посредством тех точек $P_2, P_3, \ldots, P_n$ некоторой прямой, абсциссы которых суть числа (25). Названные $n-1$ точек мы выберем в качестве специальных элементов соответствующих $n-1$ точечных последовательностей

$$\left(\frac{2\pi}{|g_2-g_1|}\right), \left(\frac{2\pi}{|g_3-g_1|}\right), \ldots, \left(\frac{2\pi}{|g_n-g_1|}\right).$$

Согласно теореме, приведенной в § 6, В, тогда существует такая длина q, что будет справедливо следующее утверждение. Каким бы ни был взят на прямой промежуток длиной q, всегда на этом промежутке найдется точечное скопление $\left\{\frac{\varkappa}{\gamma}\right\}$. Выбор может при этом произойти, если известны $|g_2-g_1|, |g_3-g_1|, \ldots, |g_n-g_1|$ и $\varkappa$.

Теперь представим себе два числа, отстоящие друг от друга на q. Если мы отложим эти числа на прямой, то они дадут промежуток длиной q. На этом промежутке имеем, как только что видели, точечное скопление $\left\{\frac{\varkappa}{\gamma}\right\}$. Точка указанного скопления, принадлежащая точечной последовательности $\frac{2\pi}{|g_2-g_1|}$, пусть соответствует числу t_0. Тогда

$$t_0 - \frac{u_\mu^0 - u_1^0 - \beta_\mu + \beta_1}{g_\mu - g_1} = n_\mu \frac{2\pi}{g_\mu - g_1} + \varepsilon_\mu, \qquad \mu = 2, 3, \ldots,$$

при этом n_μ суть целые числа и

$$|\varepsilon_\mu| < \frac{\varkappa}{\gamma} \leqslant \frac{\varkappa}{|g_\mu - g_1|}.$$

Имеем

$$(g_\mu - g_1)\, t_0 + \beta_\mu - \beta_1 = n_\mu 2\pi + u_\mu^0 - u_1^0 + \eta_\mu, \quad |\eta_\mu| < \varkappa.$$

Если положим еще $u_1^0 - g_1 t_0 - \beta_1 = s$, то получится

$$g_\mu t_0 + \beta_\mu = n_\mu 2\pi + u_\mu^0 - s + \eta_\mu, \qquad \mu = 2, 3, \ldots, n,$$

$$g_1 t_0 + \beta_1 = u_1^0 - s, \quad \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2},$$

т. е. величина $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ при $t=t_0$ равна $\sqrt{\Xi^2+\mathrm{H}^2}$, образованной для

$$u_1 = u_1^0 - s, \quad u_\mu = u_\mu^0 - s + \eta_\mu,$$

и, очевидно, равна также

$$\sqrt{\Xi^2+\mathrm{H}^2},$$

образованной для

$$u_1 = u_1^0, \quad u_\mu = u_\mu^0 + \eta_\mu.$$

Значение последней величины

$$\sqrt{\Xi^2+\mathrm{H}^2}$$

отличается, однако, от

$$\sqrt{\Xi_0^2+\mathrm{H}_0^2}$$

менее чем на p. Тем самым

$$\left|\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2} - \sqrt{\Xi_0^2+\mathrm{H}_0^2}\right| < p.$$

Таким образом наше утверждение доказано. Мы перейдем теперь к приложению только что полученной теоремы. *Пусть остаются в силе условия, введенные в начале п. С, дополненные предположением, что*

$$|A_\mu| \leqslant \frac{S}{2}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n, \tag{26}$$

где S означает сумму всех величин $|A|$. Тогда всякому положительному числу p соответствует такое положительное число q, что в промежутке между двумя числами, отстоящими друг от друга на q, всегда существует такое значение t, для которого $\sqrt{\xi^2+\eta^2} < p$.

Если бы все величины A были равны нулю, то справедливость нашего утверждения была бы совершенно очевидной; следовательно, этот случай мы можем исключить. Тогда по крайней мере две величины A должны отличаться от нуля; пусть $A_a, A_b, \ldots, A_c$ — те величины A, которые не исчезают. Мы определим тогда отрезки прямой $L_a, L_b, \ldots, L_c$, длина которых выражается с помощью некоторой единицы посредством чисел $|A_a|, |A_b|, \ldots, |A_c|$. Согласно § 6 можно путем прикладывания друг за другом $L_a, L_b, \ldots, L_c$ получить замкнутый контур. Отсюда заключаем, что $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ могут быть определены так, что

$$A_1 \cos u_1^0 + A_2 \cos u_2^0 + \ldots + A_n \cos u_n^0 = 0,$$

$$A_1 \sin u_1^0 + A_2 \sin u_2^0 + \ldots + A_n \sin u_n^0 = 0.$$

Применение теоремы, сформулированной в начале п. С, приводит непосредственно к доказательству нашего утверждения.

Относительно значения результатов нашего параграфа для теории вековых возмущений мы сошлемся на сказанное во введении.

II. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ГЕОМЕТРИИ ЧИСЕЛ

§ 7

Прежде всего замечу, что применяемые в этой главе буквенные обозначения сохраняют неизменный смысл лишь в соответствующем параграфе.

А. Пусть рассматриваются круг с длиной окружности 1* и, кроме того, нить длиной l $(l > 0)$. Эту нить мы станем наматывать на окружность, начав с какой-либо точки, причем выберем произвольно одно из двух направлений, находящихся в нашем распоряжении. Пусть P является какой-либо точкой окружности. Число точек нити **, совпадающих с точкой P, обозначим через q; таким образом, q — неотрицательное целое число. Легко видеть, что $l - 1 \leqslant q \leqslant l + 1$. Пусть теперь где-либо на окружности взята дуга AB длиной s $(0 < s < 1)$; концы A и B дуги не должны считаться точками дуги. Рассмотрим те части нити, из которых каждая непрерывно покрывает всю дугу AB. При этом не исключается также случай, когда такого рода частей вовсе нет. Количество таких частей обозначим через t. Поэтому t — неотрицательное целое число. Для некоторой точки дуги AB, как легко видеть, $t \leqslant q \leqslant t + 2$, причем смысл q ясен из предыдущего. Пользуясь отмеченным выше соотношением $l - 1 \leqslant q \leqslant l + 1$, получаем ***

$$l - 3 \leqslant t \leqslant l + 1. \tag{27}$$

В. Представим себе, что нить разделена на $m + 1$ равных частей, причем m — неотрицательное целое число. Точкам, делящим нить на части, а также ее концам мы присвоим общее название «узлы». Всего их имеется $m + 2$. Расстояние r между двумя смежными узлами, равное $\frac{l}{m+1}$, мы назовем длиной звена. Всего, согласно принятому нами обозначению, имеется t частей нити, которые сплошь покрывают всю дугу AB. Число узлов на этих частях, как легко заметить, не меньше $t\left(\frac{s}{r} - 1\right)$ и не больше $t\left(\frac{s}{r} + 1\right)$. Если обозначить через z общее число узлов, наложенных на дугу AB, то

$$t\left(\frac{s}{r} - 1\right) \leqslant z \leqslant (t + 2)\left(\frac{s}{r} + 1\right). \tag{28}$$

* В дальнейшем единица длины считается неизменной. Под термином «длина», мы подразумеваем длину, выражаемую числом a, где a — неотрицательное число.

