ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ В ТЕОРИИ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ*

ВВЕДЕНИЕ

В теории вековых возмущений выводятся следующие приближенные уравнения:

$$
\begin{aligned}
e \sin \omega &= N_0 \sin(g_0 t + \beta_0) + N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + \ldots + \\
&\quad + N_{n-1} \sin(g_{n-1} t + \beta_{n-1}), \\
e \cos \omega &= N_0 \cos(g_0 t + \beta_0) + N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + \ldots + \\
&\quad + N_{n-1} \cos(g_{n-1} t + \beta_{n-1}),
\end{aligned} \qquad (\alpha)
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} \Phi \sin \Theta &= M_0 \sin(h_0 t + \gamma_0) + M_1 \sin(h_1 t + \gamma_1) + \ldots + \\
&\quad + M_{n-1} \sin(h_{n-1} t + \gamma_{n-1}), \\
\operatorname{tg} \Phi \cos \Theta &= M_0 \cos(h_0 t + \gamma_0) + M_1 \cos(h_1 t + \gamma_1) + \ldots + \\
&\quad + M_{n-1} \cos(h_{n-1} t + \gamma_{n-1}).
\end{aligned} \qquad (\beta)
$$

Здесь e, ω, Φ, Θ — соответственно эксцентриситет, долгота перигелия, склонение и долгота восходящего узла; N, g, β, M, h, γ суть константы; t выражает время.

Уже Лагранж и Лаплас занимались следствиями, вытекающими из уравнений (α) и (β) относительно движения апсид и узлов. При этом речь идет также о решении вопроса, обладают ли ω и Θ средним движением, т. е. представимы ли указанные величины в форме $ct + \chi$, где c —константа **, а χ означает функцию ***, остающуюся для неограниченно возрастающего t между конечными границами.

Этот вопрос был решен Лагранжем в утвердительном смысле для следующих двух случаев.

1. Правые части уравнений (α) или (β) содержат не больше двух членов.

* Работа [Bohl, 1909]

** Пусть она в дальнейшем называется константой среднего движения.

*** Если среднее движение определяется таким образом, что требуется, чтобы функция χ была ограниченной для всех t, то найденные мною результаты от этого существенно не изменятся Однако все же можно было бы поставить вопрос, в какой мере упомянутые определения покрывают друг друга. Если правые части (α), соответственно, (β), которые не должны исчезать одновременно для всех t, суть трехчлены, то определения эквивалентны. То же самое можно сказать, если e, соответственно, tg Φ исчезают не для бесконечного множества различных значений t. Случай, когда последнее условие не выполняется и $n > 3$, я не исследовал.

2. Правые части содержат произвольное число членов, однако один из коэффициентов N (соответственно, M) по абсолютному значению больше суммы абсолютных значений остальных *.

Относительно прочих случаев Лагранж замечает **. Hors de ces deux cas, il est fort difficile et peut-être même impossible de prononcer, en général, sur la nature de l'angle φ ***.

Отмеченная точка зрения Лагранжа воспроизводится также во многих монографиях по теоретической астрономии, например в Traité de mécanique céleste ****. Однако могут быть приведены также высказывания, в которых существование среднего движения, поскольку не имеются в виду два указанных случая, отрицается. Этот взгляд — в такой общности очевидно ошибочный — высказал, например, Стоквелл в одном исследовании, которое высоко ценится из-за численных результатов *****. С другой стороны, в последнее время появились исследования, содержащие попытки доказать, что среднее движение существует всегда. На этих работах я вынужден остановиться несколько подробнее.

Гильден в последние годы своей жизни проводил исследование поднятого здесь вопроса. Сначала он рассмотрел эту проблему в первой и четвертой главах своего Traité analytique des orbites absolues ******. Однако там упущена из виду возможность, что правые стороны в (α) или (β) для любого момента времени могут одновременно принимать произвольно малые по абсолютной величине значения. Гильден же оперирует предлагаемым положительным наименьшим значением суммы квадратов правых частей. В статье *******, опубликованной в трудах Петербургской академии, Гильден сам указывает на отмеченный недостаток. Из названной статьи, однако, с полной определенностью не следует, отстаивает ли он еще утверждение, что среднее движение существует всегда. В этом отношении никаких сомнений по обсуждаемому вопросу не оставляет следующая работа Гильдена. Это обширное исследование, специально посвященное нашему вопросу, называется Sur la transformation des agrégats périodiques ********. В нем, как и в предшествующей статье,

* Второй случай встречается в действительности у большинства планет, однако не у всех.

** «За исключением этих двух случаев, весьма трудно и даже, быть может, невозможно вообще что-либо сказать о природе угла φ».— *Пер. ред.*

*** Этот угол играет роль, аналогичную с ω или Θ в уравнениях (α) или (β). См. Oeuvres de Lagrange, т. V. Paris, 1870, с. 285.

**** Tisserand. Traité de mécanique céleste, t. I, ch. XXVI. Paris, 1889.

***** Stockwell. Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets. Smithsonian contributions to knowledge, 1872.

****** Gyldén. Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales, t. I. Stockholm, 1893.

******* Gyldén. Zur Transformation der periodischen Aggregate. Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, 1894, Ve série, I, 4.

******** Оно образует 4-ю тетрадь 5-го тома Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda på Stockholms observatorium, 1895.

Гильден ограничивается главным образом рассмотрением случая, когда выражения в правых частях (α) или (β) содержат три члена *. Чтобы ясно отразить мнение Гильдена, я сначала приведу отрывок из его только что указанного исследования **: le moyen mouvement reste une quantité réelle et finie dont il sera, évidemment, possible de trouver la valeur, même si le chemin qui y conduit paraît d'abord obscur et hérissé de difficultés ***.

Далее укажу на с. 5 снизу, с. 54 сверху, с. 77 сверху. Однако обнаружить в указанном исследовании обоснованное доказательство правильности мнения Гильдена вряд ли возможно. При рассмотрении работы возникает впечатление, что Гильден предполагает существование среднего движения и занимается определением коэффициента в члене, пропорциональном t. Относительно заслуживающей внимания части работы Гильдена на с. 71—77 мы выскажемся в дальнейшем.

Другая попытка доказательства существования среднего движения была сделана Каваллином в сочинении **** Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets. В качестве коэффициентов t за знаками sin и cos в правых частях (α) и (β) автор этого сочинения пользуется рациональными числами. В данном случае в самом деле существует среднее движение. Что так будет и во всех других случаях, автор заключает в результате рассуждения, занимающего в работе несколько строк на с. 9. Однако я не могу признать за этим рассуждением силы доказательства.

Что касается отзывов, которые упомянутые исследования Гильдена и Каваллина получили в новейших изложениях теоретической астрономии, то об этом я могу сказать только следующее. В первом томе «Небесной механики» Шарлье обсуждаются исследования Каваллина, касающиеся указанного выше случая. Вопрос о существовании среднего движения Шарлье характеризуется как остающийся открытым (с. 390), но все же он считает существование среднего движения вероятным (с. 369). Об отмеченных выше исследованиях Гильдена не говорится ничего.

