Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen

zur

sphärischen Trigonometrie.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

der hohen philosophischen Facultät

der

Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Grace Chisholm

aus London.

Göttingen 1895.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei.

(W. Fr. Kaestner.)

Referent: Herr Professor Dr. F. Klein.

Tag der mündlichen Prüfung:

26. April 1895.

Ihrem lieben Vater

von welchem sie frühzeitig gelernt hat

Deutschland und die mathematische Wissenschaft

hochzuschätzen

widmet diese Schrift

in herzlicher Dankbarkeit

die Verfasserin.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Die alte, wohlbekannte Lehre der sphärischen Trigonometrie ist von Herrn Study in seiner Abhandlung, „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen", (Leipzig 1893), von einem ganz modernen Standpunkte aus betrachtet worden. Obwohl der eigentliche Zweck jenes Autors ein spezieller ist, nämlich den Zusammenhang zwischen den in dem Titel erwähnten Theorien und den Formeln der sphärischen Trigonometrie zu zeigen, hat doch die Schrift eine allgemeine Tendenz, welche für uns von Wichtigkeit ist, nämlich die systematische Anordnung des Stoffes nach modernen Methoden und insbesondere die Einführung des Gruppenbegriffs.

Dieser Gruppenbegriff kann überall als Einteilungsprincip benützt werden. Wir haben ein Beispiel dafür in der Einteilung der elliptischen Modul-Functionen*) nach Untergruppen der zugehörigen Gruppe linearer Substitutionen. Ein ähnliches Verfahren ist auch in der sphärischen Trigonometrie sehr zweckmässig und giebt uns in der That einen Ueberblick über die Theorie, was sehr vortheilhaft ist.

In der sphärischen Trigonometrie haben wir mit sechs Grössen zu thun, nämlich mit den Seiten a_1, a_2, a_3 und den Winkeln α_1, α_2, α_3 eines sphärischen Dreiecks. Zwischen diesen Grössen bestehen gewisse transcendente Gleichungen, von denen drei unabhängig sind; von diesem Standpunkte aus reden wir von transcendenter Trigonometrie.

Diese Lehre von der transcendenten Trigonometrie können wir aber anders auffassen. Statt zu sagen, wir haben drei unab-

*) Klein, Evanston Colloquium. p. 76.

hängige Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks, können wir sagen:

Die Gesamtheit aller reellen Dreiecke bildet den reellen Teil einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_3 in einem sechsfach ausgedehnten Raum R_6, welcher durch die Coordinaten $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ festgelegt ist.

Diese Mannigfaltigkeit ist ihrer Natur gemäss transcendent; sie besitzt aber merkwürdige Symmetrieeigenschaften, welche hervortreten durch Betrachtung der linearen Substitutionen der Coordinaten, welche die Mannigfaltigkeit in sich selbst überführen.

Letztere Substitutionen bilden die schon angedeutete Gruppe, welche wir an die Spitze unserer Betrachtungen stellen wollen.

Die in der transcendenten Trigonometrie zu Grunde gelegte Gruppe Γ_Δ ist hiernach eine unendliche Gruppe linearer Substitutionen der Grössen $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und umfasst folgende Operationen*):

die sechs Vertauschungen C_6 der Seiten und gleichzeitig der entsprechenden Winkel,

die Polaroperation P_2, welche gegenüberliegende Seiten und Winkel vertauscht,

die 64 Nachbaroperationen, welche ein Dreieck in ein anderes in dasselbe Dreikant eingehängtes Dreieck verwandeln,

und die unendliche lineare Untergruppe Π, welche ein beliebiges Multiplum von 2π jeder einzelnen Grösse zuaddirt.

Durch die alle diese Operationen umschliessende Gruppe Γ_Δ wird ein Dreieck immer wieder in ein anderes Dreieck übergeführt. Die M_3 bleibt also bei den entsprechenden Coordinatentransformationen ungeändert; ihre Symmetrieeigenschaften sind also durch die Gruppe gekennzeichnet, und wir bemerken:

Die transcendente Mannigfaltigkeit M_3 ist in einem sehr hohen Grade regulär.

Es kommen jetzt die Haupteinteilungen der transcendenten Trigonometrie nach Untergruppen von Π; diese Haupteinteilungen können wir nach Analogie der citirten Einteilung der elliptischen Modul-Functionen als Stufen bezeichnen.

Erste Stufe: hier werden alle Grössen mod. 2π genommen: d. i. wir sehen alle Dreiecke als identisch an, welche vermöge der Untergruppe Π aus einander hervorgehen. In anderen Worten:

Auf der ersten Stufe ordnen wir die Untergruppe Π der Identität zu.

---

*) Siehe die nähere Ausführung in § 3.

Zweite Stufe: alle Grössen werden mod. 4π genommen.

Dritte Stufe: alle Grössen werden mod. 6π genommen.

u. s. w.

Dies sind aber nur die Haupteinteilungen:

wir kommen, allgemein zu reden, auf eine Einteilung, wenn wir irgend eine Untergruppe von Γ_Δ der Identität zuordnen.

Die nächste Frage ist nach den einfachsten Invarianten dieser Untergruppen: d. i. wir bilden ein System von Grössen, deren jede bei allen Operationen der Untergruppe ungeändert bleibt, und so, dass jede Substitution, welche *alle* Grössen des Systems ungeändert lässt, in der Gruppe enthalten ist.

Auf der ersten Stufe haben wir z. B. als Invarianten die sechs Grössen:

$$\cot\frac{a_i}{2}, \quad \cot\frac{\alpha_i}{2}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Wenn wir statt der Seiten und Winkel selbst diese Invarianten einführen, so werden die Gleichungen der Trigonometrie *algebraisch*, und die Gruppe reducirt sich auf eine endliche Anzahl von Operationen.

Was wir hier als Beispiel bei der ersten Stufe bemerkt haben, ist aber eine allgemeine Eigenschaft, wenn die der Identität zugeordnete Untergruppe einen endlichen Index besitzt. Betrachtet man nämlich deren einfachsten Invarianten, so sind dieselben *algebraische* Functionen von $\cot\frac{a_i}{2}$, $\cot\frac{\alpha_i}{2}$; in diesen Invarianten ausgedrückt sind die Gleichungen algebraisch und die Gruppe endlich, aber allerdings nicht immer linear.

Wie wir früher mit Rücksicht auf die Transcendenz der Gleichungen und die Unendlichkeit der Gruppe von der transcendenten Trigonometrie sprachen, so können wir hier von *algebraischer Trigonometrie* reden.

Jede Untergruppe von endlichem Index, der Identität zugeordnet, ergiebt eine Art algebraischer Trigonometrie.

Diese Invarianten der Gruppe können entweder, wie in dem angeführten Beispiele, sechs an sich unabhängige Grössen sein, oder sie können mehr in Anzahl mit einer gewissen Abhängigkeit sein. Z. B. hätten wir auf der ersten Stufe die 12 Grössen

$$\cos a_i, \quad \sin a_i, \quad \cos\alpha_i, \quad \sin\alpha_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

als Invarianten nehmen können, diese hängen vermittelst der sechs Identitäten zusammen:

$$\cos^2 a_i + \sin^2 a_i = 1,$$
$$\cos^2 \alpha_i + \sin^2 \alpha_i = 1.$$

In allen Fällen werden nur sechs von den Invarianten unabhängig sein; wenn sie also n in Anzahl sind, so definiren sie eine sechsfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_6 im n-fach ausgedehnten Raume R_n. Ist insbesondere $n = 6$ (und das ist der einzige in dieser Abhandlung betrachtete Fall), so definiren sie einen Raum von sechs Dimensionen R_6. Weiter definiren die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie in diesem Raume R_6 (bez. in dieser M_6 in R_n) ein algebraisches Gebilde, eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_3.

Wir haben nun als Aufgabe der einzelnen algebraischen Trigonometrie folgendes:

Was ist der Grad der M_3?

Ist diese einfach, oder zerfällt sie in algebraische Mannigfaltigkeiten niederer Ordnung?

Ist sie ein vollkommener Durchschnitt?

Allgemeiner gefragt, was ist ihre algebraische Darstellung, d. i. das vollständige System von Gleichungen, vermittelst welcher jede für sie geltende Gleichung linear zusammengesetzt werden kann?*)

Die folgende Dissertation trennt sich in zwei Teile.

Der erste Teil, §§ 1—6 bezieht sich auf Festsetzungen und allgemeine Verabredungen im Reellen und auf Eigenschaften der Gruppe Γ_Δ, welche meistens schon von Study behandelt worden sind. Es schien mir aber wünschenswert, zuweilen etwas schärfer und überhaupt systematischer zu verfahren; und in gewissen Beziehungen musste ich Ergänzungen machen. Ich möchte aber hier meine Verpflichtung ihm gegenüber betonen.

Was die älteren Autoren betrifft, welche in diesem Gebiete gearbeitet haben, so habe ich nur ausnahmsweise Citate gegeben aus dem einfachen Grunde, weil ich kaum andere zu geben habe als schon in Study's Abhandlung vorkommen, auf welche ich hier ein für allemal hinweise.

Der zweite Teil meiner Dissertation bezieht sich auf Probleme der algebraischen Trigonometrie, welche ich durch drei Beispiele zu erläutern gesucht habe.

*) Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Formen. Annalen 36.

Teil I.

Allgemeine Grundlegung.

§ 1. Entfernung und Winkel auf der Kugel.

