$N\frac{\pi}{4}$. Тогда можно показать, что требования нашей теоремы будут выполнены, если $P = M2\pi + 2N \cdot 5\pi/4$. С этой целью выберем на G две отличные друг от друга точки w_1, w_2, расстояние между которыми не превосходит L, причем ни одна из них не совпадает с критической точкой. w_1w_2 мы станем считать гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого имеют направления координатных осей. Мы сначала предположим, что на катетах нет критических точек, и обозначим через μ' и μ'' число критических точек первого и второго классов, лежащих на гипотенузе. ν' и ν'' пусть означают число критических точек первого и второго классов, лежащих внутри треугольника. Если w, выйдя из какой-либо вершины, пробежит в положительном направлении контур треугольника, то φ изменится, как легко увидеть, на

$$\mu'\pi - \mu''\pi + \nu'2\pi - \nu''2\pi.$$

Абсолютное значение последнего выражения меньше $M \cdot 2\pi$. За время, в течение которого w пробегает катет, φ изменяется на величину с абсолютным значением, меньшим $N \cdot 5\pi/4$ (см. § 13, D). Если w пробегает гипотенузу, то φ изменяется, как теперь легко заключить, на величину, абсолютное значение которой меньше $M \cdot 2\pi + 2N \cdot 5\pi/4$. Тем самым наше утверждение доказано для случая, когда на катетах нет критических точек.

Далее предположим, что на катетах есть критические точки. В этом случае можно задать на гипотенузе между ее концами две разные точки v_1 и v_2, не совпадающие с критическими, причем так, чтобы выполнялись следующие условия.

1. v_1 и v_2 лежат произвольно близко к w_1 и w_2.

2. v_1v_2 может служить гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого имеют одинаковые направления с осями координат и не имеют критических точек. После только что доказанного становится ясным, что при пробеге точкой w отрезка v_1v_2 функция φ изменяется на величину, абсолютное значение которой не больше P.

Приняв во внимание, что указанные изменения φ происходят с сохранением непрерывности, легко получаем, что в то время, когда w пробегает отрезок w_1w_2, φ изменяется на величину, абсолютное значение которой не больше P. Этим наше утверждение полностью доказано. *Ясно также, что в самом утверждении мы можем отбросить условие, согласно которому точки w_1 и w_2 не должны совпасть с критической точкой, если только предусмотрим, что функция φ должна изменяться непрерывно.*

§ 15

А. Пусть в плоскости точек w задана неограниченная прямая L, уравнение которой

$$y = \mu x + y_0. \tag{70}$$

Здесь μ и y_0 суть константы, из которых первая, т. е. угловой коэффициент прямой, пусть больше $\frac{\beta}{\pi - \gamma}$. Если провести через точку G (см. рис. 3) параллельную к заданной прямой, то эта параллельная пересечет, как легко увидеть, треугольник PGT *.

Представим себе, что точка w движется по L, выйдя из какой-то фиксированной точки, причем таким образом, что y неограниченно возрастает. Соответственно этому движению точки w функция φ пусть изменяется непрерывно. Для нашей цели следует изучить общее изменение, которое претерпевает φ с начального момента до некоторого более позднего момента; при этом в случае, если при неограниченном росте y соответствующие величины остаются между конечными границами, речь не идет об их добавлении.

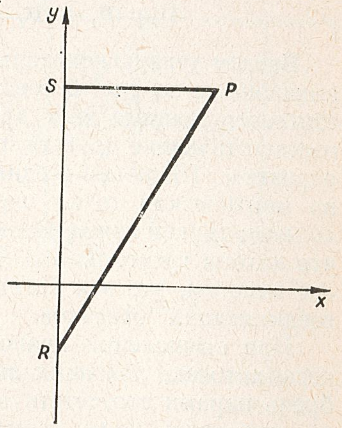

Рис. 5.

В качестве начальной точки движения w сначала возьмем ту точку R, в которой L пересекается с осью Y. Далее мы сначала допустим только такие конечные моменты, при которых y окажется целочисленным кратным 2π. Пусть P обозначает положение точки w в один из таких конечных моментов, PS будет перпендикуляром из P на ось Y (см. рис. 5).

Пусть точка w, выйдя из R, пробегает контур треугольника RPS в положительном направлении; тем самым она движется от R к P, далее, от P к S и, наконец, от S к R. После пробега гипотенузы функция φ получает прирост Φ, после пробега катетов PS и SR приросты будут Φ_1 и Φ_2. Можно показать, что $|\Phi_1| < \pi$ и $|\Phi_2| < \pi$. С этой целью рассмотрим путь, описываемый точкой W (см. § 13), когда w пробегает катет PS или катет SR. В первом случае W движется по окружности с радиусом B, координаты центра которой $X = A + C$, $Y = 0$. Во втором случае W движется по окружности с радиусом C, координаты центра которой $X = A + B$, $Y = 0$. Если принять во внимание, что $A + C > B$ и $A + B > C$, то правильность нашего замечания становится очевидной.

* T есть проекция точки G на прямую $y = -\pi$.

Прирост, который получает φ, когда w обегает контур треугольника RPS в положительном направлении, т. е. величину $\Phi + \Phi_1 + \Phi_2$, представим теперь еще другим образом. Обозначим через m_1 число критических точек первого класса внутри треугольника RPS, через m_2 — число критических точек второго класса внутри треугольника RPS. n_1 и n_2 пусть означают число критических точек соответственно первого и второго классов, лежащих на гипотенузе. На катетах критических точек нет. Применение теорем, найденных ранее, дает

$$\Phi + \Phi_1 + \Phi_2 = m_1 2\pi - m_2 2\pi + n_1\pi - n_2\pi. \tag{71}$$

Введем теперь некоторые обозначения. Две критические точки, показанные на рис. 3 соединенными отрезком прямой, мы назовем соответствующими друг другу. Отрезок прямой, соединяющий две соответствующие друг другу точки, пусть называется соединяющим отрезком. Тот конец соединяющего отрезка, на котором расположена критическая точка первого класса, пусть называется первым концом; другой конец назовем вторым концом. Уже было упомянуто, что катеты треугольника RPS не содержат критических точек. Далее заметим, что эти катеты не имеют общих точек ни с одним из соединяющих отрезков.