Выше я уже высказал мнение, что представляемые Гильденом и Каваллином взгляды не получили в трудах этих авторов необходимого обоснования. В дальнейшем я намереваюсь показать, что такой взгляд является ошибочным и по существу. Прежде чем перейти к

* К этому случаю относится также существенная часть моей работы.

** Это можно прочесть на с. 4 сверху.

*** «...Среднее движение остается действительной и конечной величиной, значение которой можно будет, очевидно, установить, хотя путь, которым это может быть достигнуто вначале кажется неясным и усеянным трудностями».— *Пер. ред.*

**** Meddelanden från Lunds astronomiska observatorium, No 19. Названная работа отпечатана также в публикациях Шведской академии. Отмеченные выше исследования Гильдена в работе Каваллина не упомянуты.

изложению собственных своих исследований, я хочу представить обзор полученных мною выводов.

Первая глава содержит подготовительные исследования, а также суждения общего характера. Пусть рассматриваются выражения

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \ldots + A_n \cos(g_n t + \beta_n),\\ \eta &= A_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \ldots + A_n \sin(g_n t + \beta_n).\end{aligned} \qquad (\gamma)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; $g_1, g_2, \ldots, g_n$ означают в этих выражениях константы; t является переменной величиной *. Мы примем, что $\xi = \eta = 0$ не для всех t. Если для частного значения $t = t_0$ получится $\xi = \eta = 0$, то назовем t_0 нуль-значением. Очевидно, что в некоторой окрестности t_0 не существует еще другого нуль-значения. Уравнениями

$$u \cos \varphi = \xi, \qquad u \sin \varphi = \eta \qquad (\delta)$$

каждому значению t ставятся в соответствие величины u, φ. Если t есть нуль-значение, то $u = 0$ и φ — произвольное число. Если t не является нуль-значением, то мы получаем систему значений φ, причем элементы этой системы образуются добавлением к одному из элементов произвольного целочисленного кратного π. Пусть, далее, рассматривается связная область T значений t, содержащая, однако, не только одно значение t. Для этой области φ можно определить как непрерывную функцию от t таким образом, что при подходящем подборе значений u будут удовлетворены уравнения (δ). Новые функции требуемого рода образуются добавлением произвольного целочисленного кратного π, причем таким образом получаются все функции с предписанными свойствами. Указанная аддитивная постоянная в дальнейшем никакой роли не играет. Пусть теперь добавляется еще условие, что $u \geqslant 0$. Для нуль-значения снова $u = 0$, φ — произвольное число. Если t не является нуль-значением, мы получаем систему значений φ, причем элементы этой системы образуются добавлением к одному элементу произвольного целочисленного кратного 2π. Если задана область T значений t такого же вида, как в предыдущем случае, и эта область не содержит нуль-значений, то на ней можно определить непрерывную функцию φ от t так, что уравнения (δ) окажутся удовлетворенными и $u \geqslant 0$. Однако если T содержит нуль-значение, это не всегда возможно, и чтобы для дальнейшего достаточным образом охарактеризовать функцию φ, нужны новые предпосылки. Изложенное побуждает меня отказаться от условия $u \geqslant 0$. При рассмотрении нашей проблемы это имеет своим следствием, что мы станем обсуждать не движение перигелия или восходящего узла, а движение линии апсид или линии узлов. Можно отметить, что различие между результатами Гильдена и Каваллина, с одной стороны, и моими —

* В моей работе я пользуюсь только действительными величинами.

с другой, ни в коей мере не сводится к указанному обстоятельству. Об этом свидетельствует уже то, что указанное различие обнаруживается как раз в случае, когда для достаточно больших t нулевые точки больше не появляются *. Только что обсужденные вопросы из главы I являются, естественно, полностью элементарными, но обойтись без них было бы вряд ли возможно.

Из содержания главы I я укажу далее на установление того факта, что среднее движение существует, если абсолютное значение одного из коэффициентов A в уравнениях (γ) равно сумме абсолютных значений остальных коэффициентов A. Доказательство этого утверждения, впрочем, очень простое.

Наконец, в главе I я касаюсь еще вопроса о верхней и нижней границах $|u|$, причем эти слова должны восприниматься в строго математическом смысле. Уже Лаплас указывает, что всегда должно быть $|u| \leqslant |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$. Если один из коэффициентов A, допустим A_μ, по абсолютному значению больше суммы абсолютных значений остальных **, то далее всегда $|u| \leqslant 2A_\mu - \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} |A_\nu|$. Если нет ни одного такого коэффициента A_μ, то имеем само собой разумеющееся неравенство $|u| \geqslant 0$. Стоквелл без каких-либо пояснений принимает в указанной ранее статье только что отмеченные значения в качестве предельных, что, очевидно, вполне правильным не является. С другой стороны, по обсуждаемому вопросу встречается ряд уклончивых высказываний ***. Как я показал в § 6, достаточное условие для того, чтобы указанные значения являлись искомыми границами, заключается в следующем.

Не существует зависимости вида

$$m_2 (g_2 - g_1) + m_3 (g_3 - g_1) + \ldots + m_n (g_n - g_1) = 0, \qquad (\varepsilon)$$

где $m_2, m_3, \ldots, m_n$ — целые числа, не равные нулю одновременно. Если это достаточное условие удовлетворено, то каждому положительному числу p можно поставить в соответствие такое положительное число q, что в любом t-интервале длиной в q могут быть установлены верхняя и нижняя границы величины $|u|$ с погрешностью, меньшей p.

В главе II выводятся некоторые вспомогательные теоремы, имеющие большое значение для дальнейшего. Чтобы обрисовать предмет этих теорем, вообразим круг с периметром единичной длины. На окружность наносим дугу L, длина которой меньше длины окружности. Наконец, представим себе точку, перемещающуюся по окружности шагами в одном и том же направлении, причем она выходит из определенной точки и делает шаги всегда одной и той же

* Если величина ρ, которая вскоре появится, не является рациональным числом, то для достаточно больших t выражения (ξ) не становятся нулевыми.

** Мы предполагаем, что $n > 1$.

*** См. Tisserand. Méc. cél., t. I, c. 415.

длины. Если шагающая точка с самого начала движения прикоснулась к окружности m раз, то $\psi(m)$ указывает, сколько раз точка прикоснулась к дуге L *. К этой функции $\psi(m)$ относятся отмеченные вспомогательные теоремы.