Um auf der Kugel Winkel zu messen, ist es zweckmässig, einen festen positiven Drehungssinn festzulegen.

Ich treffe also folgende Verabredung:

Die Drehungen um einen Kugelpunkt C, welche von aussen angesehen in der Richtung des Uhrzeigers geschehen, sollen als negativ, die in der entgegengesetzten Richtung als positiv gelten.

Bei einer gegebenen Drehung der Kugel bleiben immer zwei Punkte, Gegenpunkte, fest. Die gegebene Drehung ist nur um einen der beiden Punkte positiv, um den anderen negativ, nach unserer Verabredung. (Fig. 1).

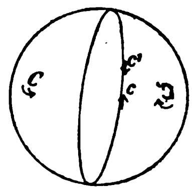


Fig. 1.

Grössten Kreisen der Kugel werde ich immer einen positiven Sinn zuschreiben, und einen Kreis nur dann als völlig bestimmt ansehen, wenn sowohl Lage als Sinn gegeben sind. Zwei Kreise, welche dieselbe Lage aber entgegengesetzte Sinne haben, nenne ich Gegenkreise (Fig. 1).

Als Definition soll nun folgendes gelten:

Die Entfernung $\widehat{AB}$ zweier Punkte A, B auf einem grössten Kreis $\underline{c}$ ist die Bogenlänge von A nach B in der positiven Richtung von $\underline{c}$ gemessen.

Der Winkel $\widehat{ab}$ zweier mit bestimmtem Sinn gemessener grössten Kreise a, b in einem Punkte C ist der Winkel von a nach b in der positiven Richtung von C gemessen.

Hier sind folgende Bemerkungen zu machen:

I. Die Entfernung $\widehat{AB}$ ist nur mod. 2π bestimmt.

Denn wir können beliebig viele ganze Umläufe des Kreises $\underline{c}$ von A wieder nach A zurücklegen und dann von A nach B gehen, die beschriebene Bogenlänge ist immer nach der Definition die Entfernung von A nach B auf $\underline{c}$.

Eine ähnliche Betrachtung zeigt, dass der Winkel $\widehat{ab}$ in C nur mod. 2π bestimmt ist.

II. Die Entfernung zweier Punkte A, B auf c ist gleich der Entfernung der beiden Gegenpunkte A', B' auf c (mod. 2π).

Der Winkel zweier Kreise a, b in C ist gleich dem Winkel der beiden Gegenkreise a', b' in C (mod. 2π).

III. Die Entfernung $\widehat{AB'}$ auf c ist $= \pi + \widehat{AB}$ (mod. 2π).

Der Winkel $\widehat{ab'}$ in C ist $= \pi + \widehat{ab}$ (mod. 2π).

Wenn wir aus den mod. 2π identischen Entfernungen $\widehat{AB}$ eine bestimmte herausgreifen wollen, so können wir diese immer als einen über die Kugel gespannten Faden mit der gegebenen Länge ansehen, welcher ein Ende in A hat, sich so oft wie nötig um die Kugel herum zieht, und mit dem anderen Ende in B befestigt ist. (Fig. 2.)

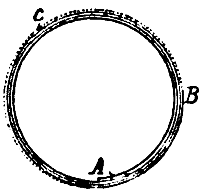


Fig. 2.

Ebenso können wir einen bestimmten Winkel $\widehat{ab}$ folgendermaassen veranschaulichen: wir nehmen eine Uhrfeder, halten das eine Ende auf dem Kreise $\underline{a}$ in einer kleinen Entfernung von C fest, und winden sie so oft um C herum, als es ganze Multipla von 2π in der gegebenen Grösse $\widehat{ab}$ gibt, das zweite Ende wird dann auf b befestigt. (Fig. 3).

Fig. 3.

§ 2. Pol und Polare.

Wir ordnen jetzt die Punkte und grössten Kreise der Kugel ein-ein-deutig folgendermaassen einander zu:

Derjenige Punkt C der Kugel, (Fig. 1), welcher die Entfernung $\frac{\pi}{2}$ von dem Kreise $\underline{c}$ hat, und welcher, von aussen betrachtet, links liegt, wenn wir den Kreis $\underline{c}$ positiv umlaufen, nennen wir den Pol von c; umgekehrt heisst $\underline{c}$ die Polare von C.

Pol und Polare sind nach unseren Verabredungen ein-ein-deutig auf einander bezogen.

Wir sehen sofort:

Die Entfernung zweier Punkte A, B auf $\underline{c}$ ist gleich dem Winkel der Polare a, b in dem Pole C (mod. 2π).

Oder, was dasselbe ist:

Winkel und Entfernung sind reciprok.

§. 3. Das sphärische Dreieck und die discontinuirliche Gruppe Γ_Δ.

Jetzt können wir ein sphärisches Dreieck definiren.

Wir nehmen auf der Kugel drei Punkte A_1, A_2, A_3 (Eckpunkte) und drei grösste Kreise c_1, c_1, c_3 (Seitenkreise), welche sich in A_1, A_2, A_3 paarweise schneiden.

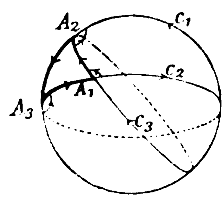


Fig. 4.

Nun wählen wir aus den möglichen Entfernungen $\widehat{A_2A_3}$ auf c_1, $\widehat{A_3A_1}$ auf c_2, $\widehat{A_1A_2}$ auf c_3 je eine bestimmte a_1, a_2, a_3 aus, diese nennen wir die Seiten.

Ebenso die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind bestimmte, ausgewählte von den möglichen Winkeln $\widehat{c_2c_3}$ in A_1, $\widehat{c_3c_1}$ in A_2, $\widehat{c_1c_2}$ in A_3.

Diese Seiten und Winkel sind die Elemente eines sphärischen Dreiecks. Umgekehrt definiren wir ein sphärisches Dreieck als den Inbegriff sechs solcher Elemente.

Wir sehen sofort, dass mit gegebenen Eckpunkten und Seitenkreisen ein Dreieck nur mod. 2π bestimmt ist.

Wenn wir also unter Π die unendliche Gruppe linearer Transformationen verstehen, welche zu den Elementen beliebige Multipla von 2π zuaddiren, und also die Gestalt haben

$$(\Pi). \qquad \begin{aligned} a_\iota' &= a_\iota + 2k_\iota\pi, \\ \alpha_\iota' &= \alpha_\iota + 2\varkappa_\iota\pi, \end{aligned} \qquad (\iota = 1, 2, 3).$$

wo $k, \varkappa = 0$ oder $=$ irgend einer positiven oder negativen ganzen Zahl, so werden wir vermöge Π aus einem Dreieck alle anderen bekommen, welche dieselben Eckpunkte und Seitenkreise besitzen.

Was die Bezeichnung $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ betrifft, so sehen wir, dass a_ι mit α_ι zusammengehört, indem durch a_ι die dem Winkel α_ι gegenüberliegende Seite bezeichnet wird. Sonst ist aber die Bezeichnung willkürlich, so dass wir wieder ein Dreieck bekommen, wenn wir die Nacheinanderfolge der Indices 1, 2, 3 auf irgend eine Weise ändern.

Dies führt uns auf die Vertauschungs-Gruppe C_6 vom Grade 6, welche folgende erzeugende Operationen besitzt:

$$(C_6). \qquad C_{12} = (a_1 a_2)(\alpha_1 \alpha_2),$$
$$C_{123} = (a_1 a_2 a_3)(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3),$$

und welche ebenfalls aus einem Dreieck ein anderes Dreieck hervorruft.

Wenn wir weiter statt der Ecken die Pole der Seiten, statt der Seiten die Polaren der Ecken nehmen, so bilden diese gleichfalls mod. 2π ein Dreieck, welches folgende Elemente besitzt:

Seiten . . . . . α_1, α_2, α_3,
Winkel . . . . a_1, a_2, a_3.
Die Operation

$$P_2 = (a_1 \alpha_1)(a_2 \alpha_2)(a_3 \alpha_3),$$

auf die Elemente eines Dreiecks angewandt, erzeugt also ein neues Dreieck, das Polar-Dreieck. Diese Operation nennen wir die Polar-Operation; sie hat die Periode 2, erzeugt also eine Gruppe, die Polar-Gruppe vom Grade 2.

Wenn wir weiter nur die Eckpunkte als gegeben ansehen, so können wir zwischen den einzelnen Bestandteilen der drei Paar die Eckpunkte verbindenden Gegenkreise auf $2^3 = 8$ Weisen wählen. Es gibt daher mod. 2π acht Dreiecke mit gegebenen Ecken A_1, A_2, A_3.

Dementsprechend kommen wir auf eine Gruppe Σ mit den erzeugenden Operationen $\Sigma_1^{\pm 1}$, $\Sigma_2^{\pm 1}$, $\Sigma_3^{\pm 1}$, wo Σ_1 der Operation entspricht, welche den A_1 gegenüberliegenden Kreis in seinen Gegenkreis verwandelt; die Gestalt der Operation Σ_1 wird folgendermaassen tabulirt:

1	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
Σ_1	$2\pi - a_1$	a_2	a_3	α_1	$\pi + \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$

und Σ_2, Σ_3 gehen aus Σ_1 durch Vertauschung der Indices hervor.

Die der Tabelle entsprechenden Dreiecke werden durch die Nebeneinanderstellung der Figuren 4 und 5 erläutert.

