Мы положим

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{g}_1 - \bar{g}}{\bar{g}_2 - \bar{g}}, \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{\pi}(\bar{v}_2 + \rho\bar{v}_1), \tag{124}$$

где $\bar{g}$, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$ суть значения величин g, g_1, g_2 для $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$, $m = \bar{m}$, $m' = \bar{m}'$, $m'' = \bar{m}''$.

Согласно § 17 произвольно близко к $\bar{\rho}$ имеются такие числа $\bar{\rho} + \varepsilon$, что среднего движения не существует, если $\zeta = \bar{\zeta}$, $\rho = \bar{\rho} + \varepsilon$. Произвольно близко к $\bar{\rho}$ существуют, однако, и такие числа $\bar{\rho} + \eta$, что среднее движение существует, если $\zeta = \bar{\zeta}$, $\rho = \bar{\rho} + \eta$. Далее, согласно § 17, ясно, что возможно получить как $\varepsilon > 0$, так и $\varepsilon < 0$, соответственно, $\eta > 0$ и $\eta < 0$.

Сейчас мы воспользуемся результатом, сформулированным в конце п.В настоящего параграфа. Получаем, что можно выбрать положительные величины m_0, m_0', m_0'' так, чтобы имело место

$$|m_0 - m| < q, \quad |m_0' - m'| < q, \quad |m_0'' - m''| < q$$

и, далее, чтобы было

$$\frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} \neq \frac{\bar{g}_1 - \bar{g}}{\bar{g}_2 - \bar{g}},$$

если g^0, g_1^0, g_2^0 суть значения величин g, g_1, g_2 для $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$, $m = m_0$, $m' = m_0'$, $m'' = m_0''$. Далее можно определить m, m', m'' как положительные величины так, что они будут отличаться от $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$ менее чем на q и при этом величина $\frac{g_1 - g}{g_2 - g}$ примет одно из значений между

$$\frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} \text{ и } \frac{\bar{g}_1 - \bar{g}}{\bar{g}_2 - \bar{g}}.$$

Здесь g, g_1, g_2 вычисляются для $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$ и выбранных значений m, m', m''.

Теперь выберем ε' таким образом, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Если N, N_1, N_2 соответствуют условиям (121) и $\rho = \bar{\rho} + \varepsilon'$, $\zeta = \bar{\zeta}$, то среднее движение отсутствует.

2. ε' имеет тот же знак, что и

$$e = \frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g_0} - \frac{\bar{g}_1 - \bar{g}}{\bar{g}_2 - \bar{g}} = \frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} - \bar{\rho}.$$

3. Справедливы неравенства $|\varepsilon'| < |e|$, $|\varepsilon'| < \frac{\varkappa}{\bar{v}_1}$. Число $v' = \bar{v}_2 - \varepsilon' \cdot \bar{v}_1$ удовлетворяет условию $|v' - \bar{v}_2| < \varkappa$. Поэтому

величины ν, ν_1, ν_2 возможно * определить так, чтобы они удовлетворяли условиям

$$|\nu - \bar{N}| < q, \quad |\nu_1 - \bar{N}_1| < q, \quad |\nu_2 - \bar{N}_2| < q, \tag{125}$$

и в случае, если $N = \nu$, $N_1 = \nu_1$, $N_2 = \nu_2$, чтобы получилось

$$N = \bar{N}, \quad v_1 = \bar{v}_1, \quad v_2 = v'. \tag{126}$$

Очевидно, что $\bar{\rho} + \varepsilon'$ лежит, согласно предыдущему, между

$$\frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} \text{ и } \frac{\bar{g}_1 - \bar{g}}{\bar{g}_2 - \bar{g}}.$$

Поэтому, как было сказано выше, можно определить положительные величины M, M', M'' так, чтобы они отклонялись от $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$ менее чем на q и чтобы величина $\frac{g_1 - g}{g_2 - g}$ получила значение $\bar{\rho} + \varepsilon'$. При этом g, g_1, g_2 надо вычислить для $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$, $m = M$, $m' = M'$, $m'' = M''$.

Если положим теперь

$$N = \nu, \quad N_1 = \nu_1, \quad N_2 = \nu_2, \quad m = M, \quad m' = M', \quad m'' = M'',$$

то выбранные значения будут удовлетворять уравнениям (121) и тем самым они будут допустимы по наблюдениям. Из $|N|$, $|N_1|$, $|N_2|$ может быть построен собственный треугольник, и мы получаем для выбранного случая, в котором принимается

$$a = \bar{a}, a' = \bar{a}', \quad a'' = \bar{a}'', \text{ что } \rho = \bar{\rho} + \varepsilon', \quad \zeta = \frac{1}{\pi}(v' + (\bar{\rho} + \varepsilon')\bar{v}_1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\bar{v}_2 + \bar{\rho}\bar{v}_1) = \bar{\zeta}.$$

Поэтому для выбранного случая среднего движения не существует.

Совершенно аналогично доказывается, что *по наблюдениям допустим также случай, когда среднее движение существует.* Для этой цели достаточно в первом из трех пунктов, относящихся к ε', заменить слово «отсутствует» словом «имеется».