После подготовительных процедур в главах I и II мы в главе III перейдем к нашему основному предмету. Пусть $n = 3$, тогда уравнения (γ) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + A_3 \cos(g_3 t + \beta_3), \\ \eta &= A_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + A_3 \sin(g_3 t + \beta_3). \end{aligned} \qquad (\zeta)$$

Если среди g_1, g_2, g_3 окажутся одинаковые значения, то правые части (ζ) могут быть преобразованы так, что возникают аналогичные выражения, содержащие, однако, менее трех членов. Мы примем, что g_1, g_2, g_3 отличаются друг от друга; допустим, $g_1 < g_2 < g_3$. Если абсолютное значение одного из коэффициентов A не меньше суммы абсолютных значений остальных, то имеем уже рассмотренный случай. Исключая этот случай, получим $2|A_\mu| \leqslant |A_1| + |A_2| + |A_3|$ для $\mu = 1, 2, 3$. Отсюда следует $|A_\mu| > 0$. Если, в случае надобности, заменить β_1, или β_2, или β_3 на π, то можно добиться, чтобы синусы и косинусы в правых частях (ζ) получили положительные коэффициенты. В связи с этим предположим $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$. Из сказанного следует также, что выражения (ζ) не исчезают одновременно для любых t.

Чтобы было удобно сформулировать главные результаты моей работы, я введу некоторые обозначения. Из отрезков длиной в A_1, A_2, A_3 составим треугольник и обозначим лежащие напротив A_1, A_2, A_3 углы через w_1, w_2, w_3. Положим

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{g_2 - g_1}{g_3 - g_1}, & \zeta &= \frac{1}{\pi}(w_3 + \rho w_2), \\ b &= \beta_3 - \beta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\rho}, & \omega &= \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi\zeta - (b + \pi)\rho). \end{aligned} \qquad (\eta)$$

Очевидно, что всегда $0 < \rho < 1$, $0 < \zeta < 1$. В случае, если ρ является рациональным числом, мы станем применять еще следующие обозначения. Положим $\rho = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$, причем $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — положительные числа без общего делителя. Далее обозначим через H количество целых чисел между $\mathfrak{n}\omega$ и $\mathfrak{n}(\omega + \zeta)$ и через h количество целых чисел, совпадающих с $\mathfrak{n}\omega$ или $\mathfrak{n}(\omega + \zeta)$.

Будут справедливы следующие теоремы.

1. *Если t неограниченно возрастает, то выражение $\frac{\varphi(t)}{t}$ стремится к конечному пределу.*

* Конечные точки дуги не причисляются к дуге.

Если ρ является иррациональным числом, то этот предел — мы станем называть ее характеристическим числом — равен *

$$\frac{1}{\pi}(g_1w_1 + g_2w_2 + g_3w_3), \qquad (\vartheta)$$

в случае же, если ρ представляет собой рациональное число, равен

$$\frac{g_3 - g_1}{2\pi}(h + 2H) + g_1. \qquad (\varkappa)$$

2. *Ответ на вопрос о существовании среднего движения зависит только от величин ρ и ζ* **. *Если положительные величины ρ_0 и ζ_0 меньше 1, а в остальном произвольны, то сколь угодно близко к ρ_0 имеются такие числа $\rho_0 + \varepsilon$, что, если $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$, среднего движения не существует.*

Произвольно близко к ρ_0 имеются, естественно, и такие числа $\rho_0 + \varepsilon$, что в случае $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$ среднее движение существует. Это вытекает уже из того, что рациональное ρ всегда имеет следствием существование среднего движения.

Если в выражениях (ζ) постоянные, которые удовлетворяют указанным здесь условиям, определены на основе экспериментальных данных, то, согласно сказанному ранее, установить или исключить существование среднего движения вообще нельзя. Именно, если мы напишем $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0$, то ненадежность результатов наблюдения, которая имеет место, большей частью приводит к тому, что $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$ также являются допустимыми значениями, причем ε по абсолютному значению — достаточно малое число, а в остальном произвольное. С одной стороны, ε, согласно изложенному выше, может быть выбрано так, что среднее движение существует, с другой стороны, так, что среднее движение не существует. И все же

* На с. 71—76 отмеченной выше статьи «Sur la transformation etc.» Гильден занимается определением постоянных среднего движения, которое он считает существующим. Развитая Гильденом методика, как можно показать, приводит к выражению (ϑ). Хотя эти соображения, на мой взгляд, не дают строгого доказательства существования ни среднего движения, ни характеристического числа, они, с другой стороны, могут считаться достаточными, чтобы свести рассматриваемую проблему к другой — той, которой посвящена глава II моей работы. Последняя проблема появляется также у Гильдена в последних строках с. 74 и в первых строках с. 75. Упомянутые выше рассуждения Каваллина также не являются, на мой взгляд, достаточными для общего доказательства существования хотя бы характеристического числа. Однако, если приведенное Каваллином значение характеристического числа для вышеуказанного рационального случая сопоставить с выражением ($\varkappa$), получаются достойные внимания теоремы о трехчленных уравнениях. Эти теоремы можно так же легко вывести непосредственно, как я это показал в другой работе, «К теории трехчленных уравнений», см. Math. Annalen, Bd. LXV.

** Что, в частности, среднее движение всегда существует, если представляет собой рациональное число, должно считаться уже известным.

не исключена возможность, что методика, по которой определяются константы в выражениях (ζ), допускает решение вопроса о существовании или несуществовании среднего движения на основе теоретических соображений. Поэтому я в § 18 исследовал в таком направлении названную выше проблему, встречающуюся в теории вековых возмущений, и пришел к следующему результату. *Если уравнения (α) и (β) для случая трех планет образуются, согласно методике Лапласа, на основе экспериментального материала и если постоянные N_0, N_1, N_2 или M_0, M_1, M_2 удовлетворяют условиям*

$$2|N_\mu| < |N_0| + |N_1| + |N_2|,$$

соответственно,

$$2|M_\mu| < |M_0| + |M_1| + |M_2|,$$

то решить вопрос о существовании среднего движения нельзя.

К тому, что было сказано выше относительно уравнений (ζ), хочу добавить еще следующее. Как можно показать без особых усилий, случай «ρ — рациональное число» не единственный, когда существует среднее движение. Если среднее движение существует, то разность $\varphi - ct$ * при неограниченно растущем t остается между конечными границами. Однако если не считать случай «ρ — рациональное число», $\varphi - ct$ невозможно разложить в ряд Фурье **, поскольку последний должен равномерно сходиться для всех t, превосходящих некоторую постоянную. Вообще разложения в форме

$$\varphi - ct = \psi_1(t) + \psi_2(t) + \psi_3(t) + \ \ldots \qquad (\lambda)$$

не существует, если требуется, чтобы каждая из функций $\psi(t)$ для $t > t_0$ была равномерно непрерывной и чтобы ряд (λ) равномерно сходился для всех $t > t_0$. Эти условия имели бы своим следствием именно то, что $\varphi(t)$ для $t > t_0$ оказалась бы равномерно непрерывной. Однако можно было бы показать, что этого не может быть.

Относительно внешней формы представленного далее исследования хочу заметить, что я часто пользовался способом наглядных представлений. Но читатель, надо надеяться, поймет, что никаких препятствий для чисто аналитического проведения изложенного хода мысли не возникает.

