de l'expression de ω', on a

$$\omega'=\frac{1}{f''}\left(-\frac{\omega^3}{2.3}\frac{f''f'''}{f'}\right),\ \text{ou}\ \omega'=-\frac{\omega^3}{2.3}\frac{f'''}{f'},$$

résultat très-simple qui donne la mesure de la convergence finale pour l'approximation du second ordre. L'erreur ω décroît très-rapidement : sa valeur est le produit du cube de l'erreur précédente par un coefficient constant. Le nombre des chiffres décimaux exact est, généralement parlant, triplé par chaque nouvelle opération. Le coefficient constant est égal à $-\frac{1}{2.3}\frac{f'''x}{f'x}$: sa valeur dépend de la forme de la courbe au point d'intersection.

(34) Ces conséquences s'étendent aux approximations de tous les degrés. Pour découvrir le résultat général j'ai employé une autre forme de calcul que je vais rapporter.

La première valeur approchée étant désignée par a, et ε exprimant l'erreur de cette détermination, on a $x=a+\varepsilon$, et $f(a+\varepsilon)=0$. On développe cette expression, et l'on omet les puissances de ε supérieures à la première, à la seconde, à la troisième, etc., selon que l'on veut se borner à l'approximation du premier degré, ou du second, ou du troisième, etc. Considérons ce dernier cas : l'équation qui sert à déterminer ε est donc

$$fa+\varepsilon f'a+\frac{\varepsilon^2}{2}f''a+\frac{\varepsilon^3}{2.3}f'''a=0. \qquad (e)$$

Or cette équation est seulement approchée : il est évident que la valeur de ε qu'elle fournit n'est pas complète. Par conséquent si on l'ajoute à la quantité a, on ne trouvera point exactement la racine x; elle en différera d'une nouvelle erreur beaucoup plus petite que la première : il s'agit de découvrir la relation finale qui subsiste entre une erreur et celle qui la suit. L'équation $f(a+\varepsilon)=0$ ne subsisterait que si la valeur de ε était déterminée par l'équation complète, et non par une équation approchée. Soit ω la valeur exacte de ε, en sorte que l'on a $x=a+\omega$, et $f(a+\omega)=0$; soit ω' l'erreur qui remplace la précédente ω, et qui provient de ce que

29.

l'on ne calcule qu'une valeur approchée de ε : on a donc $x=a+\varepsilon+\omega'$, la valeur ε étant la racine de l'équation approchée (e). Donc $\omega'+\varepsilon-\omega=0$ et $a=x-\omega$. Actuellement nous mettrons dans l'équation (e) pour a sa valeur $x-\omega$, et pour ε sa valeur $\omega-\omega'$: on aura ainsi une équation entre ω et ω'. Il faudra déduire de cette équation la valeur de ω' exprimée en ω, et supposer ω infiniment petite. On connaîtra ainsi la relation finale cherchée entre les deux erreurs consécutives ω et ω'. L'équation (e) devient

$$f(x-\omega)+(\omega-\omega')f'(x-\omega)+\frac{1}{2}(\omega-\omega')^2f''(x-\omega)$$
$$+\frac{1}{2.3}(\omega-\omega')^3f'''(x-\omega)=0: \qquad \text{(E)}$$

il faut, comme nous l'avons dit, tirer de cette équation la valeur de ω', et supposer ensuite ω infiniment petite. Pour que cette recherche soit générale, on doit considérer une équation d'un degré quelconque dont ω' est l'inconnue.

On remarquera d'abord que l'équation (E) donne plusieurs valeurs de ω', et cela doit être puisque le calcul se rapporte jusqu'ici à toutes les valeurs de x, et non pas seulement à celle qui est la plus voisine de la valeur approchée a. La racine ω' qui est l'objet spécial de la recherche est celle qui deviendrait nulle si ω était nulle, et c'est ce caractère qui nous indique celles des racines que l'on doit choisir parmi celles que donne l'équation (E).

On développera par rapport aux puissances de ω' le premier membre de cette équation, et chaque coefficient d'une puissance de ω' sera ordonné selon les puissances croissantes de ω. On aura ainsi une équation de cette forme :

$$0=A\,\omega'^3+B\,\omega'^2+C\,\omega'+D. \qquad \text{(F)}$$

A, B, C, D, ... sont des coefficients ordonnés selon les puissances croissantes de ω, et cette équation pourrait être d'un degré quelconque en ω'. Cela posé, considérant ω comme une grandeur connue, et l'équation (F) comme littérale, nous ferons usage de la méthode qui donne la racine ω' correspondante à une valeur infiniment petite de ω; et parmi ces valeurs de ω' nous devons choisir celle qui devient la plus petite lorsque ω est infiniment petite. Ainsi nous prendrons pour la valeur cherchée de ω' celle des racines ω' developpées selon les puissances croissantes de ω qui contient à son premier terme la plus haute puissance de ω.

Le terme D, qui dans l'équation (F) ne contient point ω', est évidemment

$$D = f(x-\omega) + \omega f'(x-\omega) - \frac{1}{2}\omega^2 f''(x-\omega) + \frac{1}{2.3}\omega^3 f'''(x-\omega);$$

ou développant et omettant x sous le signe de fonction

$$\begin{aligned} D = f - \omega f' + \frac{\omega^2}{2} f'' - \frac{\omega^3}{2.3} f''' + \frac{\omega^4}{2.3.4} f^{\text{IV}} - \text{etc.} \\ + \omega f' - \omega^2 f'' + \frac{\omega^3}{2} f''' - \frac{\omega^4}{2.3} f^{\text{IV}} + \text{etc.} \\ + \frac{\omega^2}{2} f'' - \frac{\omega^3}{2} f''' + \frac{\omega^4}{2.2} f^{\text{IV}} - \text{etc.} \\ + \frac{\omega^3}{2.3} f''' - \frac{\omega^4}{2.3} f^{\text{IV}} + \text{etc.} \end{aligned}$$

La valeur de fx est nulle par hypothèse, et après les réductions on trouve

$$D = -\frac{1}{2.3.4}\omega^4 f^{\text{IV}} + \text{etc.}$$

Quant aux coefficients C, B, A qui entrent dans l'équation (F), ils ne se réduisent point comme le précédent. La valeur de C, coefficient de ω' dans l'équation (F), est

$$C = -f'(x-\omega) - \frac{1}{2}.2\omega f''(x-\omega) - \frac{1}{2.3}.3\omega^2 f'''(x-\omega) - \text{etc.}$$

Les autres coefficients B, A sont formés comme celui-ci de différentes puissances de ω, et contiennent chacun un terme sans ω.