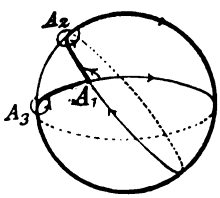


Fig. 5.

Die Operationen von Σ, welche mod. 2π verschieden sind, können wir schreiben

$$\Sigma_1^{\varepsilon_1} \Sigma_2^{\varepsilon_2} \Sigma_3^{\varepsilon_3}, \qquad (\varepsilon = 0, 1).$$

Reciprok, wenn wir die Seitenkreise c_1, c_2, c_3

allein vorschreiben, so können wir die Eckpunkte eines von ihnen umgrenzten Dreiecks auf acht Weisen wählen.

Dementsprechend kommen wir auf eine Gruppe S mit erzeugenden Operationen $S_1^{\pm 1}$, $S_2^{\pm 1}$, $S_3^{\pm 1}$, wo S_1 eine Operation bezeichnet, welche den c_1 gegenüberliegenden Eckpunkt in seinen Gegenpunkt verwandelt. Die Gestalt der Operation S_1 ist einfach aus der Operation Σ_1 durch Vertauschung der Buchstaben a, α abzulesen: das entsprechende Dreieck wird in Fig. 6 dargestellt.

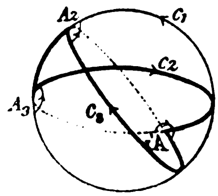


Fig. 6.

S und Σ zusammen bilden eine unendliche Gruppe G, welche aus einem gegebenen Dreieck immer solche Dreiecke hervorruft, welche in das ursprüngliche Dreikant eingehängt sind. Von der Gruppe G sind nur 64 Operationen mod. 2π verschieden, z. B. können wir sie schreiben

$$(G.) \qquad \Sigma_1^{\varepsilon_1} \Sigma_2^{\varepsilon_2} \Sigma_3^{\varepsilon_3} S_1^{e_1} S_2^{e_2} S_3^{e_3} \qquad (\varepsilon, e = 0, 1).$$

Wir dürfen nicht umgekehrt schliessen, dass alle die Operationen, welche mit $\Sigma_1^{\varepsilon_1} \Sigma_2^{\varepsilon_2} \Sigma_3^{\varepsilon_3} S_1^{e_1} S_2^{e_2} S_3^{e_3}$ mod. 2π congruent sind, in G enthalten sind, was in der That nicht der Fall ist. Wenn dies der Fall wäre, so würde Π eine Untergruppe von G und für unsere Zwecke überflüssig sein. Π ist aber keine Untergruppe von G; Π und G durchdringen sich in einer Untergruppe $\mathfrak{K}$, welche, nach dem vorangehenden, gegen G den Index 64 und, wie wir später (p. 15) sehen werden, gegen Π den Index 2 besitzt.

Die lineare unendliche Gruppe, welche den folgenden Untersuchungen zu Grunde gelegt wird, ist aus den erwähnten Gruppen zusammengesetzt:

$$\Gamma_\Delta = \{S, \Sigma, P_2, C_6, \Pi\}.$$

Wenn wir mit $\bar{\omega}$ den (unendlichen) Grad von Π bezeichnen, so ist, nach dem Vorangehenden, der Grad von Γ_Δ $64 \times 2 \times 6 \times \bar{\omega} = 768\ \bar{\omega}$.

§ 4. **Die continuirliche Gruppe.**

Neben der unendlichen Gruppe Γ_Δ discontinuirlicher Substitutionen giebt es eine zweite Gruppe, welche für das Dreieck wesentlich ist; diese Gruppe nenne ich die continuirliche

Gruppe. Diese Gruppe enthält alle infinitesimalen Operationen, welche ein Dreieck in ein anderes Dreieck überführen und also alle Operationen, welche durch eine Reihenfolge solcher infinitesimaler Operationen erzeugt werden können. Die „integralen" Operationen der continuirlichen Gruppe (wie ich sie nennen will) sind ja an sich nicht continuirlich, sie sind aber immer durch eine Reihe continuirlicher (d. h. infinitesimaler) Operationen ersetzbar; ich werde von ihnen sagen, dass sie „continuirlich ausführbar" sind, und dass die betreffenden Dreiecke aus einander „continuirlich abgeleitet werden können".

Die Frage, welche wir zunächst treffen, ist:

Welche von den Operationen von Γ_Δ sind continuirlich ausführbar?

Wir nehmen zuerst die Untergruppe G und beweisen, dass sie continuirlich ausführbar ist.

Diese Untergruppe hat die erzeugenden Operationen $\Sigma_i^{\pm 1}$, $S_i^{\pm 1}$. Σ_1 können wir folgendermaassen ausführen:

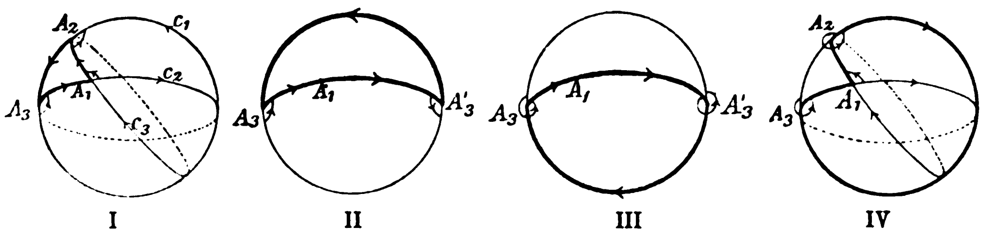


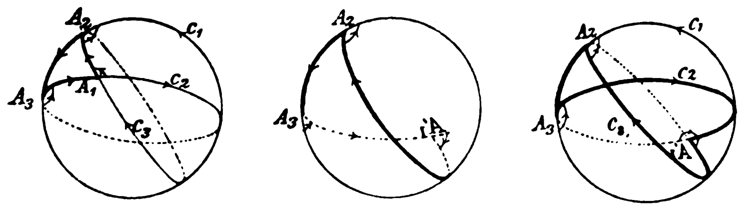
Fig. 7.

I zeigt das Ausgangsdreieck, welchem wir eine einfache Gestalt gegeben haben, um die Figuren zu vereinfachen; im Wesentlichen wird Nichts geändert, wenn wir ein complicirteres Ausgangsdreieck wählen. In II haben wir den Eckpunkt A_2 den Kreis A_2A_3 entlang in der negativen Richtung bis A'_3 wandern lassen, um nachher den Kreis A_2A_3 um die Kugel herum in der positiven Richtung von A_3 zu drehen, bis wir zu der Figur III gelangen. In der IVten Figur haben wir den Punkt A_2 wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgeführt und zwar auf demselben Wege, nur in entgegengesetzter Richtung, wie er zuerst gewandert war.

Damit ist der ganze Process fertig und die Operation Σ_1 continuirlich ausgeführt.

Die Operation Σ_1^{-1} unterscheidet sich nur dadurch von Σ_1, dass wir beim Uebergang zwischen den Figuren II und III in der negativen Richtung von A_3, statt in der positiven Richtung drehen müssen.

S_1 lässt sich folgendermassen continuirlich ausführen:



(I) $S_1 \Sigma_2^{-1}$ S_1

Fig. 8.

Wir lassen A_1 in der negativen Richtung von α_3 bis zu dem Gegenpunkte A_1' wandern; wir kommen dann auf ein Dreieck, welches wir durch Operation Σ_2 in das gesuchte Dreieck verwandeln können. Da wir nun schon gezeigt haben, wie Σ_2 continuirlich auszuführen ist, so haben wir auf diese Weise S_1 continuirlich ausgeführt. Wir sehen auch, dass die Operation, welche in G demjenigen Processe entspricht, bei welchem A_1 nach A_1' wandert, nichts anders ist als $S_1\Sigma_2^{-1}$.

Um Σ_1^{-1} continuirlich auszuführen, müssen wir umgekehrt verfahren. Zuerst müssen wir die continuirliche Operation ausführen, welche Σ_2^{-1} gibt, und dann A_1 wandern lassen, und zwar jetzt in der positiven Richtung von a_3, bis es nach A_1' gekommen ist.

Damit ist aber bewiesen, dass G in der continuirlichen Gruppe enthalten ist.

Wenn wir eine Operation von G auf ein Dreieck anwenden, so kommen wir in allen Fällen auf ein Nebendreieck des ursprünglichen Dreiecks, d. i. auf ein Dreieck, welches in das ursprüngliche Dreikant eingehängt ist; weiter aber ist das so gewonnene Nebendreieck aus dem ursprünglichen Dreieck continuirlich ableitbar.

Es fragt sich, kommen wir auf diese Weise auf alle Nebendreiecke, oder giebt es Nebendreiecke, welche aus einander nicht continuirlich ableitbar sind? Es wird sich zeigen, dass das letztere der Fall ist.