Значение рассматриваемой проблемы для астрономии, по крайней мере в том виде, в каком она известна до сих пор, должно быть малым. Однако ее можно воспринять как математический вопрос, и мне, во всяком случае, представлялось подобающим исправить некорректный, на мой взгляд, подход к ней.

* c означает здесь характеристическое число для φ.

** Здесь имеется в виду подходящим образом упорядоченный ряд со многими аргументами, пропорциональными одной переменной.

I. СООБРАЖЕНИЯ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

§ 1

В первом параграфе этой главы я приведу ряд соображений, без которых, несмотря на их простоту, вряд ли можно было бы обойтись. Обозначив через

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \quad g_1, g_2, \ldots, g_n$$

постоянные *, через t — неограниченную переменную, положим

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \ldots + A_n \cos(g_n t + \beta_n), \\ \eta &= A_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \ldots + A_n \sin(g_n t + \beta_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Если две величины с разными индексами, скажем g_ι и $g_\varkappa$, имеют одно и то же значение g, то мы можем определить сначала A и β так, чтобы было

$$A_\iota \cos\beta_\iota + A_\varkappa \cos\beta_\varkappa = A\cos\beta, \quad A_\iota \sin\beta_\iota + A_\varkappa \sin\beta_\varkappa = A\sin\beta,$$

и после этого можем положить

$$\begin{aligned} A_\iota \cos(g_\iota t + \beta_\iota) + A_\varkappa \cos(g_\varkappa t + \beta_\varkappa) &= A\cos(gt + \beta), \\ A_\iota \sin(g_\iota t + \beta_\iota) + A_\varkappa \sin(g_\varkappa t + \beta_\varkappa) &= A\sin(gt + \beta). \end{aligned}$$

Поскольку показанный прием можно применить несколько раз, то вместо выражений (1) возникают выражения такого же типа, в которых, однако, нет ни одной пары равных коэффициентов g.

Так как

$$A_\iota \cos(g_\iota t + \beta_\iota) = -A_\iota \cos(g_\iota t + \beta_\iota + \pi)$$

и

$$A_\iota \sin(g_\iota t + \beta_\iota) = -A_\iota \sin(g_\iota t + \beta_\iota + \pi),$$

то выражения (1), не меняя их типа, можно преобразовать так, что у косинусов и синусов не будет отрицательных коэффициентов.

§ 2

Пусть рассматриваются два выражения ξ, η вида (1). Мы предположим, что по крайней мере один из коэффициентов A не равен нулю, что не встречается ни одной пары равных величин g и что ξ и η исчезают при частном значении $t = t_0$. Тогда должно быть $n \geqslant 2$. Производные до $n - 1$-го порядка включительно от ξ, η при $t = t_0$ пусть обозначаются через ξ_0', η_0', ξ_0'', η_0'', ..., $\xi_0^{(n-1)}$, $\eta_0^{(n-1)}$.

---

* В работе встречаются только действительные величины.

Эти величины не могут исчезать одновременно. Именно, если они все сразу превращались бы в нуль, то, поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1^2 & g_2^2 & \cdots & g_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_1^{n-1} & g_2^{n-1} & \cdots & g_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

не исчезает, должно быть

$$\begin{aligned} A_1 \cos(g_1 t_0 + \beta_1) &= A_1 \sin(g_1 t_0 + \beta_1) = \ldots = \\ &= A_n \cos(g_n t_0 + \beta_n) = A_n \sin(g_n t_0 + \beta_n) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получилось бы $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$, что противоречит предположению. Мы обозначим через μ наименьшее из тех значений величины ν, при котором $\xi_0^{(\nu)}$, $\eta_0^{(\nu)}$ одновременно не исчезают.

Пусть теперь $\xi(t)$, $\eta(t)$ рассматриваются в качестве прямоугольных координат некоторой точки P. При $t = t_0$ точка P совпадает с началом координат O; если t отличается от t_0, но все же находится достаточно близко к t_0, то O отличается от P. Ограничиваясь только такими значениями t, проведем вектор от O к P. Направляющие косинусы этого вектора суть *

$$\alpha = \frac{\xi(t)}{\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}}, \qquad \beta = \frac{\eta(t)}{\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}}.$$

Среди величин $\xi_0^{(\mu)}$, $\eta_0^{(\mu)}$ по крайней мере одна отлична от нуля. Мы сначала примем, что $\xi_0^{(\mu)} \neq 0$. Если t находится достаточно близко к t_0, то $\xi(t) \neq 0$ и мы можем написать

$$\alpha = \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta(t)}{\xi(t)}\right)^2}}, \qquad \beta = \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|} \cdot \frac{\frac{\eta(t)}{\xi(t)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta(t)}{\xi(t)}\right)^2}}.$$

Множитель $\frac{\xi(t)}{|\xi(t)|}$ равен ± 1; свой знак он не меняет ни при $t > t_0$, ни при $t < t_0$. Знаки, соответствующие $t > t_0$ и $t < t_0$, противоположны или одинаковы, в зависимости от того, является ли μ нечетным или четным числом. Если t стремится к t_0, то $\frac{\eta(t)}{\xi(t)}$ сходится к $\frac{\eta_0^{(\mu)}}{\xi_0^{(\mu)}}$. Во всех этих замечаниях предполагается, что t находится достаточно близко к t_0. Из сказанного заключаем, что α и β сходятся к некоторым пределам α' и β', когда t стремится к t_0, причем $t > t_0$. Далее заключаем, что α и β сходятся к некоторым

---

* В этой работе все квадратные корни следует считать неотрицательными.

пределам α'' и β'', если t стремится к t_0 и при этом будет $t < t_0$, а именно, $\alpha'' = -\alpha'$, $\beta'' = -\beta'$ или $\alpha'' = \alpha'$, $\beta'' = \beta'$, в зависимости от того, является ли μ нечетным или четным числом.

Аналогичным образом мы приходим к такому же выводу, когда вместо $\xi_0^{(\mu)} \neq 0$ предполагаем $\mu_0^{(\mu)} \neq 0$. Итак, справедливо следующее. *При $t \to t_0$, $t > t_0$ направление вектора OP стремится к некоторому предельному направлению G и при $t \to t_0$, $t < t_0$ стремится к некоторому предельному направлению H. Направления G и H взаимно противоположны или одинаковы, в зависимости от того, является ли μ нечетным или четным числом.*

§ 3

Пусть заданы выражения ξ, η вида (1). Мы предположим, что обе функции ξ и η не исчезают одновременно для всех t. Тогда, не изменяя типа этих выражений, можно написать ξ, η так, что не все коэффициенты A исчезнут и что среди коэффициентов g не будет двух одинаковых. Если ξ и η исчезают одновременно для некоторого частного значения величины t, то пусть это значение t называется нуль-значением. Согласно предыдущему параграфу для каждого нуль-значения можно определить число μ; это число назовем порядком нуль-значения. Между двумя произвольно выбранными значениями t может лежать только конечное число нуль-значений.