При вычислении правой части равенства (71) мы среди критических точек, лежащих внутри треугольника RPS, можем пренебречь парами соответствующих друг другу точек. Затем мы должны направить наше внимание еще на две категории критических точек, лежащих внутри RPS: во-первых, на те точки, которым соответствуют точки вне RPS; во-вторых, на те точки, которым соответствуют точки, лежащие на гипотенузе. Точки первой из этих двух категорий являются, очевидно, точками первого класса и число их равно числу соединяющих отрезков, которые пересекаются стороной RP на промежутке между ее концами. Точки второй категории также являются точками первого класса, и их количество указывает, сколько раз RP проходит через вторые концы соединяющих отрезков. Кроме того, надо принять во внимание критические точки, лежащие на гипотенузе. Из них к первому классу относится столько точек, сколько их окажется на RP в роли первых концов соединяющих отрезков. Ко второму классу относится столько точек, сколько их окажется на RP в роли вторых концов соединяющих отрезков. Поэтому, если RP пересекают соединяющий отрезок между конечными точками δ раз, если, далее, гипотенуза RP проходит ε_1 раз через первый, ε_2 — раз через второй конец соединяющего отрезка,

$$\Phi + \Phi_1 + \Phi_2 = \delta 2\pi + \varepsilon_2 2\pi + \varepsilon_1\pi - \varepsilon_2\pi = \delta 2\pi + \varepsilon\pi. \tag{72}$$

При этом $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ указывает, сколько раз RP проходит через конец соединяющего отрезка. Приняв во внимание § 14, D, мы можем

сформулировать следующую теорему. *Если точка w, выйдя из фиксированной точки, пробегает прямую L таким образом, что y неограниченно растет, то образующееся при этом приращение функции выражается как $d2\pi + e\pi$, не считая слагаемого, остающегося во время движения между конечными границами. При этом целое число d указывает, сколько раз точка w при выполнении этой части движения окажется на соединяющем отрезке (не считая концов). Целое число e указывает, сколько раз точка w во время этой части движения пройдет через концы соединяющего отрезка.*

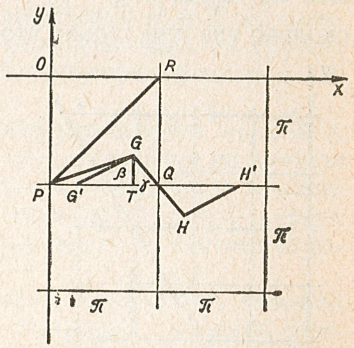

Рис. 6.

B. Придадим только что полученному результату другой вид и с этой целью введем некоторые новые обозначения. Через точку G (см. рис. 6, представляющий собой повторение части рис. 3) проведем прямую одинакового направления с L. Как уже отмечалось, она пересекает треугольник PGT; пусть она встречается с прямой $y = -\pi$ в точке G'. Далее мы проводим через H прямую, параллельную L; пусть она встречается с прямой $y = -\pi b$ в точке H'. С очевидностью получается

$$G'Q = H'Q = \gamma + \frac{\beta}{\mu}. \tag{73}$$

Обозначим через G', H' точки, соответствующие критическим точкам G, H. Далее, пусть отрезок $G'H'$ называется отрезком, соответствующим соединяющему отрезку GH. Среди концов отрезка $G'H'$ пусть G' называется первым концом, а H' — вторым концом. С остальными соединяющими отрезками поступим аналогичным образом; соответствующие построения переходят друг в друга путем сдвига на целократное 2π параллельно координатным осям.

Теперь легко увидеть, что *сформулированная в конце* § 15, A *теорема остается верной, если в ее формулировке мы заменим слова «соединяющий отрезок» словами «соответствующий отрезок». При таком изменении мы в формулировке теоремы еще вместо букв d, e станем пользоваться буквами $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$.*

Если обозначим через Δy прирост величины y с начала движения до некоторого более позднего момента, то $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ будут однозначными функциями величины Δy.

Обозначим через M точку с координатами

$$x = -\frac{y_0 + \pi}{\mu}, \quad y = -\pi, \tag{74}$$

лежащую на L. Пусть $\mathfrak{w}$, выйдя из этой точки, станет двигаться вдоль L таким образом, чтобы величина y, все время увеличиваясь, получила приращение $2\pi g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)$. Символ $g(z)$ здесь употребляется, чтобы обозначить наименьшее целое число, большее z. Отсюда, как легко заметить, наименьшее целочисленное кратное 2π, большее Δy, будет $2\pi g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)$. Пусть теперь целое число D означает, сколько раз при только что описанном движении $\mathfrak{w}$ лежит на соответствующем отрезке (не считая концов). Целое число E пусть означает, сколько раз при этом движении точка $\mathfrak{w}$ совпадала с концами соответствующих отрезков. Очевидно, что D и $\mathfrak{D}$, а также E и $\mathfrak{E}$ отличаются на величины, которые при неограниченном возрастании Δy остаются между конечными границами. Поэтому при неограниченном росте Δy между конечными границами остается также разность между $\mathfrak{D}2\pi + \mathfrak{E}\pi$ и $D2\pi + E\pi$. Следовательно, мы можем сформулировать теорему.

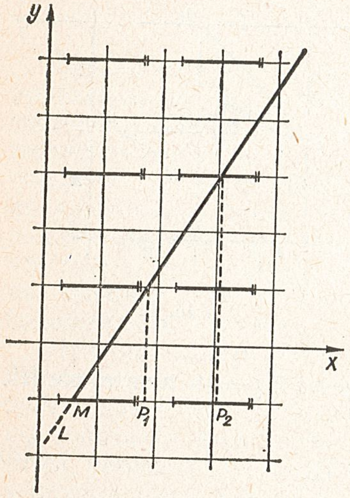

Рис. 7.

Пусть точка $\mathfrak{w}$, выйдя из фиксированной точки на прямой L, движется вдоль этой прямой так, что y неограниченно возрастает. Если с начала движения y получает положительное приращение Δy, то с точностью до слагаемого, остающегося при неограниченном возрастании y между конечными границами, соответствующее приращение величины φ равно $D2\pi + E\pi$, причем целые числа D и E находятся следующим образом. Пусть точка $\mathfrak{w}$, выйдя из M, движется вдоль прямой L так, что y получает всегда возрастающее приращение $2\pi g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)$. Число D показывает, сколько раз при только что названном движении точка $\mathfrak{w}$ пересечет соответствующие отрезки (не считая концов). Число E показывает, сколько раз при этом движении точка $\mathfrak{w}$ окажется на концах соответствующих отрезков.

Рис. 7 поясняет нахождение чисел D и E. Знаками I и II на рисунке помечены концы соответствующих отрезков. В представленном этим рисунком случае

$$\text{для}\quad g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)=1\quad D=1,\quad E=0;$$

$$\text{для}\quad g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)=2\quad D=2,\quad E=0;$$

$$\text{для}\quad g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)=3\quad D=2,\quad E=1;$$

$$\text{для}\quad g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)=4\quad D=3,\quad E=1.$$

Эти только что приведенные правила нахождения D и E мы заменим новыми, которые последовательно вытекают одно из другого и в конце концов принимают форму, позволяющую применить выводы исследований главы II.

Первая новая форма правила. Из точек пересечения прямой L с прямыми $y=\pi$, $y=3\pi$, $y=5\pi$, $y=7\pi$, ... опускаем на прямую $y=-\pi$ перпендикуляры, основания которых обозначим точками P_1, P_2, P_3, P_4, ... (см. рис. 7). Число D показывает, сколько среди точек $M, P_1, P_2, \ldots, P_{g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)}$ таких, которые лежат на соответствующих отрезках (не считая концов). Число E показывает, сколько среди этих точек имеется таких, которые совпадают с концами соответствующих отрезков.

