# SURFACES SINGULIÈRES DE FONCTIONS MÉROMORPHES

MARIO BONK* ET ALEXANDRE EREMENKO**

**Résumé.** Pour toute fonction méromorphe non-constante dans le plan complexe, il existe des branches de la fonction inverse définies dans des disques sphériques de rayons arbitrairement proche de $\arctan\sqrt{8} \approx 70°32'$. Cette constante est la plus grande possible. La démonstration repose sur une étude des surfaces singulières associées aux fonctions méromorphes.

**Singular surfaces of meromorphic functions**

**Abstract.** Every non-constant meromorphic function in the complex plane has branches of the inverse that are definied in spherical discs of radii arbitrarily close to $\arctan\sqrt{8} \approx 70°32'$. This constant is best possible. The proof depends on the study of singular surfaces associated with meromorphic functions.

Soit $\mathcal{M}$ la classe de toutes les fonctions méromorphes non-constantes $f\colon \mathbf{C} \to \overline{\mathbf{C}}$ dans le plan complexe. La sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$ est munie de la métrique sphérique qui est donnée par le plongement standard de $\overline{\mathbf{C}}$ comme la sphère unité de $\mathbf{R}^3$. Dans ce cas, la distance entre deux points est égale à l'angle entre les directions de l'origine de $\mathbf{R}^3$ à ces points.

Désignons par $\mathfrak{B}(f)$ la borne supérieure des rayons sphériques des disques $B \subset \overline{\mathbf{C}}$ tels qu'une branche continue de la fonction inverse $f^{-1}$ existe dans $B$. Soit $\mathfrak{B} = \inf\{\mathfrak{B}(f) : f \in \mathcal{M}\}$. Ahlfors [1] a démontré que $\mathfrak{B} \geq \pi/4$. Cette borne a été ameliorée par Pommerenke [6] et Minda [5] qui obtiennent $\mathfrak{B} \geq \pi/3$.

Nous avons déterminé la valeur exacte de $\mathfrak{B}$.

**Théorème 1.** *Soit $\mathfrak{B}$ défini ci-dessus, alors:* $\mathfrak{B} = b_0 := \arctan\sqrt{8} \approx 70°32'$.

La constante $b_0$ est le rayon du cercle circonscrit d'un triangle sphérique équilateral d'angles $2\pi/3$. La fonction elliptique de Weierstrass qui satisfait l'équation différentielle:

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3), \quad \text{avec} \quad e_j = 2^{-1/2}\exp(2\pi i j/3),$$

est totalement ramifiée au-dessus les points $\infty$ et $e_j$, $j = 1, 2, 3$. On en déduit $\mathfrak{B} \leq b_0$. Le Théorème 1 est établi en faisant $R$ tendre vers l'infini dans le théorème suivant.

*financé par le programme de Heisenberg de Deutsche Forschungsgemeinschaft.
**Soutenue par un don de la NSF.
Note présentée par Mikhaël Gromov.
Note remise le 11 Mai 1999, acceptée le 15 Septembre 1999.

**Théorème 2.** *Il existe une fonction $C_0 : (0, b_0) \to (0, \infty)$ vérifiante la propriété suivante: si $f$ est méromorphe dans $D(R) := \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$ et $\mathfrak{B}(f) \leq b_0 - \epsilon$, alors*

$$\|f'\|(z) := \frac{R^2 - |z|^2}{1 + |f(z)|^2} |f'(z)| \leq C_0(\epsilon), \quad z \in D(R).$$

Observons que $\|f'\|(z)$ est le rapport des longueurs infinitésimales de la métrique sphérique sur $\overline{\mathbf{C}}$ et de la métrique hyperbolique sur $D(R)$.

L'invariance conforme montre que pour la démonstration de ce théorème il suffit de considérer le cas de $z = 0$. Le premier pas est la réduction au cas de fonctions sans valeurs asymptotiques.

**Proposition 3.** *Pour toute fonction méromorphe non-constante dans $D(R)$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $g$ méromorphe dans $D(R)$ sans valeurs asymptotiques telle que $\|g'\|(0) \geq (1 - \epsilon)\|f'\|(0)$ et $\mathfrak{B}(g) \leq (1 + \epsilon)\mathfrak{B}(f)$.*

Etant donnée une fonction méromorphe $f : D(R) \to \overline{\mathbf{C}}$ considérons un espace métrique de longueur infinitésimale $2|f'(z)||dz|/(1 + |f(z)|^2)$. Alors, $S_f$ est une surface singulière. En général, une surface $S$ avec une métrique intrinsèque est ici appelée une *surface singulière* s'il existe une triangulation $T$ de $S$ par des triangles géodésiques qui sont isométriques aux triangles sur une surface complète de courbure constante $\chi = \chi(S) \in \{-1, 0, 1\}$.

Les points isolés de $S$ où la métrique n'est pas lisse sont appelés singularités de $S$. Ils sont charactérisés par la propriété que l'angle total en ces points diffère de $2\pi$. On voit aisément que $\mathfrak{B}(f)$ est égal à $\mathfrak{B}(S_f)$, la borne supérieure des rayons des disques de $S_f$ qui ne contienent pas de singularités.

**Proposition 4.** [3, Proposition 8.4] *Soit $S$ une surface singulière sphérique qui est complète et satisfait $\mathfrak{B}(S) < \pi/2$. Alors, il existe un recouvrement $T$ de $S$ par des triangles sphériques fermés tel que:*

*a) $T$ est localement fini,*

*b) l'intersection de deux triangles quelconques de $T$ est vide ou consiste soit d'un côté commun, soit de sommets communs,*

*c) les rayons des circles circonscrits aux triangles de $T$ sont majorés par $\mathfrak{B}(S)$,*

*d) l'ensemble de sommets de $T$ coïncide avec l'ensemble de singularités de $S$.*

Les points singuliers de $S_f$ correspondent aux points de ramification de $f$. Par conséquent, l'angle total en toute singularité de $S_f$ est au moins $4\pi$.