Для каждого значения t могут быть определены величины k и u, удовлетворяющие условиям

$$k \cos u = \xi, \qquad k \sin u = \eta. \tag{2}$$

Если соответствующее t является нуль-значением, то $k = 0$, u произвольно. В прочих случаях k приходится выбирать между двумя отличными от нуля значениями, которые различаются только знаками. Если k выбрано, то u имеется еще бесконечное множество значений. Последние возникают из одного значения путем добавления произвольного четного кратного π. Два значения u, соответствующие равным k, отличаются одно от другого на нечетное кратное π.

Докажем теперь следующую теорему. *Существует бесконечно много определенных для всех t непрерывных всюду функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих при подходящем выборе $\rho(t)$ условиям*

$$\rho(t) \cos \varphi(t) = \xi(t), \qquad \rho(t) \sin \varphi(t) = \eta(t). \tag{3}$$

Функции $\varphi(t)$ получаются из одной и той же функции путем добавления произвольного целочисленного кратного π. Если $\varphi(t)$ выбрана, то $\rho(t)$ этим полностью определена; она непрерывна для всех t. Пусть t_0 означает частное значение t, не являющееся нуль-значением, и пусть k_0, u_0 удовлетворяют условиям

$$k_0 \cos u_0 = \xi(t_0), \qquad k_0 \sin u_0 = \eta(t_0). \tag{4}$$

Тогда $\varphi(t)$ и соответствующая функция $\rho(t)$ могут быть выбраны так, что

$$\rho(t_0) = k_0, \qquad \varphi(t_0) = u_0. \tag{5}$$

Пусть $\mathfrak{T}$ означает теперь связную область значений t, содержащую, однако, не только одно значение величины t. Пусть, далее, $\varphi_1(t)$ является одной из определенных на этой области и непрерывных на ней функций, удовлетворяющей при подходящем выборе $\rho_1(t)$ условиям

$$\rho_1(t) \cos \varphi_1(t) = \xi(t), \qquad \rho_1(t) \sin \varphi_1(t) = \eta(t). \tag{6}$$

Тогда в области $\mathfrak{T}$ функция $\varphi_1(t)$ совпадает с введенной выше функцией $\varphi(t)$, в то время как $\rho_1(t)$ совпадает в области $\mathfrak{T}$ с той из функций $\rho(t)$, которая соответствует названной $\varphi(t)$.

Каждая из функций $\rho(t)$ обладает следующими свойствами. Если ни одно из двух значений t, равных t_1 и t_2, не является нуль-значением, то $\rho(t_1)$ и $\rho(t_2)$ имеют одинаковые или противоположные знаки, в зависимости от того, лежит ли между t_1 и t_2 четное или нечетное число нуль-значений нечетного порядка.*

Чтобы обосновать это утверждение, будем считать $\xi(t)$, $\eta(t)$ прямоугольными координатами некоторой точки P. Если t не является нуль-значением, то P не совпадает с началом координат и мы проведем вектор от O к P. Длина этого вектора и его направляющие косинусы будут функциями t, определенными для всех t, за исключением нуль-значений. Мы обозначим эти функции через $r(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$; они непрерывны для всех допустимых значений t. Мы представим прямые, проведенные через начальную и конечную точки каждого вектора. Таким образом, каждому значению t, за исключением нуль-значений, ставится в соответствие некоторая прямая. Пусть теперь τ означает какое-либо нуль-значение (допустим, что такое существует). Если t стремится к τ с соблюдением условия $t > \tau$, то направление вектора OP стремится при этом к предельному направлению; то же будет и в случае, если t стремится к τ с соблюдением условия $t < \tau$. Оба рассматриваемых предельных направления совпадают или противоположны**, поэтому соответствующие векторам прямые в обоих случаях предельного перехода стремятся к одному и тому же предельному положению. Этой прямой в ее предельном положении мы поставим в соответствие значение $t = \tau$. Применяя такой метод для каждого нуль-значения, мы получим соответствующие всем t прямые. Если происходит непрерывный переход от одного значения t к другому, то соответствующая прямая меняет свое положение также непрерывно. Из сказанного заключаем: для всех t можно определить всюду не-

* Сюда относится также случай, когда в промежутке от t_1 до t_2 нет ни одного нуль-значения нечетного порядка.

** В этих высказываниях мы основываемся на выводах последнего параграфа.

прерывную функцию $\psi(t)$, которая для каждого значения t явится выражением амплитуды * соответствующей прямой.

Согласно изложенному для всех t, за исключением нуль-значений,

$$\cos\psi(t) = \delta(t)\,\alpha(t), \qquad \sin\psi(t) = \delta(t)\,\beta(t). \tag{7}$$

Здесь $\delta(t)$ является одной из функций, определенных для указанных t, принимающей только значения $+1$ или -1. Мы определим еще для всех t функцию $\sigma(t)$. Пусть она для каждого нуль-значения равна нулю; для каждого значения t, не являющегося нуль-значением, пусть $\sigma(t) = \delta(t)\,r(t)$. Согласно сказанному для всех t

$$\sigma(t)\cos\psi(t) = \xi(t), \qquad \sigma(t)\sin\psi(t) = \eta(t). \tag{8}$$

Этим мы доказали первое утверждение нашей теоремы. Правильность непосредственно следующих высказываний очевидна, и будет достаточно доказать утверждение относительно знака $\rho(t)$; оно занимает в нашей теореме последнее место.

Для всех t, не являющихся нуль-точками,

$$\rho(t)\cos\varphi(t) = r(t)\,\alpha(t), \qquad \rho(t)\sin\varphi(t) = r(t)\,\beta(t). \tag{9}$$

Далее, заметим, что функция $\rho(t)$ при непрерывном росте t свой знак может изменить только при переходе t через нуль-значение. Пусть $t = \tau$ является нуль-значением. Представим себе сначала, что t стремится к τ так, что $t > \tau$. $\alpha(t)$, $\beta(t)$ сходятся тогда к определенным пределам α_1, β_1; при этом, если t достаточно близко к τ, то $\frac{r(t)}{\rho(t)}$ равно некоторой постоянной δ, равной либо $+1$, либо -1. Значит,

$$\cos\varphi(\tau) = \delta\alpha_1, \qquad \sin\varphi(\tau) = \delta\beta_1. \tag{10}$$

Во-вторых, представим себе: t стремится к τ так, что $t < \tau$. Тогда $\alpha(t)$, $\beta(t)$ сходятся к фиксированным пределам α_2, β_2. При этом $\frac{r(t)}{\rho(t)}$ для значений t, лежащих достаточно близко к τ, будет постоянной ε, равной либо $+1$, либо -1. Итак,

$$\cos\varphi(\tau) = \varepsilon\alpha_2, \qquad \sin\varphi(\tau) = \varepsilon\beta_2 \tag{11}$$

и, с учетом (10),

$$\delta\alpha_1 = \varepsilon\alpha_2, \qquad \delta\beta_1 = \varepsilon\beta_2. \tag{12}$$

В зависимости от того, будет ли τ нуль-значением четного или нечетного порядка, имеем $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ или $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\beta_1 = -\beta_2$. В первом случае, следовательно, согласно (12), $\delta = \varepsilon$, во втором случае $\delta = -\varepsilon$. Отсюда заключаем, что $\rho(t)$ для $t > \tau$ и $t < \tau$ в первом случае будет иметь один и тот же знак, во втором же случае — противоположные знаки. Но при этом предполагается,

* Амплитудой прямой называется любая из амплитуд обоих противоположных направлений этой прямой.

