АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
И ТЕХНИКИ

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск

XXIII

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1978

УДК 512 (091)

Сборник содержит оригинальные статьи по различным вопросам истории математического анализа, вычислительной математики, теории чисел, теории вероятностей и т. д. Наряду с работами, посвященными античности и средним векам, в сборнике помещены исследования о развитии математики XVIII—XX вв. В разделе публикаций впервые печатаются письма крупнейшего советского математика Н. Н. Лузина к А. Данжуа.

И $\frac{20201\text{-}221}{055(02)78}$ 15-78

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 7

Вопросы истории математического анализа

А. П. Юшкевич (Москва). Концепции исчисления бесконечно малых Ньютона и Лейбница 11

В. Н. Молодший (Москва). О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века 32

Ф. А. Медведев (Москва). О канторовской теории действительных чисел 56

А. И. Маркушевич (Москва). К статье Ф. А. Медведева «О канторовской теории действительных чисел» 71

Н. И. Ахиезер (Харьков). К спектральной теории уравнения Ламе 77

С. С. Демидов (Москва). К истории теории С. Ли дифференциальных уравнений с частными производными 87

М. Г. Шраер (Брест). К истории математических методов теории дифракции 118

И. А. Головинский (Москва). Как было введено преобразование Лапласа? 127

А. И. Курдюмова (Тула). Критерий сходимости Больцано — Коши в работе Гаусса 1812 г. 142

Вопросы истории вычислительной математики

Г. Б. Петросян (Ереван). Об алфавитных системах счисления 144

Р. С. Гутер, **Ю. Л. Полунов** (Москва). Двоичная арифметика в инструментальном счете у Джона Непера 156

И. А. Апокин (Москва), **Ю. А. Белый** (Николаев), **Л. Е. Майстров** (Москва). Вычислительная машина Дж. В. Атанасова 168

Из истории античной и средневековой математики

А. Е. Раик (Саранск). К теории египетских дробей 181

И. Г. Башмакова, Е. И. Славутин, Б. А. Розенфельд (Москва). Арабская версия «Арифметики» Диофанта 192

Б. А. Розенфельд (Москва). Некоторые вопросы математики переменных величин в трактате ал-Бируни о тенях . . . 226

Л. М. Карпова, Н. Д. Сергеева (Москва). График функции у ал-Маракиши 231

К. Фогель (Мюнхен). Средневековые купеческие руководства по практической арифметике (перевод с немецкого *И. И. Гендрихсона*) 235

В. С. Широков (Горький). Инфинитезимальная концепция Ж. Буридана 250

Т. А. Токарева (Москва). Алгебра Шюке 270

О теории вероятностей

О. Б. Шейнин (Москва). Теория вероятностей до П. Л. Чебышева 284

Л. Е. Майстров (Москва). Взгляды Д. Юма на вероятность 307

Публикации

Письма Н. Н. Лузина к А. Данжуа (публикация П. Дюгака, Париж. Перевод с французского *Ф. А. Медведева*) 314

Именной указатель 349

SOMMAIRE

Éditorial 7

Problèmes d'histoire de l'analyse infinitésimal

A. P. Youschkevitch (Moscou). Les conceptions de Leibniz et de Newton sur le calcul infinitésimal 11

V. N. Molodchi (Moscou). A. Cauchy et transformation révolutionnaire de l'analyse mathématique au début du XIX siecle 32

F. A. Medvedev (Moscou). Sur la théorie des nombres réels de Cantor 56

A. I. Markouchevitch (Moscou). A propos de l'article de F. A. Medvedev «Sur la théorie des nombres réels de Cantor» 71

N. I. Akhiézer (Kharkov). Sur la théorie spectrale de l'équation de Lamé 77

S. S. Demidov (Moscou). Sur le développement de la théorie des équations aux dérivées partielles de S. Lie 87

M G. Chraër (Brest). Sur l'histoire des méthodes mathématiques de la téorie de diffraction 118