Вторая новая форма правила. В направлении положительной оси x натянем односторонне неограниченную нить с узлами * и звеньями между ними длиной $\frac{2\pi}{\mu}$ так, что конец нити совпадет с M. Число D показывает, сколько из первых $g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)+1$ узлов будет на соответствующих отрезках (не считая концов). Число E показывает, сколько из этих узлов совпадает с концами соответствующих отрезков.

Третья новая форма правила. Берем на окружности длиной 2π фиксированную точку $\mathfrak{M}$ и наделяем окружность положительным направлением. Начиная от $\mathfrak{M}$ откладываем на окружности участок длиной $|\tau|$, причем

$$\tau=\pi-\gamma-\frac{\beta}{\mu}+\frac{y_0+\pi}{\mu},$$

именно, если $\tau\neq 0$, то мы откладываем участок в положительном или отрицательном направлении, в зависимости от того, будет ли $\tau>0$ или $\tau<0$. Пусть конечной точкой названного участка будет $\mathfrak{A}$. От точки $\mathfrak{A}$ откладываем на окружности в положительном направлении участок длиной $2\left(\gamma+\frac{\beta}{\mu}\right)$. Пусть конечной точкой этого нового участка будет $\mathfrak{B}$. Длина участка $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ равна длине встречающегося выше соответствующего отрезка и потому меньше 2π. Начиная от $\mathfrak{M}$ мы теперь наматываем в положительном

* Мы применяем здесь названия, введенные в главе II.

направлении нить, отмеченную во второй новой форме правила. Число D показывает тогда, сколько из первых $g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)+1$ узлов лежит на отрезке $\mathfrak{AB}$ (не считая концов). Число E показывает, сколько из названных узлов совпадает с концом $\mathfrak{AB}$.

Четвертая новая форма правила. Берем на окружности длиной 1 фиксированную точку N и наделяем окружность положительным направлением. Начиная от N наносим на окружность отрезки длиной $\left|\frac{\tau}{2\pi}\right|^*$, именно, если $\tau \neq 0$, то делаем это в положительном или отрицательном направлении, в зависимости от того, будет ли $\tau > 0$ или $\tau < 0$. Конечной точкой отрезка пусть будет A. От точки A откладываем на окружности в положительном направлении отрезок длиной $\frac{1}{\pi}\left(\gamma + \frac{\beta}{\mu}\right)$. Конечной точкой этого нового отрезка пусть будет B. Длина отрезка AB меньше 1. Начиная от N мы наматываем в положительном направлении односторонне неограниченную нить с узлами с длиной звеньев $\frac{1}{\mu}$. Число D показывает, сколько узлов из $g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)+1$ первых расположено на отрезке AB (не считая концов). Число E показывает, сколько из этих узлов совпадает с концами AB.

§ 16

A. Мы прервем исследование, начатое в предыдущем параграфе, чтобы сформулировать несколько замечаний, вытекающих из главы II.

На окружности длиной 1 возьмем точку Q. Окружности придается положительное направление, и пусть a, r, s — заданные величины, из которых последние две удовлетворяют условию $0 < s < 1$, $r > 0$. Начиная от Q откладываем вдоль окружности отрезок длиной $|a|$ и, именно, если $a \neq 0$, в положительном или отрицательном направлении, в зависимости от того, будет ли $a > 0$ или $a < 0$. Конечной точкой этого отрезка пусть будет A. Начиная от A откладываем в положительном направлении вдоль окружности отрезок длиной s. Конечной точкой этого нового отрезка пусть будет B. Наконец, начиная от точки Q в положительном направлении наматываем на окружность односторонне неограниченную нить с узлами с длиной звеньев r. Возникающую при этом функцию распределения мы обозначим через $\Phi(a, r, s, n)$. Согласно главе II эта функция выражает число узлов среди первых n, попадающих при наматывании на дугу AB (исключая концы). Мы получим ту

* Смысл τ указан в третьей форме правила.

же функцию, если вместо a возьмем величину, которая отличается от a на целое число. Согласно главе II существует число

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(a, s, r, n)}{n},$$

являющееся характеристическим числом функции распределения.

Если существует такая константа c, что разность $\Phi(a, s, r, n) - cn$ для неограниченно возрастающего n остается между конечными границами, то, согласно главе II, мы скажем, что функция распределения обладает линейным характером. Тогда c будет характеристическим числом функции Φ. Обладает ли Φ линейным характером или нет, зависит только от s и r. Если r является числом рациональным, то Φ всегда обладает линейным характером. Если станем считать s фиксированным числом и если, кроме того, задана положительная величина $\mathfrak{r}$, то можно выбрать длину звена r так, что абсолютная разность между r и $\mathfrak{r}$ станет произвольно малой и у функции Φ окажется линейный характер. С другой стороны, можно определить длину звена так, что $|r - \mathfrak{r}|$ станет произвольно малой и Φ не будет обладать линейным характером.

Предположим, во-первых, что r является иррациональным числом. Тогда характеристическим числом для Φ будет s. Далее, в этом случае на концы участка AB может попасть, самое большее, два узла.

Во-вторых, предположим, что r является числом рациональным. В этом случае число r можно представить в виде $r = \mu/\nu$, где μ, ν — положительные целые числа, не имеющие общего делителя. Мы разделим тогда окружность с помощью ν точек на ν равных частей, именно таким образом, чтобы одна из точек разбиения совпала с начальной точкой Q нити. Система ν точек разбиения пусть обозначается через Σ. В таком случае при наматывании нити с Σ совпадут ν первых узлов; то же самое произойдет со следующими ν узлами и т. д. Из ν узлов, относящихся к Σ, пусть σ совпадает с концами отрезка AB. Как легко видеть, σ будет равна либо 0, либо 1, либо 2; именно, σ показывает, сколько целочисленных значений будет среди обоих значений: νa и $\nu(a+s)$. Число таких точек разбиения системы Σ, которые лежат на отрезке AB (исключая концы), мы обозначим буквой λ. Тогда характеристическое число равно λ/ν. Легко заметить, что λ указывает, сколько целых чисел, включая нуль, лежит между νa и $\nu(a+s)$. Наконец, без каких-либо усилий можно заметить, что из n первых узлов на концы участка AB приходится $\sigma g\left(\frac{n}{\nu}\right)+d$ узлов, где d есть величина, остающаяся при неограниченном возрастании между конечными границами.