Il faut maintenant appliquer à l'équation (F) la règle générale qui sert à déterminer les racines de l'inconnue ω', ordonnées selon les puissances croissantes d'une lettre choisie, qui est ici ω. Or les coefficients A, B, C contenant tous un terme où ω se trouve à la puissance zéro, on a, selon la règle, les quotients ci-indiqués

$$o = A\overset{0:1}{\omega'^3} + B\overset{0:2}{\omega'^2} + C\overset{\substack{3:1\\3:3}}{\omega'} + D.$$

On connaît par la comparaison de ces quotients que celle des racines ω' développées selon les puissances croissantes de ω qui contient à son premier terme le plus haut exposant de ω est donnée par l'équation partielle

$$C\omega' + D = o;$$

et il faut, conformément à la règle citée, réduire C et D à leurs premiers termes selon l'ordre des puissances croissantes de ω. On a donc pour déterminer la racine cherchée ω' l'équation partielle très-simple

$$-\omega' f' - \frac{\omega^4}{2.3.4} f^{\text{IV}} = o,$$

qui donne

$$\omega' = -\frac{\omega^4}{2.3.4} \frac{f^{\text{IV}}}{f'}.$$

Ce résultat est analogue à ceux que nous avons obtenus dans les articles 32 et 33 par un procédé très-différent, fondé sur la résolution effective des équations du premier et du second degré. On voit que la méthode de résolution des équations littérales supplée ici aux formules particulières qui exprimeraient en radicaux les racines des équations.

Si l'on applique l'analyse précédente à l'approximation du quatrième ordre, c'est-à-dire à celle qui résulterait de l'omission des puissances supérieures à la quatrième, on forme l'équation

$$o = f(x-\omega) + (\omega-\omega').f'(x-\omega) + \frac{1}{2}(\omega-\omega')^2.f''(x-\omega)$$
$$+ \frac{1}{2.3}(\omega-\omega')^3.f'''(x-\omega) + \frac{1}{2.3.4}(\omega-\omega')^4.f^{\text{IV}}(x-\omega).$$

On résout ensuite cette équation par la méthode générale qui fait connaître les valeurs de ω' correspondantes à ω infiniment petite; et l'on trouve pour déterminer celle de ces racines dont le premier terme contient la plus haute puissance de ω l'équation partielle

$$-\omega' f' - \frac{\omega^5}{2.3.4.5} f^{\text{v}} = 0.$$

Ainsi la convergence finale de l'approximation du quatrième ordre est telle que chaque erreur ω' est égale à l'erreur précédente ω élevée à la cinquième puissance et multipliée par le facteur constant $-\frac{1}{2.3.4.5}\frac{f^{\text{v}} x}{f' x}$.

La loi suivant laquelle ces résultats se succèdent devient manifeste, et l'on connaît ainsi les propriétés générales des approximations d'un degré quelconque. Au reste ces considérations n'ont point pour objet le calcul numérique des racines : les règles spéciales que nous avons données dans les articles précédents ne laissent rien à désirer pour la facilité des opérations. Mais il importait de montrer toute l'étendue de cette théorie des approximations.

(35) La difficulté de distinguer le cas des deux racines imaginaires du cas des deux racines réelles est le point le plus important de l'analyse des équations; elle exige une méthode propre fondée sur le calcul des limites entre lesquelles les racines sont comprises. Les recherches de Rolle, celles de De Gua, n'ont pu conduire à la résolution numérique des équations, parce qu'elles manquaient d'un caractère spécial pour distinguer les racines imaginaires. Le calcul de l'équation aux carrés des différences a résolu pour la première fois cette singulière difficulté; mais, comme on l'a remarqué depuis long-temps, la solution est purement théorique, et les tentatives que l'on a faites pour la perfectionner ont été presque entièrement infructueuses. Il était donc nécessaire de traiter la question d'une manière différente : nous avons démontré qu'elle admet une autre solution, non moins exacte, et d'une application incomparablement plus facile. Mais il est important de considérer sous divers rapports la question fondamentale dont il s'agit, parce qu'elle se

reproduit dans les recherches relatives aux surfaces courbes, et dans la théorie générale des équations. Nous indiquerons dans les articles suivants les principes généraux qui servent à la résoudre de différentes manières.

Soient $F(x)$ et $f(x)$ deux fonctions algébriques dont les coefficients sont des nombres donnés. Concevons que l'on soit parvenu, en appliquant les méthodes précédemment exposées, à trouver deux limites a et b entre lesquelles l'équation $F(x)=0$ a une seule racine, que nous désignerons par α : il s'agit de connaître le signe du résultat que l'on obtiendrait en substituant cette racine α dans l'autre fonction $f(x)$.

Si la valeur exacte de α était connue, la question n'aurait aucune difficulté : car on attribuerait cette valeur exacte à la variable x dans la fonction $f(x)$, et l'on connaîtrait le signe du résultat. Il n'en est pas de même lorsque la racine α n'est connue que par approximation : car si au lieu de α on substitue une limite a très-rapprochée de α, on n'est point assuré que le signe de $f(a)$ soit le même que le signe de $f(\alpha)$, et l'incertitude subsiste toujours, quelque peu de différence qu'il y ait entre la racine α et la limite a. Or la question qui a pour objet de distinguer le cas des deux racines imaginaires de celui des deux racines réelles, se réduit à connaître le signe que l'on obtiendrait en substituant dans une certaine fonction $f(x)$ une racine α qui rendrait nulle une autre fonction $F(x)$. En effet prenons pour exemple l'équation

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0,$$

que nous avons traitée dans les articles 12 et 36 du premier livre. En subtituant les nombres 2 et 3 dans les fonctions

$$f^{\text{v}}(x),\ f^{\text{iv}}(x), f'''(x), f''(x), f'(x), f(x),$$

on a trouvé ces deux suites

(2)	+	+	—	—	+	—
	120	168	48	82	30	21
	0	0	1	0	1	2
(3)	+	+	+	—	—	—.
	120	288	180	26	43	32

