ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 5 (156)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.537

В. С. Бойчук, А. Э. Еременко

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ — целая функция, представленная абсолютно сходящимся в конечной плоскости рядом Дирихле, $0\leqslant\lambda_0\leqslant\ldots$, $\lambda_n\to\infty$, $M(x)=\sup|f(x+iy)|$ при $|y|<\infty$. Для $f(z)$ определяются порядок ρ, нижний порядок ρ_0, тип $\sigma=\sigma(\lambda)$ и нижний тип $\sigma_0=\sigma_0(\lambda)$, где λ — произвольное положительное число, по формулам:

$$\overline{\underline{\lim}}_{x\to\infty}\frac{\ln\ln M(x)}{x}=\begin{cases}\rho\\ \rho_0\end{cases};$$

$$\overline{\underline{\lim}}_{x\to\infty}\frac{\ln M(x)}{\exp(\lambda x)}=\begin{cases}\sigma\\ \sigma_0\end{cases}.$$

Обозначим

$$\overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty}(\ln n)/\lambda_n=\begin{cases}D\\ D_0\end{cases};$$

$$\overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{e\lambda}|a_n|^{\lambda/\lambda_n}=\begin{cases}\beta\\ \beta_0\end{cases};$$

$$\varphi(n)=\frac{\ln|a_n|-\ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n};$$

$$\mu(x)=\max_n|a_n|e^{\lambda_n x}.$$

Известно [1], что $\beta\leqslant\sigma\leqslant\beta(D\lambda\exp(D\lambda+1)+1)$. Мы докажем более точную оценку сверху для σ.

Теорема 1. *Если* $D<\infty$, *то*

$$\sigma\leqslant\beta\exp(D\lambda). \tag{1}$$

Можно считать, что $\beta<\infty$. Тогда для всякого γ, $\beta<\gamma<\infty$,

$$|a_n|<\{\gamma e\lambda\lambda_n^{-1}\}^{\lambda_n/\lambda},\quad n>n_0.$$

Известно [1], что $M(x)<\mu(x+D_1)$ при $D<D_1<\infty$ и $x>x_0$. Поэтому для достаточно больших x

$$M(x)\leqslant\max_n\{\gamma e\lambda\lambda_n^{-1}\exp(\lambda(x+D_1))\}^{\lambda_n/\lambda}\leqslant\max_t\{\gamma e\lambda t^{-1}\exp(\lambda(x+D_1))\}^{t/\lambda}=$$
$$=\exp(\gamma(\exp(\lambda(x+D_1)))).$$

Отсюда следует (1). При $D=\infty$, $\beta>0$ оценка (1) тоже верна, но тривиальна. При $D=\infty$, $\beta=0$ правая часть (1) лишена смысла. (Аналогичное замечание можно сделать относительно теоремы 4.)

Оценим теперь нижний тип. Пусть $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} (\lambda_{n_k}/e\lambda)\,|a_{n_k}|^{\lambda/\lambda_{n_{k+1}}} = \beta_1.$$

Теорема 2. *Всегда* $\sigma_0 \geqslant \beta_1$.

Пусть $0 < \gamma < \beta_1$. Тогда $|a_{n_k}| \geqslant \{\gamma e\lambda\lambda_{n_k}^{-1}\}^{\lambda_{n_{k+1}}/\lambda}$, $k > k_0$. Поскольку $\lambda_{n_k} \leqslant \gamma\lambda \exp(\lambda x) \leqslant \lambda_{n_{k+1}}$ при $x > x_0$, то для таких x

$$M(x) \geqslant \{\gamma e\lambda\lambda_{n_k}^{-1} \exp(\lambda x)\}^{\lambda_{n_k}/\lambda} \geqslant \exp(\gamma \exp(\lambda x)).$$

Аналогичная теорема для нижнего порядка доказана в [2].

Теорема 3. *Если* $D < \infty$ *и последовательность* $\{\varphi(n)\}$ *не убывает, то*

$$\sigma_0 \leqslant \beta_0 \exp(D\lambda). \tag{2}$$

Пусть $\beta_0 < \gamma < \infty$, $D < D_1 < \infty$. Тогда существуют такие последовательности $\{n_k\}$ и $\{x_k\}$, что

$$|a_{n_k}| \leqslant \{\gamma e\lambda\lambda_{n_k}^{-1}\}^{\lambda_{n_k}/\lambda},$$

$$\mu(x_k + D_1) = |a_{n_k}| \exp(\lambda_{n_k}(x_k + D_1)).$$

Для достаточно больших x_k

$$M(x_k) \leqslant \mu(x_k + D_1) < \max_t \{\gamma e\lambda t^{-1} \exp(\lambda(x_k + D_1))\}^{t/\lambda} = \exp(\gamma \exp(\lambda(x_k + D_1))).$$

Следующая теорема показывает, что оценки (1) и (2) неулучшаемы.

Теорема 4. *Если* $a_n \geqslant 0$, $\beta_0 > 0$, $D_0 > 0$, *то* $\sigma_0 \geqslant \beta_0 \exp(D_0\lambda)$.

Пусть $n(t)$ — считающая функция для $\{\lambda_n\}$, $0 < \gamma < \beta_0$, $0 < D_1 < D_0$. Тогда $n(t) > \exp(D_1 t)$, $a_n \geqslant (\gamma e\lambda\lambda_n^{-1})^{\lambda_n/\lambda}$, как только $t > t_0$, $n > n_0$. Будем считать, что $\lambda_{n_0} > t_0$. Для достаточно больших x имеем

$$M(x) \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} (\tau\lambda_n^{-1})^{\lambda_n/\lambda} \geqslant \tau \int_1^{\infty} (\ln t\lambda + 1)\left(\frac{e^{D_1\lambda}}{t\lambda}\right)^{\tau t} dt + O(\tau^{\lambda_{n_0}/\lambda}),$$

где

$$\tau = \gamma e\lambda \exp(\lambda x).$$

Используя [3] (с. 106, № 201), получим $M(x) > \exp(\gamma \exp(\lambda(x + D_1)))$.