Une surface singulière porte une structure conforme naturelle. Une application conforme entre deux surfaces singulières préserve les angles, sauf aux singularités.

**Théorème 5.** *Soit $S$ une surface singulière sphérique complète, simplement connexe, ouverte, et qui admet un recouvrement $T$ comme dans la Proposition 4. Si les rayons des circles circonscrits aux triangles de $T$ sont majorés par $b_0 - \epsilon$, et les angles totaux aux sommets sont au moins $4\pi$, alors $S$ est conformément équivalente au disque unité. Toutes les applications uniformisantes $\psi : D(1) \to S$ satisfont $\|\psi'\|(z) \leq L$ pour $z \in D(1)$, où $L$ ne dépend que de $\epsilon$.*

La partie positive de la courbure de $S$ vient de la métrique sphérique sur les triangles en $T$. La partie négative est concentrée aux sommets. Il suit des hypothèses du Théorème 5 que la partie positive est dominée par la partie négative. C'est-à-dire, la surface $S$ est négativement courbée au sens large. En effet, sur ces hypothèses il est possible d'établir que $S$ est hyperbolique au sens de Gromov [4].

On pourrait comparer le Théorème 5 à la proposition suivante qui est plus facile à établir.

**Proposition 6.** *Soit $S$ une surface singulière euclidienne complète, simplement connexe, ouverte, et qui admet un recouvrement $T$ comme dans le Proposition 4. Si les diamètres des triangles de $T$ sont majorés par $M$ et les angles totaux aux sommets sont au moins $2\pi+\delta$ où $M, \delta > 0$, alors on a les conclusions du Théorème 5, où $L$ ne dépend que de $M$ et $\delta$.*

On peut dériver cette proposition du lemme d'Ahlfors-Schwarz [2].

Pour la preuve de Théorème 5 on construit une application bilipschitzienne $\phi\colon S \to \tilde{S}$, où $S$ est la surface donnée et $\tilde{S}$ est une surface singulière euclidienne qui satisfait aux hypothèses de la Proposition 6. Pour la définir, supposons que $F\colon [0, 2b_0) \to [0, \infty)$ soit une fonction croissante, sous-additive, telle que $F(0) = 0$ et $F'(0) < \infty$. Remplaçons un triangle $\Delta \in T$ quelconque de côtés $a, b, c$ par un triangle euclidien $\tilde{\Delta}$ de côtés $F(a), F(b), F(c)$. Si les triangles $\tilde{\Delta}$ sont assemblés de la même manière que les triangles $\Delta \in T$, on obtient une surface singulière euclidienne $\tilde{S}$. Maintenant, il est possible de définir une application bilipschitzienne $\phi\colon S \to \tilde{S}$ telle que la restriction de $\phi$ sur chaque triangle $\Delta$ est une application sur le triangle $\tilde{\Delta}$ correspondant.

Pour appliquer la Proposition 6, il faut que les angles d'un triangle $\tilde{\Delta}$ ne soient pas beaucoup plus petits que ceux de $\Delta$. Pour un triangle $\Delta \in T$ donné désignons ses angles par $\alpha, \beta, \gamma$ et les angles correspondants de $\tilde{\Delta}$ par $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$. La distortion angulaire de $\Delta$ par $F$ est définie par:

$$D(F, \Delta) := \min\{\tilde{\alpha}/\alpha, \tilde{\beta}/\beta, \tilde{\gamma}/\gamma\}.$$

Si l'on pose

$$F_k(t) := \min\{2k\sin(t/2),\ \sqrt{2\sin(t/2)}\}, \quad \text{òu} \quad k \geq 1,$$

on a la proposition suivante qui complète la démonstration du Théorème 2.

**Proposition 7.** *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k \geq 1$ et $\delta > 1$, tels que pour tout triangle sphérique $\Delta$ de rayon du circle circonscrit majoré par $b_0 - \epsilon$, la distortion angulaire satisfait à*

$$D(F_k, \Delta) \geq 1/2 + \delta.$$

Remarquons que la constante $1/2$ dans cette proposition est la plus grande possible pour n'importe quel choix de la fonction $F$. En effet, si $\Delta$ est proche du triangle sphérique extrêmal d'angles $2\pi/3$, alors la somme des angles de $\Delta$ est proche de $2\pi$.

**Remerciements.** Cette recherche a été accompli durant un séjour du premier auteur à Purdue University. Il remercie le Department of Mathematics pour son hospitalité.

## Références bibliographiques

[1] L. Ahlfors, *Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 1145–1147.

[2] L. Ahlfors, *An extension of Schwarz's Lemma*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), 359–364.

[3] M. Bonk and A. Eremenko, *Schlicht regions for entire and meromorphic functions*, J. d'Analyse Math. **77** (1999), 69–104.

[4] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (Ed. S.M. Gersten), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer, New York, 1987, pp. 75–263.

[5] D. Minda, *Bloch constants for meromorphic functions*, Math. Z. **181** (1982), 83–92.

[6] Ch. Pommerenke, Estimates for normal meromorphic functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI **476** (1970).

Mario Bonk, Institut für Analysis, Tech. Univ. Braunschweig, D-38106 Braunschweig, Allemagne.

*E-mail address*: `M.Bonk@tu-bs.de`

Alexandre Eremenko, Dept. of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, Les États Unis d'Amérique.

*E-mail address*: `eremenko@math.purdue.edu`