Если речь не идет, как в предыдущем, о линии апсид, а рассматривается вопрос о линии узлов, то тут будет достаточно суждений, полностью аналогичных приведенным, чтобы получить вывод соответствующего результата. Поэтому утверждение, высказанное в п.А настоящего параграфа, мы можем считать доказанным.

* См. замечание, содержащее уравнения (122).

1/2 + 15 3—3143

бы кратный корень, что противоречило бы сказанному выше. Если один из названных миноров для $m = \bar{m}$, $m' = \bar{m}'$, $m'' = \bar{m}''$ отличен от нуля, то он окажется отличным от нуля и для таких m, m', m'', которые достаточно мало отличаются от $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$. То же самое можно сказать, если u заменим не наибольшим, а наименьшим или средним корнем уравнения (94).

Теперь мы обратимся к уравнению (115) и заменим в нем $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$ *. Из уравнений (115) с учетом только что сказанного относительно m, m', m'', лежащих достаточно близко к $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$, следует

$$N = \gamma N^{(\nu)}, \quad N' = \gamma' N^{(\nu)}, \quad N'' = \gamma'' N^{(\nu)}. \tag{117}$$

Здесь $N^{(\nu)}$ есть одна из величин N, N', N'', одинаковая для всех рассматриваемых m, m', m''. γ, γ', γ'' суть непрерывные функции от m, m', m''. Для $m = \bar{m}$, $m' = \bar{m}'$, $m'' = \bar{m}''$ величина γ должна отличаться от нуля, так как $\bar{N}$ отлична от нуля. Отсюда следует, что

$$N' = \left\{\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}\right\} \cdot N, \quad N'' = \left\{\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}\right\} \cdot N. \tag{118}$$

При этом $\left\{\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}\right\}$ и $\left\{\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}\right\}$ суть непрерывные функции величин m, m', m''. Эти функции определены для m, m', m'', лежащих достаточно близко к $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$, и для $m = \bar{m}$, $m' = \bar{m}'$, $m'' = \bar{m}''$ сводятся к $\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}$ и $\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}$. Уравнения (118) оказываются справедливыми всегда, когда справедливы уравнения (115) **. Поэтому любое решение уравнений (115) может быть представлено в виде

$$N = c, \quad N' = \left\{\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}\right\} c, \quad N'' = \left\{\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}\right\} c. \tag{119}$$

Но поскольку (115) обладает бесконечным множеством отличных друг от друга решений, то очевидно, что (119) всегда представляет собой решение, какой бы ни была выбрана величина c.

Совершенно аналогичное можно сказать относительно уравнений, соответствующих (115).

В правых сторонах (114) производим замену: $t = t_0$, $\beta = \bar{\beta}$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2$. Далее, пусть g_1, g_2, g_3 вычисляются для $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$. В качестве N', N'', N_1', N_1'', N_2', N_2'' возьмем

* Эти частные значения a, a', a'' следует брать для определения g.

** При этом $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$ и следует ограничиться значениями m, m', m'', лежащими достаточно близко к $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$.

величины

$$\left\{\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}\right\} N, \quad \left\{\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}\right\} N, \quad \left\{\frac{\bar{N}_1'}{\bar{N}_1}\right\} N_1, \quad \left\{\frac{\bar{N}_1''}{\bar{N}_1}\right\} N_1, \quad \left\{\frac{\bar{N}_2'}{\bar{N}_2}\right\} N_2, \quad \left\{\frac{\bar{N}_2''}{\bar{N}_2}\right\} N_2, \tag{120}$$

ограничиваясь значениями величин m, m', m'', взятыми из некоторой окрестности точки $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$. В таком случае уравнения (115) и аналогичные им будут удовлетворены. Величины (120) можно сделать сколь угодно близкими к $\bar{N}'$, $\bar{N}''$, $\bar{N}_1'$, $\bar{N}_1''$, $\bar{N}_2'$, $\bar{N}_2''$, если выбрать величины m, m', m'', N, N_1, N_2 достаточно близко к $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$, $\bar{N}$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, поэтому таким же самым способом можно сделать правые части (114) сколь угодно близкими к значениям h, l, h', l', h'', l''. *Отсюда становится ясно, что все N, N_1, N_2, m, m', m'' допустимы по наблюдениям, коль скоро названные величины лежат достаточно близко к $\bar{N}$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{m}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$.*

D. Согласно только что сказанному имеется возможность задать такое положительное число q, чтобы имело место следующее. Все N, N_1, N_2, m, m', m'', удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} |N - \bar{N}| < q, \quad |N_1 - \bar{N}_1| < q, \quad |N_2 - \bar{N}_2| < q, \\ |m - \bar{m}| < q, \quad |m' - \bar{m}'| < q, \quad |m'' - \bar{m}''| < q, \end{gathered} \tag{121}$$

допустимы по наблюдениям. Если N, N_1, N_2 удовлетворяют условиям (121), то из $|N|$, $|N_1|$, $|N_2|$ можно построить собственный треугольник.