** Точками нити будем считать также ее концы.

*** При подобного рода оценках мы не станем обращать внимания на возможность сужения границ.

Введем символ $\left(\overline{\frac{s}{r} - 1}\right)$: именно, он означает $\frac{s}{r} - 1$, если $\frac{s}{r} - 1 \geqslant 0$, и $\left(\overline{\frac{s}{r} - 1}\right) = 0$, если $\frac{s}{r} - 1 < 0$*. Используя указанное обозначение, с очевидностью можно записать

$$t\left(\overline{\frac{s}{r} - 1}\right) \leqslant z \leqslant (t + 2)\left(\frac{s}{r} + 1\right). \tag{29}$$

Действительно, неравенства (29) непосредственно следуют из (28), если принять во внимание, что $z \geqslant 0$. Далее с помощью неравенств (27) получаем

$$(l - 3)\left(\overline{\frac{s}{r} - 1}\right) \leqslant z \leqslant (l + 3)\left(\frac{s}{r} + 1\right)$$

и, наконец, в силу того что $l = (m + 1)\,r$,

$$((m + 1)\,r - 3)\left(\overline{\frac{s}{r} - 1}\right) \leqslant z \leqslant ((m + 1)\,r + 3)\left(\frac{s}{r} + 1\right). \tag{30}$$

Теперь представим себе новую нить, разбитую на такое же количество равных частей, как и рассмотренная выше. Пусть длина ее звена отличается от старой на некоторое целое число. Если мы станем наматывать новую нить в том же направлении, в каком наматывалась старая, начав при этом с той же исходной точки, то новые узлы займут на окружности те же места, что и старые. Из этого замечания следует, что в соотношении (30) допустимо взять вместо r любую положительную величину, отличающуюся от r на целочисленное слагаемое.

Представим себе еще одну нить, разбитую, в свою очередь, на такое же количество равных частей, как первая. Длина ее звена пусть отличается от $-r$ на целочисленное слагаемое. Если эту последнюю нить наматывать в направлении, противоположном направлению первого наматывания, то новые узлы снова займут те же места на окружности, что и старые. Поэтому в соотношении (30) допустимо также взять вместо r любую положительную величину, отличающуюся от $-r$ на целочисленное слагаемое.

С. Возвращаясь вновь к представлениям, положенным в основу исходных соображений пункта В, мы сначала введем частное предположение, что количество узлов выражается через $m + 2 = \mu\nu$, причем $\nu \geqslant 2$ и $\mu \geqslant 1$ суть целые числа. Узлы данной нити F, следующие один за другим, пусть будут $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\mu}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\mu}, \ldots, a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, \ldots, a_{\nu\mu}$. Очевидно, что можно так намотать μ нитей $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ с ν узлами на каждой и длиной звена μr, чтобы узлы нити F_1 совпали с $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{\nu 1}$, узлы нити F_2 совпали с $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{\nu 2}$ и т. д., наконец, узлы нити F_μ совпали с $a_{1\mu}, a_{2\mu}, \ldots$

* В таком же смысле в дальнейшем применяется символ $(\overline{c})$, где c — какая-либо величина.

..., $a_{\nu\mu}$. Применяя к $F_1, F_2, \dots, F_\mu$ соотношение (30) (с учетом замечания к нему), получим

$$\mu((\nu-1)\rho-3)\left(\overline{\frac{s}{\rho}-1}\right)\leqslant z\leqslant\mu((\nu-1)\rho+3)\left(\frac{s}{\rho}+1\right). \quad (31)$$

Здесь z, как и раньше, означает число узлов нити F, лежащих на дуге AB; ρ означает какую-либо положительную величину, отличающуся от μr или $-\mu r$ на целочисленное слагаемое (включая нуль).

Пусть теперь введенное выше предположение, что $m+2=\nu\mu$, *заменяется новым:* $m+2=\lambda\tau+\sigma$, *где* λ, τ, σ — *целые числа, удовлетворяющие условиям* $\lambda\geqslant 2$, $\tau\geqslant 1$, $0\leqslant\sigma\leqslant\tau$. В этом случае

$$\tau((\lambda-1)\varkappa-3)\left(\overline{\frac{s}{\varkappa}-1}\right)\leqslant z\leqslant\tau((\lambda-1)\varkappa+3)\left(\frac{s}{\varkappa}+1\right)+\tau-1, \quad (32)$$

что сразу следует из выраженного неравенствами (31) результата.

Здесь $\varkappa$ означает некоторую положительную величину, отличающуюся от τr или $-\tau r$ на целочисленное слагаемое (включая нуль).

§ 8

Пусть, как и до сих пор, s $(0<s<1)$ означает длину дуги AB, взятой на окружности длиной 1, $n\geqslant 2$ — количество узлов нити с длиной звена $r>0$.

Предположим, что r — иррациональное число, s и r мы будем считать заданными константами, n — переменным. Способы расположения дуги AB и намотки нити также считаются изменяющимися. Количество узлов, располагающихся при намотке на дуге AB, пусть будет u. Тогда имеет место следующая теорема. *Каждому положительному числу* p *соответствует такое число* S, *что и можно представить в виде* $u=n(s+\varepsilon)$, $|\varepsilon|<p$ *при* $n>S$.[40]

Чтобы доказать эту теорему, определим целые числа $a\geqslant 1$ и b так, чтобы величина $\omega=|ar+b|$ удовлетворяла условию $0<\omega<\frac{p}{2}$*. Далее возьмем такое целое число $N>2$, чтобы

$$\frac{(2\omega+3)\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right)}{N}\leqslant\frac{p}{2}, \qquad \frac{3\left(\frac{s}{\omega}+1\right)+1}{N}\leqslant\frac{p}{2}. \quad (33)$$

Теперь можно показать, что условия теоремы будут удовлетворены, если положим $S=Na$. Чтобы удостовериться в правильности это-

* Такой выбор, согласно известной теореме, осуществим.

го утверждения, предположим, что $n>Na$, и обозначим через $\left[\frac{n}{a}\right]$ наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{n}{a}$, так что

$$0\leqslant\frac{n}{a}-\left[\frac{n}{a}\right]<1.$$

Тогда очевидно

$$\left[\frac{n}{a}\right]\geqslant N.$$

Далее мы можем записать

$$n=\left[\frac{n}{a}\right]a+\vartheta,$$

где ϑ есть целое число, удовлетворяющее условию $0\leqslant\vartheta<a$. Теперь может быть применен результат, выраженный в (32). Роль λ, τ, σ играют тут соответственно $\left[\frac{n}{a}\right]$, a, ϑ, а вместо $\varkappa$ можно взять ω. Итак, мы получаем

$$a\left(\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)\omega-3\right)\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right)\leqslant u\leqslant$$
$$\leqslant a\left(\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)\omega+3\right)\left(\frac{s}{\omega}+1\right)+a-1. \quad (34)$$

Приняв во внимание, что $\frac{s}{\omega}-1\leqslant\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right)$, а поэтому

$$-ns\geqslant-n\omega\left(\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right)+1\right),$$

учтя, далее, соотношение $0\geqslant-\frac{n}{a}+\left[\frac{n}{a}\right]>-1$, на основании неравенства (34) легко найдем, что

$$-a(2\omega+3)\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right)-n\omega\leqslant u-ns\leqslant$$
$$\leqslant 3a\left(\frac{s}{\omega}+1\right)+a+n\omega. \quad (35)$$

В силу соотношений (33) отсюда следует

$$-Na\frac{p}{2}-n\omega\leqslant u-ns\leqslant Na\frac{p}{2}+n\omega. \quad (36)$$

Если, наконец, учесть неравенства $n>Na$ и $0<\omega<\frac{p}{2}$, то получится, что

$$-np<u-ns<np$$

и, следовательно,

$$-p<\frac{u}{n}-s<p. \quad (37)$$

Если теперь положим $\frac{u}{n}-s=\varepsilon$, то правильность нашего утверждения станет очевидной.