Wir haben gesehen, dass mod. 2π nur 64 Operationen von G verschieden sind, z. B.

$$\Sigma_1^{\varepsilon_1}\Sigma_2^{\varepsilon_2}\Sigma_3^{\varepsilon_3}S_1^{e_1}S_2^{e_2}S_3^{e_3}, \qquad (\varepsilon, e = 0 \text{ oder } 1).$$

Typus.	Elemente.						Anzahl der Operationen des Typus.
* 1	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3	1
* Σ_1	$2\pi - a_1$				$\pi + \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$	6
$\Sigma_2\Sigma_3$		$2\pi - a_2$	$2\pi - a_3$	$[2\pi] + \alpha_1$	$\pi + \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$	6
* $\Sigma_1 S_1$	$2\pi - a_1$	$\pi + a_2$	$\pi + a_3$	$2\pi - \alpha_1$	$\pi + \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$	3
$\Sigma_1 S_2$	$[2\pi] + \pi - a_1$		$\pi + a_3$		$\pi - \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$	6
$\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$	$2\pi - a_1$	$2\pi - a_2$	$2\pi - a_3$	$[2\pi] + \alpha_1$	$[2\pi] + \alpha_2$	$[2\pi] + \alpha_3$	2
$\Sigma_1 S_2 S_3$	$[2\pi] + 2\pi - a_1$	$\pi + a_2$	$\pi + a_3$		$\pi - \alpha_2$	$\pi - \alpha_3$	6
* $\Sigma_1 S_1 S_3$	$[2\pi] + \pi - a_1$	$[2\pi] + a_2$	$\pi + a_3$	$2\pi - \alpha_1$	$\pi + \alpha_2$	$\pi - \alpha_3$	12
$\Sigma_1 S_1 S_2 S_3$	$[2\pi] + 2\pi - a_1$	$[2\pi] + a_2$	$[2\pi] + a_3$	$2\pi - \alpha_1$	$[2\pi] + \pi - \alpha_2$	$[2\pi] + \pi - \alpha_3$	6
* $\Sigma_2\Sigma_3 S_2 S_3$	$[2\pi] + a_1$	$[2\pi] + \pi - a_2$	$[2\pi] + \pi - a_3$	$[2\pi] + \alpha_1$	$\pi - \alpha_2$	$\pi - \alpha_3$	3
$\Sigma_2\Sigma_3 S_1 S_2$	$\pi + a_1$	$[2\pi] + \pi - a_2$	$[2\pi] + 2\pi - a_3$	$[-2\pi] + 2\pi - \alpha_1$	$\pi - \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$	6
* $\Sigma_2\Sigma_3 S_1 S_2 S_3$	$[2\pi] + a_1$	$[2\pi] + 2\pi - a_2$	$[2\pi] + 2\pi - a_3$	$[-2\pi] + 2\pi - \alpha_1$	$\pi - \alpha_2$	$\pi - \alpha_3$	6
* $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3 S_1 S_2 S_3$	$[2\pi] + 2\pi - a_1$	$[2\pi] + 2\pi - a_2$	$[2\pi] + 2\pi - a_3$	$[-2\pi] + 2\pi - \alpha_1$	$[-2\pi] + 2\pi - \alpha_2$	$[-2\pi] + 2\pi - \alpha_3$	1
							64

Für diese Operationen haben wir die nebenstehende Tabelle, wo wir diejenigen Operationen, welche denselben Typus haben, d. h. durch geeignete Vertauschung der verticalen Zeilen aus einander hervorgehen, immer nur durch eine unter ihnen repräsentirt haben*).

Wenn wir diese Operationen auf ein elementares Dreieck anwenden (d. i. auf ein Dreieck, dessen Elemente alle $> 0 < \pi$ sind), so kommen wir auf ein Nebendreieck, welches wir durch eine reducirende Operation der Gruppe Π immer in ein reducirtes Dreieck (d. i. ein Dreieck, dessen Elemente alle $> 0 < 2\pi$ liegen) verwandeln können.

Das so gewonnene Dreieck nenne ich ein Nachbardreieck und die entsprechende Operation eine Nachbaroperation. Also:

Nachbardreiecke sind die 64 reducirten Dreiecke, welche in dasselbe Dreikant eingehängt sind.

Die 64 Nachbaroperationen sind die Substitutionen, welche aus einem elementaren Dreieck die Nachbardreiecke hervorrufen.

Die Nachbaroperationen sind ebenfalls aus der Tabelle abzulesen, nämlich durch Abtrennen der in Klammer zugefügten Multipla von 2π, welche selbst die entsprechenden reducirenden Operationen von Π zu derselben Zeit liefern.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob die Nachbaroperationen sämtlich der Gruppe G angehören.

Wir sehen sofort, dass in der Hälfte der Fälle die reducirende Operation der Untergruppe $\mathfrak{K}$ von Π angehört, welche durch die Bedingung characterisirt ist:

$$(\mathfrak{K}) \qquad k_1 + k_2 + k_3 \equiv \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3, \qquad (\text{mod. } 2).$$

Die betreffenden Nachbaroperationen sind in der Tabelle

---

*) Z. B. wir haben $S_2 = P C_{12} \Sigma_1 C_{12} P$. Die Tabelle giebt Σ_1, der Uebergang von Σ_1 zu S_2 liefert folgendes:

1.	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
Σ_1	$2\pi - a_1$	a_2	a_3	α_1	$\pi + \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$
S_2	$\pi + a_1$	a_2	$\pi + a_3$	α_1	$2\pi - \alpha_2$	α_3

mit einem Stern ausgezeichnet; und die Antwort auf unsere Frage ist:

Die 32 mit Sternen ausgezeichneten Nachbaroperationen gehören zu der Gruppe G, die anderen nicht.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die Untergruppe $\mathfrak{K}$. Die typische Operation können wir schreiben:

$$(\mathfrak{K}).\quad \begin{cases} a_1' = a_1 + 2k_1\pi, \\ a_2' = a_2 + 2k_1\pi + 2(k_2 - k_1)\pi, \\ a_3' = a_3 + 2(k_2 - k_1)\pi + 2(k_3 - k_2 + k_1)\pi, \\ \alpha_3' = \alpha_3 - 2(k_3 - k_2 + k_1)\pi + 2(\varkappa_3 + k_3 - k_2 + k_1)\pi, \\ \alpha_2' = \alpha_2 + 2(\varkappa_3 + k_3 - k_2 + k_1)\pi + 2(\varkappa_2 - \varkappa_3 - k_3 + k_2 - k_1)\pi, \\ \alpha_1' = \alpha_1 + 2(\varkappa_2 - \varkappa_3 - k_3 + k_2 - k_1)\pi + 2(\varkappa_1 - \varkappa_2 + \varkappa_3 + k_3 - k_2 + k_1)\pi. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\varkappa_1 - \varkappa_2 + \varkappa_3 + k_1 - k_2 + k_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2);$$

wir können also unsere Operationen auf die Wiederholung dreier erzeugender Operationen zurückführen; nämlich:

$$(\mathfrak{K})\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} a_i' &= a_i \pm 2\pi, \\ a_j' &= a_j \pm 2\pi, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (\mathrm{I}) \\ \left.\begin{aligned} \alpha_i' &= \alpha_i \pm 2\pi, \\ \alpha_j' &= \alpha_j \pm 2\pi, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}) \\ \left.\begin{aligned} a_i' &= a_i \pm 2\pi, \\ \alpha_i' &= \alpha_i \mp 2\pi. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (\mathrm{III}); \end{cases}$$

denn

$$\alpha_i' = \alpha_i \pm 4m\pi$$

ist auf II und III zurückzuführen. Nun ist aber

I nichts anders als $S_k^{\pm 2}$,
II „ „ „ $\Sigma_k^{\pm 2}$,
III „ „ „ $(\Sigma_j S_k)^2$.

Die erzeugenden Operationen von $\mathfrak{K}$ sind daher in G enthalten. Daraus folgt also:

$\mathfrak{K}$ ist eine Untergruppe von G und daher in der continuirlichen Gruppe enthalten.

Dadurch ist aber auch bewiesen, was schon behauptet war, dass die 32 Nachbaroperationen, welche in der Tabelle mit Sternen ausgezeichnet sind, ebenfalls zu der Gruppe G und zu der continuirlichen Gruppe gehören.

Die zugehörigen 32 Nachbardreiecke sind also aus einem elementaren Dreieck continuirlich ableitbar; ebenso ist die Hälfte der Nebendreiecke aus einem elementaren Dreieck continuirlich ableitbar.

Bei einfacher Ueberlegung zeigt sich, dass jede Operation von Π, welche nicht in $\mathfrak{K}$ enthalten ist, auf eine Operation von $\mathfrak{K}$ und die einzelne Operation

$$(X_1). \qquad a_1' = a_1 + 2\pi$$

zurückzuführen ist.

Dass die Operation X_1 nicht in der continuirlichen Gruppe enthalten ist, leuchtet hier nicht ein; wir müssen, um das zu beweisen, die Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks heranziehen. Wenn ich auf pp. 22, 55 der späteren Capitel verweisen darf, so lässt sich hier das Resultat geben:

Die Operation X_1 ist nicht continuirlich ausführbar.

Daraus aber folgt:

Die in $\mathfrak{K}$ nicht enthaltenen Substitutionen von Π sind nicht continuirlich ausführbar.

Es folgt auch ein Resultat, welches schon (p. 9) gegeben war, dass nämlich die Untergruppe $\mathfrak{K}$, in welcher G und Π sich durchdringen, und welche gegen G den Index 64 hat, gegen Π den Index 2 besitzt, was wir folgendermaassen symbolisch schreiben können:

$$\text{Index}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{K}}\right) = 2, \qquad \text{Index}\left(\frac{G}{\mathfrak{K}}\right) = 64.$$

Es resultirt nun, dass die 32 nicht mit Sternen ausgezeichneten Nachbaroperationen ebenfalls nicht continuirlich ausführbar sind, wie behauptet wurde, und dass die Hälfte von den Nachbardreicken, ebensowohl wie die Hälfte der Nebendreiecke, nicht aus einem elementaren Dreieck continuirlich abgeleitet werden kann.