La série des indices, formée selon la règle de l'article 31 du premier livre, est terminée par les nombres 0 1 2. Il s'ensuit 1° que l'équation $f'(x)=0$ a une racine comprise entre 2 et 3, et que cette équation a une seule racine dans ce même intervalle; 2° que l'on doit chercher entre les limites 2 et 3 deux racines de l'équation $f(x)=0$, et que l'on ignore jusque-là si ces deux racines sont réelles ou si elles manquent dans l'intervalle. Pour connaître la nature de ces racines, il faudrait substituer dans $f(x)$ la valeur exacte de la racine α de l'équation $f'(x)=0$, et marquer le signe de $f(\alpha)$. Si ce dernier signe est positif, les deux racines cherchées sont réelles : l'une serait comprise entre 2 et α, et l'autre entre α et 3. Cela résulte évidemment des principes que nous avons démontrés dans le premier livre. Si au contraire le signe de $f(\alpha)$ est négatif, on est assuré que les racines sont imaginaires, parce que la suite des signes perd à la fois deux variations de signes lorsque le nombre substitué passe d'une valeur infiniment peu inférieure à α à une valeur infiniment peu supérieure à α. Mais pour la certitude de cette dernière conclusion, il ne suffit pas de substituer au lieu de x dans $f(x)$ une valeur très-approchée de α : car on conçoit que le signe de $f(x)$ pourrait être positif lorsqu'on attribue à x une certaine valeur, et devenir négatif lorsqu'on altère d'une très-petite quantité le nombre substitué. Toute la difficulté consiste à pouvoir conclure le signe de $f(x)$, quoiqu'on n'attribue à x qu'une valeur approchée a moindre que α, ou une valeur approchée b plus grande que α. Nous avons résolu cette question en considérant non-seulement la grandeur des résultats $f(a)$ et $f(b)$, mais aussi les valeurs $f'(a)$ et $f'(b)$ de la fluxion du premier ordre. Et en effet si la valeur a est très-rapprochée de α, et si le résultat $f(a)$ a une valeur positive très-grande, on est pour ainsi dire assuré que le signe de $f(a)$ est positif; et toutefois il reste à examiner si la fluxion $f'(a)$ étant négative est exprimée par un nombre très-grand : car dans ce cas la fonction $f(a)$ décroissant très-rapidement, il serait possible qu'elle devînt négative lorsqu'on change extrêmement peu la valeur de x; et qu'ensuite elle devînt positive, parce que la fluxion

$f'(x)$ deviendrait elle-même positive et très-grande. La solution que nous avons donnée dans les articles 24 et suivants du premier livre, consiste à introduire dans le calcul les valeurs de $f(a), f'(a)$, celles de $f(b), f'(b)$, et de l'intervalle $b-a$. Par la comparaison de ces quantités, on parvient à connaître sans aucun doute le signe de $f(\alpha)$. On peut aussi considérer la question sous un autre point de vue qu'il est utile d'indiquer.

(36) Si l'on propose en général de connaître le signe du résultat que l'on trouverait en substituant dans $f(x)$ la racine α de l'équation

$$F(x)=0,$$

$f(x)$ et $F(x)$ étant deux fonctions algébriques données, et si l'on excepte le cas singulier où $F(x)$ est $\frac{d}{dx}f(x)$, il suffira d'appliquer les principes que nous avons démontrés dans le premier livre concernant les limites des racines.

On déterminera deux limites a et b entre lesquelles l'équation $F(x)=0$ a une racine réelle, savoir la valeur α que l'on considère; et ces limites a et b pourront toujours être assez rapprochées pour que les deux suites de signes des résultats

$$\begin{matrix} F^{(m)}(a), & F^{(m-1)}(a) \ldots\ldots F'''(a), & F''(a), & F'(a), & F(a) \\ F^{(m)}(b), & F^{(m-1)}(b) \ldots\ldots F'''(b), & F''(b), & F'(b), & F(b) \end{matrix} \qquad (1)$$

fassent connaître que l'équation $F(x)=0$ a en effet une racine réelle entre a et b. Supposons que cette condition ait lieu : on substituera les mêmes limites a et b dans les fonctions qui dérivent de l'autre fonction $f(x)$, savoir :

$$f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x) \ldots\ldots f'''(x), f''(x), f'(x), f(x),$$

et l'on examinera s'il résulte de la comparaison des deux suites de signes

$$\begin{matrix} f^{(n)}(a), & f^{(n-1)}(a) \ldots\ldots f'''(a), & f''(a), & f'(a), & f(a) \\ f^{(n)}(b), & f^{(n-1)}(b) \ldots\ldots f'''(b), & f''(b), & f'(b), & f(b) \end{matrix} \qquad (2)$$

que l'équation $f(x)=0$ ne peut avoir aucune racine entre a et b, en sorte que la série des indices propre aux suites (2) ait zéro pour dernier terme. Si cette dernière condition a lieu en même temps que la précédente, on connaît avec certitude le signe de $f(\alpha)$: ce signe sera celui qui est commun aux deux quantités $f(a)$ et $f(b)$. En effet il résulte de la seconde condition que toutes les quantités comprises entre a et b donneraient des résultats de même signe si on les substituait dans $f(x)$; et il résulte de la première condition que la valeur exacte de α est comprise entre a et b. Donc le signe de $f(\alpha)$ est connu : il est celui de $f(a)$ et $f(b)$. Il suffit donc, pour déterminer ce signe, de rapprocher les limites a et b en sorte que la racine α ne cessant point d'être comprise entre a et b, ce que l'on connaît par les signes des suites (1), la comparaison des suites (2) donne o pour le dernier terme de la série des indices. Or si l'on fait d'abord abstraction du cas où ces deux fonctions auraient cette relation singulière $F(x)=\frac{d}{dx}f(x)$, il est certain que l'on obtiendra facilement des limites a et b qui satisferont à l'une et à l'autre condition : car la fonction $F(x)$ étant exprimée par l'ordonnée d'une certaine courbe, et la fonction algébrique $f(x)$ étant aussi l'ordonnée d'une seconde courbe, les deux limites a et b entre lesquelles se trouve un point d'intersection de la première ligne avec l'axe des abscisses peuvent, généralement parlant, répondre à deux ordonnées de la seconde courbe entre lesquelles l'arc de cette seconde courbe n'aura aucun point d'intersection, et sera exempt de toute sinuosité. Donc la comparaison des suites (2) donnera o pour le dernier terme de la série des indices. Donc les deux conditions énoncées subsisteront ensemble et le signe de $f(\alpha)$ sera connu.

(37) Cette remarque n'est point bornée aux fonctions qui ne contiennent qu'une seule variable. On peut en général résoudre la question suivante, qui se présente dans les applications principales de l'analyse algébrique. Une fonction algébrique $f(x, y, z, \ldots)$ de plusieurs variables étant proposée, et les valeurs de $x, y, z, \ldots$ étant seulement connues par approximation, il s'agit de connaître avec

certitude le signe que l'on obtiendrait en substituant dans la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ les valeurs exactes de $x, y, z, \ldots$ On suppose que l'on connaisse pour chacune de ces valeurs deux limites entre lesquelles elle est comprise. Il faut juger, d'après un caractère certain, si ces limites sont assez rapprochées pour que les divers résultats qu'on obtient en substituant dans la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ des valeurs quelconques de $x, y, z, \ldots$ comprises entre ces limites, sont tous de même signe.

