Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 3, 78—79.

УДК 517.92

О МЕРОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА

А. Э. Еременко

Пусть K — поле ростков мероморфных функций в ∞, M — поле функций, мероморфных при $r < |z| < \infty$ (r зависит от функции). Через $K[t_1, \ldots, t_n]$, $K(t_1, \ldots, t_n)$ обозначаем соответственно кольцо многочленов и поле рациональных функций от $t_1, \ldots, t_n$ над K. Пусть $y \in M$ есть решение дифференциального уравнения $F(y', y) = 0$, $F \in K[t_1, t_2]$. Изучается порядок функции y, т. е. порядок роста неванлинновской характеристики $T(r, y)$ при $r \to \infty$. Конечность порядка доказана в [1], а в [2] установлено, что порядок — рациональное число. История вопроса описана в [2, 3]. Отметим, что в [2] вместо K рассматривается поле $\mathbf{C}(z)$, а вместо M — поле функций, мероморфных в $\mathbf{C}$. Все результаты и их доказательства из [2] остаются справедливыми и для полей K и M.

Теорема. *Пусть функция $y \in M$ удовлетворяет дифференциальному уравнению 1-го порядка с коэффициентами из K. Тогда порядок функции y есть число вида $k/2$ или $k/3$, k целое неотрицательное.*

Для уравнений специального вида $(y')^m = R(y)$, $R \in K(t)$ этот результат получен в [3]. Примеры из [3] показывают, что все числа указанного вида могут встретиться.

Доказательство. Поскольку функции из K имеют нулевой порядок, можно считать, что $y \in M \setminus K$. Рассмотрим поле $\mathfrak{A} = K(y', y) \subset M$. Это поле степени трансцендентности 1 над K, замкнутое относительно дифференцирования. По теореме 6 из [2] поле $\mathfrak{A}$ фуксово, следовательно, его род равен 0 или 1 (см. [2], § 5). Заметим, что порядки всех элементов из $\mathfrak{A} \setminus K$ одинаковые [2].

Пусть поле $\mathfrak{A}$ рода 0 над K. В силу одной теоремы С. Ленга ([4], гл. II, п. 3.3 в) справедливо $\mathfrak{A} = K(w)$ для некоторого $w \in \mathfrak{A}$. Имеем $w' = R(w)$, $R \in K(t)$. Из условий Фукса [2, 5] следует, что R — квадратный многочлен, т. е. w есть решение уравнения Риккати с мероморфными в ∞ коэффициентами. Известно, что порядок любого трансцендентного решения такого уравнения есть число вида $k/2$, $k \in N$ [6], что доказывает теорему в случае рода 0.

Пусть теперь поле $\mathfrak{A}$ рода 1 над K. Положим $\mathfrak{A}_1 = \overline{K}(y', y)$, где $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание поля K, т. е. поле ростков алгеброидных в ∞ функций. Известно [5, 7], что фуксово дифференциальное поле рода 1 над алгебраически замкнутым полем $\overline{K}$ имеет вид $\mathfrak{A}_1 = \overline{K}(w, x)$, где

$$w^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = x^3 + Ax + B, \tag{1}$$

$e_i \in \mathbf{C}$ попарно различны, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$,

$$x' = \lambda w, \quad \lambda \in \overline{K}, \quad \lambda(z) \sim \text{const}\, z^{\alpha}, \quad z \to \infty, \quad \alpha \in \mathbf{Q}. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует что $x(z) = \wp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} \lambda(t)\,dt\right)$, следовательно, $\alpha \geqslant -1$, и порядок функции x равен $2(1 + \alpha)$ ([2], § 5). Докажем, что число α кратно 1/4 или 1/6.

Для любого $v \in \mathfrak{A}_1$ обозначим через σv результат аналитического продолжения v по кривой, однократно обходящей ∞. Из очевидного равенства $\sigma y = y$ следует, что σ — автоморфизм поля $\mathfrak{A}_1$. Заметим, что σ коммутирует с дифференцированием. Известен общий вид автоморфизмов полей рода 1, определенных соотношением (1). Пусть $\Delta = 4A^3/(4A^3 + 27B^2)$. Любой автоморфизм поля $\mathfrak{A}_1$ задается формулами [8]

$$x_1 = \mu\,\{(w - b)^2/(x - a)^2 - x - a\}, \tag{3}$$

$$w_1 = \nu\,\{(w - b)/(x - a)\,[-(w - b)^2/(x - a)^2 + x + a] - (xb - wa)/(x - a)\}, \tag{4}$$

$$a, b \in \overline{K}, \quad b^2 = (a - e_1)(a - e_2)(a - e_3), \tag{5}$$

где $\mu = 1$, $\nu^2 = 1$, если $\Delta \neq 0, 1$; $\mu^3 = 1$, $\nu^2 = 1$, если $\Delta = 0$, $\mu^2 = 1$, $\nu^4 = 1$, если $\Delta = 1$.