В тех случаях, когда из $|N|$, $|N_1|$, $|N_2|$ можно построить треугольник, мы обозначим через v_1 и v_2 углы, противолежащие сторонам $|N_1|$ и $|N_2|$. Для $N = \bar{N}$, $N_1 = \bar{N}_1$, $N_2 = \bar{N}_2$ пусть $v_1 = \bar{v}_1$ и $v_2 = \bar{v}_2$. Если положительное число $\varkappa$ выбрано достаточно малым, то очевидна справедливость следующего высказывания. Если v — какое-либо число, удовлетворяющее условию $|v - \bar{v}_2| < \varkappa$, то величины N, N_1, N_2 можно определить так, что они станут удовлетворять условиям (121) и при этом получится

$$N = \bar{N}, \quad v_1 = \bar{v}_1, \quad v_2 = \bar{v}_2. \tag{122}$$

Согласно § 17 вопрос о существовании среднего движения линии апсид для той планеты, к которой относятся e и ω, зависит в случае, если N, N_1, N_2 выбраны, согласно условиям (121), только от величин

$$\rho = \frac{g_1 - g}{g_2 - g}, \quad \zeta = \frac{1}{\pi}(v_2 + \rho v_1). \tag{123}$$

чтобы получилось $u_1 < u_2 < u_3$. *Пусть теперь в уравнении* (94) *буквы* m, m', m'' *заменены выражениями* $m + \vartheta(\mu - m)$, $m' + \vartheta(\mu' - m')$, $m'' + \vartheta(\mu'' - m'')$, *причем* $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, *и пусть три корня уравнения* (94) *обозначены через* ω_1, ω_2, ω_3 *таким образом, чтобы получилось* $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. *Тогда* ϑ *можно определить так, чтобы величина* $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}$ *получила одно из следующих значений:*

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}, \quad \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}.$$

C. Прежде чем пойти дальше, мы приведем некоторые результаты из «Небесной механики» Лапласа. Если обозначить через e, e', e'', ω, ω', ω'' эксцентриситеты и долготы перигелиев и положить

$$h = e \sin \omega, \quad h' = e' \sin \omega', \quad h'' = e'' \sin \omega'',$$
$$l = e \cos \omega, \quad l' = e' \cos \omega', \quad l'' = e'' \cos \omega'',$$

то получится

$$\begin{aligned} h &= N \sin(gt + \beta) + N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2), \\ l &= N \cos(gt + \beta) + N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2), \\ h' &= N' \sin(gt + \beta) + N_1' \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2' \sin(g_2 t + \beta_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l'' &= N'' \cos(gt + \beta) + N_1'' \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2'' \cos(g_2 t + \beta_2). \end{aligned} \tag{114}$$

Здесь g, g_1, g_2 — различающиеся между собой действительные корни уравнения (94). Мы выберем обозначения так, чтобы $g < g_1 < g_2$. Взаимосвязи между N, N', N'' в дальнейшем определяются уравнениями

$$\begin{aligned} (g - [0, 0])N + \{0, 1\} N' + \{0, 2\} N'' &= 0, \\ \{1, 0\} N + (g - [1, 1])N' + \{1, 2\} N'' &= 0, \\ \{2, 0\} N + \{2, 1\} N' + (g - [2, 2])N'' &= 0. \end{aligned} \tag{115}$$

Взаимосвязи между N_1, N_1', N_1'', а также между N_2, N_2', N_2'' проистекают из уравнений, образованных аналогично (115) и относящихся к корням g_1, g_2. Определение величин N, N_1, N_2, N', ..., N_2'', β, β_1, β_2 происходит с учетом только что сказанного на основе значений величин h, h', h'', l, l', l'' при $t = t_0$. Эта методика дает однозначно определенные значения величин

$$N \cos \beta, \quad N \sin \beta, \quad N_1 \cos \beta_1, \quad N_1 \sin \beta_1, \quad N_2 \cos \beta_2, \quad N_2 \sin \beta_2,$$
$$N' \cos \beta, \quad N' \sin \beta, \quad \dots, \quad N_2'' \cos \beta_2, \quad N_2'' \sin \beta_2.$$

Пусть теперь

$$\bar{a}, \ \bar{a}', \ \hat{h} + \delta h, \ \hat{h}' + \delta h', \ \hat{h}'' + \delta h'', \ \hat{l} + \delta l, \ \hat{l}' + \delta l',$$
$$\hat{l}'' + \delta l'', \ \bar{m} + \delta m, \ \bar{m}' + \delta m', \ \bar{m}'' + \delta m''$$