Nous avons assigné ce caractère pour le cas d'une seule variable art. 36 : cette proposition est générale, comme on le verra dans la suite de ces recherches. Il est toujours facile de rapprocher les deux limites qui comprennent chacune des valeurs $x, y, z, \ldots$ en sorte que l'on soit assuré que le signe du résultat de la substitution ne change point si l'on attribue aux variables des valeurs quelconques comprises entre ces limites.

(38) Cette proposition convient, généralement parlant, aux divers points des lignes ou des surfaces courbes, et aux valeurs quelconques des variables $x, y, z, \ldots$; mais il y a des valeurs singulières auxquelles on ne peut point l'appliquer immédiatement. Ces cas exigent un procédé particulier dont nous allons indiquer l'origine. On propose de déterminer le signe du résultat que l'on obtiendrait en substituant au lieu de x dans la fonction algébrique $f(x)$ la valeur α qui rend nulle la fonction différentielle $f'(x)$. Cette valeur α n'est point connue exactement; mais on sait qu'elle est comprise entre deux limites très-voisines et données a et b. Cette dernière question est précisément celle que nous avons considérée d'abord, et qui a pour objet de distinguer le cas des deux racines réelles du cas des deux racines imaginaires. On le voit distinctement dans l'exemple cité art. 35. Si la seconde fonction $f'(x)$ n'avait point avec la première $f(x)$ le rapport singulier dont il s'agit, en sorte qu'au lieu de $f(x)$ on eût une certaine fonction $F(x)$ indépendante de $f(x)$, on examinerait si les deux limites a et b, entre lesquelles α est comprise, sont assez voisines pour que la comparaison des deux suites de signes

$$f^{(n)}(a),\ f^{(n-1)}(a)\ldots\ldots f'''(a),\ f''(a),\ f'(a),\ f(a),$$
$$f^{(n)}(b),\ f^{(n-1)}(b)\ldots\ldots f'''(b),\ f''(b),\ f'(b),\ f(b)$$

donnât o pour le dernier terme de la série des indices ; et si cette condition n'avait pas lieu d'abord, on rapprocherait les deux limites a et b jusqu'à ce que la condition eût lieu, ce qui, dans le cas général, est très-facile. Alors le signe cherché de $f(\alpha)$ serait celui qui est commun à $f(a)$ et $f(b)$. Mais dans le cas particulier que nous considérons, on ne pourrait point obtenir la dernière condition, quelque rapprochées que fussent les limites a et b : le dernier terme de la série des indices ne serait jamais o. Si les deux racines cherchées dans l'intervalle de a et b étaient réelles, on parviendrait en rapprochant les limites à séparer les deux racines ; mais si elles étaient imaginaires, l'incertitude subsisterait toujours, parce que le dernier terme de la série des indices donnée par les suites précédentes ne serait jamais o, mais toujours égal à 2. Cela provient de ce que la valeur de x qui rend nulle l'ordonnée $f(x)$ de la seconde courbe correspond dans la première courbe à un point singulier où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Or le dernier terme de la série des indices donné par ces suites ne peut être o que dans le cas où l'arc de la courbe qui répond à l'intervalle des limites n'a aucun point de maximum ou minimum. On voit donc que la proposition énoncée dans l'art. 36 ne peut point s'appliquer ici de la même manière que si les deux fonctions proposées n'avaient aucun rapport spécial.

Après que l'on a reconnu distinctement l'origine de la difficulté propre au cas dont nous nous occupons, il se présente divers moyens de la résoudre : l'un des plus simples, et d'une application très-facile, est celui que nous allons indiquer. Au lieu de considérer les deux fonctions $f(x)$ et $f'(x)$, on les remplacera par celles-ci $f(x)+f'(x)$ et $f'(x)$. Une valeur α de x qui rend nulle $f'(x)$ est comprise entre a et b : il s'agit de déterminer avec certitude le signe de $f(\alpha)$. Soit $\varphi(x)=f(x)+f'(x)$: on voit que le signe cherché de $f(\alpha)$ est précisément celui de $\varphi(\alpha)$, puisque $f'(\alpha)$ devient nulle par hypothèse. Il suffit donc d'opérer de la même manière que si les fonctions proposées étaient $\varphi(x)$ et $f'(x)$. Or dans ce cas le point singulier où la tangente est parallèle à l'axe des x est déplacé; il ne se rencontre plus nécessairement dans l'intervalle des limites a et b qui comprennent la racine α de l'équation $f'(x)=0$. Il faut donc examiner si ces limites a et b sont telles que pour l'équation $\varphi(x)=0$ les suites

$$\begin{array}{l} \varphi^{(n)}(a)\ldots\ldots\varphi'''(a),\ \varphi''(a),\ \varphi'(a),\ \varphi(a) \\ \varphi^{(n)}(b)\ldots\ldots\varphi'''(b),\ \varphi''(b),\ \varphi'(b),\ \varphi(b) \end{array}$$

ont une série d'indices dont le dernier terme soit zéro; et si cette condition n'a pas lieu d'abord, on parviendra facilement, en rapprochant ces limites, à deux limites plus voisines a' et b' qui donneraient 0 pour le dernier terme de la série des indices, en même temps que les limites a' et b' comprendront toujours la racine α de l'équation $f'(x)=0$. Ces conditions ayant lieu, on marquera le signe commun de $\varphi(a')$ et $\varphi(b')$: ce signe sera celui de $\varphi(\alpha)$, et par conséquent le même que le signe de $f(\alpha)$ qu'il fallait déterminer. Si le signe trouvé est négatif, les deux racines sont réelles; s'il est positif, les deux racines sont imaginaires.

Il faut remarquer surtout que la substitution des limites a et b dans la fonction $\varphi(x)$ et dans celles qui en dérivent, est très-facile parce que cette fonction est égale à $f(x)+f'(x)$. Or les opérations précédentes qui ont servi à trouver les premières limites approchées ont fait connaître les résultats des substitutions dans $f(x)$ et dans toutes les fonctions différentielles qui en dérivent; par conséquent on distinguera le cas des racines imaginaires à la seule inspection des résultats numériques que l'on a déja formés, et l'on obtient ainsi une solution exacte et très-simple de la question proposée.

(39) Dans l'exemple cité plus haut les suites correspondantes aux limites 2 et 3 sont

	$f^{v}(x)$,	$f^{iv}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$,
(2).....	+	+	—	—	+	—
	120	168	48	82	30	21
	0	0	1	0	1	2
(3).....	+	+	+	—	—	—.
	120	288	180	26	43	32

On formera au moyen de la suite (2) une suite correspondante (2)$'$, en ajoutant à chaque terme de la suite (2) celui qui le précède à gauche dans la même suite et marquant le signe du résultat; on opérera de la même manière sur la suite (3) pour former la suite correspondante (3)$'$. On trouvera ainsi

(2)$'$	+	+	+	—	—	+
	0	0	0	1	0	1
(3)$'$	+	+	+	+	—	—.