Eigentliche Dreiecke pflegt man alle Dreiecke zu nennen, welche aus einem elementaren Dreieck continuirlich abgeleitet werden können. Es ist leicht zu sehen, das jedes elementare Dreieck aus jedem anderen continuirlich abgeleitet werden kann;

wir können demgemäss die Resultate dieses Capitels folgendermaassen zusammenfassen:

Eigentliche Nebendreiecke sind die, welche aus dem elementaren Nebendreieck durch die Operationen der Gruppe G hervorgehen; sie sind alle aus einander continuirlich ableitbar.

Und wenn wir berücksichtigen, dass die Operation X^2 in G enthalten ist, so können wir hinzufügen:

Die uneigentlichen Nebendreiecke sind ebenfalls alle aus einander continuirlich ableitbar, nicht aber aus den eigentlichen Dreiecken. Um ein uneigentliches Nebendreieck auf ein eigentliches zu reduciren, genügt es, neben einer Operation von G die Operation X_1 heranzuziehen.

Es bleiben noch von der Gruppe Γ_Δ die Untergruppen P_2 und C_6 zu berücksichtigen. Man überzeugt sich sehr leicht, dass diese der continuirlichen Gruppe angehören. Denn wenn ein Dreieck eigentlich ist, so sind die durch P_2, C_6 transformirten Dreiecke ebenfalls eigentlich; wenn aber das ursprüngliche Dreieck uneigentlich ist, so bleibt es nach Transformation durch P_2 oder C_6 uneigentlich.

Wir können also mit folgender Bemerkung dieses Capitel schliessen:

Die continuirliche Gruppe und die Gruppe Γ_Δ durchdringen sich in einer Untergruppe, welche gegen Γ_Δ den Index 2 besitzt und welche durch Adjunction der einzelnen Operation X_1 die Gruppe Γ_Δ ergiebt.

§ 5. Die Ungleichungen.

Wenn wir ein Dreieck haben, so können wir dieses durch eine Operation von Π in ein reducirtes Dreieck verwandeln, welches selbst durch eine der Nachbaroperationen immer auf ein elementares Dreieck zurückgebracht werden kann. Wenn wir von dem zu einem Dreieck gehörenden reducirten oder elementaren Dreieck sprechen, so ist es hiernach unzweifelhaft, was wir damit ausdrücken wollen.

Wenn nun die drei Seiten eines Dreiecks gegeben sind, so können wir diese auf die Seiten des entsprechenden elementaren Dreiecks reduciren; dieses elementare Dreieck lässt sich nun einfach coustruiren, wenn nur dessen Seiten gewissen Ungleichungen genügen.

Wir construiren nämlich die Seite a_1 und legen dann um deren Endpunkte A_2, A_3 herum Kreise auf der Kugel von Radius a_2, bez. a_3. Diese Kreise schneiden sich im Allgemeinen in zwei Punkten; jeder von diesen könnte als Endpunkt A_1 gelten, wenn wir nicht verlangten, dass die Winkel alle zwischen $0-\pi$ liegen sollten. Wenn wir dies berücksichtigen, so giebt es nur eine Möglichkeit.

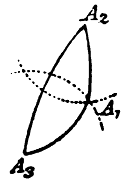


Fig. 9.

Da wir nun das elementare Dreieck bestimmt haben, können wir durch Rückwärtsdurchlaufen der Reductionsprocesse ein Dreieck mit den gegebenen Elementen bestimmen.

Ebenso können wir durch die Polar-Operation ein Dreieck mit gegebenen Winkeln construiren.

Die Ungleichungen, welchen die Seiten und Winkel des elementaren Dreiecks genügen müssen, sind am einfachsten folgendermaassen auszudrücken. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
4\theta_0 &= 2\pi - a_1 - a_2 - a_3, & 4\varphi_0 &= 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3,\\
4\theta_1 &= -a_1 + a_2 + a_3, & 4\varphi_1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\\
4\theta_2 &= a_1 - a_2 + a_3, & 4\varphi_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3,\\
4\theta_3 &= a_1 + a_2 - a_3, & 4\varphi_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3,
\end{aligned}$$

dann müssen alle θ und φ im ersten Quadranten $\left(0-\frac{\pi}{2}\right)$ liegen.

Wenn wir nun auf diese Ungleichungen die Nachbaroperationen anwenden, so finden wir, dass die θ und φ für Dreiecke erster Stufe möglicherweise auch in anderen Quadranten liegen können, wie in der nachstehenden Tabelle angegeben ist.

Wie früher in der Tabelle der Nachbaroperationen lassen sich in den verticalen Zeilen die θ_1, θ_2, θ_3 beliebig mit einander vertauschen, wenn wir nur gleichzeitig in den entsprechenden verticalen Zeilen die φ_1, φ_2, φ_3 vertauschen: (C_6).

Ebenso lassen sich die sämtlichen θ mit den entsprechenden φ vertauschen: (P_2).

Die erste verticale Zeile gibt jedesmal eine der zur Anwendung kommenden Substitutionen beispielsweise an und diese Substitution ist in den letzten drei Fällen in Klammern eingeschlossen, um zu zeigen, dass die (reducirte) Nachbaroperation gemeint ist. Die letzte Zeile gibt die Anzahl der durch C_6, P_2 entstehenden Systeme.

	θ_0	$\theta_1, \theta_2, \theta_3,$	φ_0	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,$	
1	1	1, 1, 1,	1	1, 1, 1,	1
Σ_1	-1	2, 1, 1,	-1	2, 1, 1,	3
$\Sigma_1 S_1$	-2	1, 1, 1,	-2	1, 1, 1,	1
$[\Sigma_1 S_2]$	-1	1, 1, -1,	-1	1, 1, -1,	3
$[\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3]$	2	1, 1, 1,	1	1, 1, 1,	2
$[\Sigma_1 S_1 S_2]$	-1	1, 1, -1,	-1	1, 1, 2,	6
					16

So bekommen wir 16 Möglichkeiten für ein reducirtes Dreieck, welche wir mit Study folgendermaassen classificiren können:

θ	φ	0	1	2	3
A_0 A'_0	A_0 A'_0	1 -2	1 1	1 1	1 1
A_1 A'_1	A_1 A'_1	-1 -1	2 -1	1 1	1 1
A_2 A'_2	A_2 A'_2	-1 -1	1 1	2 -1	1 1
A_3 A'_3	A_3 A'_3	-1 -1	1 1	1 1	2 -1

Mit dem Buchstaben A wird jedesmal eine bestimmte Verteilungsweise der θ auf die 4 Quadranten bezeichnet, ebenso mit A eine Vertheilungsweise der φ.

Die über den letzten verticalen Zeilen stehenden 0, 1, 2, 3 sind die Indices der θ oder φ, und die in diesen Zeilen stehenden Zahlen bestimmen die Quadranten, in denen die θ oder φ liegen können, und so haben wir in der Tabelle die Verteilungsweisen vor uns, welche wir mit A, bez. A bezeichnen wollen. Nun kann A_i mit

A_i oder A'_i, ebenso A'_i mit A_i oder A'_i zusammen gelten, nicht aber A_i mit A_j oder A'_j, noch A'_i mit A_j oder A'_j.

Wir haben also 16 Möglichkeiten für ein reducirtes Dreieck.

Aus der Tabelle lesen wir ab:

Alle reducirten Dreiecke haben ihre θ_i, φ_i in demselben oder in gegenüberliegenden Quadranten.

Wenn wir nun zu allgemeinen Dreiecken übergehen wollen, so bemerken wir zuerst, dass die Operation X_1, welche a_i in $a_i + 2\pi$ verwandelt, folgende Aenderungen in den θ veranlasst:

$$(X_1). \qquad \left.\begin{aligned} \theta'_0 &= \theta_0 + \frac{\pi}{2}, \\ \theta_i &= \theta_i + \frac{\pi}{2}, \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\}.$$

Die allgemeinste Operation der Gruppe $\mathfrak{K}$

$$(\mathfrak{K}). \qquad \left.\begin{aligned} a'_i &= a_i + 2k_i\pi, \\ \alpha'_i &= \alpha_i + 2\varkappa_i\pi, \\ k_1 + k_2 + k_3 &\equiv \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3, \qquad (\text{mod. } 2) \end{aligned}\right\}$$

macht folgende Aenderungen:

$$(\mathfrak{K}). \qquad \left.\begin{aligned} \theta'_0 &= \theta_0 - (k_1 + k_2 + k_3)\frac{\pi}{2}, \\ \theta'_i &= \theta_i - (k_i + k_j + k_k)\frac{\pi}{2} + (k_j + k_k)\pi, \\ \varphi'_0 &= \varphi_0 - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3)\frac{\pi}{2}, \\ \varphi'_i &= \varphi_i - (\varkappa_i + \varkappa_j + \varkappa_k)\frac{\pi}{2} + (\varkappa_j + \varkappa_k)\pi, \end{aligned}\right\}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3).$$

Die Operationen von $\mathfrak{K}$ fügen also, abgesehen von einem gemeinsamen Gliede

$$-(k_1 + k_2 + k_3)\frac{\pi}{2},$$

nur Multipla von π zu den Elementen hinzu.

Daraus folgt also, dass nicht nur alle reducirten Dreiecke, sondern alle aus diesen continuirlich ableitbaren Dreiecke ihre θ_i, φ_i in demselben oder in gegenüberliegenden Quadranten haben. Aus der Gestalt der Operation X_1 aber schliessen wir, dass jedes eigentliche Dreieck, dessen zugehöriges reducirtes Dreieck uneigentlich ist, ebenso wie jedes uneigentliche Dreieck, dessen zugehöriges reducirtes Dreieck eigentlich ist, seine θ_i, φ_i in nebeneinanderliegenden Quadranten haben muss.