будут такими значениями величин a, a', a'', h, h', h'', l, l', l'', m, m', m'' при $t = t_0$, что в случае, если абсолютные значения величин δh, $\delta h'$, $\delta h''$, δl, $\delta l'$, $\delta l''$, δm, $\delta m'$, $\delta m''$ будут достаточно малы, предположим, меньше $d > 0$, их можно считать допустимыми по данным наблюдений. Пусть имеет место $\bar{a} < \bar{a}' < \bar{a}''$. Когда в дальнейшем о системе каких-либо значений говорится, что она допустима по наблюдениям, то всегда имеется в виду следующее. Значения, о которых идет речь, совместимы с предположением, что при $t = t_0$ справедливы равенства

$$a = \bar{a}, \ a' = \bar{a}', \ a'' = \bar{a}'', \ h = \hat{h} + \delta h_0, \ h' = \hat{h}' + \delta h_0',$$
$$h'' = \hat{h}'' + \delta h_0'', \quad l = \hat{l} + \delta l_0, \quad l' = \hat{l}' + \delta l_0', \quad l'' = \hat{l}'' + \delta l_0'',$$
$$m = \bar{m} + \delta m_0, \quad m' = \bar{m}' + \delta m_0', \quad m'' = \bar{m}'' + \delta m_0'',$$

если только значения величин

$$\delta h_0, \quad \delta h_0', \quad \delta h_0'', \quad \delta l_0, \quad \delta l_0', \quad \delta l_0'', \quad \delta m_0, \quad \delta m_0', \quad \delta m_0''$$

надлежащим образом выбираются так, что их абсолютные значения меньше d. Мы должны это обстоятельство особенно подчеркнуть, имея в виду дальнейшее. Корнями уравнения (94) при $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$, $m = \bar{m}$, $m' = \bar{m}''$, $m' = \bar{m}''$ пусть будут $\bar{g}$, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, причем обозначения выбраны так, что $\bar{g} < \bar{g}_1 < \bar{g}_2$. Наконец, пусть $\bar{N}$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{N}'$, $\bar{N}_1'$, $\bar{N}_2'$, $\bar{N}''$, $\bar{N}_1''$, $\bar{N}_2''$, $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}_1$, $\bar{\beta}_2$ — такие значения, что как уравнения (114), так и уравнения (115) и аналогичные им будут при $t = t_0$ удовлетворены следующими значениями соответствующих величин:

$$h = \hat{h}, \quad h' = \hat{h}', \quad \dots, \quad l'' = \hat{l}'', \quad g = \bar{g}, \quad g_1 = \bar{g}_1,$$
$$g_2 = \bar{g}_2, \quad \beta = \bar{\beta}, \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1, \quad \beta_2 = \bar{\beta}_2, \quad a = \bar{a}, \quad a' = \bar{a}',$$
$$a'' = \bar{a}'', \quad m = \bar{m}, \quad m' = \bar{m}', \quad m'' = \bar{m}'', \quad N = \bar{N}, \quad N_1 = \bar{N}_1, \quad \dots,$$
$$N_2'' = \bar{N}_2''.$$

Предположим, что $\bar{N}$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 0 &< 2|\bar{N}| < |\bar{N}| + |\bar{N}_1| + |\bar{N}_2|, \\ 0 &< 2|\bar{N}_1| < |\bar{N}| + |\bar{N}_1| + |\bar{N}_2|, \\ 0 &< 2|\bar{N}_2| < |\bar{N}| + |\bar{N}_1| + |\bar{N}_2|. \end{aligned} \tag{116}$$

Пусть в левой части (94) $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$. Далее, пусть величина u заменена наибольшим корнем уравнения (94). Тогда не могут исчезнуть все миноры, соответствующие членам диагонали, идущей слева сверху, вниз вправо; в противном случае мы имели

Справедливо равенство

$$H(u, 0) = u(u - r_1)(u - s_1), \tag{98}$$

где

$$r_1 = -\frac{3m'\sqrt{M}\sqrt{a''}a'(a', a'')'}{4(a'^2 - a''^2)^2}, \quad s_1 = -\frac{3m'\sqrt{M}\sqrt{a}a'(a, a')'}{4(a'^2 - a^2)^2}. \tag{99}$$

Если в левой части (94) m и m' заменить на mz и $m'z$, то получится выражение, которое мы обозначим через $K(u, z)$. Очевидно следующее равенство:

$$K(u, 0) = u(u - r_2)(u - s_2), \tag{100}$$

где

$$r_2 = -\frac{3m''\sqrt{M}\sqrt{a}a''(a, a'')'}{4(a''^2 - a^2)^2}, \quad s_2 = -\frac{3m''\sqrt{M}\sqrt{a'}a''(a', a'')'}{4(a''^2 - a'^2)^2}. \tag{101}$$

Согласно Лапласу, если $a < a'$ и если обозначить $a/a' = \alpha$, то

$$(a, a')' = -\frac{a'}{3}(1 - \alpha^2)^2 b^{(1)}_{3/2}, \tag{102}$$

где $b^{(1)}_{3/2}$ надо вычислить по формуле

$$b^{(1)}_s = 2\alpha\left(s + s \cdot \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{s(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^4 + \ldots\right). \tag{103}$$