Comme le dernier terme de cette nouvelle série d'indices n'est pas zéro, on en conclut que les limites 2 et 3 ne sont pas assez rapprochées pour que la question puisse être immédiatement résolue. On substituera donc un nombre intermédiaire 2,2 dans la série des fonctions, et l'on obtiendra le tableau suivant :

	$f^{v}(x)$,	$f^{iv}(x)$,	$f'''(x)$,	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
(2).....	+	+	—	—	+	—
	120	168	48	82	30	21
(2,2).....	+	+	—	—	+	—
	120	192	12	88,08	12,872	16,69248
	0	0	1	0	1	2
(3).....	+	+	+	—	—	—.
	120	288	180	26	43	32

Les limites des deux racines indiquées sont maintenant 2,2 et 3. Si l'on forme les suites (2,2)$'$ et (3)$'$ de la manière qui a expliquée ci-dessus, c'est-à-dire en ajoutant chaque terme des suites (2,2) et (3) au terme qui le précède immédiatement à gauche dans la même suite, on trouvera

$(2,2)'$	+	+	+	—	—	—
	o	o	o	1	o	o
$(3)'$	+	+	+	+	—	—

Le dernier terme de la série des indices données par les suites $(2,2)$ et (3) étant 2, on doit chercher entre les nombres 2,2 et 3, deux racines de l'équation $f(x)=0$; et l'on ne connaît point encore si ces deux racines sont réelles, ou si elles manquent dans l'intervalle de ces limites. Quant à l'équation $f'(x)=0$, elle a certainement une racine réelle entre 2,2 et 3; et les trois derniers termes de la série des indices étant 0 1 2, on connaîtra si les deux racines de l'équation $f(x)=0$ sont réelles ou imaginaires, en substituant dans $f(x)$ la racine α de l'équation $f'(x)=0$: car si le signe de $f(\alpha)$ est positif on est assuré que les racines sont réelles, et elles sont imaginaires si le signe de $f(\alpha)$ est négatif. Or en considérant les suites $(2,2)'$ et $(3)'$, qui ne correspondent point à la fonction $f(x)$, mais à la fonction $f(x)+f'(x)$, on voit qu'il ne peut y avoir entre 2,2 et 3 aucun nombre qui rende nulle l'expression $f(x)+f'(x)$. Cela se conclut de ce que la série des indices donnés par les suites $(2,2)'$ et $(3)'$ a pour dernier terme 0. Donc tout nombre compris entre 2,2 et 3 donne un résultat de même signe lorsqu'on substitue ce nombre dans l'expression $f(x)+f'(x)$. Or la racine α de l'équation $f'(x)=0$ est comprise entre 2,2 et 3. Donc le résultat $f(\alpha)+f'(\alpha)$ a le signe —, et $f'(\alpha)$ étant nulle par hypothèse, il s'ensuit que $f(\alpha)$ est un nombre négatif. Donc les deux racines cherchées sont imaginaires.

(40) Le procédé que l'on vient d'expliquer résout facilement et dans tous les cas possibles la question qui a pour objet de distinguer les racines imaginaires : voici la règle qui en résulte.

Après avoir formé les deux suites de signes (a) et (b) qui répondent aux limites entre lesquelles on doit chercher les deux racines d'une équation, il faut écrire la série des indices que donne la comparaison de ces deux suites. Les trois derniers termes de cette série sont par hypothèse 0 1 2, en sorte que l'équation $f'(x)=0$ a une seule racine entre a et b, et l'on ignore si les deux racines de l'équation $f(x)=0$ sont réelles ou imaginaires. Pour faire cette distinction on remplace chacune des suites de signes (a) et (b) par deux autres (A) et (B), en ajoutant à chaque terme d'une suite le terme qui le précède à gauche dans la même suite. Si l'on compare les deux suites (A) et (B) en formant une nouvelle série des indices, et si l'on trouve 0 pour le dernier terme de cette nouvelle série, la question est résolue. Mais si ce dernier indice n'est pas zéro il faut rapprocher les deux limites (a) et (b), et en continuant d'opérer selon la même règle il arrivera nécessairement, ou que les deux racines cherchées se sépareront, ce qui prouve qu'elles sont réelles, ou que le dernier indice de la nouvelle série donnée par les suites (A) et (B) sera zéro. Dans ce cas, le dernier signe de la suite (A) est le même que le dernier signe de la suite (B); et si ce signe commun est celui de $f''(a)$ dans les suites primitives (a) et (b), les deux racines cherchées sont imaginaires. Mais si le signe commun aux deux derniers termes des suites (A) et (B) est contraire au signe de $f''(a)$ et $f''(b)$ dans les suites primitives (a) et (b), les deux racines cherchées sont réelles. On connaîtra par l'application combien l'usage de cette règle est facile : elle résout promptement la question principale que présente la recherche des limites. On pourrait donner des formes très-variées à cette solution, car il est évident que l'on serait conduit aux mêmes conséquences en ajoutant à la fonction primitive $f(x)$ des fonctions différentes de $f'(x)$, qui auraient aussi la propriété de devenir nulles lorsqu'on donne à x la valeur que nous avons désignée par α : mais en employant la fonction $f'(x)$ le calcul est réduit à une forme extrêmement simple, puisqu'il suffit d'ajouter à chaque terme d'une suite le terme précédent de la même suite.

(41) Si l'on avait seulement en vue de donner une solution exacte et facile du problème de la distinction des racines imaginaires, on se bornerait à celle que nous avons démontrée dans les articles 22 et suivants du premier livre; mais l'importance de cette recherche, et ses rapports avec la théorie des équations qui contien-

nent plusieurs inconnues, exigent que l'on multiplie les moyens de solution. C'est dans cette vue que je me suis proposé d'appliquer à cette même question le procédé de l'approximation du second degré, et ensuite celui des fractions continues.

Nous considérerons le cas où les signes des deux suites (a) et (b) sont

$$
\begin{array}{lccccc}
 & f^{(m)}x \ldots\ldots f'''x, & f''x, & f'x, & fx \\
(a)\ldots\ldots & + \ldots\ldots + & + & - & + \\
 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
(b)\ldots\ldots & + \ldots\ldots + & + & + & + :
\end{array}
$$

il sera facile d'appliquer à tous les autres cas les conséquences que fournit l'examen de celui-ci.