§ 6. Gleichungen.

Wir haben in dem letzten Paragraphen gesehen, dass wir aus unter gewissen Beschränkungen gegebenen Seiten, bez. Winkeln, ein reelles Dreieck völlig construiren können. Ebenso lässt es sich direkt vermittelst eines elementaren Dreiecks beweisen, dass, wenn irgend welche drei Elemente in anderer Combination gegeben sind, jedesmal mindestens ein zugehöriges Dreieck bestimmt werden kann.

Die Gesamtheit unserer Dreiecke wird deshalb, wenn wir die Elemente als Coordinaten ansehen, den reellen Bestandteil einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit M_3 im Raum von sechs Dimensionen bilden. Dabei wird die Mannigfaltigkeit transcendent sein, wie wir sogleich sehen werden; was in Beziehung mit der Benennung „transcendente Trigonometrie" steht.

Wir können aber gewisse trigonometrische Functionen der Elemente als Coordinaten ansehen, dann haben wir es mit algebraischer Trigonometrie zu thun; und in der That erweist sich dann die Mannigfaltigkeit als algebraisch.

Um unsere Mannigfaltigkeit allgemein zu definiren, müssen wir zuerst die Gesamtheit der Gleichungen zwischen den Elementen eines reellen Dreiecks aufstellen. Von ihnen sind nur drei unabhängig. Vermittelst dieser Gleichungen können wir hernach den Begriff eines sphärischen Dreiecks in das Gebiet der complexen Variablen analytisch fortsetzen.

Von den Formeln, welche sich in irgend einem Lehrbuche der sphärischen Trigonometrie finden*), wählen wir die sog. Gaussischen aus; wir werden später sehen, dass diese in einem gewissen Sinne das ganze System der überhaupt existirenden Gleichungen völlig ersetzen.

---

*) Vergl. Study: Abschnitt II. § 1.

Von den 12 Gauss'schen Formeln lauten die vier ersten:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)}{\sin\frac{\alpha_1}{2}} = \pm\frac{\cos\frac{1}{2}(a_2-a_3)}{\cos\frac{a_1}{2}}, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)}{\cos\frac{\alpha_1}{2}} = \mp\frac{\cos\frac{1}{2}(a_2+a_3)}{\cos\frac{a_2}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin\frac{\alpha_1}{2}} = \mp\frac{\sin\frac{1}{2}(a_2-a_3)}{\sin\frac{a_1}{2}}, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_3)}{\cos\frac{\alpha_1}{2}} = \pm\frac{\sin\frac{1}{2}(a_2+a_3)}{\sin\frac{a_1}{2}},$$

und hierzu treten die 8 durch Vertauschung der Indices. hervorgehenden Formeln.

Die oberen Vorzeichen stehen alle in Zusammenhang, ebenso die unteren Vorzeichen. Die oberen Vorzeichen gelten für ein elementares Dreieck und daher für alle Dreiecke, welche aus einem elementaren continuirlich abgeleitet werden können, d. h. für alle eigentlichen Dreiecke. Wir haben hiermit eine Definition eines eigentlichen Dreiecks, welche sich in das Gebiet der complexen Variablen fortsetzen lässt.

Die unteren Vorzeichen gelten für die uneigentlichen Dreiecke, womit wir auch hier eine für das complexe Gebiet erweiterte Definition gewonnen haben.

Es zeigt sich also, dass im complexen ebensowohl wie im reellen Gebiete die sphärischen Dreiecke sich in zwei getrennte aber in sich zusammenhängende Classen teilen, nämlich in die eigentlichen und in die uneigentlichen*).

---

*) Vergl. Gauss, Theoria Motus. Liber 1. Sect. II. § 54:

»Quamquam demonstrationem harum propositionum brevitatis caussa hic »praeterire oporteat, quisque tamen earum veritatem in triangulis, quorum nec »latera nec anguli 180° excedunt, haud difficile confirmare poterit. Quodsi qui»dem idea trianguli sphaerici in maxima generalitate concipitur, ut nec latera »nec anguli ullis limitibus restringantur (quod plurima commoda insignia praestat, »attamen quibusdam dilucidationibus praeliminaribus indiget), casus existere pos»sunt, ubi in cunctis aequationibus praecedentibus signum mutare oportet: quo»niam vero signa priora manifesto restituuntur, simulac unus angulorum vel unum »laterum 360° augetur vel diminuitur, signa, qualia tradidimus, semper tuto re»tinere licebit, sive e latere angulisque adiacentibus reliqua determinanda sint, »sive ex angulo lateribusque adiacentibus: semper enim vel quaesitorum valores »ipsi vel 360° a veris diversi hisque adeo aequivalentes per formulas nostras eli»cientur. Dilucidationem copiosorem hujus argumenti ad aliam occasionem nobis »reservamus, quod vero praecepta, quae tum pro solutione problematis nostri tum »in aliis occasionibus formulis istis superstruemus in omnibus casibus generaliter »valent, tantisper adiumento inductionis rigorosae i. e. completae omnium casuum »enumerationis haud difficile comprobari poterit.«

Die Gesamtheit der reellen eigentlichen Dreiecke bildet daher den reellen Zweig einer Mannigfaltigkeit, der eigentlichen Mannigfaltigkeit M_3; und die Gesamtheit der reellen uneigentlichen Dreiecke bildet den reellen Zweig einer anderen Mannigfaltigkeit, der uneigentlichen Mannigfaltigkeit M'_3. Im „transcendenten" Raume sind beide Mannigfaltigkeiten transcendent, im „algebraischen" Raume algebraisch. Da aber die Functionen des halben Winkels in denen des Winkels selbst irrational sind, so werden die beiden Mannigfaltigkeiten auf der ersten Stufe nicht getrennt erscheinen; erst auf den höheren Stufen werden wir es mit zwei verschiedenen algebraischen Mannigfaltigkeiten zu thun haben.

Die Thatsache, dass die eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke verschiedenen algebraischen Gleichungssystemen genügen, also verschiedenen Mannigfaltigkeiten angehören, ist an sich noch nicht hinreichend, um zu beweisen, dass ein eigentliches Dreieck nicht möglicherweise doch aus einem uneigentlichen continuirlich abgeleitet werden kann. Die beiden algebraischen M_3 haben nämlich, weil in einem R_6 gelegen, notwendig gewisse Punkte gemein, und durch diese Punkte oder die entsprechenden Dreiecke scheint ein stetiger Uebergang möglich.

Es wird sich aber zeigen, dass im transcendenten Gebiete kein solcher Uebergang möglich ist, weil den genannten Schnittpunkten der algebraischen Gebilde unendlich grosse Werte der $a_1, \ldots \alpha_3$ entsprechen, die wir von unserer Betrachtung von vornherein ausschliessen.

In Beziehung zu der transcendenten Mannigfaltigkeit gewinnen die gruppentheoretischen Entwickelungen dieses ersten Teils ein merkwürdiges Interesse.

Jede Mannigfaltigkeit, jedes Gebilde im n-fach ausgedehnten Raume besitzt nämlich zwei wichtige zugehörige Gruppen. Die erste ist die Gruppe der affinen Transformationen, vermöge welcher das Gebilde in sich selbst übergeht; diese Gruppe bestimmt die Symmetrie-Eigenschaften der Mannigfaltigkeit, und, wenn sie sich nicht auf die Identität reducirt, so sind wir wirklich durch Festlegung derselben in unserer Kenntnis der Gestalt der Mannigfaltigkeit einen Schritt weiter gekommen. Diese Gruppe ist eine discontinuirliche lineare Gruppe und kann jenachdem endlich oder unendlich sein.

Die zweite in Betracht kommende Gruppe ist notwendigerweise continuirlich und unendlich. Sie besteht aus allen Verzerrungen des Gebildes in sich selbst, enthält daher insbesondere die infinitesimalen Verzerrungen dieser Art. Da nun jede Verzerrung durch eine Aufeinanderfolge infinitesimaler Verzerrungen erzeugt werden kann, so können wir diese letzteren als Erzeugende der Gruppe ansehen. Hiernach ist die Gruppe continuirlich. Diese Gruppe ist aber von keiner endlichen Anzahl Parameter abhängig, sie enthält vielmehr willkürliche Functionen; die Gruppe ist demnach eine unendliche*).

In unserem Falle ist das zu Grunde gelegte Gebilde die transcendente Mannigfaltigkeit selbst; und die Gruppe der zugehörigen affinen Transformationen (der Automorphien, wie wir sagen wollen) ist die Gruppe Γ_Δ.

Die Symmetrie-Eigenschaften unserer Mannigfaltigkeit sind, wie schon in der Einleitung angedeutet war, zahlreich und merkwürdig. Die Mannigfaltigkeit ist in den sechs Hauptrichtungen einfach periodisch (II). Sie geht in sich selbst über durch eine Rotation der Periode 2 um jede der drei vierfach ausgedehnten linearen Mannigfaltigkeiten

$$\left.\begin{aligned} a_i - a_j &= 0, \\ \alpha_i - \alpha_j &= 0, \end{aligned}\right\}$$

und durch Spiegelung an dem dreifach ausgedehnten „Raum"

$$a_1 - \alpha_1 = a_2 - \alpha_2 = a_3 - \alpha_3 = 0.$$

Ausserdem geht sie in sich selbst über vermöge 64 affiner Transformationen (G) eines weniger einfachen Characters. Wir können uns also gestatten, zu sagen:

Die transcendente Mannigfaltigkeit ist in einem sehr hohen Grade regulär.