что t находится достаточно близко к нуль-значению τ. Тем самым мы выяснили: если t, непрерывно возрастая, проходит нуль-значение, то $\rho(t)$ меняет при этом свой знак тогда и только тогда, когда нуль-значение нечетного порядка. Этим наша теорема полностью доказана. Относительно ее использования для точной формулировки нашей проблемы укажем на введение в этой работе.

§ 4

Пусть рассматриваются два выражения ξ и η вида (1). Мы снова исключим случай, когда оба выражения одновременно исчезают для всех t. Тогда, как мы знаем, существуют функции $\varphi(t)$, непрерывные для всех t и при подходящем выборе $\rho(t)$ удовлетворяющие условиям

$$\rho(t)\cos\varphi(t) = \xi(t), \qquad \rho(t)\sin\varphi(t) = \eta(t). \tag{13}$$

Если для одной из названных функций φ существует такая константа g, что $\varphi(t) - gt$ для неограниченно возрастающих t остается между конечными границами, то так будет и при всех функциях φ; при этом g получает определенное значение, одинаковое для всех функций φ. Если наступает указанный момент, то мы говорим, что существует среднее движение, и называем g константой среднего движения. Если ξ, η являются одночленами, то очевидно, что среднее движение существует. Оставляя этот случай в стороне, укажем на два частных случая, когда среднее движение также существует.

А. *Мы предположим, что*

$$g_2 - g_1 = m_2 c, \quad g_3 - g_1 = m_3 c, \quad \ldots, \quad g_n - g_1 = m_n c, \tag{14}$$

где m_2, m_3, …, m_n суть целые числа; c — некоторая константа. Тогда среднее движение существует.

Чтобы убедиться в правильности этого утверждения, заметим сначала, что достаточно рассмотреть случай $c \neq 0$. При $c = 0$ величины g становятся равными друг другу. Значит, мы могли бы, согласно § 1, написать выражения ξ, η в одночленной форме, так что существование среднего движения очевидно. Пусть теперь непрерывные для всех t функции $\rho(t)$, $\varphi(t)$ определены так, что

$$\rho(t)\cos\varphi(t) = \xi(t), \qquad \rho(t)\sin\varphi(t) = \eta(t).$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \rho(t)\cos(\varphi(t) - g_1 t) &= A_1\cos\beta_1 + A_2\cos(m_2 ct + \beta_2) + \ldots + \\ &\quad + A_n\cos(m_n ct + \beta_n), \\ \rho(t)\sin(\varphi(t) - g_1 t) &= A_1\sin\beta_1 + A_2\sin(m_2 ct + \beta_2) + \ldots + \\ &\quad + A_n\sin(m_n ct + \beta_n). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Отсюда

$$\rho(t)\cos(\varphi(t)-g_1t)=\rho\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)\cos\left(\varphi\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)-\right.$$
$$\left.-g_1\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)\right),$$
$$\rho(t)\sin(\varphi(t)-g_1t)=\rho\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)\sin\left(\varphi\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)-\right. \tag{16}$$
$$\left.-g_1\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)\right).$$

Если t не является нуль-значением, то из (16) следует

$$\varphi(t)-g_1t=\varphi\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)-g_1\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)+\nu\pi, \tag{17}$$

где ν — целое число. Поскольку $\varphi(t)$ есть непрерывная функция, то (17) имеет место для всех t, и, именно, ν имеет для всех t одинаковое значение. Значит, для всех t

$$\varphi(t)-g_1t+\frac{\nu c}{2}t=\varphi\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)-g_1\left(t+\frac{2\pi}{c}\right)+\frac{\nu c}{2}\left(t+\frac{2\pi}{c}\right).$$

Поэтому $\varphi(t)-g_1t+\frac{\nu c}{2}t$ представляет собой непрерывную периодическую функцию с периодом $\frac{2\pi}{c}$. Она остается для всех t между конечными границами. Этим правильность нашего утверждения доказана. Если приведенные в начале § 4 условия относительно ξ, η выполнены и если $n=2$, то перед нами случай, относящийся к А; поэтому среднее движение существует. Это, естественно, давно известно; и вообще приведенная в А теорема не нова *.

В. *Оставим в силе сформулированные в начале этого параграфа условия и добавим к ним предположение* $|A_1|=|A_2|+|A_3|+\ldots$ $\ldots+|A_n|$. *Далее допустим, что имеются по крайней мере два разных нуль-значения* t' *и* t'' **. *Тогда среднее движение существует.*

Чтобы обосновать это утверждение, заметим сначала, что A_1 отлично от нуля и что среди $A_2, A_3, \ldots, A_n$ должны быть величины, не равные нулю. Пусть таковыми будут $A_a, A_b, \ldots, A_c$. Мы можем написать

$$\xi(t)=|A_1|\cos(g_1t+\beta_1')+|A_a|\cos(g_at+\beta_a')+\ldots+$$
$$+|A_c|\cos(g_ct+\beta_c'),$$
$$\eta(t)=|A_1|\sin(g_1t+\beta_1')+|A_a|\cos(g_at+\beta_a')+\ldots+$$
$$+|A_c|\cos(g_ct+\beta_c'),$$

* Следует сравнить с упомянутой выше работой г-на Кавалпина.