I. A. Golovinski (Moscou). Sur la découverte de la transformation de Laplace 127

A. I. Kourdumova (Toula). Le critère de convergence de Bolzano — Cauchy dans un ouvrage de Gauss de 1812 142

Problèmes des calculs numériques

G. B. Petrossian (Erevan). Sur le systèmes de numérations allhabétiques 144

R. S. Gouter, **Iu. L. Polounov** (Moscou). L'arithmétique binaire et le calcul mécanique chez Neper 156

I. A. Apokine (Moscou), **Iu. A. Bely** (Nikolaiev), **L. E. Maïstrov** (Moscou). Le calculateur de J. B. Athanasov 168

Pour l'histoire des mathematiques dans l'antiquite et le moyen âge

A. E. Raïk (Saransk). Sur la théorie des fractions égyptiennes 181

I. G. Bachmakova, E. I. Slavoutine, B. A. Rosenfield, (Moscou). La version arabe des «Arithmétiques» de Diophante 192

B. A. Rosenfeld (Moscou). Les quantités variables dans le traite de al-Biruni sur les ombres 226

L. M. Karpova, N. D. Serghéeva (Moscou). La figuration géométrique d'une fonction chez al-Marrakiši 231

K. Vogel (München). Überalte arithmetische kaufmännische Praktiken aus dem Mittelalter (Traduction en russe par *N. N. Hendricson*) 235

V. S. Chirokov (Gorki). La conception infinitésimale de J. Buridan 250

T. A. Tokareva (Moscou). L'algèbre de Chuquet 270

Théorie des prcbabilité

O. B. Sheynin (Moscou). La théorie des probabilité avant P. L. Tchebychev 284

L. E. Maïstrov (Moscou). La conception de probabilité chez D. Hume 307

Publications

Lettres de N. Lusin à A. Denjoy (publication de P. Dugac, Paris. Traduction en russe par *F. A. Medvedev*) 314

Index des noms 349

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ

Н. И. Ахиезер

1. Задача Дирихле для эллипсоида привела Ламе к дифференциальному уравнению, которое носит его имя и в функциях Вейерштрасса [1] имеет вид

$$-\frac{d^2y}{dv^2}+n(n+1)\wp(v)\,y=\lambda y, \tag{1}$$

где параметры функции $\wp$ удовлетворяют неравенству $l_3<l_2<l_1$. Известная роль сферических функций в задаче Дирихле для шара побудила Ламе искать специального вида решения его уравнения. Применительно к уравнению (1) эти решения должны быть многочленами от $\wp(v)$, возможно умноженными на один, два или все три радикала $\sqrt{\wp(v)-l_k}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$. Оказалось, что эти решения получаются лишь при $n=0, 1, 2, \ldots$ (целые отрицательные n, очевидно, можно не рассматривать) и при каждом таком n имеется точно $2n+1$ значений для параметра λ. Назовем их собственными значениями Ламе, а соответствующие решения — полиномами Ламе. Знание всей совокупности полиномов Ламе позволяет решать задачу Дирихле для эллипсоида, и аналогия со сферическими функциями является полной.

В трактате Альфена [1] весьма обстоятельно изложено доказательство существования полиномов Ламе (с. 494—502) и дан простой прием для построения многочлена [2] степени $2n+1$, корнями которого являются собственные значения Ламе, причем доказано, что все корни этого многочлена вещественные и простые (с. 474—476); условимся обозначать их

$$\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{2n},\qquad \lambda_k=\lambda_k^{(n)}.$$

В своих рассмотрениях Альфен уже использовал построенную Эрмитом теорию двоякопериодических функций

[1] Сам Ламе, естественно, писал уравнение в функциях Якоби.
[2] Ниже этот многочлен будет обозначен $C(\lambda)$.