§ 9

А. Представим себе теперь односторонне не ограниченную нить и примем, что на ней расположено неограниченное количество узлов; первый узел совпадает с началом нити, а остальные следуют друг за другом через промежутки $r > 0$. Пусть по-прежнему r называется длиной звена нити. Как и в предыдущем изложении, мы возьмем на окружности длиной 1 дугу AB длиной s $(0 < s < 1)$ и станем наматывать нить на окружность, исходя из какой-либо точки окружности. Число узлов, расположившихся при наматывании на участке AB из числа n первых, обозначим через $\varphi(n)$ и станем называть $\varphi(n)$ функцией распределения.

Если r — иррациональное число, то из доказанной в § 8 теоремы непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = s. \tag{38}$$

В. Примем теперь, что r — рациональное число. Пусть $r = \frac{\mu}{\nu}$, где μ, ν означают положительные целые взаимно простые числа. В этом случае разделим окружность ν точками на ν одинаковых частей таким образом, чтобы одна из этих точек совпала с начальной точкой нити. Система ν точек разбиения пусть обозначается через Σ. Ясно, что при наматывании нити первые ν узлов совпадут с Σ; так же получится и с последующими ν узлами и т. д. Количество тех точек системы Σ, которые расположатся на участке AB, мы обозначим через λ. Очевидно, что $\lambda \leqslant \nu$.

Пусть n — какое-либо целое число. Представим его в виде $n = p\nu + \rho$, где p и ρ суть целые числа, удовлетворяющие условиям $p \geqslant 0$, $0 \leqslant \rho < \nu$. Если обозначить $\varphi(n) - p\lambda = \sigma$, то, как легко заметить, будут справедливы следующие неравенства:

$$0 \leqslant \sigma \leqslant \rho, \quad \sigma \leqslant \lambda, \quad \nu - \rho \geqslant \lambda - \sigma. \tag{39}$$

Тогда

$$\varphi(n) = \frac{n-\rho}{\nu}\lambda + \sigma = n\frac{\lambda}{\nu} + \sigma - \frac{\rho\lambda}{\nu}. \tag{40}$$

На основании (39) получаем

$$\sigma - \frac{\lambda\rho}{\nu} \leqslant \sigma - \frac{\lambda\sigma}{\nu} \leqslant \frac{\lambda(\nu-\lambda)}{\nu},$$

$$\sigma - \frac{\lambda\rho}{\nu} \geqslant \sigma + \frac{\lambda}{\nu}(\lambda - \sigma - \nu) = (\sigma - \lambda)\left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) \geqslant -\frac{\lambda(\nu-\lambda)}{\nu}$$

и, следовательно,

$$\left|\sigma - \frac{\lambda\rho}{\nu}\right| \leqslant \frac{\lambda(\nu-\lambda)}{\nu}. \tag{41}$$

Из (40) и (41) имеем

$\varphi(n) = n\frac{\lambda}{\nu} +$ некоторая величина, абсолютное значение которой

$$\text{меньше или равно } \frac{\lambda(\nu-\lambda)}{\nu}. \tag{42}$$

Этот результат имеет место, как указывалось, в случае, если длина звена будет выражаться рациональным числом.

С. Независимо от того, рационально ли r или иррационально, частное $\frac{\varphi(n)}{n}$ при неограниченно растущем n стремится к определенному конечному пределу; мы назовем его характеристическим числом функции распределения. Если r иррационально, то характеристическое число равно длине дуги AB. Если r рационально, то характеристическое число равно $\frac{\lambda}{\nu}$, причем значения букв λ и ν указаны выше. Если существует такая константа c, что разность $\varphi(n) - cn$ при неограниченно растущем n остается между конечными границами, то мы станем говорить, что функция распределения имеет линейный характер. Очевидно, что в таком случае c является характеристическим числом функции $\varphi(n)$. В случае, если длина звена выражается рациональным числом, функция распределения, согласно изложенному, имеет линейный характер. Однако, как мы скоро увидим, линейный характер функция распределения имеет отнюдь не всегда.

§ 10

Сформулируем следующую теорему. *Пусть рассматривается окружность длиной 1, на которой отмечена дуга AB длиной s $(0 < s < 1)$. Начиная от точки P на окружность наматывается односторонне не ограниченная нить, на которой, как и ранее, расположены узлы, причем длина звеньев равна r. Ответ на вопрос, имеет ли функция распределения линейный характер или нет, зависит тогда лишь от величин s и r, но не от положения дуги AB и точки P или выбора направления намотки нити.*

Легко заметить, что доказательство этого предложения сводится к обоснованию следующего утверждения. *Пусть имеется окружность длиной 1, на которой отмечена дуга AB длиной s, $0 < s < 1$. Станем на нее наматывать односторонне не ограниченную нить, на которой, как и в ранее изложенном случае, расположены узлы, причем длина звеньев равна r. При этом в первый раз начнем намотку от точки P окружности, во второй — от точки Q окружности, в обоих случаях придерживаясь одинакового направления намотки. Если при выборе точки P в качестве начальной функция распределения будет иметь линейный характер, то такой* *же характер у нее будет и при выборе Q в качестве начальной точки.* Таким образом, нам следует обосновать лишь последнее утверждение, причем очевидно, что r достаточно будет считать иррациональным.

Обозначим через $\varphi_P(n)$ функцию распределения, которая соответствует точке P, взятой в качестве начальной, и через $\varphi_Q(n)$ — функцию распределения, соответствующую точке Q. Чтобы доказать справедливость нашего утверждения, примем, что функция $\varphi_P(n)$ имеет линейный характер. Тогда существует такое положительное число e, что

$$-e \leqslant \varphi_P(n) - sn \leqslant e. \qquad (43)$$

Можно показать, что в этом случае для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо соотношение

$$-2 - 2e \leqslant \varphi_Q(n) - sn \leqslant 2 + 2e. \qquad (44)$$

Если нам удастся доказать состоятельность последнего утверждения, то тем самым наша теорема будет доказана.