Аналогично с помощью неравенства Парсеваля доказывается

Теорема 5. *Если* $\beta_0 > 0$, $D_0 > 0$, *то* $\sigma_0 \geqslant \beta_0 \exp\left(\frac{D_0\lambda}{2}\right)$.

Ограничение $D_0 > 0$ в условиях теорем 4 и 5 нельзя отбросить, как показывает анализ примера, где $\lambda_n = n^n$, $a_n = \lambda_n^{-\lambda_n}$ $(n \geqslant 1)$.

Последовательность $\{n_k\}$ всюду далее будет возрастающей последовательностью натуральных чисел, удовлетворяющей одному из условий:

А) $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o(\lambda_{n_k}/\ln \lambda_{n_k})$, Б) $\lambda_{n_{k+1}} \sim \lambda_{n_k}$.

Обозначим

$$\overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln|a_n|} = \begin{cases} \alpha \\ \alpha_0 \end{cases};$$

$$\overline{\underline{\lim}}_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}}{-\ln|a_{n_k}|} = \begin{cases} \alpha' \\ \alpha_0' \end{cases};$$

$$\overline{\underline{\lim}}_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k}}{e\lambda} |a_{n_k}|^{\lambda/\lambda_{n_k}} = \begin{cases} \beta' \\ \beta_0' \end{cases}.$$

В теоремах 6—9 полагаем, что $D < \infty$ и выполняется одно из условий: В) $\varphi(n)$ не убывает, Г) $|a_n| \geqslant |a_{n+1}|$.

Теорема 6. *Если выполняются условия* Б), В), *то* $(\rho = \rho_0) <=> (\alpha' = \alpha_0')$.

Теорема 7. *Если* $D = 0$ *и выполняются условия* А), Г), *то* $(\sigma = \sigma_0) <=> (\beta'(\rho) = \beta_0'(\rho))$.

Теорема 8. *Если выполняются условия* А), Г), *то* $\rho = \alpha'$, $\rho_0 \geqslant \alpha_0'$; *если же выполняются условия* Б), В), *то* $\rho = \alpha'$, $\rho_0 = \alpha_0'$.

Теорема 9. *Пусть* $D = 0$. *Если выполняются условия* А), Г), *то* $\sigma = \beta'$, $\sigma_0 \geqslant \beta_0'$; *если же выполняются условия* Б), В), А), Г), *то* $\sigma = \beta'$, $\sigma_0 = \beta_0'$.

Доказательства опираются на две леммы, в которых для удобства считаем $a_n \geqslant 0$.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* А) *и* Г) *или* Б) *и* В). *Тогда из* $a_{n_k} < (a\lambda_{n_k}^{-1})^{\lambda_{n_k}}$, $a > 0$, $k > k_0$, *следует* $a_n < (c\lambda_n^{-1})^{\lambda_n}$, $c > a$, $n > n_0$, *а из* $a_{n_k} > (c\lambda_{n_k}^{-1})^{\lambda_{n_k}}$, $c > 0$, $k > k_0$, *следует* $a_n > (a\lambda_n^{-1})^{\lambda_n}$, $c > a > 0$, $n > n_0$.

Лемма 2. *Если выполняются условия* А) *и* Г) *или* Б) *и* В), *то* $\alpha = \alpha'$, $\alpha_0 = \alpha_0'$, $\beta = \beta'$, $\beta_0 = \beta_0'$.

В заключение выражаем благодарность А. А. Гольдбергу за помощь и руководство.

Примечание при корректуре. В то время, когда наша статья находилась в печати, была опубликована работа [4], где доказывается соотношение (1). Наше доказательство проще.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu Chia-Yung. Sur les droites de Borel de certaines fonctions entières. Ann. scient. Ecole norm. supér., v. 68, 1951, p. 65—104.
2. Juneja O. P., Singh Prem. On the lower order of an entire function defined by Dirichlet series, Math. Ann., Bd. 184, № 1, 1969, S. 25—29.
3. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. I. М., ГИТТЛ, 1956.
4. Оруджев С. Р. О порядке и типе целых функций, представленных рядами Дирихле. Изв. вузов. Матем., 1974, № 7, с. 60—65.

г. Львов

Поступила
11 XI 1973

А. И. Селезнёв, И. В. Мотова, В. А. Волохин. О полноте систем функций и универсальных рядах

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматривается вопрос о связи универсальных рядов с условием усиленной полноты систем функций. Для того, чтобы система функций была усиленно полной на некоторой совокупности, необходимо и достаточно, чтобы существовал универсальный на этой совокупности ряд. (Работа поступила в журнал „Математика" 6 III 1974.)

Э. М. Солнечный. Теоремы Фату и Лебега для последовательностей и систем конечных подмножеств в решетках

(аннотация статьи, принятой к печати)

Для оператора, отображающего решетку в частично упорядоченное множество и обладающего свойством — аналогом теоремы Беппо—Леви в теории интеграла, получаются теоремы — аналоги леммы Фату и теоремы Лебега — для последовательностей и систем конечных подмножеств, составленных из элементов решетки. Кроме того, приводится достаточное условие, позволяющее расширить оператор, определенный на подрешетке, на всю решетку с выполнением аналогов теорем Беппо, Леви, Фату и Лебега. (Работа поступила в журнал „Математика" 16 I 1973.)