Les trois derniers termes de la série des indices étant 0 1 2, on voit que l'on doit chercher entre les limites a et b deux racines de l'équation $fx = 0$, et qu'il s'agit de reconnaître si ces deux racines subsistent en effet, ou si elles sont imaginaires. La fig. 17 représente dans l'intervalle des limites a et b l'arc dont l'équation est $y = fx$. On écrira $a + x - a$ au lieu de x dans fx, en désignant par a la première valeur approchée équivalente à l'abscisse $o\,a$, et l'on développera comme il suit la fonction $f(a + x - a)$:

$$fx = f(a + x - a) = fa + (x - a)f'a + (x - a)^2 \tfrac{1}{2} f''(a \ldots x).$$

Le terme qui complète la série contient $f''(a \ldots x)$, c'est-à-dire une fonction f'' d'une certaine quantité comprise entre a et x, que l'on forme en ajoutant à a une valeur inconnue comprise entre 0 et $x - a$: on applique ici le théorème rapporté dans l'Introduction, art. 9. On considérera maintenant que les valeurs de la fonction $f''x$ sont toutes positives dans l'intervalle des limites a et b, et qu'elles vont toujours en augmentant lorsqu'on passe de la première abscisse a à la dernière b. Cela résulte évidemment des signes que présentent les deux suites (a) et (b) au-dessous des fonctions $f''x$ et $f'''x$. Donc la moindre valeur que puisse recevoir l'expression $f''(a \ldots x)$ est $f''a$, et la plus grande est $f''b$. On en déduit

$$fx > fa + (x - a)f'a + (x - a)^2 \tfrac{1}{2} f''a,$$

condition qui subsiste dans tout l'intervalle des limites. Donc si, après avoir déterminé fa, $f'a$ et $f''a$, on décrivait une ligne qui, ayant x pour abscisse, aurait pour ordonnée

$$fa+(x-a)f'a+(x-a)^2\tfrac{1}{2}f''a,$$

l'arc $m\pi\nu$ appartenant à cette ligne serait placé au-dessous de l'arc mpn dont l'ordonnée est fx; et cela aurait lieu dans tout l'intervalle ab. Au point m les deux ordonnées sont égales, et leur valeur commune est fa. Les fonctions dérivées du premier ordre sont pour l'une des courbes $f'x$, et pour l'autre $f'a+(x-a)f''a$. Ainsi ces fonctions deviennent égales lorsque $x=a$, en sorte que les arcs mpn et $m\pi\nu$ ont un contact du premier ordre au point m. A partir de ce point les lignes se séparent et la seconde $m\pi\nu$ passe au-dessous de la première mpn. Donc si l'arc $m\pi\nu$ de la parabole ne rencontre point l'axe ab, on est assuré *a fortiori* que l'arc mpn ne rencontre pas cet axe: dans ce cas les deux racines cherchées sont imaginaires. On posera donc l'équation du second degré

$$fa+\delta f'a+\frac{\delta^2}{2}f''a=0,$$

et l'on cherchera les valeurs de δ. Si les racines de cette équation du second degré sont imaginaires, c'est-à-dire si l'on a cette condition

$$\left(\frac{f'a}{f''a}\right)^2<2\frac{fa}{f''a},$$

les deux racines de l'équation $fx=0$ sont certainement imaginaires. On peut aussi faire disparaître le dénominateur, et l'on a la condition

$$(f'a)^2<2fa.f''a:$$

lorsqu'elle a lieu on est assuré que deux racines de la proposée $fx=0$ manquent dans l'intervalle des limites a et b.

Supposons maintenant que dans l'équation

$$fx=f(a+x-a)=fa+(x-a)f'a+(x-a)^2\tfrac{1}{2}f''(a\ldots x)$$

on remplace $f''(a\ldots x)$ par la plus grande de ses valeurs, qui est $f''b$: on aura

$$fx < fa + (x-a)f'a + (x-a)^2 \tfrac{1}{2} f''b.$$

Si donc on décrivait l'arc $m\pi'\nu'$ dont l'ordonnée est

$$fa + (x-a)f'a + (x-a)^2 \tfrac{1}{2} f''b,$$

cet arc serait supérieur à l'arc mpn dans tout l'intervalle ab. La valeur de la fluxion du premier ordre est pour l'une des courbes $f'x$, et pour l'autre $f'a + (x-a)f''b$. Elle est pour les deux courbes égale à $f'a$ au point m: ainsi l'arc $m\pi'\nu'$ de la parabole a au point m un contact du premier ordre avec la courbe mpn, et à partir de ce point l'arc $m\pi'\nu'$ est placé au-dessus de la courbe dans tout l'intervalle ab. Donc si l'arc parabolique $m\pi'\nu'$ coupe l'axe ab, on est assuré *a fortiori* que l'arc mpn coupe aussi l'axe, c'est-à-dire que les deux racines cherchées sont réelles. On posera donc l'équation du second degré

$$fa + \delta f'a + \frac{\delta^2}{2} f''b = 0,$$

et l'on cherchera les valeurs de δ : si ces valeurs sont réelles, c'est-à-dire si l'on a la condition

$$\left(\frac{f'a}{f''b}\right)^2 > 2\frac{fa}{f''b}, \text{ ou } (f'a)^2 > 2fa.f''b,$$

on en doit conclure que la proposée $fx = 0$ a deux racines réelles dans l'intervalle des limites a et b.

On parvient à des conséquences semblables si l'on considère l'autre extrémité n de l'arc mpn. En effet en mettant $b-(b-x)$ au lieu de x dans la fonction fx, on a

$$fx = fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 \tfrac{1}{2} f''(x\ldots b),$$

l'expression $(x\ldots b)$ désignant une quantité inconnue comprise entre x et b. Or la plus grande des valeurs que l'on trouve en substituant au lieu de x dans la fonction $f''x$ une quantité comprise entre a et b est, par hypothèse, $f''b$; la moindre est $f''a$: on a donc ces deux conditions,

$$fx < fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2} f''b$$
$$fx > fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2} f''a.$$