Прежде всего заметим, что с граничными точками дуги AB может совпасть не более двух узлов нити; это следует из иррациональности r. Значит, если взять определенное целое число n', то для точки Q окружности найдется такая ее окрестность U, состоящая из точек окружности, что для всякой точки R, взятой из этой окрестности, будет справедливо

$$0 \leqslant \varphi_R(n') - \varphi_Q(n') \leqslant 2. \qquad (45)$$

Смысл обозначения $\varphi_R(n)$ аналогичен смыслу обозначений $\varphi_P(n)$ или $\varphi_Q(n)$.

Сделав это замечание, приступим к доказательству утверждения, выраженного в (44). С этой целью предположим, что

$$|\varphi_Q(n_1) - sn_1| > 2 + 2e, \qquad (46)$$

где n_1 — какое-либо положительное целое число. Далее определим окрестность V точки Q, которая относительно n_1 будет играть такую же роль, как раньше U относительно n'. Поскольку r — иррациональное число, то один из узлов нити с начальной точкой в P попадет в окрестность V *. Пусть это относится к узлу с номером n и пусть точка окружности, которую он займет, будет T. Тогда, согласно (45),

$$|\varphi_T(n_1) - \varphi_Q(n_1)| \leqslant 2 \qquad (47)$$

и, учитывая (46), получаем

$$|\varphi_T(n_1) - sn_1| = |(\varphi_T(n_1) - \varphi_Q(n_1)) +$$

* Это легко обнаруживается с помощью одной теоремы, которую сообщил Чебышев в своем исследовании «Sur une question arithmétique». См. Oeuvres de P. L. Tschebyschef. St.-Pétersbourg, 1899, t. I, c. 679. Это исследование сначала было опубликовано на русском языке

$$+ (\varphi_Q(n_1) - sn_1)| \geqslant |\varphi_Q(n_1) - sn_1| - |\varphi_T(n_1) - \varphi_Q(n_1)| > 2 + 2e - 2 = 2e. \qquad (48)$$

Но очевидно следующее:

$$\varphi_T(n_1) = \varphi_P(n_1 + n_0 - 1) - \varphi_P(n_0 - 1), \qquad (49)$$

причем в случае $n_0 = 1$ надо вместо $\varphi_P(n_0 - 1)$ взять 0. Из (43), однако, заключаем, что

$$|\varphi_P(n_1 + n_0 - 1) - \varphi_P(n_0 - 1) - sn_1| \leqslant 2e, \qquad (50)$$

а, с учетом (49), также, что

$$|\varphi_T(n_1) - sn_1| \leqslant 2e, \qquad (51)$$

что непосредственно противоречит соотношению (48). Поэтому выясняется, что введенное предположение (46) не может быть допущено, и наше утверждение, выраженное в неравенствах (44), доказано.

§ 11

Мы подошли к заключительной теореме этой главы. Пусть дана окружность длиной в единицу. Далее, пусть заданы определенные положительные числа s и τ, причем первое из них удовлетворяет условию $0 < s < 1$. Если мы отложим на окружности дугу длиной s и станем наматывать на окружность односторонне не ограниченную нить, на которой, как и в предыдущих случаях, расположены узлы, то вопрос о том, будет ли функция распределения иметь линейный характер или нет, зависит, согласно § 10, только от длины звена. *Длину r можно взять такой, чтобы разность между r и τ по абсолютному значению была произвольно малой и функция распределения имела линейный характер. Но, с другой стороны, можно также определить длину звена так, чтобы $|r - \tau|$ было произвольно мало и чтобы функция распределения не имела линейного характера.*

Первая часть утверждения исчерпывается указанием на то обстоятельство, что рациональные числа найдутся произвольно близко от τ. Поэтому дело сводится лишь к доказательству второй части утверждения.

А. На окружности длиной 1 отложим дугу AB длиной s. Среднюю точку этой дуги мы обозначим через P. Начиная с P станем в определенном направлении наматывать односторонне не ограниченную нить $F_{(r)}$ с длиной звена r (пока что еще не фиксированной). Получающуюся при этом функцию распределения обозначим через $\varphi^{(r)}(n)$.

Пусть L, p, q — величины, удовлетворяющие условиям $0 < p < q$, $L > 0$, а в остальном произвольные. Возьмем такое положительное целое число N, чтобы, во-первых, $N > \frac{1}{q-p}$ и, во-вторых, чтобы N не являлось целочисленным кратным числа $1/s$. Выбор такого N возможен, так как s не является целым числом. Тогда очевидно существует и такое целое число M, что будет справедливо $p < M/N < q$.

Обозначив через t общий наибольший делитель чисел M и N, положим $M = t\varkappa$, $N = t\tau$, так что получится $p < \frac{\varkappa}{\tau} < q$. Значит, $\varkappa$ и τ суть взаимно-простые целые положительные числа.

B. Примем сначала, что $r = \varkappa/\tau$. Чтобы определить места, занятые на окружности узлами нити $F_{\varkappa/\tau}$, мы должны, согласно изложенному (см. § 9, B), разбить окружность на τ равных частей, начиная с точки P. Точки разбиения (включая точку P) дадут тогда, как нам уже известно, искомые места. Отсюда видно, что ни одна из точек разбиения не совпадает ни с точкой A, ни с точкой B. В противном случае $s/2$ являлось бы целочисленным кратным $1/\tau$ и, следовательно, τ, как и N,— целочисленным кратным $1/s$, что противоречит предыдущему. Число тех точек разбиения, которые лежат на участке AB, обозначим через σ.

Значит σ — целое число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$. Поскольку τ не является целочисленным кратным от $1/s$, то равенство $\sigma/\tau = s$ не имеет места. На основании изложенного (см. § 9, B)

$$\varphi^{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}(n) = n\frac{\sigma}{\tau} + \text{некоторая величина, абсолютное значение которой меньше или равно } \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau}. \qquad (52)$$

Возьмем такое положительное целое число $\mathfrak{N}$, чтобы получилось

$$\mathfrak{N}\left|s - \frac{\sigma}{\tau}\right| > 2L + \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau}. \qquad (53)$$

Такое определение $\mathfrak{N}$ возможно, поскольку, как выше уже указывалось, s и σ/τ не равны между собой. Затем возьмем некоторую величину ε, удовлетворяющую, кроме $0 < \varepsilon < \frac{\varkappa}{\tau} - p$, следующим условиям:

α) если длина звена r отличается от $\varkappa/\tau$ менее чем на ε, то должно иметь место равенство

$$\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) = \varphi^{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}(\mathfrak{N}),$$

β) если длина звена r выражается рациональным числом μ/ν (μ, ν — целые положительные числа), отличающимся от $\varkappa/\tau$ менее чем на ε, не будучи, однако, равным $\varkappa/\tau$, то знаменатель $\nu > \mathfrak{N}/L$.

Что касается возможности такого определения ε, то достаточно будет пояснить п. α). С этой целью мы сначала напомним, что ни

одна из упомянутых выше τ точек разбиения (см. начало § 11, B) не совпадет ни с A, ни с B. Поэтому, если длина звена r достаточно мало отличается от $\varkappa/\tau$, $\mathfrak{N}$ первых узлов нити $F_{(r)}$ окажутся или не окажутся на участке AB, в зависимости от того, произойдет ли то же самое с соответствующими узлами нити $F_{(\varkappa/\tau)}$ или нет.