Die zweite in Betracht kommende Gruppe ist die in § 4 eingeführte continuirliche Gruppe. Diese hatten wir so aufgefasst, dass in den Seiten und Winkeln eines Ausgangsdreiecks kleine Aenderungen gemacht wurden, wobei das Dreieck in ein neues Dreieck übergeführt wurde; und diese Aenderungen hatten wir uns gedacht als durch Bewegung auf der Kugel erzeugt. Wenn wir statt eines einzelnen Dreiecks die Gesamtheit aller Dreiecke betrachten, so sehen wir, dass irgend eine Operation der continuirlichen Gruppe jedes Dreieck in ein anderes Dreieck überführt; obwohl die Stücke, welche wir zu den einzelnen entsprechenden

*) Vergl. Klein, Erlanger Programm. p. 30.

Seiten und Winkeln hinzufügen mögen, in den verschiedenen Fällen ganz verschieden sein können, indem sie von den Elementen des betreffenden Ausgangsdreiecks abhängig erscheinen. Wir sehen also, dass dieselben Aenderungen, im R_6 gedeutet, die transcendente Mannigfaltigkeit in sich selbst verschieben; und unsere Gruppe wird nichts Anderes sein, als die Gesamtheit solcher Verzerrungen.

Die Frage nach der gemeinsamen Untergruppe von Γ_Δ und der continuirlichen Gruppe ist jetzt folgendermaassen zu formuliren:

Welche von den Automorphien der transcendenten Mannigfaltigkeit sind durch continuirliche Verzerrung derselben zu erzeugen?

Die Antwort auf diese Frage steckt in der Entwicklung von § 4. Wenn wir berücksichtigen, dass die transcendente Mannigfaltigkeit nicht irreducibel ist, sondern in die eigentliche und die uneigentliche Mannigfaltigkeit zerfällt, so können wir unsere Resultate folgendermaassen in Worte fassen:

Von den Automorphien (Γ_Δ) der transcendenten Mannigfaltigkeit können wir die Hälfte durch Verzerrung erzeugen: nämlich diejenigen Automorphien, welche die eigentliche sowohl als die uneigentliche Mannigfaltigkeit in sich überführen. Adjungiren wir hierzu die Umformung (X_1), so erzeugen wir die ganze Gruppe der Automorphien. Diese Umformung vertauscht die eigentliche mit der uneigentlichen Mannigfaltigkeit.

Teil II.

Die algebraische Trigonometrie.

---

§ 7. Vorläufige Bemerkungen.

Wenden wir uns nun zu der algebraischen Trigonometrie. Die Probleme, welche wir hier beantworten werden, hatten wir schon in der Einleitung bezeichnet.

Wir definiren zuerst vermittelst sechs algebraischer Functionen von $\cot\frac{a_i}{2}$, $\cot\frac{\alpha_i}{2}$ $(i = 1, 2, 3)$ einen gewissen Raum von sechs Dimensionen, welcher diese Functionen als bestimmende Coordinaten hat, und welcher dementsprechend mit einer gewissen, der Identität zugeordneten Untergruppe von Γ_Δ im engsten Zusammenhange steht. Diese Untergruppe besitzt gegen Γ_Δ einen endlichen Index, welcher zu bestimmen ist; dieser Index ist nach Definition nichts anderes als die Anzahl der für unseren Raum noch übrig bleibenden Operationen von Γ_Δ; und diese Operationen, in den Coordinaten ausgedrückt, bilden eine Gruppe, welche als Grad den genannten Index besitzt. Die hiermit bezeichnete Gruppe muss gefunden werden.

Ferner aber: In unserem Raume haben wir es mit einer gewissen algebraischen Mannigfaltigkeit zu thun; und wir fragen, was ist der Grad derselben? Diese Frage habe ich in zwei einfachen Fällen untersucht.

In einem dritten Falle, welcher vor den beiden ersten den Vorzug hat, dass bei ihm die eigentliche und die uneigentliche Mannigfaltigkeit getrennt erscheinen, habe ich gesucht, ausserdem weitergehende Ueberlegungen zu machen, und als wichtigsten Punkt ein vollständiges System von Gleichungen im Sinne Hilberts für jede der beiden Mannigfaltigkeiten zu bilden. Die Frage nach den gemeinsamen Punkten der beiden Mannigfaltigkeiten kommt hier zur Geltung; und dabei werden die Betrachtungen von §§ 4, 6 vervollständigt. Zugleich erfahren wir Näheres über die Gestalt der Mannigfaltigkeit.

§ 8. Die M_3^4 *).

Als erste Erscheinungsform der Mannigfaltigkeit der sphärischen Dreiecke wählen wir diejenige, welche den niedrigsten Grad, nämlich vier, hat. Auf diese kommen wir folgendermaassen.

Durch Division gehen aus den Gauss'schen die Napier'schen Gleichungen hervor:

$$\frac{\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}}{\cos\frac{\alpha_1-\alpha_3}{2}} = -\frac{\tan\frac{a_1}{2}}{\tan\frac{a_2+a_3}{2}}, \qquad \text{u. s. w.}$$

oder:

$$\frac{\cot\frac{\alpha_2}{2}\,\cot\frac{\alpha_3}{2}-1}{\cot\frac{\alpha_2}{2}\,\cot\frac{\alpha_3}{2}+1} = -\frac{1}{\cot\frac{a_1}{2}}\,\frac{\cot\frac{a_2}{2}\,\cot\frac{a_3}{2}-1}{\cot\frac{a_2}{2}+\cot\frac{a_3}{2}},$$

oder:

$$\cot\frac{\alpha_2}{2}\,\cot\frac{\alpha_3}{2} = \frac{1-\cot\frac{a_2}{2}\cot\frac{a_3}{2}+\cot\frac{a_3}{2}\cot\frac{a_1}{2}+\cot\frac{a_1}{2}\cot\frac{a_2}{2}}{-1+\cot\frac{a_2}{2}\cot\frac{a_3}{2}+\cot\frac{a_3}{2}\cot\frac{a_1}{2}+\cot\frac{a_1}{2}\cot\frac{a_2}{2}}.$$

Diese Gleichungen können wir am einfachsten beherrschen, wenn wir das Coordinatensystem wählen:

$$x_1 = \cot\frac{a_2}{2}\,\cot\frac{a_3}{2}, \qquad \text{u. s. w.}$$

$$x_4 = \cot\frac{\alpha_2}{2}\,\cot\frac{\alpha_3}{2}. \qquad \text{u. s. w.}$$

Die oben geschriebene Gleichung schreibt sich nun:

$$(1) \qquad x_4(-1+x_1+x_2+x_3) = 1-x_1+x_2+x_3,$$

wir haben also eine quadratische Gleichung, und das System der Gleichungen, welche durch Vertauschung der Indices nach den Gruppen C_6, P_2 hervorgehen, können wir am einfachsten als eine Matrix schreiben:

---

*) Der Grad 4, ebensowohl wie der Grad 8 der im nächsten Abschnitte behandelten M_3^8 sind von Study ohne Beweis gegeben worden. Study. p. 186.

$$\begin{Vmatrix} 1-x_1+x_2+x_3, & 1+x_1-x_2+x_3, & 1+x_1+x_2-x_3, & -1+x_1+x_2+x_3 \\ x_4, & x_5, & x_6, & 1 \end{Vmatrix} = 0,$$

oder auch (was dasselbe ist):

$$\begin{Vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & 1 \\ 1-x_4+x_5+x_6, & 1+x_4-x_5+x_6, & 1+x_4+x_5-x_6, & -1+x_4+x_5+x_6 \end{Vmatrix} = 0.$$

Um nun den Grad unserer M_3 zu bestimmen, schneiden wir unsere M_3 mit einer linearen M_3, d. h. wir nehmen drei allgemeine lineare Gleichungen zwischen den x willkürlich an. Diese können wir so umformen, dass x_4, x_5, x_6 als lineare Functionen der übrigen Coordinaten gegeben werden. Dann aber stellt die Gleichung (1) ein hyperbolisches Paraboloïd dar mit asymptotischen Ebenen, welche zu

$$x_4(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

parallel laufen. Die Schaar von Flächen zweiten Grades, welche im entsprechenden Sinne durch die Matrix bestimmt wird, enthält drei derartige Paraboloïde, welche ausser einer gemeinsamen Geraden im Unendlichen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sich in vier Punkten schneiden. Dass die Gerade nicht allen den Flächen der Matrix gemein ist, tritt aus der zweiten Schreibweise hervor. Die Flächen haben daher nur vier Punkte gemein. Dasselbe gilt also von der M_3 der sphärischen Dreiecke und der linearen M_3, mit der wir sie geschnitten hatten; d. h.

Der Grad der M_3 der sphärischen Dreiecke ist im vorliegenden Falle 4.

Wenn wir nun die transcendente Gruppe Γ_Δ in Bezug auf unsere Coordinaten untersuchen, so sehen wir sofort, dass die Coordinaten bei der Gruppe Π und derjenigen Untergruppe von G, welche durch $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ und $S_1S_2S_3$ erzeugt wird, völlig ungeändert bleiben. Die Untergruppe $\{\Pi, \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3, S_1S_2S_3\}$, der Identität zugeordnet, charakterisirt uns demgemäss unsere spezielle algebraische Trigonometrie, welche also, nach der Einleitung, unter der Haupteinteilung erster Stufe erscheint.