Si maintenant, en considérant x comme abscisse variable, on décrit les arcs qui ont pour ordonnées

$$fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2} f''b$$
$$; fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2} f''a,$$

on aura deux arcs paraboliques dont le premier est toujours supérieur à l'arc mpn dans l'intervalle des limites a et b, et le second est toujours inférieur à cet arc mpn. On en conclut que si l'arc supérieur coupe l'axe ab, l'arc mpn coupera le même axe, et que par conséquent les deux racines cherchées seront réelles; mais si l'arc inférieur ne rencontre pas l'axe des x on est assuré que l'arc mpn ne rencontre pas ce même axe, et que par conséquent les deux racines cherchées sont imaginaires. On posera donc l'équation du second degré

$$fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''b = 0,$$

et l'on prendra les valeurs de δ : si ces valeurs sont réelles, c'est-à-dire si l'on a la condition

$$\left(\frac{f'b}{f''b}\right)^2 > 2\frac{fb}{f''b}, \text{ ou } (f'b)^2 > 2fb.f''b,$$

les deux racines de l'équation $fx = 0$ sont réelles. Posant aussi l'équation

$$fb - \delta f'b + \frac{\delta^2}{2} f''a = 0,$$

on en conclut que les deux racines de l'équation $fx = 0$ sont imaginaires si l'on a cette condition

$$(f'b)^2 < 2fb.f''a.$$

(42) Si l'on réunit les résultats précédents, on parvient à cette conclusion : 1° on est assuré que les deux racines cherchées sont réelles, lorsqu'on a l'une ou l'autre des conditions ainsi exprimées

$$(f'a)^2 > 2fa.f''b \qquad (1)$$
$$(f'b)^2 > 2fb.f''b; \qquad (2)$$

2° on est assuré que les deux racines cherchées sont imaginaires lorsqu'on a l'une des deux conditions

$$(f'a)^2 < 2fa.f''a \qquad (3)$$
$$(f'b)^2 < 2fb.f''a. \qquad (4)$$

Il peut arriver qu'aucune des quatre conditions (1), (2), (3), (4) ne subsiste, c'est-à-dire que les quatre conditions contraires auraient lieu toutes à-la-fois. Dans ce cas les limites a et b ne sont pas assez voisines pour que l'on puisse reconnaître par une seule opération si les racines sont réelles ou imaginaires : il faut rapprocher ces limites en substituant dans fx une valeur numérique comprise entre a et b. Si le résultat de cette substitution sépare les deux racines que l'on cherche, on reconnaît qu'elles sont réelles, et la question est résolue; mais si la substitution ne sépare point les deux racines, l'incertitude subsiste encore, et l'on doit procéder à une seconde opération semblable à la précédente afin de distinguer si les racines sont réelles ou imaginaires. On examinera donc si en employant les deux nouvelles limites a' et b' qui remplacent a et b, l'une des quatre conditions (1), (2), (3), (4) est satisfaite, et alors la nature des racines serait connue. Or il est évidemment impossible qu'en continuant de rapprocher les limites, on ne parvienne pas promptement à satisfaire à l'une ou à plusieurs des quatre conditions dont il s'agit. Donc on distinguera certainement les racines par ce procédé, qui se réduit à la comparaison de valeurs numériques connues.

(43) Nous avons supposé que les deux suites de signes qui conviennent aux limites a et b sont

$$
\begin{array}{llllll}
 & f^{(m)}x \ldots\ldots f'''x, & f''x, & f'x, & fx \\
(a)\ldots & + \ldots\ldots\ldots + & + & - & + \\
(b)\ldots & + \ldots\ldots\ldots + & + & + & + :
\end{array}
$$

ainsi la valeur de $f''x$ croît avec x depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, parce que dans cet intervalle le signe de $f'''x$ est $+$. Nous examinerons le cas opposé où les deux suites de signes (a) et (b) sont

$$
\begin{array}{llllll}
(a) \ldots\ldots & + \ldots\ldots - & + & - & + \\
(b) \ldots\ldots & + \ldots\ldots - & + & + & +.
\end{array}
$$

Les trois derniers termes de la série des indices sont encore 0 1 2, et il s'agit de reconnaître si l'équation $fx=0$ a en effet deux racines réelles entre a et b. On écrira

$$fx=f(a+x-a)=fa+(x-a)f'a+(x-a)^2.f''(a\ldots x).$$

Or le signe de $f'''x$ étant $-$ dans tout l'intervalle ab, la valeur de $f''x$ diminue lorsque x augmente depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$: par conséquent si l'on remplace $f''(a\ldots x)$ par $f''a$ on augmente la valeur de fx, et on la diminue si l'on écrit $f''b$ au lieu de $f''(a\ldots x)$. On a donc

$$fx>fa+(x-a)f'a+(x-a)^2.\tfrac{1}{2}f''b$$
$$fx<fa+(x-a)f'a+(x-a)^2.\tfrac{1}{2}f''a.$$

Donc si l'on décrit une courbe dont x est l'abscisse, et qui a pour ordonnée $fa+(x-a)f'a+(x-a)^2.\frac{1}{2}f''b$, l'arc de cette courbe est au-dessous de l'arc mpn dans tout l'intervalle ab. Donc les deux racines cherchées sont imaginaires, si cet arc inférieur ne coupe pas l'axe des abscisses, c'est-à-dire, si l'on a cette condition:

$$(f'a)^2<2fa.f''b.$$

La courbe dont x est l'abscisse, et qui aurait pour ordonnée $fa+(x-a)f'a+(x-a)^2.\frac{1}{2}f''a$ est au contraire placée au-dessus de l'arc mpn dans tout l'intervalle ab: donc l'arc mpn coupe certainement l'axe des abscisses si l'arc supérieur coupe cet axe. Par conséquent les deux racines cherchées sont réelles si l'on a cette condition

$$(f'a)^2 > 2fa . f''b.$$

On considérera maintenant la seconde limite b, et l'on trouvera les résultats suivants

$$fx > fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2}f''b$$
$$fx < fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2}f''a :$$

donc l'arc mpn de la courbe dont l'ordonnée est fx est au-dessus de l'arc parabolique qui a pour ordonnée $fb-(b-x)f'b+(b-x)^2 . \tfrac{1}{2}f''b$, et au-dessous de l'arc parabolique qui a pour ordonnée $fb-(b-x)f'b + (b-x)^2 . \tfrac{1}{2}f''a$. On en conclut que les deux racines cherchées sont réelles si l'on a cette condition,

$$(f'b)^2 > 2fb . f''a ;$$

et que les deux racines sont imaginaires si l'on a cette condition,

$$(f'b)^2 < 2fb . f''b.$$

On comparera ces résultats, qui conviennent au cas où le signe de $f'''x$ est $-$, à ceux que l'on trouve lorsque le signe de $f'''x$ est $+$, et l'on conclura plus généralement 1° que les racines cherchées sont réelles si le carré de la fonction $f'x$ d'une des limites surpasse le double produit de la fonction fx de la même limite par la fonction $f''x$ de celle des deux limites qui donne la plus grande valeur pour $f''x$; 2° que les racines cherchées sont imaginaires si le carré de la fonction $f'x$ d'une des deux limites est moindre que le double produit de la fonction fx de la même limite par la fonction $f''x$ de celle de ces deux limites qui donne la moindre valeur pour $f''x$.