второго рода, а также найденную Эрмитом формулу для решений уравнения Ламе при любых значениях λ и любом целом n. Однако Альфен специально не останавливается на тех из этих решений, которые являются периодическими, $y(v+2\omega)=y(v)$, или полупериодическими, $y(v+2\omega)=-y(v)$, функциями от v. Эти решения носят название функций Ламе, их собственные значения вещественны и к их числу, конечно, относятся полиномы Ламе.

В связи с некоторыми обратными задачами спектрального анализа возник вопрос о построении спектральной функции оператора Ламе, рассматриваемого на всей оси. Сформулированная ниже теорема показывает, что для решения этого вопроса требуется выполнение очень простых алгебраических операций. То обстоятельство, что теорема в литературе не встречается, может вызвать некоторое удивление, так как для доказательства теоремы, если не считать простейших общих предложений из теории уравнения Хилла, понадобились лишь результаты Эрмита [2] и одна небольшая статья А. А. Маркова [3] 1896 г., примыкающая к статье Ф. Клейна [4] 1892 г. [3] В связи с солидным возрастом этих работ здесь уместно вспомнить о статье [6].

2. Пусть $n \geqslant 0$ — фиксированное целое число, а λ — произвольное число. По одной теореме Э. Пикара [7] уравнение Ламе имеет интеграл $E(v)$, являющийся двоякопериодической функцией второго рода с периодами 2ω, $2\omega'$. Из общей теории этих функций следует, что

$$E(v)=e^{\rho v}\frac{\sigma(v-a_1)\,\sigma(v-a_2)\ldots\sigma(v-a_n)}{[\sigma(v)]^n}.$$

Константы ρ, $a_1, \ldots, a_n$ могут и должны определиться как функции от λ, если потребовать, чтобы $E(v)$ удовлетворяла уравнению (1). Вместе с $E(v)$ интегралом

В своей статье (представляющей фрагмент из письма к А. М. Ляпунову) А. А. Марков пишет: «На двух фигурах г-н Клейн показывает, как распределяются нули этой целой функции (функции Эрмита) в различных случаях, но не приводит никакого доказательства». А. А. Марков провел полное доказательство, «воспользовавшись рассуждениями, вполне подобными тем, какие были применены к другой целой функции в статье [5]».

уравнения (1) будет $E(-v)$; при этом

$$E(v)\cdot E(-v)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sigma(v-a_k)\,\sigma(v+a_k)}{\sigma^2(v)}=$$

$$=A\prod_{k=1}^{n}[\wp(v)-\wp(a_k)]$$

есть многочлен n-й степени от $\wp(v)$. В случае линейной зависимости между функциями $E(v)$, $E(-v)$ левую часть надлежит заменить на $[E(v)]^2$ (и изменить константу A).

Если в (1) сделать замену переменной $\wp(v)=x$, то получится алгебраическая форма уравнения Ламе

$$2\varphi(x)\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi'(x)\frac{dy}{dx}-2\{n(n+1)x-\lambda\}y=0, \qquad (2)$$

где

$$\varphi(x)=4x^3-g_2x-g_3=4(x-l_1)(x-l_2)(x-l_3).$$

Произведение F двух частных решений $y_1(x)=E(v)$, $y_2(x)=E(-v)$ теперь будет многочленом степени n от x, который (за счет изменения множителя A) можно взять в виде

$$F(x,\lambda)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n.$$

По почину А. А. Маркова этот многочлен назовем функцией Эрмита. Легко доказать, что он удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$2\varphi(x)F'''+3\varphi'(x)F''+\varphi''(x)F'-8\{n(n+1)x-$$
$$-\lambda\}F'-4n(n+1)F=0. \qquad (3)$$

С помощью этого уравнения находятся все коэффициенты A_j функции Эрмита, причем оказывается, что A_j есть многочлен от λ степени j. Таким образом, $F(x,\lambda)$ есть многочлен степени n по x и λ. Далее, легко проверяется, что функция Эрмита удовлетворяет также нелинейному уравнению второго порядка

$$\varphi(x)(F'^2-2FF'')-\varphi'(x)FF'+$$
$$+4\{n(n+1)x-\lambda\}F^2+C(\lambda)=0. \qquad (4)$$

Из этого уравнения можно определить $C(\lambda)$ как многочлен от λ степени $2n+1$

$$C(\lambda) = 4\lambda A_n^2 - g_2 A_{n-1} A_n + g_3 (A_{n-1}^2 - 4A_{n-2} A_n),$$

старший коэффициент которого > 0. Заметим также, что уравнение (4) можно переписать в виде

$$\varphi(x)[y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)]^2 + C(\lambda) = 0. \qquad (4')$$

Отметим два следствия.