Чтобы дать проявиться зависимости величины $b^{(1)}_{3/2}$ от величины α, всегда принадлежащей области $0 < \alpha < 1$, обозначим $b^{(1)}_{3/2} = f(\alpha)$. Из (103) следует, что $f(\alpha)$ больше нуля и растет с увеличением α. Имеем теперь, как легко увидеть,

$$r_0 = \frac{m\sqrt{M}a}{4(a')^{5/2}} f\left(\frac{a}{a'}\right), \quad s_0 = \frac{m\sqrt{M}a}{4(a'')^{5/2}} f\left(\frac{a}{a''}\right),$$

$$r_1 = \frac{m'\sqrt{M}a'}{4(a'')^{5/2}} f\left(\frac{a'}{a''}\right), \quad s_1 = \frac{m'\sqrt{M}\sqrt{a}}{4(a')^2} f\left(\frac{a}{a'}\right), \tag{104}$$

$$r_2 = \frac{m''\sqrt{M}\sqrt{a}}{4(a'')^2} f\left(\frac{a}{a''}\right), \quad s_2 = \frac{m''\sqrt{M}\sqrt{a'}}{4(a'')^2} f\left(\frac{a'}{a''}\right).$$

Из сказанного следует

$$r_0 > s_0 > 0, \quad 0 < r_2 < s_2. \tag{105}$$

Три корня уравнения $G(u, x) = 0$ для значения x, удовлетворяющего условию $0 < x \leqslant 1$, обозначим через $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\chi_1(x)$. При этом обозначения пусть будут выбраны так, чтобы получилось $\varphi_1(x) < \psi_1(x) < \chi_1(x)$. Очевидны равенства

$$\lim_{x\to 0}\varphi_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\psi_1(x) = s_0, \quad \lim_{x\to 0}\chi_1(x) = r_0. \tag{106}$$

Три корня уравнения $K(u, z) = 0$ для значения z, удовлетворяющего условию $0 < z \leqslant 1$, обозначим через $\varphi_3(z)$, $\psi_3(z)$, $\chi_3(z)$. При

этом обозначения пусть выбраны так, чтобы $\varphi_3(z) < \psi_3(z) < \chi_3(z)$. Тогда

$$\lim_{z\to 0}\varphi_3(z) = 0, \quad \lim_{z\to 0}\psi_3(z) = r_2, \quad \lim_{z\to 0}\chi_3(z) = s_2. \tag{107}$$

Три корня уравнения $H(u, y) = 0$ для y, удовлетворяющего условию $0 < y \leqslant 1$, обозначим через $\varphi_2(y)$, $\psi_2(y)$, $\chi_2(y)$. При этом обозначения пусть выбраны так, чтобы $\varphi_2(y) < \psi_2(y) < \chi_2(y)$. Тогда по крайней мере в одной из следующих двух строк равенства будут справедливыми:

$$\lim_{y\to 0}\varphi_2(y) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\psi_2(y) = r_1, \quad \lim_{y\to 0}\chi_2(y) = s_1; \tag{108}$$

$$\lim_{y\to 0}\varphi_2(y) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\psi_2(y) = s_1, \quad \lim_{y\to 0}\chi_2(y) = r_1. \tag{109}$$

Пусть корни уравнения (94) обозначаются через k_1, k_2, k_3, причем мы распорядимся этими обозначениями так, чтобы получилось $k_1 < k_2 < k_3$.

Как бы ни был сделан выбор трех интервалов из областей $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, для относящихся к этим интервалам значений x, y, z не могут иметь места одновременно равенства

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} = \frac{\psi_1(x) - \varphi_1(x)}{\chi_1(x) - \varphi_1(x)} = \frac{\psi_2(y) - \varphi_2(y)}{\chi_2(y) - \varphi_2(y)} = \frac{\psi_3(z) - \varphi_3(z)}{\chi_3(z) - \varphi_3(z)}. \tag{110}$$

Чтобы доказать правильность этого утверждения, предположим, что в одном случае оно не соответствует истине. Тогда равенства (110), как легко увидеть, должны быть верны для всех x, y, z, принадлежащих областям $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$, $0 < z \leqslant 1$. Пусть теперь переменные x, y, z сходятся к нулю. Убеждаемся, что должны быть справедливыми равенства по крайней мере в одной из двух строк:

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} = \frac{s_0}{r_0} = \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1}{s_1}, \tag{111}$$

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} = \frac{s_0}{r_0} = \frac{r_2}{s_2} = \frac{s_1}{r_1}. \tag{112}$$

Однако из $\frac{s_0}{r_0} = \frac{r_2}{s_2}$ с учетом (104) следует $r_1 = s_1$, что не согласуется ни с (111), ни с (112). Поэтому наше утверждение доказано.

Мы убеждаемся сейчас же без дальнейших пояснений в правильности следующего высказывания. *Можно задать таких три положительных числа μ, μ', μ'', что они будут отличаться от m, m', m'' произвольно мало и будут приводить к неравенству*

$$\frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} \neq \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}. \tag{113}$$

При этом u_1, u_2, u_3 означают корни уравнения (94) при замене m, m', m'' величинами μ, μ', μ''; и, именно, обозначения выбраны так, заменить $\varkappa_1$ надлежащим образом выбранной постоянной. То же самое относится и к выражению (88), если $\varkappa$ заменить подходящей постоянной. Приняв во внимание (87), легко получаем существование среднего движения.