B. Продолжим исследования, начатые в § 15. Применение сделанного только что в § 16, A замечания получается вообще само собой. Поэтому будет достаточно только сформулировать результат такого применения. При этом для краткости станем писать

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi - \gamma - \frac{\beta}{\mu} + \frac{y_0 + \pi}{\mu}\right), \quad \mathfrak{l} = \frac{1}{\pi}\left(\gamma + \frac{\beta}{\mu}\right)$$

и введем для случая, когда μ является рациональным числом, следующие обозначения: $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, где μ_1, μ_2 означают положительные целые числа, не имеющие общего делителя; G есть количество целых чисел, лежащих между $\mu_1\mathfrak{a}$ и $\mu_1(\mathfrak{a} + \mathfrak{l})$; g есть число целых чисел, совпадающих с $\mu_1\mathfrak{a}$ или с $\mu_1(\mathfrak{a} - \mathfrak{l})$.

Пусть точка w, выйдя из какой-либо фиксированной точки на прямой L, движется по этой прямой так, что y неограниченно возрастает. Если с начала движения величина y получает приращение Δy, то соответствующее приращение функции φ без слагаемого, остающегося при неограниченном возрастании величины y между конечными границами, равно

$$2\pi\Phi\left(\mathfrak{a}, \mathfrak{l}, \frac{1}{\mu}, g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right) + \eta\Delta y. \tag{75}$$

Здесь η означает нуль, если μ является иррациональным числом, а если μ является рациональным числом, то величину $\frac{\mathfrak{g}}{2\mu_1}$. Характеристическое число для функции $\Phi\left(\mathfrak{a}, \mathfrak{l}, \frac{1}{\mu}, g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right)$ в случае иррационального μ будет $\mathfrak{l}$, в случае рационального μ — $\frac{G}{\mu_1}$.

§ 17

A. Опираясь на полученные выводы, мы можем перейти к непосредственному изучению интересующей нас проблемы. Пусть рассматриваются функции

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + A_3 \cos(g_3 t + \beta_3), \\ \eta &= A_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + A_3 \sin(g_3 t + \beta_3). \end{aligned} \tag{76}$$

При этом $A_1, A_2, A_3, g_1, g_2, g_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ являются константами, удовлетворяющими условиям

$$\begin{gathered} 0 < 2A_\mu < A_1 + A_2 + A_3 \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, \\ g_1 < g_2 < g_3, \end{gathered} \tag{77}$$

t — неограниченно изменяющаяся переменная.

Покажем сначала, что в случае, если $t = t_0$ является нулевой точкой * (допустим, имеющейся), она всегда является точкой первого порядка **. С этой целью обозначим для краткости $a_1 = g_1 t + \beta_1$, $a_2 = g_2 t + \beta_2$, $a_3 = g_3 t + \beta_3$. Если бы наше замечание не было правильным, то было бы

$$\begin{aligned} A_1 \cos a_1 + A_2 \cos a_2 + A_3 \cos a_3 &= \\ = A_1 \sin a_1 + A_2 \sin a_2 + A_3 \sin a_3 &= 0, \\ g_1 A_1 \cos a_1 + g_2 A_2 \cos a_2 + g_3 A_3 \cos a_3 &= \\ = g_1 A_1 \sin a_1 + g_2 A_2 \sin a_2 + g_3 A_3 \sin a_3 &= 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} g_2 & g_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = g_2 - g_3, \quad \begin{vmatrix} g_3 & g_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = g_3 - g_1, \quad \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = g_1 - g_2$$

отличны от нуля, то должны существовать такие числа p, q, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} &A_1 \cos a_1 = p(g_2 - g_3), \quad A_2 \cos a_2 = p(g_3 - g_1), \quad A_3 \cos a_3 = p(g_1 - g_2), \\ &A_1 \sin a_1 = q(g_2 - g_3), \quad A_2 \sin a_2 = q(g_3 - g_1), \quad A_3 \sin a_3 = q(g_1 - g_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\sin(a_2 - a_1) = \sin(a_3 - a_2) = \sin(a_1 - a_3) = 0.$$

Значит, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_1 - a_3$ являются целочисленными кратными π. Мы выберем теперь прямоугольную систему координат с начальной точкой O и проведем три вектора длиной A_1, A_2, A_3 и с амплитудами a_1, a_2, a_3 таким образом, чтобы начальная точка первого вектора совпала с O, в то время как начальная точка каждого следующего вектора совпала бы с конечной точкой предыдущего. Согласно (78) эти три вектора образуют тогда треугольник со сторонами длиной A_1, A_2, A_3. Поэтому невозможно, чтобы какая-либо из разностей $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_1 - a_3$ представляла собой целочисленное кратное π. Значит, мы пришли к противоречию и можем считать наше утверждение доказанным.

Из главы I мы знаем, что для всех t существуют определенные непрерывные функции χ, удовлетворяющие при надлежащем выборе v условиям

$$v \cos \chi = \xi, \quad v \sin \chi = \eta. \tag{79}$$

Все функции, удовлетворяющие приведенным условиям, мы станем называть χ-функциями. Относительно свойств этих функций сошлемся на § 3.

В случае, если при неограниченно возрастающем t для некоторой χ-функции частное $\frac{\chi(t)}{t}$ стремится к конечному пределу c, то же самое будет и для любой χ-функции, и для всех функций c будет иметь одно и то же значение. В этом случае мы назовем c характеристическим числом χ-функций. Мы вскоре увидим, что такое характеристическое число всегда существует. Если возможно определить такую константу k, что для некоторой χ-функции при

* Относительно обозначений см. гл. I.

** Это замечание, впрочем, далее не используется.

неограниченно возрастающем t разность $\chi - kt$ остается между конечными границами, то же будет в силе для всех χ-функций, и k будет их характеристическим числом. В этом случае мы скажем, согласно § 4, что существует среднее движение, и будем называть k константой среднего движения. Эта константа, как только что было сказано, равна характеристическому числу. Мы вскоре увидим, что среднее движение существует отнюдь не всегда.

Наконец, заметим, что из уравнений (79) следуют новые уравнения

$$v\cos f = A_1 + A_2\cos((g_2 - g_1)t + \beta_2 - \beta_1) + $$
$$+ A_3\cos((g_3 - g_1)t + \beta_3 - \beta_1), \qquad (80)$$
$$v\sin f = A_2\sin((g_2 - g_1)t + \beta_2 - \beta_1) + A_3\sin((g_3 - g_1)t + \beta_3 - \beta_1),$$

в которых для краткости произведена замена $f = \chi - g\,t - \beta_1$.

B. Теперь сформулируем теорему, в которой даны главные результаты этой работы. Сначала введем некоторые обозначения.

Из трех отрезков длиной A_1, A_2, A_3 мы составляем треугольник и обозначаем углы, противолежащие сторонам длины A_1, A_2, A_3, соответственно через w_1, w_2, w_3. Далее вводим обозначения

$$\rho = \frac{g_2 - g_1}{g_3 - g_1}, \quad \zeta = \frac{1}{\pi}(w_3 + \rho w_2),$$

$$b = \beta_3 - \beta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\rho}, \quad \omega = \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi\zeta + (b + \pi)\rho).$$

Очевидно, что всегда $0 < \rho < 1$, $0 < \zeta < 1$. С другой стороны, если каким-либо образом выбрать числа ρ', ζ', удовлетворяющие неравенствам $0 < \rho' < 1$, $0 < \zeta' < 1$, то могут быть определены такие числа A_1, A_2, A_3, g_1, g_2, g_3, что они станут удовлетворять условиям, приведенным в начале § 17, A, и представлять собой значения $\rho = \rho'$, $\zeta = \zeta'$.