I. Если λ — корень многочлена C, то отвечающие ему частные решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения Ламе линейно зависимы, а значит при таком λ

$$F(x, \lambda) = \mathrm{const}\,[y_1(x)]^2.$$

II. При заданном λ кратность $x = x_0$ как корня функции Эрмита не может быть больше 1, если x_0 есть какое-нибудь из чисел l_k, и не может быть больше 2, если $x_0 \neq l_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Отсюда вытекает важное свойство корней многочлена C:

Если λ — корень многочлена C, то при этом λ

$$F(x, \lambda) = (x - l_1)^{\varepsilon_1} (x - l_2)^{\varepsilon_2} (x - l_3)^{\varepsilon_3} [f(x)]^2,$$

где f — многочлен степени k с простыми корнями, а каждое из чисел ε_1, ε_2, ε_3 равно 1 или 0, так что

$$n = 2k + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

и

$$y_1(x) = (x - l_1)^{\varepsilon_1/2} (x - l_2)^{\varepsilon_2/2} (x - l_3)^{\varepsilon_3/2} f(x)$$

есть полином Ламе, а λ — его собственное значение (и поэтому вещественно).

$C(\lambda)$ и является тем многочленом, о котором было упомянуто в начале статьи.

Приведенные нами рассуждения содержатся в книге Альфена (с. 502—503).

Второе решение уравнения Ламе при $\lambda = \lambda_k$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$ можно найти известным из анализа приемом. Это решение не будет ни периодической, ни полупериодической функцией. В книге Альфена (с. 483—485) оно выражено через эллиптические функции.

3. Обратимся к функциям (но не полиномам) Ламе. Каждая из них является линейной комбинацией функций

$E(v)$, $E(-v)$, которые теперь уже линейно независимы. Так как при этом $F = E(v)\,E(-v)$ есть функция периодическая, то обе функции $E(v)$, $E(-v)$ будут одновременно периодическими (или полупериодическими). Поэтому значения λ, принадлежащие функциям Ламе, являются двукратными собственными значениями. Для их нахождения можно составить некоторое трансцендентное уравнение. Мы на этом не остановимся.

Преобразование $x = \wp(v)$, которым мы пользовались, осуществляет конформное отображение прямоугольника v-плоскости с вершинами 0, ω, $\omega + \omega'$, ω' на нижнюю половину x-плоскости, причем вершинам прямоугольника соответствуют точки ∞, $l_1 = \wp(\omega)$, $l_2 = \wp(\omega + \omega')$, $l_3 = \wp(\omega')$. Вместо (1) возьмем уравнение

$$-d^2y/du^2 + n(n+1)\wp(y + \omega')y = \lambda y$$
$$(-\infty < u < \infty), \tag{1'}$$

иначе говоря, будем рассматривать уравнение (1) на прямой $v = u + \omega'$. Это не потребует никаких изменений во всем предшествующем анализе. Потенциал в уравнении (1′)

$$q(y) = n(n+1)\wp(u + \omega')$$

имеет прежние периоды и является, как и прежний, четной функцией; при этом он непрерывен на всей оси u. Введем для уравнения (1′) решения $\varphi(u, \lambda)$ (типа косинуса) и $\psi(u, \lambda)$ (типа синуса):

$$\varphi(0, \lambda) = 1,\quad \varphi'(0, \lambda) = 0,$$
$$\psi(0, \lambda) = 0,\quad \psi'(0, \lambda) = 1.$$

Теперь мы можем рассматривать для уравнения (1′) периодическую и полупериодическую задачи Штурма — Лиувилля на интервале $(-\omega, \omega)$. Каждая из этих краевых задач имеет некоторое число простых собственных значений, их общее число есть $2n + 1$ и им отвечают полиномы Ламе, и, сверх того, бесконечное множество двукратных собственных значений, каждому из которых отвечает одна четная и одна нечетная функция Ламе.