Отсюда действительно становится ясно, что среднее движение существует или не существует, в зависимости от того, обладает ли функция $\Phi(\omega, \zeta, \rho, n)$ линейным характером или нет. Основываясь на этом результате и принимая во внимание замечания из § 16,A, убеждаемся в правильности второй части нашей теоремы.

§ 18

A. Если постоянные, входящие в выражения (76) из § 17,A и удовлетворяющие указанным там же условиям, определены на основе экспериментальных данных, то, согласно предыдущему, в общем случае нет возможности установить или исключить существование среднего движения. Именно, если мы нашли, что $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0$, то существующая неопределенность результатов наблюдений имеет большей частью своим следствием, что $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$ также являются допустимыми значениями, если только величина ε по абсолютному значению достаточно мала, в остальном же произвольна. Однако, согласно предыдущему, может быть выбрано такое ε, что среднее движение окажется существующим, но, с другой стороны, и такое, что среднего движения существовать не будет. Все же не исключена возможность, что предписания, согласно которым для выражения (70) определяются коэффициенты, позволяют решить вопрос о существовании или несуществовании среднего движения, исходя из теоретических соображений. Поэтому мы хотим исследовать рассмотренную проблему, встречающуюся в теории вековых возмущений, и в этом направлении. При этом мы придем к следующему результату.

Если составить уравнения (α) *или* (β) *из введения, для случая трех планет по предписаниям Лапласа на основе экспериментального материала, и если при этом постоянные* N_0, N_1, N_2 *и* M_0, M_1, M_2 *удовлетворяют соответственно условиям*

$$0 < 2|N_\mu| < |N_0| + |N_1| + |N_2|$$

и

$$0 < 2|M_\mu| < |M_0| + |M_1| + |M_2|,$$

то вопрос относительно существования среднего движения решить невозможно.

B. Пусть вокруг центрального тела с массой M вращаются в одну и ту же сторону планеты с массами m, m', m''. Большие полуоси пусть a, a'', a'', и при этом пусть $a < a' < a''$. Лаплас вводит

обозначения

$$(0, 1) = \frac{3m' n a^2 a' (a, a')'}{4(a'^2 - a^2)^2}, \tag{90}$$

$$\{0, 1\} = -\frac{3m' a n ((a^2 + a'^2)(a, a') + a a' (a, a'))}{2(a'^2 - a^2)^2}, \tag{91}$$

причем (a, a') и $(a, a')'$ получаются из разложения

$$(a^2 - 2aa' \cos\Theta + a'^2)^{1/2} = (a, a') + (a, a')' \cos\Theta + \\ + (a, a')'' \cos 2\Theta + \ldots \tag{92}$$

и n^2 приравнивается числу M/a^3. Это влечет за собой утверждение, что величиной m по сравнению с M можно пренебречь. Аналогично определяются остальные лапласовы символы: (0,2), (1,0), (1,2) и т. д. Наконец, имеем

$$(\mu, \mu) = (\mu, 0) + (\mu, 1) + (\mu, 2), \tag{93}$$

причем надо принять, что $(\mu, \mu) = 0$. Тогда «вековые уравнения» принимают следующий вид:

$$\begin{vmatrix} u - [0, 0] & \{0, 1\} & \{0, 2\} \\ \{1, 0\} & u - [1, 1] & \{1, 2\} \\ \{2, 0\} & \{2, 1\} & u - [2, 2] \end{vmatrix} = 0, \tag{94}$$

$$\begin{vmatrix} -\omega - [0, 0] & (0, 1) & (0, 2) \\ (1, 0) & -\omega - [1, 1] & (1, 2) \\ (2, 0) & (2, 1) & -\omega - [2, 2] \end{vmatrix} = 0. \tag{95}$$

Каждое из этих уравнений имеет только действительные и отличные друг от друга корни *. Это утверждение остается справедливым и в том случае, если вместо m, m', m'' подставить положительные числа m_1, m_1', m_1''.

Если в левой части (94) m' и m'' заменить на $m'x$ и $m''x$, то получается выражение, которое мы обозначим через $G(u, x)$. Очевидна справедливость равенства

$$G(u, 0) = u(u - r_0)(u - s_0), \tag{96}$$

где положено

$$r_0 = -\frac{3m\sqrt{M}\sqrt{a'}\,a(a, a')'}{4(a^2 - a'^2)^2}, \quad s_0 = -\frac{3m\sqrt{M}\sqrt{a''}\,a(a, a'')'}{4(a^2 - a'^2)^2}. \tag{97}$$

Если в левой части (94) m и m'' заменить на my и $m''y$, то получится выражение, которое мы обозначим через $H(u, y)$.

* То, что корни между собой различны, доказал Зеелигер. См. Astron. Nachr., Nr. 2231. Далее, известно, что корни для (94) все положительны, в то время как среди корней для (95) положительных нет.