В случае, когда ρ является рациональным числом, мы станем употреблять еще следующие обозначения. Мы пишем $\rho = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — положительные целые числа, не имеющие общего делителя. Далее мы обозначим буквой H количество целых чисел, лежащих между $\mathfrak{n}\omega$ и $\mathfrak{n}\,(\omega + \zeta)$, и буквой h — количество совпадающих с $\mathfrak{n}\omega$ или $\mathfrak{n}\,(\omega + \zeta)$ целых чисел.

Выражение $\frac{\chi(t)}{t}$, *когда* t *неограниченно возрастает, стремится к конечной границе, так что всегда существует характеристическое число. Последнее, если* ρ *представляет собой иррациональное число, равно*

$$\zeta(g_3 - g_1) + g_1 = \frac{1}{\pi}(g_1 w_1 + g_2 w_2 + g_3 w_3), \qquad (81)$$

в случае же, если ρ *представляет собой рациональное число, равно*

$$\frac{g_3 - g_1}{2\mathfrak{n}}(h + 2H) + g_1. \qquad (82)$$

Что касается вопроса о существовании среднего движения, то ответ на него зависит только от величин ρ *и* ζ. *В частности, среднее движение всегда существует, если число является рациональным. Если положительные величины* ρ_0 *и* ζ_0 *меньше* 1, *а в других отношениях выбраны произвольно, то произвольно близко к* ρ_0 *имеются такие числа* $\rho_0 + \varepsilon$, *что среднего движения не существует, когда* $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$*.

При доказательстве этой теоремы мы основываемся на результатах, полученных в данной главе до сих пор, в особенности на исследованиях, начатых в § 15. Мы положим $A = A_1$, $B = A_2$, $C = A_3$; тогда A, B, C станут удовлетворять указанным условиям, и мы имеем $\beta = w_2$, $\gamma = w_3$.

Пусть теперь точка w выполняет в ее плоскости движение, представленное уравнениями

$$x = (g_2 - g_1)\tau + \beta_2 - \beta_1, \quad y = (g_3 - g_1)\tau + \beta_3 - \beta_1. \qquad (83)$$

Здесь τ измеряет время, и движение начинается в момент $\tau = \tau_0$. Точка w тогда движется по некоторой прямой Λ, направляющий коэффициент которой

$$\frac{g_3 - g_1}{g_2 - g_1} = \frac{1}{\rho}.$$

Поскольку $\pi - w_3 = w_1 + w_2 > w_2$, то $\frac{w_2}{\pi - w_3} < 1$. Как замечено уже ранее, $0 < \rho < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} > \frac{w_2}{\pi - w_3}. \qquad (84)$$

Поэтому прямая Λ удовлетворяет условиям, которые в § 15, A ограничивали выбор прямой L. Если в качестве прямой L мы выберем прямую Λ, то величинам μ и y_0 теперь будут соответствовать величины $1/\rho$ и b. Точка w выполняет свое движение таким образом, что она выходит из какой-либо точки на прямой Λ и движется так, что y неограниченно возрастает. Аналогично мы представляли себе движение точки w в § 15, A; поэтому начатое там исследование относится к случаю движения w, рассматриваемого нами теперь. Теорема, сформулированная в конце § 15, B, приводит к следующему результату: если с начала движения величина y получает положительное приращение Δy, то соответствующее приращение для φ,

* Произвольно близко к ρ_0 существуют, естественно, и такие числа $\rho_0 + \varepsilon$, что среднее движение существует, если $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$. Это следует уже из того обстоятельства, что рациональное число ρ всегда имеет следствием существование среднего движения.

с точностью до некоторого слагаемого, остающегося при неограниченном возрастании y между конечными границами, будет равно

$$2\pi\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right) + \Theta\Delta y. \tag{85}$$

При этом Θ означает 0, если ρ является иррациональным числом и, напротив, величину $\frac{h}{2\mathfrak{m}}$, если ρ рационально. Характеристическое число для

$$\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right)$$

в случае иррационального ρ равно ζ, для рационального ρ, однако, равно $\frac{H}{\mathfrak{n}}$.

Вид уравнений (80) теперь показывает, что $f(\tau)$ * есть одно из значений функции φ, соответствующих положению, занятому точкой w в момент τ. Если, далее, принять во внимание непрерывность функции $f(t)$, то получается $\Delta\varphi = f(\tau_0 + \Delta\tau) - f(\tau_0)$. Здесь $\Delta\varphi$ означает приращение, которое получила функция φ, когда точка w выполнила свое движение начиная с момента τ_0 до какого-либо более позднего момента $\tau_0 + \Delta\tau$. В последнем случае величина y получила приращение $\Delta y = (g_3 - g_1)\,\Delta\tau$; учитывая (85), мы можем, таким образом, записать

$$f(\tau_0 + \Delta\tau) - f(\tau_0) = 2\pi\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right) + \\ + \Theta(g_3 - g_1)\,\Delta\tau + \varepsilon, \tag{86}$$

где ε означает величину, остающуюся при неограниченном возрастании $\Delta\tau$ между конечными границами. Поскольку

$$f(\tau_0 + \Delta\tau) - f(\tau_0) = \chi(\tau_0 + \Delta\tau) - \chi(\tau_0) - g_1\Delta\tau,$$

то

$$\chi(\tau_0 + \Delta\tau) = 2\pi\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right) + \\ + (g_1 + (g_3 - g_1)\,\Theta)\,\Delta\tau + \eta. \tag{87}$$

Здесь η есть величина, остающаяся при неограниченном возрастании $\Delta\tau$ между конечными границами.

Согласно § 16, А существует

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty} \frac{\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right)}{g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)},$$

* См. конец § 17, А. Мы представляем себе, что выбрана определенная χ-функция.

именно, это предельное значение в случае иррационального ρ равно ζ, а в случае рационального ρ равно $\frac{H}{\mathfrak{n}}$. Далее

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty} \frac{g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)}{\tau_0 + \Delta\tau} = \frac{g_3 - g_1}{2\pi}.$$

Значит, существует

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty} \frac{\chi(\tau_0 + \Delta\tau)}{\tau_0 + \Delta\tau},$$

именно, это предельное значение для иррационального ρ равно

$$2\pi\zeta\frac{g_3 - g_1}{2\pi} + g_1 = \zeta(g_3 - g_1) + g_1 = \frac{1}{\pi}(g_1w_1 + g_2w_2 + g_3w_3),$$

а для рационального ρ —

$$2\pi\frac{H}{\mathfrak{n}}\cdot\frac{g_3 - g_1}{2\pi} + g_1 + (g_3 - g_1)\,\Theta = \frac{g_3 - g_1}{2\mathfrak{n}}(2H + h) + g_1.$$

Этим первая часть нашей теоремы доказана. Чтобы обосновать сказанное во второй части теоремы, сначала убедимся, что среднее движение существует или не существует, в зависимости от того, обладает ли функция $\Phi(\omega, \zeta, \rho, n)$ линейным характером или не обладает.