C. *Мы утверждаем, что для всех r из промежутка $\frac{\varkappa}{\tau} - \varepsilon < r < \frac{\varkappa}{\tau}$ будет справедливо неравенство*

$$\left|\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(r)}(n)}{n}\right| > L. \qquad (54)$$

Чтобы обосновать это утверждение, положим

$$\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(r)}(n)}{n} = I,$$

$$\varphi^{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}\frac{\sigma}{\tau} = P. \qquad (55)$$

Тогда, согласно (52),

$$|P| \leqslant \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau}. \qquad (56)$$

В силу § 11, B, α)

$$\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) = \varphi^{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}(\mathfrak{N}).$$

Поэтому мы можем написать

$$I = \mathfrak{N}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(r)}(n)}{n}\right) + P. \qquad (57)$$

Далее рассмотрим раздельно возможности «r иррационально» и «r рационально».

1. Пусть r иррационально. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(r)}(n)}{n} = s.$$

Значит,

$$I = \mathfrak{N}\left(\frac{\sigma}{\tau} - s\right) + P$$

и, следовательно, также

$$|I| \geqslant \mathfrak{N}\left|\frac{\sigma}{\tau} - s\right| - |P|. \qquad (58)$$

С учетом неравенств (53) и (56) получается

$$|I| > 2L + \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau} - \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau} = 2L, \qquad (59)$$

так что выраженное в (54) утверждение в случае иррационального r оказывается обоснованным.

2. Пусть r рационально. Допустим, $r = a/b$, где a, b — взаимно-простые целые положительные числа. Если мы начиная с точки P разделим окружность на b равных частей, то пусть на участке AB окажется k точек разбиения. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(r)}(n)}{n}=\frac{k}{b},$$

так что мы можем написать

$$I=\mathfrak{N}\left(\frac{\sigma}{\tau}-\frac{k}{b}\right)+P=\mathfrak{N}\left(\frac{\sigma}{\tau}-s\right)+\mathfrak{N}\left(s-\frac{k}{b}\right)+P. \qquad (60)$$

Очевидно следующее: $\frac{k-1}{b}\leqslant s\leqslant\frac{k+1}{b}$, и поэтому

$$\left|s-\frac{k}{b}\right|\leqslant\frac{1}{b}. \qquad (61)$$

Из (60), (53), (61), (56) вытекает

$$|I|>2L+\frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau}-\frac{\mathfrak{N}}{2}-\frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau}. \qquad (62)$$

Согласно § 11, B, β) имеем, однако, $b>\mathfrak{N}/L$ и, следовательно, $L>\mathfrak{N}/b$. С учетом этого неравенства из (62) получается $|I|>$ $>2L-L=L$. Поэтому утверждение (54) оказывается обоснованным также в случае рационального r.

Мы убедились в том, что целое положительное число $\mathfrak{N}$ и два отличные друг от друга числа $\beta=\frac{\varkappa}{\tau}$ и $\alpha=\frac{\varkappa}{\tau}-\varepsilon$, лежащие в промежутке между числами p и q, могут быть заданы такими, что при условии $\alpha<r<\beta$ будет справедливо неравенство

$$\left|\varphi^{(r)}(\mathfrak{N})-\mathfrak{N}\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(r)}(n)}{n}\right|>L.$$

Опираясь на этот результат, легко теперь провести доказательство нашей теоремы. Для этой цели возьмем два произвольных положительных числа, не равных между собой; пусть g — меньшее, h — большее из них. Затем возьмем положительные числа L_1, L_2, L_3, ... такими, чтобы они стремились к ∞, и определим величины α_1, β_1, α_2, β_2, ... и целые положительные числа $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, ... так, чтобы, во-первых, соблюдалось условие $q<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots$, $h>\beta_1>\beta_2>\beta_3>\ldots$, $\beta_1>\alpha_1$, $\beta_2>\alpha_2$, $\beta_3>\alpha_3$, ... и, во-вторых, чтобы при условии $\alpha_\nu<r<\beta_\nu$ имело место неравенство

$$\left|\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}_\nu)-\mathfrak{N}_\nu\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(r)}(n)}{n}\right|>L_\nu,$$

где ν может означать какое-либо из чисел 1, 2, 3... Возможность подобного определения чисел вытекает из только что приведенного

результата. Очевидно существование такого числа ρ, которое удовлетворяет условию $\alpha_\nu<\rho<\beta_\nu$, $\nu=1, 2, 3, \ldots$ Согласно изложенному для $\nu=1, 2, 3, \ldots$ имеем

$$\left|\varphi^{(\rho)}(\mathfrak{N}_\nu)-\mathfrak{N}_\nu\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(\rho)}(n)}{n}\right|>L_\nu,$$

поэтому величина

$$\varphi^{(\rho)}(m)-m\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{(\rho)}(n)}{n}$$

не может оставаться для всех $m=1, 2, 3, \ldots$ в конечных границах. Вследствие этого функция $\varphi^{(\rho)}(n)$ не имеет линейного характера. Если к тому же заметим, что ρ лежит между g и h, и вспомним, что g и h представляют собой произвольно взятую пару положительных величин, не равных между собой, то станет ясно, что утверждение, о котором идет речь, правильно.

III. СЛУЧАЙ С ТРЕМЯ ПЛАНЕТАМИ

§ 12

Пусть заданы три положительных числа A, B, C. Пусть они удовлетворяют условию, что каждое из них меньше $\frac{1}{2}(A+B+C)$. Поэтому из трех отрезков длиной A, B, C * можно составить собственный треугольник. Пусть углы в этом треугольнике, противолежащие сторонам B и C, выражаются числами β и γ. Посредством уравнений введем две функции, X и Y, от неограниченно изменяющихся переменных x, y;

$$\begin{aligned} X&=A+B\cos x+C\cos y,\\ Y&=B\sin x+C\sin y. \end{aligned} \qquad (63)$$

Наша ближайшая задача сводится к нахождению «критических» пар значений x, y, под которыми мы подразумеваем те пары значений x, y, для которых $X=Y=0$. Простое соображение, представлять которое подробно было бы излишним, показывает, что эти критические пары значений определяются уравнениями

$$\begin{aligned} x&=\pm(\pi-\gamma)+2\pi\mu,\\ y&=\mp(\pi-\beta)+2\pi\nu. \end{aligned} \qquad (64)$$

При этом μ, ν означают какие-либо целые числа, к которым причисляется также нуль, и в обоих уравнениях следует брать одновременно верхние или одновременно нижние знаки.

* Мы считаем, что единица длины зафиксирована.