4. Для дальнейшего важно распределить собственные значения Ламе по типам принадлежащих им полиномов Ламе. Это можно сделать, воспользовавшись результатами цитированных работ Ф. Клейна и А. А. Маркова. При

этом понадобится, что

$$\sqrt{x-l_k}=\sqrt{\wp(v)-l_k}=\sqrt{\wp(u+\omega')-l_k}=h_k(u)$$

есть функция от u:

	четная	нечетная	2ω — период	2ω — полупериод
при	$k=1,2$	$k=3$	$k=1$	$k=2,3$

Будем обозначать через a_m собственные значения четных функций Ламе, а через b_m — нечетных. Соответствующие собственные функции будут $\varphi(u, a_m)$, $\psi(u, b_m)$. При этом индекс означает число корней соответствующей собственной функции на точечном множестве $(-\omega, \omega]$.

Фигуры Клейна представляют схематически кривые n-го порядка $F(x, \lambda)=0$; в статье Клейна они построены для простоты лишь при $n=5$ и $n=6$. На них видно распределение всех вещественных корней функции Эрмита по интервалам $(-\infty, l_3)$, (l_3, l_2), (l_2, l_1), (l_1, ∞) при каждом вещественном λ. Особенное значение имеет возможность установления распределения точек $\lambda_i^{(n)}$ на прямых $x=l_1$, $x=l_2$, $x=l_3$. Те же результаты, конечно, получаются с помощью таблицы А. А. Маркова, начало которой мы воспроизводим. Заметим при этом, что мы изменили обозначения, а также, что $\varepsilon=\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}$. Покажем

Номер	Пределы для λ	Число корней уравнения $F(x, \lambda)=0$ в интервале			
		$(-\infty, l_3)$	(l_3, l_2)	(l_2, l_1)	(l_1, ∞)
1	$-\infty<\lambda<\lambda_0$	0	0	0	ε
2	$\lambda_0<\lambda<\lambda_1$	0	0	n	0
3	$\lambda_1<\lambda<\lambda_2$	0	1	0	$1-\varepsilon$
4	$\lambda_2<\lambda<\lambda_3$	1	0	$n-1$	0
5	$\lambda_3<\lambda<\lambda_4$	0	2	0	ε
6	$\lambda_4<\lambda<\lambda_5$	0	0	$n-2$	0
7	$\lambda_5<\lambda<\lambda_6$	0	3	0	$1-\varepsilon$
8	$\lambda_6<\lambda<\lambda_7$	1	0	$n-3$	0

на примере, как с помощью этой таблицы получается нужная информация о типе полиномов Ламе. Положим, что n — число нечетное и пусть исследуется собственное значение λ_3. Возьмем две строки, содержащие λ_3, это строки с номерами 4 и 5. Когда λ, возрастая, переходит через точку λ_3, один корень функции $F(x, \lambda)$ из $(-\infty, l_3)$ и один корень из (l_2, l_1) переходят в (l_3, l_2). Кроме того, один корень переходит из (l_2, l_1) в (l_1, ∞). Следовательно, при $\lambda = \lambda_3$ функция Эрмита имеет по одному (простому) корню в точках $x = l_3$, $x = l_2$, $x = l_1$, а также $(n-3)/2$ двойных корней в интервале (l_2, l_1). Таким образом,