Мы, во-первых, получим некоторые следствия, основываясь на предположении, что среднее движение существует. В этом случае, как мы можем заключить на основании (87), имеется такая константа $\varkappa$, что

$$\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right) - \varkappa\Delta\tau \tag{88}$$

остается между конечными границами при беспредельном возрастании $\Delta\tau$. Отсюда следует, что при неограниченном возрастании $\Delta\tau$ также

$$\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right) - \varkappa_1 g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right) \tag{89}$$

остается между конечными границами, если только константа $\varkappa_1$ выбрана подходящей. Если рост $\Delta\tau$ начинается с достаточно малого положительного значения, то величина $g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)$ принимает при этом соответственно значения 1, 2, 3, 4, ... Из сказанного непосредственно следует, что $\Phi(\omega, \zeta, \rho, n)$ обладает линейным характером.

Во-вторых, мы придем к следствиям, которые примыкают к предположению, что $\Phi(\omega, \zeta, \rho, n)$ обладает линейным характером. В этом случае величина (89) остается при неограниченно возрастающем $\Delta\tau$ между конечными границами, если в приведенном выражении заменить $\varkappa_1$ надлежащим образом выбранной постоянной. То же самое относится и к выражению (88), если $\varkappa$ заменить подходящей постоянной. Приняв во внимание (87), легко получаем существование среднего движения.

Отсюда действительно становится ясно, что среднее движение существует или не существует, в зависимости от того, обладает ли функция $\Phi(\omega, \zeta, \rho, n)$ линейным характером или нет. Основываясь на этом результате и принимая во внимание замечания из § 16,A, убеждаемся в правильности второй части нашей теоремы.

§ 18

А. Если постоянные, входящие в выражения (76) из § 17,A и удовлетворяющие указанным там же условиям, определены на основе экспериментальных данных, то, согласно предыдущему, в общем случае нет возможности установить или исключить существование среднего движения. Именно, если мы нашли, что $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0$, то существующая неопределенность результатов наблюдений имеет большей частью своим следствием, что $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$ также являются допустимыми значениями, если только величина ε по абсолютному значению достаточно мала, в остальном же произвольна. Однако, согласно предыдущему, может быть выбрано такое ε, что среднее движение окажется существующим, но, с другой стороны, и такое, что среднего движения существовать не будет. Все же не исключена возможность, что предписания, согласно которым для выражения (70) определяются коэффициенты, позволяют решить вопрос о существовании или несуществовании среднего движения, исходя из теоретических соображений. Поэтому мы хотим исследовать рассмотренную проблему, встречающуюся в теории вековых возмущений, и в этом направлении. При этом мы придем к следующему результату.

Если составить уравнения (α) *или* (β) *из введения, для случая трех планет по предписаниям Лапласа на основе экспериментального материала, и если при этом постоянные* N_0, N_1, N_2 *и* M_0, M_1, M_2 *удовлетворяют соответственно условиям*

$$0 < 2|N_\mu| < |N_0| + |N_1| + |N_2|$$

и

$$0 < 2|M_\mu| < |M_0| + |M_1| + |M_2|,$$

то вопрос относительно существования среднего движения решить невозможно.

В. Пусть вокруг центрального тела с массой M вращаются в одну и ту же сторону планеты с массами m, m', m''. Большие полуоси пусть a, a'', a'', и при этом пусть $a < a' < a''$. Лаплас вводит

обозначения

$$(0, 1) = \frac{3m'na^2a'(a, a')'}{4(a'^2 - a^2)^2}, \tag{90}$$

$$\{0, 1\} = -\frac{3m'an((a^2 + a'^2)(a, a') + aa'(a, a'))}{2(a'^2 - a^2)^2}, \tag{91}$$

причем (a, a') и $(a, a')'$ получаются из разложения

$$(a^2 - 2aa'\cos\Theta + a'^2)^{1/2} = (a, a') + (a, a')'\cos\Theta + \\ + (a, a')''\cos 2\Theta + \ldots \tag{92}$$

и n^2 приравнивается числу M/a^3. Это влечет за собой утверждение, что величиной m по сравнению с M можно пренебречь. Аналогично определяются остальные лапласовы символы: (0,2), (1,0), (1,2) и т. д. Наконец, имеем

$$(\mu, \mu) = (\mu, 0) + (\mu, 1) + (\mu, 2), \tag{93}$$

причем надо принять, что $(\mu, \mu) = 0$. Тогда «вековые уравнения» принимают следующий вид:

$$\begin{vmatrix} u - [0, 0] & \{0, 1\} & \{0, 2\} \\ \{1, 0\} & u - [1, 1] & \{1, 2\} \\ \{2, 0\} & \{2, 1\} & u - [2, 2] \end{vmatrix} = 0, \tag{94}$$

$$\begin{vmatrix} -\omega - [0, 0] & (0, 1) & (0, 2) \\ (1, 0) & -\omega - [1, 1] & (1, 2) \\ (2, 0) & (2, 1) & -\omega - [2, 2] \end{vmatrix} = 0. \tag{95}$$

Каждое из этих уравнений имеет только действительные и отличные друг от друга корни *. Это утверждение остается справедливым и в том случае, если вместо m, m', m'' подставить положительные числа m_1, m_1', m_1''.

Если в левой части (94) m' и m'' заменить на $m'x$ и $m''x$, то получается выражение, которое мы обозначим через $G(u, x)$. Очевидна справедливость равенства

$$G(u, 0) = u(u - r_0)(u - s_0), \tag{96}$$

где положено

$$r_0 = -\frac{3m\sqrt{M}\sqrt{a'}\,a(a, a')'}{4(a^2 - a'^2)^2}, \quad s_0 = -\frac{3m\sqrt{M}\sqrt{a''}\,a(a, a'')'}{4(a^2 - a'^2)^2}. \tag{97}$$

Если в левой части (94) m и m'' заменить на my и $m''y$, то получится выражение, которое мы обозначим через $H(u, y)$.

---

* То, что корни между собой различны, доказал Зеелигер. См. Astron. Nachr., Nr. 2231. Далее, известно, что корни для (94) все положительны, в то время как среди корней для (95) положительных нет.