Пусть теперь $x_1 = \sigma x$, $w_1 = \sigma w$. Запишем условия на a и b, при которых автоморфизм (3), (4) коммутирует с дифференцированием. Для этого применим σ к (2) и подставим в полученную формулу, $x_1' = (\sigma\lambda)\, w_1$ выражения для x_1', w_1, найденные из (3), (4). Пусть сначала $b \neq 0$. После преобразований с учетом (1), (2), (5) получим

$$(a')^2 = (\mu^{-1}\nu\sigma\lambda - \lambda)^2 (a - e_1)(a - e_2)(a - e_3).$$

(Сравните [7], § 13, где эта выкладка проделана в обозначениях Якоби.) Поскольку функция a алгеброидная в ∞, и $a \neq e_i$, $i = 1, 2, 3$ (в силу (5) и предположения, что $b \neq 0$), получаем

$$\mu^{-1}\nu\sigma\lambda(z) - \lambda(z) = o(z^{-1}), \quad z \to \infty. \tag{6}$$

Если $b = 0$, аналогичные вычисления дают $\mu^{-1}\nu\sigma\lambda = \lambda$, следовательно, во всяком случае справедливо (6). Число $\mu^{-1}\nu$ есть корень из 1 степени 4 или 6. Поэтому из (6) вытекает, что число α кратно 1/4 или 1/6, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь уравнение, коэффициенты которого имеют существенную особенность на ∞, а именно, $F(y', y) = 0$, $F \in M[t_1, t_2]$. Решение этого уравнения $y \in M$ называется допустимым, если для любого коэффициента a многочлена F выполняется $T(r, a) = o(T(r, y))$. В отличие от многих результатов по алгебраическим дифференциальным уравнениям 1-го порядка (см., например, обзор в [2]), доказанная теорема не имеет аналога для допустимых решений. В самом деле, в работе [9] А. А. Гольдберг построил целую функцию w наперед заданного порядка $\rho > 0$ со следующими свойствами. Функция $N(r)$, считающая простые корни уравнения $w^2(z) = 1$ в круге $\{z: |z| \leqslant r\}$ имеет нулевой порядок. Все остальные корни этого уравнения имеют кратность 2.

Рассмотрим мероморфную функцию $a = (w')^2/(w^2 - 1)$. Считающая функция полюсов этой функции имеет, очевидно, нулевой порядок. Кроме того, по лемме о логарифмической производной [10] для неванлинновской функции приближения $m(r, a)$ справедливо

$$m(r, a) \leqslant m(r, w'/(w-1)) + m(r, w'/(w+1)) = O(\ln r).$$

Таким образом, функция w имеет нулевой порядок, и целая функция w наперед заданного порядка $\rho > 0$ является допустимым решением дифференциального уравнения $(w')^2 = a(w^2 - 1)$.

Автор благодарит А. А. Гольдберга и В. Г. Дринфельда за полезное обсуждение и рецензента — за ценные замечания.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдберг А. А.*— Укр. матем. ж., 1956, т. 8, с. 254—261. 2. *Еременко А. Э.*— УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 53—82; 1983, т. 38, вып. 6, с. 177. 3. *Bank S. B.*, *Kaufman R. P.*— Acta Math., 1980, v. 144, p. 223—248. 4. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968. 5. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 6. *Wittich H.*— Math. *Z.*, 1960, Bd 74, S. 278—288. 7. *Matsuda M.* First order algebraic differential equations. A differential algebraic approach. Springer-Verlag, 1980. 8. *Касселс Дж.*— Математика, 1968, т. 12, с. 113—160. 9. *Гольдберг А. А.*— Сиб. матем. ж., 1973, т. 14, с. 862—866. 10. *Гольдберг А. А. Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступило в редакцию
10 мая 1983 г.