$$F(x, \lambda_3) = (x - l_1)(x - l_2)(x - l_3)[f(x)]^2,$$

где f — многочлен степени $(n-3)/2$, все (простые) корни которого лежат в (l_2, l_1). Мы видим, что при $\lambda = \lambda_3$ полиномом Ламе является нечетная 2ω-периодическая функция

$$h_1(u)h_2(u)h_3(u)f(\mathscr{P}(u + \omega')),$$

имеющая на $(-\omega, \omega]$ точно два корня, т. е. $\psi(u, b_2)$, и поэтому $\lambda_3 = b_2$. С помощью подобных рассмотрений мы находим, что как при нечетном, так и при четном n,

$$\begin{array}{llll} \lambda_0 = a_0, & \lambda_1 = a_1, & \lambda_2 = b_1, & \lambda_3 = b_2, \\ \lambda_4 = a_2, & \lambda_5 = a_3, & \lambda_6 = b_3, & \lambda_7 = b_4, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

При этом $\varphi(u, a_{2m})$, $\varphi(u, b_{2m})$ являются периодическими, а $\varphi(u, a_{2m-1})$, $\psi(u, b_{2m-1})$ — полупериодическими полиномами Ламе.

Умножая на надлежащие константы, сделаем старшие коэффициенты многочленов $C(\lambda)$, $F(l_k, \lambda)$ $(k = 1, 2, 3)$ равными 1. На основании таблицы А. А. Маркова мы найдем тогда, что

$$F(l_3, \lambda) = (\lambda - b_1)(\lambda - b_2)\dots(\lambda - b_n) = B_1(\lambda)B_2(\lambda),$$

$$F(l_2, \lambda) = A_1(\lambda)B_2(\lambda),$$

где

$$B_1(\lambda) = (\lambda - b_1)(\lambda - b_3)\dots,\ B_2(\lambda) = (\lambda - b_2)(\lambda - b_4)\dots,$$

$$A_1(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_3),\dots$$

Если рассматривать все функции (а не только полиномы) Ламе, то кроме $\{\lambda_k\}_0^{2n}$ появится еще бесконечное мно-

жество дальнейших, уже двукратных собственных значений. Число корней на множестве $(-\omega, \omega]$ каждой из этих функций будет $> n$, а сами собственные значения, занумерованные в порядке роста, будут
$(\mu_n) < a_{n+1} = b_{n+1} < a_{n+2} = b_{n+2} < \ldots$ $(\mu_n = \max\{a_n, b_n\})$.
Эти собственные значения в выражении спектральных функций не участвуют, как это известно из спектральной теории уравнения Хилла.

Здесь необходимо остановиться на важной работе Айнса [8], основной задачей которой является построение и изучение функций (и, в частности, полиномов) Ламе с помощью рядов Фурье. При этом для нахождения собственных значений в этой работе используются непрерывные дроби. По ходу дела в статье Айнса доказаны два факта, к которым мы пришли здесь с помощью классических результатов Эрмита и А. А. Маркова. В наших обозначениях эти факты формулируются следующим образом:

1) имеют место неравенства

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n,$$

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < b_n,$$

причем каждое из неравенств $a_k < b_k$, $b_k < a_k$ — возможно [4],

2) начиная с $i = n + 1$, выполняются равенства $a_i = b_i$.

Из этих фактов следует, что спектр оператора Ламе содержит n лакун.

Построением спектральной функции Айнс не занимался.

5. Теперь нам остается применить общий результат, относящийся к уравнению Хилла, например, в той форме, в какой он дан в книге [9, см. n° 21.6]. Для удобства обозначим через I точечное множество, образованное при четном n интервалами

$$(a_1, b_1), (b_2, a_2), (b_3, a_3), \ldots, (b_n, a_n)$$

и при нечетном n — интервалами

$$(a_1, b_1), (b_2, a_2), \ldots, (b_{n-1}, a_{n-1}), (a_n, b_n).$$

Эти интервалы представляют лакуны в спектре, а спектром является множество $E = [a_0, \infty)/I$.