с точностью до некоторого слагаемого, остающегося при неограниченном возрастании y между конечными границами, будет равно

$$2\pi\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right) + \Theta\Delta y. \qquad (85)$$

При этом Θ означает 0, если ρ является иррациональным числом и, напротив, величину $\frac{h}{2\mathfrak{m}}$, если ρ рационально. Характеристическое число для

$$\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right)$$

в случае иррационального ρ равно ζ, для рационального ρ, однако, равно $\frac{H}{\mathfrak{n}}$.

Вид уравнений (80) теперь показывает, что $f(\tau)$ * есть одно из значений функции φ, соответствующих положению, занятому точкой w в момент τ. Если, далее, принять во внимание непрерывность функции $f(t)$, то получается $\Delta\varphi = f(\tau_0 + \Delta\tau) - f(\tau_0)$. Здесь $\Delta\varphi$ означает приращение, которое получила функция φ, когда точка w выполнила свое движение начиная с момента τ_0 до какого-либо более позднего момента $\tau_0 + \Delta\tau$. В последнем случае величина y получила приращение $\Delta y = (g_3 - g_1)\ \Delta\tau$; учитывая (85), мы можем, таким образом, записать

$$f(\tau_0 + \Delta\tau) - f(\tau_0) = 2\pi\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right) + \\ + \Theta(g_3 - g_1)\Delta\tau + \varepsilon, \qquad (86)$$

где ε означает величину, остающуюся при неограниченном возрастании $\Delta\tau$ между конечными границами. Поскольку

$$f(\tau_0 + \Delta\tau) - f(\tau_0) = \chi(\tau_0 + \Delta\tau) - \chi(\tau_0) - g_1\Delta\tau,$$

то

$$\chi(\tau_0 + \Delta\tau) = 2\pi\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right) + \\ + (g_1 + (g_3 - g_1)\Theta)\Delta\tau + \eta. \qquad (87)$$

Здесь η есть величина, остающаяся при неограниченном возрастании $\Delta\tau$ между конечными границами.

Согласно § 16, A существует

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty} \frac{\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right)}{g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)},$$

* См. конец § 17, A. Мы представляем себе, что выбрана определенная χ-функция.

именно, это предельное значение в случае иррационального ρ равно ζ, а в случае рационального ρ равно $\frac{H}{\mathfrak{n}}$. Далее

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty} \frac{g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)}{\tau_0 + \Delta\tau} = \frac{g_3 - g_1}{2\pi}.$$

Значит, существует

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty} \frac{\chi(\tau_0 + \Delta\tau)}{\tau_0 + \Delta\tau},$$

именно, это предельное значение для иррационального ρ равно

$$2\pi\zeta\frac{g_3 - g_1}{2\pi} + g_1 = \zeta(g_3 - g_1) + g_1 = \frac{1}{\pi}(g_1 w_1 + g_2 w_2 + g_3 w_3),$$

а для рационального ρ —

$$2\pi\frac{H}{\mathfrak{n}}\cdot\frac{g_3 - g_1}{2\pi} + g_1 + (g_3 - g_1)\Theta = \frac{g_3 - g_1}{2\mathfrak{n}}(2H + h) + g_1.$$

Этим первая часть нашей теоремы доказана. Чтобы обосновать сказанное во второй части теоремы, сначала убедимся, что среднее движение существует или не существует, в зависимости от того, обладает ли функция $\Phi(\omega, \zeta, \rho, n)$ линейным характером или не обладает.

Мы, во-первых, получим некоторые следствия, основываясь на предположении, что среднее движение существует. В этом случае, как мы можем заключить на основании (87), имеется такая константа $\varkappa$, что

$$\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right) - \varkappa\Delta\tau \qquad (88)$$

остается между конечными границами при беспредельном возрастании $\Delta\tau$. Отсюда следует, что при неограниченном возрастании $\Delta\tau$ также

$$\Phi\left(\omega, \zeta, \rho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)\right) - \varkappa_1 g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right) \qquad (89)$$

остается между конечными границами, если только константа $\varkappa_1$ выбрана подходящей. Если рост $\Delta\tau$ начинается с достаточно малого положительного значения, то величина $g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi}\Delta\tau\right)$ принимает при этом соответственно значения 1, 2, 3, 4, ... Из сказанного непосредственно следует, что $\Phi(\omega, \zeta, \rho, n)$ обладает линейным характером.

Во-вторых, мы придем к следствиям, которые примыкают к предположению, что $\Phi(\omega, \zeta, \rho, n)$ обладает линейным характером. В этом случае величина (89) остается при неограниченно возрастающем $\Delta\tau$ между конечными границами, если в приведенном выражении неограниченно возрастающем t разность $\chi - kt$ остается между конечными границами, то же будет в силе для всех χ-функций, и k будет их характеристическим числом. В этом случае мы скажем, согласно § 4, что существует среднее движение, и будем называть k константой среднего движения. Эта константа, как только что было сказано, равна характеристическому числу. Мы вскоре увидим, что среднее движение существует отнюдь не всегда.