Справедливо равенство

$$H(u,\, 0) = u(u - r_1)(u - s_1), \tag{98}$$

где

$$r_1 = -\frac{3m'\sqrt{M}\sqrt{a''}a'\,(a',\, a'')'}{4\,(a'^2 - a''^2)^2}, \quad s_1 = -\frac{3m'\sqrt{M}\sqrt{a}a'\,(a,\, a')'}{4\,(a'^2 - a^2)^2}. \tag{99}$$

Если в левой части (94) m и m' заменить на mz и $m'z$, то получится выражение, которое мы обозначим через $K(u,\, z)$. Очевидно следующее равенство:

$$K(u,\, 0) = u(u - r_2)(u - s_2), \tag{100}$$

где

$$r_2 = -\frac{3m''\sqrt{M}\sqrt{a}a''\,(a,\, a'')'}{4\,(a''^2 - a^2)^2}, \quad s_2 = -\frac{3m''\sqrt{M}\sqrt{a'}a''\,(a',\, a'')'}{4\,(a''^2 - a'^2)^2}. \tag{101}$$

Согласно Лапласу, если $a < a'$ и если обозначить $a/a' = \alpha$, то

$$(a,\, a')' = -\frac{a'}{3}(1 - \alpha^2)^2\, b^{(1)}_{3/2}, \tag{102}$$

где $b^{(1)}_{3/2}$ надо вычислить по формуле

$$b^{(1)}_s = 2\alpha\left(s + s\cdot\frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{s(s+1)(s+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^4 + \dots\right). \tag{103}$$

Чтобы дать проявиться зависимости величины $b^{(1)}_{3/2}$ от величины α, всегда принадлежащей области $0 < \alpha < 1$, обозначим $b^{(1)}_{3/2} = f(\alpha)$. Из (103) следует, что $f(\alpha)$ больше нуля и растет с увеличением α. Имеем теперь, как легко увидеть,

$$\begin{gathered} r_0 = \frac{m\sqrt{M}a}{4\,(a')^{5/2}} f\left(\frac{a}{a'}\right), \quad s_0 = \frac{m\sqrt{M}a}{4\,(a'')^{5/2}} f\left(\frac{a}{a''}\right), \\ r_1 = \frac{m'\sqrt{M}a'}{4\,(a'')^{5/2}} f\left(\frac{a'}{a''}\right), \quad s_1 = \frac{m'\sqrt{M}\sqrt{a}}{4\,(a')^2} f\left(\frac{a}{a'}\right), \\ r_2 = \frac{m''\sqrt{M}\sqrt{a}}{4\,(a'')^2} f\left(\frac{a}{a''}\right), \quad s_2 = \frac{m''\sqrt{M}\sqrt{a'}}{4\,(a'')^2} f\left(\frac{a'}{a''}\right). \end{gathered} \tag{104}$$

Из сказанного следует

$$r_0 > s_0 > 0, \quad 0 < r_2 < s_2. \tag{105}$$

Три корня уравнения $G(u,\, x) = 0$ для значения x, удовлетворяющего условию $0 < x \leqslant 1$, обозначим через $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\chi_1(x)$. При этом обозначения пусть будут выбраны так, чтобы получилось $\varphi_1(x) < \psi_1(x) < \chi_1(x)$. Очевидны равенства

$$\lim_{x\to 0}\varphi_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\psi_1(x) = s_0, \quad \lim_{x\to 0}\chi_1(x) = r_0. \tag{106}$$

Три корня уравнения $K(u,\, z) = 0$ для значения z, удовлетворяющего условию $0 < z \leqslant 1$, обозначим через $\varphi_3(z)$, $\psi_3(z)$, $\chi_3(z)$. При этом обозначения пусть выбраны так, чтобы $\varphi_3(z) < \psi_3(z) < \chi_3(z)$. Тогда

$$\lim_{z\to 0}\varphi_3(z) = 0, \quad \lim_{z\to 0}\psi_3(z) = r_2, \quad \lim_{z\to 0}\chi_3(z) = s_2. \tag{107}$$

Три корня уравнения $H(u,\, y) = 0$ для y, удовлетворяющего условию $0 < y \leqslant 1$, обозначим через $\varphi_2(y)$, $\psi_2(y)$, $\chi_2(y)$. При этом обозначения пусть выбраны так, чтобы $\varphi_2(y) < \psi_2(y) < \chi_2(y)$. Тогда по крайней мере в одной из следующих двух строк равенства будут справедливыми:

$$\lim_{y\to 0}\varphi_2(y) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\psi_2(y) = r_1, \quad \lim_{y\to 0}\chi_2(y) = s_1; \tag{108}$$

$$\lim_{y\to 0}\varphi_2(y) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\psi_2(y) = s_1, \quad \lim_{y\to 0}\chi_2(y) = r_1. \tag{109}$$

Пусть корни уравнения (94) обозначаются через k_1, k_2, k_3, причем мы распорядимся этими обозначениями так, чтобы получилось $k_1 < k_2 < k_3$.

Как бы ни был сделан выбор трех интервалов из областей $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, для относящихся к этим интервалам значений x, y, z не могут иметь места одновременно равенства

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} = \frac{\psi_1(x) - \varphi_1(x)}{\chi_1(x) - \varphi_1(x)} = \frac{\psi_2(y) - \varphi_2(y)}{\chi_2(y) - \varphi_2(y)} = \frac{\psi_3(z) - \varphi_3(z)}{\chi_3(z) - \varphi_3(z)}. \tag{110}$$

Чтобы доказать правильность этого утверждения, предположим, что в одном случае оно не соответствует истине. Тогда равенства (110), как легко увидеть, должны быть верны для всех x, y, z, принадлежащих областям $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$, $0 < z \leqslant 1$. Пусть теперь переменные x, y, z сходятся к нулю. Убеждаемся, что должны быть справедливыми равенства по крайней мере в одной из двух строк:

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} = \frac{s_0}{r_0} = \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1}{s_1}, \tag{111}$$

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} = \frac{s_0}{r_0} = \frac{r_2}{s_2} = \frac{s_1}{r_1}. \tag{112}$$

Однако из $\frac{s_0}{r_0} = \frac{r_2}{s_2}$ с учетом (104) следует $r_1 = s_1$, что не согласуется ни с (111), ни с (112). Поэтому наше утверждение доказано.