Теперь введем прямоугольную систему координат с начальной точкой O. С обеих сторон осей проводим к ним параллели, следующие друг за другом на расстоянии π. Пусть P, Q, R будут обозначениями трех точек, положение которых с достаточной определенностью показано на рис. 3. Тут же на рисунке мы отметим критические точки, т. е. те, координаты которых представляют собой критические пары значений x, y. К этим критическим точкам относятся точка G с координатами $(\pi - \gamma)$ и $-(\pi - \gamma)$, а также точка H с координатами $(\pi + \gamma)$ и $-(\pi + \gamma)$. Поскольку $\beta + \gamma < \pi$, то, как легко заметить, точка G лежит внутри треугольника P, Q, R. Точка H получается, если провести прямую через точки G и Q; на этой прямой точка H определяется так, что $QG = QH$, причем G и H не совпадают. Прочие критические точки появятся, если координаты точки G или H изменить на целочисленное кратное 2π. Точки, которые возникают таким образом из точки G, пусть называются критическими точками первого класса, а те точки, которые указанным образом возникают из H, пусть называются критическими точками второго класса. Сама точка G пусть причисляется к первому, а точка H ко второму классу. На рис. 3 точки первого класса отмечены крестиками, точки второго класса — кружками. Точки G и H соединим прямой. То же происходит попарно с остальными критическими точками, причем на рис. 3 с достаточной ясностью показано, как это сделать.

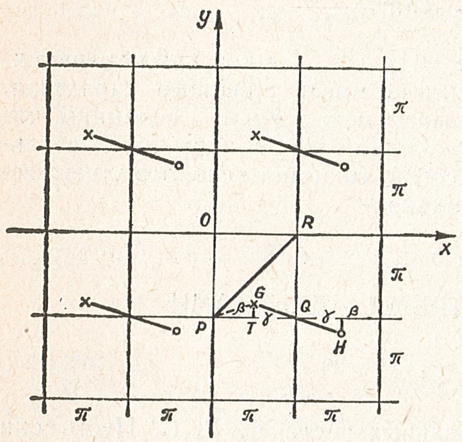

Рис. 3.

§ 13

А. Кроме координатной системы с начальной точкой O, введенной в предыдущем параграфе, мы воспользуемся еще второй системой прямоугольных координат, начальная точка которой пусть обозначается буквой Ω. Каждой находящейся в плоскости первой системы точке w с координатами * x, y относительно первой системы мы ставим в соответствие в плоскости второй системы точку

* У обеих систем мы различаем оси абсцисс и ординат и при указании координат приводим абсциссу первой.

W с координатами X, Y относительно второй системы, причем между x, y, с одной стороны, и X, Y, с другой стороны, существуют зависимости (63). Точка W получается следующим образом. Сначала в плоскости второй координатной системы мы проводим вектор длиной A, начальная точка которого совпадает с Ω, а направление соответствует направлению положительной оси абсцисс. Конечную точку этого вектора мы затем берем в качестве начальной точки для второго вектора длиной B, направление которого определяется значением амплитуды x. Конечной точкой указанного, второго, вектора служит, наконец, начальной точкой для третьего вектора длиной C. Его направление определяется значением амплитуды y. Конечная точка этого, третьего, вектора и есть точка W. Под вектором ΩW мы в дальнейшем подразумеваем вектор с начальной точкой Ω и конечной точкой W. Это обозначение мы не станем применять в случаях, когда w совпадает с какой-либо из критических точек и тем самым совпадает также Ω с W. При таком ограничении вектор ΩW всегда имеет определенное направление. Каждому положению вектора ΩW соответствует система бесконечно многих амплитуд, отличающихся друг от друга на целочисленные кратные 2π. Если обозначим амплитуду вектора ΩW в общем случае через ψ, то можно считать ψ бесконечнозначной функцией от x, y. Эта функция определена для всех x, y, за исключением критических пар x, y. Если ψ_0 есть ψ-значение, которое соответствует $x = x_0$, $y = y_0$, то, прибавляя к ψ_0 все возможные целочисленные кратные 2π, получаем все значения, соответствующие $x = x_0$, $y = y_0$.

В. Пусть точка w вышла из начального положения и, выполняя непрерывное движение, переходит в конечное положение, ни разу не пройдя при этом через какую-либо критическую точку. Начальному положению точки w соответствует бесконечно много значений ψ, из которых мы выберем единственное ψ_0. Точке w во время ее движения можно поставить в соответствие такие значения ψ, что во время указанного движения ψ будет изменяться непрерывно, принимая в начальный момент значение ψ_0. Такое соответствие указанными условиями определено однозначно. Если бы вместо ψ_0 в качестве соответствующего начальному положения мы выбрали другое значение ψ, то все же совокупность изменений, которые претерпевают ψ при описанном движении точки w, осталась бы той же *. Справедливость всех этих замечаний легко следует из определения функции ψ.

Пусть в w-плоскости (т. е. в плоскости рис. 3) дана связная область F, ограниченная конечным множеством отдельно лежащих замкнутых кривых. Ни одна из этих кривых не должна иметь кратных точек, т. е. требуется, чтобы каждую из кривых можно было

* Очевидно, что названное изменение функции ψ не зависит и от закона движения, согласно которому w пробегает свой путь, рассматриваемый как заданный. То же самое относится и к аналогичным случаям, встречающимся в дальнейшем.

пройти вплоть до возвращения в исходную точку, ни разу не соприкасаясь с одной и той же точкой. Наконец, предположим, что ни внутри области F, ни на ее границе нет критических точек. В дальнейшем мы представим себе, что точка $\mathfrak{w}$ пробегает ограничивающие область кривые, причем каждую один раз, в таком направлении, чтобы названная область оставалась слева. *Сумма изменений* Ψ ***, *которые при этом претерпевает функция* ψ, *как мы сейчас докажем, равна нулю.*

Сначала заметим, что некоторую величину $\mathfrak{R} > 0$ можно определить так, что длина вектора $\Omega\mathfrak{W}$, когда точка $\mathfrak{w}$ оказывается внутри области F или на ее границе, становится больше $\mathfrak{R}$. Далее, существует такая величина $e > 0$, что если $\mathfrak{w}_1$ и $\mathfrak{w}_2$ удалены друг от друга менее чем на e, точки $\mathfrak{W}_1$ и $\mathfrak{W}_2$ оказываются удаленными друг от друга менее чем на $\mathfrak{R}$; здесь $\mathfrak{w}_1$ и $\mathfrak{w}_2$ обозначают точки внутри F или на границе этой области, в то время как $\mathfrak{W}_1$ и $\mathfrak{W}_2$ являются соответствующими $\mathfrak{W}$-точками. Теперь разрежем область F на конечное количество кусков, так что окажутся выполненными следующие условия.

1. Каждый кусок получает в качестве своей границы одну замкнутую кривую, не имеющую кратных точек.

2. Расстояние между двумя точками, принадлежащими одному и тому же куску или его границе, будет меньше e.

Очевидно, что Ψ равно сумме изменений, которые претерпевает функция ψ, если границы кусков пройти в таком направлении, чтобы куски оставались слева. Но если точка пробегает указанным образом границу куска, то при этом, согласно сказанному выше, длина вектора $\Omega\mathfrak{W}$ всегда больше $\mathfrak{R}$; и далее, два положения $\mathfrak{W}$ отстоят друг от друга менее чем на $\mathfrak{R}$. Поэтому, если точка пробегает границу куска описанным образом, функция ψ должна вернуться к начальному значению и потому в конце концов не изменится. Из сказанного сразу же следует $\Psi = 0$.