** Эта часть предварительных условий, как мы позже увидим, может быть опущена.

где β_ν' равно β_ν или $\beta_\nu+\pi$, в зависимости от того, представляет ли A_ν собой положительное или отрицательное число. Если t является нуль-значением, то

$$0=|A_1|+|A_a|\cos[(g_a-g_1)t+\beta_a'-\beta_1']+\ldots+$$
$$+|A_c|\cos[(g_c-g_1)t+\beta_c'-\beta_1'].$$

Поэтому для указанного нуль-значения должно быть

$$\cos((g_a-g_1)t+\beta_a'-\beta_1')=\cos((g_b-g_1)t+\beta_b'-\beta_1')=\ldots=$$
$$=\cos((g_c-g_1)t+\beta_c'-\beta_1')=-1.$$

Отнеся сказанное к нуль-значениям t' и t'', убеждаемся, что

$$(g_a-g_1)t'+\beta_a'-\beta_1'=(2\nu_a'+1)\pi,\ \ldots,\ (g_c-g_1)t'+$$
$$+\beta_c'-\beta_1'=(2\nu_c'+1)\pi,$$
$$(g_a-g_1)t''+\beta_a'-\beta_1'=(2\nu_a''+1)\pi,\ \ldots,\ (g_c-g_1)t''+ \tag{18}$$
$$+\beta_c'-\beta_1'=(2\nu_c''+1)\pi,$$

где $\nu_a', \ldots, \nu_c'$; $\nu_a'', \ldots, \nu_c''$ — целые числа. Из уравнений (18) следует

$$g-g_1=(\nu_a''-\nu_a')\frac{2\pi}{t''-t'},\ \ldots,\ g_c-g_1=(\nu_c''-\nu_c')\frac{2\pi}{t''-t'}.$$

Поэтому мы можем применить выведенную в А теорему и убедиться в правильности нашего утверждения.

§ 5

Пусть задаются два выражения Ξ и H вида

$$\Xi=A_1\cos u_1+A_2\cos u_2+\ldots+A_n\cos u_n,$$
$$\mathrm{H}=A_1\sin u_1+A_2\sin u_2+\ldots+A_n\sin u_n. \tag{19}$$

Пусть все $A_1, A_2, \ldots, A_n$ при этом больше нуля. Мы выберем прямоугольную координатную систему и проведем n векторов длиной соответственно $A_1, A_2, \ldots, A_n$ следующим образом. Пусть начальная точка первого вектора совпадает с началом координат O и пусть u_1 является амплитудой названного вектора. Начальная точка второго вектора (в случае $n>1$) пусть совпадает с конечной точкой первого вектора, и пусть u_2 будет амплитудой второго вектора и т. д. Конечную точку n-го вектора мы обозначим через Q. Если $\Xi=\mathrm{H}=0$, то O и Q совпадают; если Ξ и H исчезают не одновременно, то эти величины суть проекции на оси того вектора, начальной и конечной точкой которого являются точки O и Q. Обозначив через R длину вектора OQ и через Φ его амплитуду, получаем

$$R\cos\Phi = \Xi, \qquad R\sin\Phi = \mathrm{H}. \qquad (20)$$

Приведенный метод наглядного представления * мы применим теперь, чтобы установить существование среднего движения в двух специальных случаях. Первый из них является не чем иным, как общеизвестным случаем, о котором речь шла во введении.

А. *Пусть рассматриваются два выражения* ξ *и* η *вида* (1); *пусть* $n > 1$. *Далее предположим, что* $A_1, A_2, \ldots$ *положительны и* $A_1 > A_2 + A_3 + \ldots + A_n$. *Тогда среднее движение существует.*

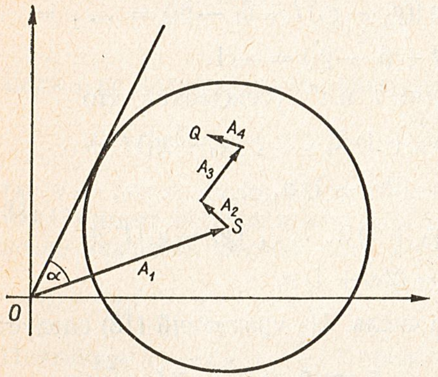

Рис. 1.

Чтобы убедиться в этом, построим описанным выше способом n векторов длиной $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причем вместо величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$ возьмем $g_1t + \beta_1$, $g_2t + \beta_2, \ldots, g_nt + \beta_n$. На рис. 1 это представлено наглядно.

Конечная точка Q последнего вектора не лежит вне круга, описанного вокруг конечной точки S первого вектора радиусом $A_2 + A_3 + \ldots + A_n$. Поэтому Q не может совпасть с O, и для ξ, η не существует нуль-значений. Обозначим еще через α число, которое определяется выражением

$$\sin\alpha = \frac{A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{A_1}, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Угол между вектором OQ (с конечной точкой Q) и первым вектором будет не больше α. Наконец, пусть $\rho(t)$, $\varphi(t)$ суть те непрерывные для всех t функции, которые удовлетворяют условиям $\rho(t)\cos\varphi(t) = \xi(t)$, $\rho(t)\sin\varphi(t) = \eta(t)$; именно, пусть выбрано $\rho(t) > 0$, что возможно. Тогда $\varphi(t)$ представляет собой амплитуду вектора OQ. Согласно предыдущему $\varphi(t) - g_1t - \beta_1 = 2\pi\nu + \omega$, $|\omega| \leqslant \alpha$, где ν — целое число. Поскольку $\varphi(t)$ является непрерывной функцией, то ν получает для всех t одно и то же значение. Итак, среднее движение в самом деле существует. Можно добавить, что значения разностей $\varphi(t) - g_1t$ для двух различных значений t не могут отличаться более чем на 2α.

В. *Пусть вводятся те же начальные условия, что и в* А, *только предположение* $A_1 > A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ *заменим другим:* $A_1 = A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ *и исключим случай, когда* ξ, η *одновременно исчезают для всех* t. *Тогда среднее движение существует.*

* По существу этот метод можно найти у Лагранжа, который применил его, чтобы сделать наглядными эпициклы.

Случай наличия двух разных нуль-значений исчерпывается сказанным в § 4, В. Если исключим этот случай, то тогда существует такая постоянная k, что нет нуль-значения, большего k. Ограничиваясь значениями $t > k$, выполним такое же геометрическое построение, как в § 5, А. Рис. 2 поясняет конструкцию для $n = 4$. Конечная точка Q последнего вектора не лежит тогда вне круга, описанного радиусом A_1 вокруг конечной точки S первого вектора. Кроме того, Q не может совпасть с O.

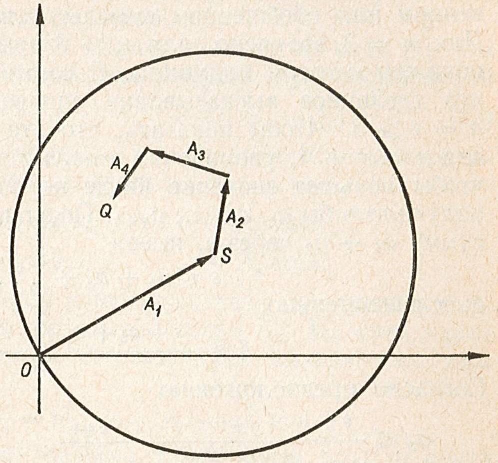

Рис. 2.