Мы убеждаемся сейчас же без дальнейших пояснений в правильности следующего высказывания. *Можно задать таких три положительных числа μ, μ', μ'', что они будут отличаться от m, m', m'' произвольно мало и будут приводить к неравенству*

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} \neq \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}. \tag{113}$$

При этом u_1, u_2, u_3 означают корни уравнения (94) при замене m, m', m'' величинами μ, μ', μ''; и, именно, обозначения выбраны так, *чтобы получилось* $u_1 < u_2 < u_3$. *Пусть теперь в уравнении* (94) *буквы* m, m', m'' *заменены выражениями* $m + \vartheta(\mu - m)$, $m' + \vartheta(\mu' - m')$, $m'' + \vartheta(\mu'' - m'')$, *причем* $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, *и пусть три корня уравнения* (94) *обозначены через* ω_1, ω_2, ω_3 *таким образом, чтобы получилось* $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. *Тогда* ϑ *можно определить так, чтобы величина* $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}$ *получила одно из следующих значений:*

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}, \quad \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}.$$

С. Прежде чем пойти дальше, мы приведем некоторые результаты из «Небесной механики» Лапласа. Если обозначить через e, e', e'', ω, ω', ω'' эксцентриситеты и долготы перигелиев и положить

$$h = e\sin\omega, \quad h' = e'\sin\omega', \quad h'' = e''\sin\omega'',$$
$$l = e\cos\omega, \quad l' = e'\cos\omega', \quad l'' = e''\cos\omega'',$$

то получится

$$\begin{aligned} h &= N\sin(gt+\beta) + N_1\sin(g_1t+\beta_1) + N_2\sin(g_2t+\beta_2), \\ l &= N\cos(gt+\beta) + N_1\cos(g_1t+\beta_1) + N_2\cos(g_2t+\beta_2), \\ h' &= N'\sin(gt+\beta) + N_1'\sin(g_1t+\beta_1) + N_2'\sin(g_2t+\beta_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l'' &= N''\cos(gt+\beta) + N_1''\cos(g_1t+\beta_1) + N_2''\cos(g_2t+\beta_2). \end{aligned} \tag{114}$$

Здесь g, g_1, g_2 — различающиеся между собой действительные корни уравнения (94). Мы выберем обозначения так, чтобы $g < g_1 < g_2$. Взаимосвязи между N, N', N'' в дальнейшем определяются уравнениями

$$\begin{aligned} (g - [0,0])N + \{0,1\}N' + \{0,2\}N'' &= 0, \\ \{1,0\}N + (g - [1,1])N' + \{1,2\}N'' &= 0, \\ \{2,0\}N + \{2,1\}N' + (g - [2,2])N'' &= 0. \end{aligned} \tag{115}$$

Взаимосвязи между N_1, N_1', N_1'', а также между N_2, N_2', N_2'' проистекают из уравнений, образованных аналогично (115) и относящихся к корням g_1, g_2. Определение величин N, N_1, N_2, N', ..., N_2'', β, β_1, β_2 происходит с учетом только что сказанного на основе значений величин h, h', h'', l, l', l'' при $t = t_0$. Эта методика дает однозначно определенные значения величин

$$N\cos\beta, \quad N\sin\beta, \quad N_1\cos\beta_1, \quad N_1\sin\beta_1, \quad N_2\cos\beta_2, \quad N_2\sin\beta_2,$$
$$N'\cos\beta, \quad N'\sin\beta, \quad \dots, \quad N_2''\cos\beta_2, \quad N_2''\sin\beta_2.$$

Пусть теперь

$$\bar{a}, \ \bar{a}', \ \hat{h} + \delta h, \ \hat{h}' + \delta h', \ \hat{h}'' + \delta h'', \ \hat{l} + \delta l, \ \hat{l}' + \delta l',$$
$$\hat{l}'' + \delta l'', \ \bar{m} + \delta m, \ \bar{m}' + \delta m', \ \bar{m}'' + \delta m''$$

будут такими значениями величин a, a', a'', h, h', h'', l, l', l'', m, m', m'' при $t = t_0$, что в случае, если абсолютные значения величин δh, $\delta h'$, $\delta h''$, δl, $\delta l'$, $\delta l''$, δm, $\delta m'$, $\delta m''$ будут достаточно малы, предположим, меньше $d > 0$, их можно считать допустимыми по данным наблюдений. Пусть имеет место $\bar{a} < \bar{a}' < \bar{a}''$. Когда в дальнейшем о системе каких-либо значений говорится, что она допустима по наблюдениям, то всегда имеется в виду следующее. Значения, о которых идет речь, совместимы с предположением, что при $t = t_0$ справедливы равенства

$$a = \bar{a}, \ a' = \bar{a}', \ a'' = \bar{a}'', \ h = \hat{h} + \delta h_0, \ h' = \hat{h}' + \delta h_0',$$
$$h'' = \hat{h}'' + \delta h_0'', \quad l = \hat{l} + \delta l_0, \quad l' = \hat{l}' + \delta l_0', \quad l'' = \hat{l}'' + \delta l_0'',$$
$$m = \bar{m} + \delta m_0, \quad m' = \bar{m}' + \delta m_0', \quad m'' = \bar{m}'' + \delta m_0'',$$

если только значения величин

$$\delta h_0, \quad \delta h_0', \quad \delta h_0'', \quad \delta l_0, \quad \delta l_0', \quad \delta l_0'', \quad \delta m_0, \quad \delta m_0', \quad \delta m_0''$$

надлежащим образом выбираются так, что их абсолютные значения меньше d. Мы должны это обстоятельство особенно подчеркнуть, имея в виду дальнейшее. Корнями уравнения (94) при $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$, $m = \bar{m}$, $m' = \bar{m}''$, $m' = \bar{m}''$ пусть будут $\bar{g}$, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, причем обозначения выбраны так, что $\bar{g} < \bar{g}_1 < \bar{g}_2$. Наконец, пусть $\bar{N}$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{N}'$, $\bar{N}_1'$, $\bar{N}_2'$, $\bar{N}''$, $\bar{N}_1''$, $\bar{N}_2''$, $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$ — такие значения, что как уравнения (114), так и уравнения (115) и аналогичные им будут при $t = t_0$ удовлетворены следующими значениями соответствующих величин:

$$h = \hat{h}, \quad h' = \hat{h}', \ \dots, \ l'' = \hat{l}'', \quad g = \bar{g}, \quad g_1 = \bar{g}_1,$$
$$g_2 = \bar{g}_2, \quad \beta = \bar{\beta}, \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1, \quad \beta_2 = \bar{\beta}_2, \quad a = \bar{a}, \quad a' = \bar{a}',$$
$$a'' = \bar{a}'', \quad m = \bar{m}, \quad m' = \bar{m}', \quad m'' = \bar{m}'', \quad N = \bar{N}, \quad N_1 = \bar{N}_1, \ \dots,$$
$$N_2'' = \bar{N}_2''.$$

Предположим, что $\bar{N}$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 0 &< 2|\bar{N}| < |\bar{N}| + |\bar{N}_1| + |\bar{N}_2|, \\ 0 &< 2|\bar{N}_1| < |\bar{N}| + |\bar{N}_1| + |\bar{N}_2|, \\ 0 &< 2|\bar{N}_2| < |\bar{N}| + |\bar{N}_1| + |\bar{N}_2|. \end{aligned} \tag{116}$$

Пусть в левой части (94) $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$. Далее, пусть величина u заменена наибольшим корнем уравнения (94). Тогда не могут исчезнуть все миноры, соответствующие членам диагонали, идущей слева сверху, вниз вправо; в противном случае мы имели

1/2 15 3—3143