C. Теперь представим себе, что точка $\mathfrak{w}$ пробегает один раз границу квадрата $OPQR$ (см. рис. 3), именно, выйдя из O, через PQR назад к O. Чтобы найти изменения, которые при этом претерпевает ψ, полезно вспомнить о построении $\mathfrak{W}$ согласно объяснению § 13, A. Если принять еще во внимание предположенные в § 12 неравенства $A, B, C < \frac{1}{2}(A + B + C)$, то в той мере, в какой здесь желательно, легко установить путь, пробегаемый точкой $\mathfrak{W}$. Этот путь состоит из четырех полуокружностей, концы которых опираются на ось X. Пока $\mathfrak{w}$ передвигается от O к P, $\mathfrak{W}$ движется по полуокружности от точки $(A + B + C, 0)$ к точке $(A + B - C, 0)$ ** на положительной оси X. Указанная полуокружность расположена

* Мы здесь и в дальнейшем всегда предполагаем, что при непрерывном движении точки $\mathfrak{w}$ функция ψ изменяется непрерывно.

** Величины в скобках означают координаты X, Y.

начиная от оси X на стороне отрицательной оси Y. Во время описанного перехода точки $\mathfrak{W}$ функция ψ в конце концов не претерпевает никаких изменений. Когда $\mathfrak{w}$ передвигается дальше от P к Q, $\mathfrak{W}$ движется по полуокружности от точки $(A + B - C, 0)$ к точке $(A - B - C, 0)$ на отрицательной оси X; полуокружность расположена на стороне положительной оси Y. На этом участке движения ψ увеличивается на π. Когда $\mathfrak{w}$ передвигается дальше от Q к R, $\mathfrak{W}$ движется по полуокружности от точки $(A - B - C, 0)$ к точке $(A + C - B, 0)$ на положительной оси X; полуокружность расположена на стороне отрицательной оси Y. ψ при этом увеличивается на π. Когда, наконец, $\mathfrak{w}$ перемещается от R к O, $\mathfrak{W}$ движется по полуокружности от точки $(A + C - B, 0)$ к точке $(A + B + C, 0)$; полуокружность расположена на стороне положительной оси Y. На этом, последнем, участке движения с ψ не происходит никаких изменений. Итак, мы приходим к выводу, что в то время, когда точка $\mathfrak{w}$ пробегает границу квадрата $OPQR$ описанным выше образом, функция ψ увеличивается на 2π. Рис. 4 делает наглядным только что обсужденный путь в одном частном случае.

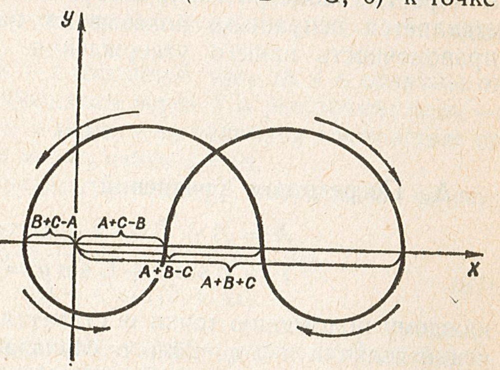

Рис. 4.

Пользуясь выводами, полученными в этом параграфе ранее, мы можем сказать: *если точка* $\mathfrak{w}$ *обращается вокруг точки* G *один раз в положительном * направлении без того, чтобы при этом пройти через другую критическую точку или обойти вокруг нее, то* ψ *при этом уменьшится на* 2π. Если мы примем во внимание, что двум положениям точки $\mathfrak{w}$, координаты которых отличаются друг от друга на целочисленное кратное 2π, соответствует одна и та же точка $\mathfrak{W}$, то придем к выводу, что *утверждение, сделанное только что относительно* G, *справедливо относительно всех критических точек первого класса.*

Соответствующим образом доказывается следующая теорема: *если точка* $\mathfrak{w}$ *обходит один раз в положительном направлении критическую точку второго класса без того, чтобы при этом пройти через другую критическую точку или обойти вокруг нее, то* ψ *уменьшится на* 2π.

D. Прибавим еще одно замечание, полезное в дальнейшем.

* «Положительное» направление пусть соответствует тому направлению, в котором следует вращаться положительной оси X, чтобы после поворота на 90° совпасть с положительной осью Y.

Пусть точка w, проходя через другие критические точки, продвинется параллельно одной из двух координатных осей на отрезок не длиннее $\pi/4$. При этом ψ изменится на величину, абсолютное значение которой меньше $5\pi/4$. Чтобы убедиться в правильности этого замечания, следует обратить внимание, что при указанном движении точки w точка W описывает часть окружности, и именно, не больше, чем восьмую часть. При этом W никогда не совпадает с Ω. Простые геометрические соображения, изложение которых представляется ненужным, показывают на основе этого наблюдения правомочность нашего утверждения.

§ 14

А. Посредством уравнений

$$X = A + B\cos x + C\cos y = u\cos\varphi,$$
$$Y = B\sin x + C\sin y = u\sin\varphi \tag{65}$$

каждому положению точки w ставится в соответствие система значений величин u и φ. Если w совпадает с критической точкой, то $u = 0$ и φ неопределенно. В любом другом случае приходится выбирать из двух значений u, отличающихся только знаком. Если выбрать положительное значение u, то система допустимых значений φ совпадает с системой таких значений ψ, которые соответствуют выбранным положениям точки w. Если же, напротив, выбрать отрицательное значение u, то система допустимых значений φ реализуется, если к одному из только что упомянутых значений ψ прибавить все возможные положительные и отрицательные нечетные кратные π.

Пусть точка w переходит в непрерывном движении из положения w_1 в положение w_2 без того, чтобы пройти по пути через какую-либо критическую точку. Пусть, далее, φ_1 является значением функции φ, соответствующим положению w_1. Значения φ, соответствующие разным положениям точки w, могут быть выбраны так, что при движении w функция φ изменяется непрерывно, приняв в начальный момент значение φ_1. Таким образом, величина φ определяется однозначно и изменение, которое φ претерпевает при переходе точки w из w_1 в w_2, равно изменению, происходящему при указанном переходе с величиной ψ. Это замечание позволяет применить изложенные в предыдущем параграфе теоремы, относящиеся к изменению ψ, для исследования функции φ.

Если положение точки w задано и значение φ выбрано, то u получает вполне определенное значение. Если w движется непрерывно и выбранное значение величины φ изменяется при этом непрерывно, то непрерывно происходит также изменение величины u.

В. Пусть точка w переходит из начального положения w_1 в отличное от него конечное положение w_2, пробегая в одном и том же направлении прямую линию, соединяющую w_1 и w_2. Отрезок w_1w_2 не должен иметь направление оси x или оси y и должен содержать одну и только одну критическую точку w_0, расположенную между w_1 и w_2. При указанном движении точки w ее координаты могут быть представлены в виде

$$x = a + ms, \quad y = b + ns, \tag{66}$$

где a, b — координаты w_1, s — расстояние ww_1, m и n отличны от нуля. Расстояние w_1w_2 мы обозначим через S и расстояние w_1w_0 — через σ. При переходе точки w из w_1 в w_2 величина s возрастает от 0 до S. В момент совпадения w с w_0 имеем $s = \sigma$.