[4] У нас даже доказано, что $a_{2j-1} < b_{2j-1}$, $b_{2j} < a_{2j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Т е о р е м а. Если при принятых выше обозначениях

$$w(\lambda) = \sqrt{\frac{[\gamma(l_2, \lambda)]^2}{C(\lambda)}} \geqslant 0 \qquad (\lambda \in E),$$

$$\sigma'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} w(\lambda) & (\lambda \in E), \\ 0 & (\lambda \in I), \end{cases} \qquad \tau'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{w(\lambda)} & (\lambda \in E), \\ 0 & (\lambda \in I), \end{cases}$$

то спектральная матриц-функция оператора Ламе, рассматриваемого на всей оси $-\infty < u < \infty$, записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma(\lambda) & 0 \\ 0 & \tau(\lambda) \end{pmatrix},$$

так что для любой функции $f(u) \in L^2(-\infty, \infty)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2 d\tau(\lambda),$$

где

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\varphi(u; \lambda)\, du,$$

$$h(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi(u; \lambda)\, du.$$

З а м е ч а н и е. Если рассматривать уравнение Ламе на полуоси $0 < u < \infty$, то $2\sigma(\lambda)$, $2\tau(\lambda)$ будут спектральными функциями при краевом условии типа косинуса, соответственно типа синуса.

Пример: $n = 3$. Функция Эрмита равна

$$F(x, \lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 x + 15\lambda(3x^2 - g_2) + \\ + \frac{9 \cdot 25}{4}(4x^3 - g_2 x - g_3),$$

$$F(l_k, \lambda) = \lambda\gamma(l_k, \lambda), \; \gamma(l_k, \lambda) = \lambda^2 + 6l_k\lambda + 15(3l_k^2 - g_2) \\ (k = 1, 2, 3),$$

$$C(\lambda) = \lambda\gamma(l_1, \lambda)\gamma(l_2, \lambda)\gamma(l_3, \lambda).$$

Спектр образован интервалами (E), на которых

$$\frac{\lambda\gamma(l_3, \lambda)}{\gamma(l_1, \lambda)\gamma(l_2, \lambda)} \geqslant 0.$$

Элементы спектральной матрицы определяются формулами

$$\sigma'(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda\gamma(l_3, \lambda)}{\gamma(l_1, \lambda)\gamma(l_2, \lambda)}},$$

$$\tau'(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma(l_1, \lambda)\gamma(l_2, \lambda)}{\lambda\gamma(l_3, \lambda)}} \quad (\lambda \in E),$$

$$\sigma'(\lambda) = \tau'(\lambda) = 0 \quad (\lambda \in I).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Halphen E.* Fonctions elliptiques, v. II. Paris, 1888, p. 457—531.
2. *Hermite Ch.* — C. r. Acad. sci. Paris, 1877, 87, p. 689—695, 728—732, 821—826; см. также Oeuvres de Charles Hermite, t. III. Paris, 1912, p. 118—122.
3. *Марков А. А.* О нулях целой функции Эрмита и функций Ламе.— Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2, т. V, 1896, с. 74—80.
4. *Klein F.* Über den Hermiteschen Fall der Laméschen Differentialgleichung.— Math. Ann., 1892, 40.
5. *Марков А. А.* О целой функции $x^n F((-n-\Delta)/2, \ldots, 1/x) \times \times F((-n+\Delta)/2, \ldots, 1/x)$ и о функциях более общего характера. Мемуары С.-Петербургской Академии наук. Сер. 7, 1893, т. XI, № 2.
6. *Lipschitz R.* Correspondence.— Ann. Math., 1959, 69, 1, p. 247—251.
7. *Picard E.*— C. r. Acad. sci. Paris, 1880, 90, p. 128.
8. *Ince F. L.* Further investigations into the periodic Lamé Functions.— Proc. Roy. Soc. Edinbrugh, 1940, LX, 83—99.
9. *Титчмарш Е. К.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. II. М., ИЛ, 1961, с. 358—360.