Наконец, заметим, что из уравнений (79) следуют новые уравнения

$$v \cos f = A_1 + A_2 \cos((g_2 - g_1)t + \beta_2 - \beta_1) + \\ + A_3 \cos((g_3 - g_1)t + \beta_3 - \beta_1), \tag{80}$$

$$v \sin f = A_2 \sin((g_2 - g_1)t + \beta_2 - \beta_1) + A_3 \sin((g_3 - g_1)t + \beta_3 - \beta_1),$$

в которых для краткости произведена замена $f = \chi - gt - \beta_1$.

В. Теперь сформулируем теорему, в которой даны главные результаты этой работы. Сначала введем некоторые обозначения. Из трех отрезков длиной A_1, A_2, A_3 мы составляем треугольник и обозначаем углы, противолежащие сторонам длины A_1, A_2, A_3, соответственно через w_1, w_2, w_3. Далее вводим обозначения

$$\rho = \frac{g_2 - g_1}{g_3 - g_1}, \quad \zeta = \frac{1}{\pi}(w_3 + \rho w_2),$$

$$b = \beta_3 - \beta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\rho}, \quad \omega = \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi\zeta + (b + \pi)\rho).$$

Очевидно, что всегда $0 < \rho < 1$, $0 < \zeta < 1$. С другой стороны, если каким-либо образом выбрать числа ρ', ζ', удовлетворяющие неравенствам $0 < \rho' < 1$, $0 < \zeta' < 1$, то могут быть определены такие числа A_1, A_2, A_3, g_1, g_2, g_3, что они станут удовлетворять условиям, приведенным в начале § 17, А, и представлять собой значения $\rho = \rho'$, $\zeta = \zeta'$.

В случае, когда ρ является рациональным числом, мы станем употреблять еще следующие обозначения. Мы пишем $\rho = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — положительные целые числа, не имеющие общего делителя. Далее мы обозначим буквой H количество целых чисел, лежащих между $\mathfrak{n}\omega$ и $\mathfrak{n}(\omega + \zeta)$, и буквой h — количество совпадающих с $\mathfrak{n}\omega$ или $\mathfrak{n}(\omega + \zeta)$ целых чисел.

Выражение $\frac{\chi(t)}{t}$, когда t неограниченно возрастает, стремится к конечной границе, так что всегда существует характеристическое число. Последнее, если ρ представляет собой иррациональное число, равно

$$\zeta(g_3 - g_1) + g_1 = \frac{1}{\pi}(g_1 w_1 + g_2 w_2 + g_3 w_3), \tag{81}$$

в случае же, если ρ представляет собой рациональное число, равно

$$\frac{g_3 - g_1}{2\mathfrak{n}}(h + 2H) + g_1. \tag{82}$$

Что касается вопроса о существовании среднего движения, то ответ на него зависит только от величин ρ и ζ. В частности, среднее движение всегда существует, если число является рациональным. Если положительные величины ρ_0 и ζ_0 меньше 1, а в других отношениях выбраны произвольно, то произвольно близко к ρ_0 имеются такие числа $\rho_0 + \varepsilon$, что среднего движения не существует, когда $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$.*

При доказательстве этой теоремы мы основываемся на результатах, полученных в данной главе до сих пор, в особенности на исследованиях, начатых в § 15. Мы положим $A = A_1$, $B = A_2$, $C = A_3$; тогда A, B, C станут удовлетворять указанным условиям, и мы имеем $\beta = w_2$, $\gamma = w_3$.

Пусть теперь точка w выполняет в ее плоскости движение, представленное уравнениями

$$x = (g_2 - g_1)\tau + \beta_2 - \beta_1, \quad y = (g_3 - g_1)\tau + \beta_3 - \beta_1. \tag{83}$$

Здесь τ измеряет время, и движение начинается в момент $\tau = \tau_0$. Точка w тогда движется по некоторой прямой Λ, направляющий коэффициент которой

$$\frac{g_3 - g_1}{g_2 - g_1} = \frac{1}{\rho}.$$

Поскольку $\pi - w_3 = w_1 + w_2 > w_2$, то $\frac{w_2}{\pi - w_3} < 1$. Как замечено уже ранее, $0 < \rho < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} > \frac{w_2}{\pi - w_3}. \tag{84}$$

Поэтому прямая Λ удовлетворяет условиям, которые в § 15, А ограничивали выбор прямой L. Если в качестве прямой L мы выберем прямую Λ, то величинам μ и y_0 теперь будут соответствовать величины $1/\rho$ и b. Точка w выполняет свое движение таким образом, что она выходит из какой-либо точки на прямой Λ и движется так, что y неограниченно возрастает. Аналогично мы представляли себе движение точки w в § 15, А; поэтому начатое там исследование относится к случаю движения w, рассматриваемого нами теперь. Теорема, сформулированная в конце § 15, В, приводит к следующему результату: если с начала движения величина y получает положительное приращение Δy, то соответствующее приращение для φ,

* Произвольно близко к ρ_0 существуют, естественно, и такие числа $\rho_0 + \varepsilon$, что среднее движение существует, если $\zeta = \zeta_0$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon$. Это следует уже из того обстоятельства, что рациональное число ρ всегда имеет следствием существование среднего движения.