Во время движения точки w координаты точки W выражаются формулами

$$X = A + B\cos(a + ms) + C\cos(b + ns),$$
$$Y = B\sin(a + ms) + C\sin(b + ns). \tag{67}$$

Если привлечь значения s, удовлетворяющие условию $0 \leqslant s \leqslant S$, то выражения (67) исчезают одновременно только для $s = \sigma$. Далее мы воспользуемся исследованиями из § 3. Пусть φ_1 есть одно из значений φ, соответствующих положению w_1 точки w. Как легко следует из § 3, тогда можно при движении точки w выбрать величину φ так, чтобы она непрерывно менялась, приняв в начальный момент значение φ_1. При выполнении только что указанных требований выбор φ однозначно определен. Если бы этому требованию отвечали две функции, φ' и φ'', то при движении w разность $\varphi' - \varphi''$ изменялась бы непрерывно. Если не считать того момента, когда w совпадает с w_0, указанная разность должна была бы, далее, представлять собой целочисленное кратное π, а в начальный момент должна была бы равняться нулю. Из этого вытекает, что $\varphi' - \varphi''$ всегда должна была бы равняться нулю. Следует еще обратить внимание на то, что при упомянутом переходе точки w из w_1 в w_2 изменение величины φ не зависит от того, каким именно будет выбранное значение φ_1.

Если w выполняет только что описанное непрерывное движение и если при этом φ выбирается согласно сказанному выше, то u также непрерывно изменяется. Убедимся теперь, что выражения

$$\frac{d}{ds}(A + B\cos(a + ms) + C\cos(b + ns)) =$$
$$= -mB\sin(a + ms) - nC\sin(b + ns),$$
$$\frac{d}{ds}(B\sin(a + ms) + C\sin(b + ns)) = mB\cos(a + ms) +$$
$$+ nC\cos(b + ns)$$

при $s = \sigma$ не исчезают одновременно. В противном случае мы имели бы

$$
\begin{aligned}
mB \sin (a + m\sigma) + nC \sin (b + n\sigma) &= 0, \\
mB \cos (a + m\sigma) + nC \cos (b + n\sigma) &= 0,
\end{aligned} \tag{68}
$$

к чему, согласно предыдущему, добавляются уравнения

$$
\begin{aligned}
A + B \cos (a + m\sigma) + C \cos (b + n\sigma) &= 0, \\
B \sin (a + m\sigma) + C \sin (b + n\sigma) &= 0.
\end{aligned} \tag{69}
$$

$a + m\sigma$ и $b + n\sigma$ представляют собой координаты критической точки, поэтому ни одна из этих величин не является целочисленным кратным π. Значит, $\sin (a + m\sigma)$ и $\sin (b + n\sigma)$ отличны от нуля. Поэтому из первого уравнения (68) и второго уравнения (69) должно было бы следовать $m = n$. Из второго уравнения (68) и первого уравнения (69) тогда следовало бы $A = 0$, что не соответствует действительности. Тем самым доказано, что обе указанные производные при $s = \sigma$ не исчезают одновременно. В таком случае из § 3 следует, что u меняет свой знак, когда w при описанном движении проходит через критическую точку w_0.

Когда в дальнейшем будет идти речь о непрерывном движении точки w и одновременном изменении φ, то всегда будет иметься в виду непрерывное изменение φ.

C. Пусть в плоскости точек w располагается прямоугольный треугольник, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Треугольник является собственным, т. е. он обладает положительной площадью.

2. Катеты имеют направление координатных осей, принятых нами на плоскости w.

3. Внутри треугольника нет ни одной критической точки, но на контуре имеется одна такая точка. Она расположена на гипотенузе между конечными ее точками.

Мы хотим определить изменение, которое претерпевает φ, когда точка w пробегает один раз контур треугольника в положительном * направлении. Для этого обозначим упомянутую критическую точку через K и возьмем на гипотенузе с двух сторон K какие-либо две точки α и β. После этого сосредоточим внимание на прямоугольном треугольнике с гипотенузой $\alpha\beta$ и с катетами, параллельными координатным осям, который образует часть исходного прямоугольника. Когда точка w пробегает один раз в положительном направлении контур нового треугольника, происходящее при этом изменение φ, согласно выводу, полученному ранее, равно именно тому изменению φ, которое нам требуется определить. Если учесть это, становится возможным, не уменьшая общности, пополнить следующим образом условия, принятые в отношении исходного треугольника.

* Это выражение надо понимать аналогично приведенному в § 13.

1. Когда точка w пробегает гипотенузу, то φ изменяется на величину, абсолютное значение которой меньше $\pi/2$.

2. Когда точка w пробегает один из катетов, то φ изменяется на величину, абсолютное значение которой меньше $5\pi/4$ (см. § 13, D).

Если теперь w пробегает один раз весь контур треугольника, то φ изменится на величину, абсолютное значение которой меньше $\pi/2 + 5\pi/4 + 5\pi/4 = 3\pi$. Если w начинает свое движение от какой-либо вершины треугольника, то к концу движения w возвращается к той же вершине. При этом φ переходит от начального значения φ' к конечному значению φ'', величина u переходит от начального значения u' к конечному значению u''. Из предыдущего следует, что u' и u'' имеют различные знаки. Отсюда, далее, заключаем, что φ' отличается от φ'' на нечетное кратное π. Поскольку, с другой стороны, как было показано, $|\varphi' - \varphi''| < 3\pi$, то должно быть $|\varphi' - \varphi''| = \pi$. Теперь дополним заданный треугольник до прямоугольника вторым прямоугольным треугольником с той же гипотенузой. Не уменьшая общности искомого результата, можем предположить, что этот прямоугольник не имеет ни внутри, ни на своем контуре критических точек, кроме упомянутой. Пусть через Φ_1, Φ_2, Φ обозначаются изменения, которые претерпевает φ, когда w пробегает один раз в положительном направлении контур первого и второго треугольников и прямоугольника. Очевидно, что $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Однако мы знаем (см. § 13), что Φ равно 2π или -2π, в зависимости от того, относится ли имеющаяся критическая точка к первому или второму классу. С другой стороны, как мы только что видели, $|\Phi_1| = |\Phi_2| = \pi$. Из сказанного заключаем, что $\Phi_1 = \Phi_2 = \pi$ или $\Phi_1 = \Phi_2 = -\pi$, в зависимости от того, идет ли речь о критической точке первого или второго класса. Этим мы решили поставленную перед нами задачу.

D. Пусть в плоскости точек w дана бесконечная прямая G, направление которой не совпадает с направлением ни одной из координатных осей. *По каждому положительному числу L можно определить такое положительное число P, что будет справедливо следующее. Если точка w пробегает отрезок w_1w_2 на прямой G, где w_1 и w_2 — разные точки на расстоянии не больше L друг от друга, не совпадающие ни с одной из критических точек, то при этом φ изменяется на величину, абсолютное значение которой не превосходит P.*

Чтобы доказать это утверждение, примем значение L в качестве фиксированного. Очевидно, что существуют такие положительные целые числа M и N, что справедливо следующее. Если построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на G и своим размером не превосходит L, а катеты параллельны координатным осям, то внутри и на контуре этого треугольника будет менее M критических точек и длина каждого катета будет меньше