Теперь определим для всех t непрерывные функции $\rho(t)$, $\varphi(t)$ таким образом, чтобы было $\rho(t) \times \cos\varphi(t) = \xi(t)$, $\rho(t)\sin\varphi(t) = \eta(t)$. Это определение должно произойти так, чтобы для $t > k$ получалось $\rho(t) > 0$. Такое определение возможно. Для $t > k$ функция $\varphi(t)$ представляет тогда собой амплитуду вектора OQ (Q — конечная точка). Поскольку этот вектор образует с вектором OS угол меньше $\pi/2$, то для каждого $t > k$ можем написать

$$\varphi(t) - g_1t - \beta_1 = \nu 2\pi + \omega, \qquad |\omega| < \frac{\pi}{2},$$

где ν — целое число. Из непрерывности функции $\varphi(t)$ следует, что ν для всех $t > k$ сохраняет одно и то же значение. Тем самым правильность нашего утверждения доказана.

§ 6

В этом параграфе мы сначала в пп. А и В объединим некоторые замечания, используемые в дальнейшем.

А. Пусть рассматривается n отрезков прямой, причем $n > 1$. Обозначим названные отрезки через $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Положительные числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выражают длины $L_1, L_2, \ldots, L_n$ посредством выбранной единицы длины. Для краткости обозначим через S сумму $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. *Прикладыванием друг за другом отрезков* $L_1, L_2, \ldots, L_n$ *можно получить замкнутый контур тогда и только* *тогда, когда выполняется условие*

$$A_\mu \leqslant \frac{S}{2}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n. \tag{21}$$

К этому можно добавить, что для $n \geqslant 3$ прикладыванием друг за другом $L_1, L_2, \ldots, L_n$ всегда можно получить треугольник в собственном или обобщенном смысле, если выполняется условие (21). Для $n = 3$ это ясно, для $n > 3$ правильность такого замечания покажем методом индукции. В соответствии с этим принимается, что сделанное высказывание справедливо для частного случая $n = \nu \geqslant 3$. Чтобы показать, что это утверждение справедливо и для $n = \nu + 1$, упорядочим в последнем случае $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, чтобы меньшее значение нигде не следовало за большим. Пусть получилось бы $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu+1}$. Поскольку $\nu + 1 \geqslant 4$, то, обозначив сумму $a_1 + a_2$ через s, имеем

$$s \leqslant a_3 + a_4 + \ldots + a_{\nu+1}$$

и, следовательно,

$$s \leqslant \frac{s + a_3 + a_4 + \ldots + a_{\nu+1}}{2}. \tag{22}$$

Согласно предположению

$$a_\mu \leqslant \frac{s + a_3 + a_4 + \cdots + a_{\nu+1}}{2}, \qquad \mu = 3, 4, \ldots, \nu + 1. \tag{23}$$

Таким образом, из $s, a_3, a_4, \ldots, a_{\nu+1}$ можно построить треугольник. Тем самым правильность нашего замечания доказана.

В. Если связь между системой точек прямой устанавливается таким образом, что к некоторой точке Q системы присоединяются все точки, отстоящие от Q на целочисленное кратное, отличное от нуля, длины a, то будем говорить, что система точек образует точечную последовательность (a). Пусть рассматриваются m точечных последовательностей $(a_1), (a_2), \ldots, (a_m)$ и P_1 является точкой из (a_1), P_2 — точкой из (a_2) и т. д., наконец, P_m — точкой из (a_m). Мы будем говорить тогда, что $P_1, P_2, \ldots, P_m$ образуют точечное скопление. Если каждые две точки из точечного скопления отстоят друг от друга менее чем на отличное от нуля расстояние ε, то мы скажем, что речь идет о точечном скоплении $\{\varepsilon\}$. Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$, выражающие длины при выборе какой-либо единицы, не удовлетворяют никакому уравнению

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \ldots + \frac{n_m}{a_m} = 0$$

($n_1, n_2, \ldots, n_m$ — целые числа, не исчезающие одновременно), то мы будем называть длины $a_1, a_2, \ldots, a_m$ взаимно независимыми. В одной из ранее появившихся работ * я доказал следующую теорему. *Пусть заданы m различных и взаимно независимых длин $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и, кроме того, длина ε, отличная от нуля. Тогда существует такая длина T, что справедливо следующее утверждение: какими бы ни были взяты на прямой промежуток* * *длины T и m точечных последовательностей $(a_1), (a_2), \ldots, (a_m)$, всегда на указанном промежутке найдется точечное скопление $\{\varepsilon\}$.*

* P. Bohl. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 131, 1906, с. 277 (см. с. 337 наст. собр.). Для применения в дальнейшем этой теоремы, вообще говоря, удобнее высказывать ее в измененной форме.

С. Пусть рассматриваются два выражения, ξ и η, вида (1). Мы предположим, что $n > 1$, и примем, что не существует соотношений

$$m_2(g_2 - g_1) + m_3(g_3 - g_1) + \ldots + m_n(g_n - g_1) = 0. \tag{24}$$

Здесь $m_2, m_3, \ldots, m_n$ означают целые числа, не исчезающие одновременно. Обозначим n переменных через $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и

$$\Xi = A_1 \cos u_1 + A_2 \cos u_2 + \ldots + A_n \cos u_n,$$

$$\mathrm{H} = A_1 \sin u_1 + A_2 \sin u_2 + \ldots + A_n \sin u_n.$$

Каждому положительному числу p соответствует такое положительное число q, что справедливо следующее. Если Ξ_0, H_0 суть такие значения величин Ξ, H, которые соответствуют каким-то частным значениям

$$u_1 = u_1^0, \; u_2 = u_2^0, \; \ldots, \; u_n = u_n^0,$$

то в промежутке между двумя числами, отстоящими друг от друга на q, всегда найдется значение t, для которого

$$\left| \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \sqrt{\Xi_0^2 + \mathrm{H}_0^2} \right| < p.$$

Чтобы доказать эту теорему, определим такое положительное число $\varkappa$, что будет справедливо следующее. Если $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ и $u_1'', u_2'', \ldots, u_n''$ — какие-то частные значения величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$, удовлетворяющие условиям

$$|u_1' - u_1''| < \varkappa, \; |u_2' - u_2''| < \varkappa, \; \ldots, \; |u_n' - u_n''| < \varkappa,$$

то, обозначив через Ξ_1, H_1 и Ξ_2, H_2 соответствующие значения величин Ξ, H, имеем

$$\left| \sqrt{\Xi_1^2 + \mathrm{H}_1^2} - \sqrt{\Xi_2^2 + \mathrm{H}_2^2} \right| < p.$$

Выбор числа $\varkappa$ может произойти, если известны p и $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Далее мы обозначим через γ наибольшее из значений $|g_\mu - g_1|$, $\mu = 2, 3, \ldots, n$ **.

После выбора единицы длины мы известным образом представим числа

$$\frac{u_\mu^0 - u_1^0 - \beta_\mu + \beta_1}{g_\mu - g_1}, \qquad \mu = 2, 3, \ldots, n, \tag{25}$$

* Обе граничные точки промежутка, заметим для определенности, не считаются входящими в промежуток.

** Из исходных условий с очевидностью следует, что величины $g_1, g_2, \ldots, g_n$ отличны друг от друга.