(44) Il ne reste plus qu'à considérer les cas où l'arc mpn (fig. 18) est situé au-dessous de l'axe des abscisses, et tourne sa convexité vers cet axe. Les deux suites de signes sont

$$\begin{array}{lcccccc} & f^{(m)}x & & f'''x, & f''x & f'x & fx \\ (a) \ldots\ldots & + & \ldots\ldots & + & - & + & - \\ (b) \ldots\ldots & + & \ldots\ldots & + & - & - & -, \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{lcccccc} (a) \ldots\ldots & + & \ldots\ldots & - & - & + & - \\ (b) \ldots\ldots & + & \ldots\ldots & - & - & - & -. \end{array}$$

On a dans le premier cas pour la limite a

$$fx > fa + (x-a)f'a + (x-a)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''a$$
$$fx < fa + (x-a)f'a + (x-a)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''b:$$

Donc l'arc $m\pi'\nu'$ est supérieur à l'arc mpn dans tout l'intervalle ab, et l'arc $m\pi\nu$ est au contraire situé au-dessous de l'arc mpn dans le même intervalle.

Pour la limite b, on a

$$fx > fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''a$$
$$fx < fb - (b-x)f'b + (b-x)^2 \cdot \tfrac{1}{2}f''b:$$

ainsi le premier arc parabolique est au-dessous de l'arc npm dans tout l'intervalle ab, et le second arc est toujours situé au-dessus de cet arc npm.

En posant les équations du second degré qui donneraient, s'ils existent, les points d'intersection des deux arcs paraboliques avec l'axe des abscisses, on conclut que les deux racines sont réelles si l'on a l'une de ces conditions

$$(f'a)^2 > 2fa \cdot f''a$$
$$(f'b)^2 > 2fb \cdot f''a;$$

et que les deux racines sont imaginaires si l'on a une de ces deux conditions

$$(f'a)^2 < 2fa \cdot f''a$$
$$(f'b)^2 < 2fb \cdot f''b.$$

(45) Dans le second cas où les suites de signes (a) et (b) sont

$$\begin{array}{lcccccc} (a) \ldots\ldots & + & \ldots\ldots & - & - & + & - \\ (b) \ldots\ldots & + & \ldots\ldots & - & - & - & -, \end{array}$$

on trouve pour la limite a

$$fx > fa + (x-a)f'a + (x-a)^2.\tfrac{1}{2}f''b$$
$$fx < fa + (x-a)f'a + (b-x)^2.\tfrac{1}{2}f''a;$$

et pour la limite b

$$fx > fb - (b-x)f'b + (b-x)^2.\tfrac{1}{2}f''b$$
$$fx < fb - (b-x)f'b + (b-x)^2.\tfrac{1}{2}f''a.$$

Donc les racines sont réelles si l'arc $m\pi\nu$ coupe l'axe, ou si l'arc inférieur partant du point n coupe l'axe, c'est-à-dire si l'on a l'une de ces deux conditions

$$(f'a)^2 > 2fa.f''b$$
$$(f'b)^2 > 2fb.f''b;$$

et les deux racines sont imaginaires si l'on a l'une des deux conditions

$$(f'a)^2 < 2fa.f''a$$
$$(f'b)^2 < 2fb.f''a$$

(46) il est facile maintenant de comprendre tous les cas possibles dans une règle commune, dont l'expression est simple et dispense de toute construction. Il suffit de considérer que si $f''x$ est négative, sa plus grande valeur est celle qui contient sous le signe — le plus petit nombre d'unités, et que la valeur minimum de $f''x$ négative est celle qui sous le signe — contient le plus grand nombre d'unités. Voici l'énoncé de la règle qui sert à reconnaître la nature des deux racines que l'on doit chercher dans l'intervalle des deux limites a et b.

On a formé les deux suites de signes qui conviennent aux limites, et l'on suppose que ces limites soient assez approchées pour que les quatre derniers indices soient 0 0 1 2, condition à laquelle il est toujours très-facile de satisfaire. On s'est assuré que les deux racines dont il s'agit ne sont point égales, et ce cas singulier est facile à distinguer. Les valeurs des résultats

$$f''a,\ \ f'a,\ \ fa$$
$$f''b,\ \ f'b,\ \ fb$$

étant connues par l'opération même qui a donné les limites a et b, on concluera les deux propositions suivantes.

1° Les deux racines cherchées sont réelles si le carré d'un des deux termes moyens $f'a$ ou $f'b$ surpasse le double produit du terme placé à la droite de ce même terme moyen, et sur la même ligne, par celui des deux termes extrêmes $f''a$ et $f''b$ qui contient le plus d'unités sous le signe + ou sous le signe —. On a donc ici deux conditions différentes : si une seule, et à plus forte raison si toutes les deux subsistent, les racines sont réelles.

2° Les deux racines sont imaginaires si le carré d'un des deux termes moyens $f'a$ ou $f'b$ est moindre que le double produit du terme placé à la droite de ce même terme moyen, et sur la même ligne, par celui des deux termes extrêmes $f''a$ ou $f''b$, qui contient le moindre nombre d'unités sous le signe + ou sous le signe —. Il en résulte aussi deux conditions différentes : si une seule, et à plus forte raison si toutes les deux subsistent, les racines cherchées sont imaginaires.

Si aucune des quatre conditions que l'on vient d'énoncer n'a lieu, c'est-à-dire si les quatre conditions contraires subsistent à la fois, on est averti que les limites a et b ne sont point assez rapprochées pour que l'on puisse, par une seule opération, déterminer la nature des racines : on divisera donc l'intervalle $a\,b$ des deux premières limites, et si, par la substitution d'un nombre intermédiaire, les racines ne sont point séparées, on appliquera de nouveau la règle qui vient d'être énoncée. En continuant cette application, il est impossible que l'on ne parvienne pas promptement à séparer les racines si elles sont réelles, ou à reconnaître qu'elles sont imaginaires.

On trouvera par l'usage de cette règle que l'application en est facile, et il est évident que, par ce contact des arcs de parabole, on parvient à distinguer la nature des deux racines dans les équations où la première approximation fondée sur le contact de la ligne droite n'aurait point encore fait connaître si les racines sont imaginaires. Mais notre but principal n'est pas de perfectionner cette première approximation qui ne laisse rien à désirer pour la facilité du calcul : nous avons eu seulement pour objet dans cette dernière recherche de donner plus d'étendue à l'approximation de second ordre, et d'en démontrer une propriété remarquable.

FIN DU LIVRE DEUXIÈME ET DE LA PREMIÈRE PARTIE.