Die Gruppe Γ_Δ reducirt sich hier auf die Polar- und Vertauschungsgruppen und auf diejenigen 16 Nachbaroperationen, welche aus G entstehen, wenn wir die Untergruppe $\{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3, S_1S_2S_3\}$ der Identität zuordnen. In den x ausgedrückt, bilden diese 16 Operationen eine Gruppe von Substitutionen, deren eine ich hersetze:

1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Σ_1	x_1	$-x_2$	$-x_3$	$\dfrac{1}{x_4}$	$-\dfrac{x_6}{x_4}$	$-\dfrac{x_5}{x_4}$

Die zu Grunde gelegte Untergruppe hat nach dieser Betrachtung gegen Γ_Δ den Index 192.

Um nun die Untersuchung zu vervollständigen, sollten wir unseren Raum nicht als einfach ansehen, sondern ihn mit einer unendlichen Anzahl Riemannscher Blätter überdecken. Von diesen Blättern hängt die Hälfte unter sich durch Verzweigungsflächen zusammen, die Punkte dieser Blätter repräsentiren die eigentlichen Dreiecke; ebenso hängt die andere Hälfte, die der uneigentlichen Dreiecke, unter sich zusammen. Zwischen den beiden Hälften laufen keine Verzweigungsflächen, sie stossen nur in gewissen Curven*) zusammen, wobei wir uns hier nicht aufhalten wollen, da die gegenseitigen Beziehungen der eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke in einem späteren Capitel untersucht werden sollen.

Des Näheren können wir folgende Angabe machen: Die über-

*) Die Gleichungen dieser Durchdringungscurven bekommen wir aus den Gaussschen Formeln. Diese Formeln lassen sich nämlich folgendermaassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} A_4(x_5+x_6) &= \pm A_1(x_1+1) \\ A_4(x_4-1) &= \mp A_1(x_1-1) \\ A_4(x_5-x_6) &= \mp A_1(x_2-x_3) \end{aligned}\right\} \text{ u. a. vermöge } P_2,\ C_6,$$

wo

$$A_1^2 = \frac{x_1+x_2x_3}{(x_2+x_3x_1)(x_1+x_2x_3)},$$

$$A_4^2 = \frac{x_4+x_5x_6}{(x_5+x_6x_4)(x_4+x_5x_6)}.$$

Diese Gleichungen werden aber für beide Vorzeichen erfüllt, wenn entweder

$$\left.\begin{aligned} x_4+x_5x_6 &= 0, \\ x_1+x_2x_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} x_5+x_6x_4 &= 0, \\ x_2+x_3x_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} x_6+x_4x_5 &= 0, \\ x_3+x_1x_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Letztere Gleichungen zusammen mit der M_3 geben die Durchdringungscurven.

einanderliegenden Punkte der verschiedenen Blätter teilen sich in vier Stämme; die sämmtlichen Dreiecke eines Stammes gehen aus einem anfänglichen Dreieck durch die Gruppe Π hervor. Als die vier anfänglichen Dreiecke können wir dabei folgende annehmen

a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$
a_1	a_2	a_3	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$
$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	α_1	α_2	α_3

,

es gehören dann das erste und zweite zu den eigentlichen, die beiden letzteren zu den uneigentlichen Dreiecken, vorausgesetzt, dass das erste Dreieck elementar gewählt ist.

§ 9. Die M_3^8 (Haupt-Mannigfaltigkeit erster Stufe).

Als zweite Erscheinungsform legen wir den „Hauptraum erster Stufe" zu Grunde, der durch die Coordinatenwahl

$$x_1 = \cot\frac{a_1}{2}, \quad x_4 = \cot\frac{\alpha_1}{2}, \qquad \text{u. s. w.}$$

definirt wird. Durch x_1 werden nämlich $\cos a_1$, $\sin a_1$ völlig bestimmt,

$$\cos a_1 = \frac{x_1^2-1}{x_1^2+1}, \quad \sin a_1 = \frac{2x_1}{x_1^2+1}.$$

Die dem Raume gehörige Untergruppe von Γ_Δ ist hier einfach Π, besitzt also gegen Γ_Δ den Index 768.

Die 64 Nachbaroperationen drücken sich folgendermaassen in den x aus:

1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Σ_1	$-x_1$	x_2	x_3	x_4	$-\frac{1}{x_5}$	$-\frac{1}{x_6}$

und bilden jetzt für sich eine Gruppe.

Dieselben Gleichungen wie in § 7 können auch hier zur Bestimmung des Grades dienen. Wenn wir nur eine siebente Coor- x_7 der Homogeneität halber in die Gleichung einführen, so drückt sich die Gleichung 1, § 8 folgendermaassen aus:

$$(1) \qquad x_5 x_6(-x_7^2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) = x_7^2(x_7^2 - x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2),$$

und wir haben es wieder mit einer Matrix zu thun, nämlich

$$0 = \left\| \begin{matrix} x_7^2 - x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2, & x_7^2 - x_3 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_3, & x_7^2 - x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1, & -x_7^2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2, \\ x_5 x_6, & x_6 x_4, & x_4 x_5, & x_7^2, \end{matrix} \right\|$$

oder aber

$$0 = \left\| \begin{matrix} x_2 x_3, & x_3 x_1, & x_1 x_2, & x_7^2, \\ x_7^2 - x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5, & x_7^2 - x_6 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_6, & x^2 - x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_4, & -x_7^2 + x_5 x_6 + x_6 x_4 + x_4 x_5 . \end{matrix} \right\|$$

Hier, wie im § 8, mögen wir zum Zwecke der Gradbestimmung x_4, x_5, x_6 als lineare Functionen der anderen Coordinaten ansehen.

Die Schaar von Flächen, welche durch die Matrix bestimmt ist, enthält drei Flächen vom Grade 4, mit Gleichungen, welche aus 1 durch Vertauschung der Indices 4, 5, 6 hervorgehen. Diese Flächen sollten sich nach allgemeinen Regeln in 64 Punkten schneiden. Sie haben aber eine besondere gegenseitige Lage, welche die Zahl der gemeinsamen Punkte der Flächen unserer Schaar bis auf 8 reducirt.

Zunächst nämlich enthalten sie den gemeinsamen Kegelschnitt

$$\begin{aligned} x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 &= 0, \\ x_7^2 &= 0, \end{aligned}$$

und zwar berühren sich die Flächen entlang dieser Curve, da x_7^2 auf der linken Seite der zweiten Gleichung erscheint, und die erste der hingeschriebenen Gleichungen den gemeinsamen Tangentenkegel darstellt. Nach allgemeinen Regeln wird also diese Curve 32 gemeinsame Punkte absorbiren*). Diese Absorption von 32 Schnittpunkten findet aber bereits bei folgenden allgemeineren Flächen 4ten Grades statt:

$$\left. \begin{aligned} x_4 x_5 U &= x_7^2 V_1, \\ x_5 x_6 U &= x_7^2 V_2, \\ x_6 x_4 U &= x_7^2 V_3, \end{aligned} \right\}$$

*) Frost, Solid Geometry. 3d Ed. p. 188. Dieses Resultat kann man direkt von der Matrix ablesen. Roberts, Crelle 67.

wo U, V_1, V_2, V_3 allgemeine quadratische Formen darstellen. Nun sind in unserem Falle diese Formen so spezialisirt, dass

$$U = 0, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0$$

gemeinsame Punkte haben, welche mit

$$U = 0, \quad x_7 = 0$$

zusammenfallen. Es muss deshalb eine weitere Reduction stattfinden. Um die gemeinsamen Punkte von U, V_1, V_2, V_3 zu berücksichtigen, können wir das x_7, welches als Factor auf der rechten Seite der Gleichung (1) auftritt, als verschieden von dem x_7 in U, V_1, V_2, V_3 ansehen; versehen wir das erstere mit einem Strich, so wird der Kegelschnitt

$$U = 0, \qquad x_7'^2 = 0$$

für die schon erwähnten 32 Punkte zählen, während die Schnittpunkte von U, V_1, V_2, V_3 jetzt mit diesen nicht zusammenfallen. Berechnen wir die Anzahl dieser Schnittpunkte, so wird dieselbe nicht geändert, wenn wir am Schlusse des Processes x_7' mit x_7 wieder zusammenfallen lassen.

Entwickeln wir in dieser Weise in der Nähe von der Stelle

$$x_7 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

nach Potenzen von x_7, x_1, x_2, so erhalten wir für unsere drei Flächen die approximirenden Flächen zweiten Grades:

$$\begin{aligned} A(-x_7^2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) &= x_7^2 - x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2, \\ B(-x_7^2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) &= x_7^2 + x_2x_3 - x_3x_1 + x_1x_2, \\ C(-x_7^2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) &= x_7^2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_1x_2, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$x_7^2 = x_2x_3 - \frac{1-A}{1+A}(x_3x_1 + x_1x_2) = x_3x_1 - \frac{1-B}{1+B}(x_1x_2 + x_2x_3) = x_1x_2 - \frac{1-C}{1+C}(x_2x_3 + x_3x_1).$$

Wenn also zwei von den drei Coordinaten x_1, x_2, x_3 nicht verschwinden sollen, so folgt:

$$x_2x_3 : x_1x_2 : x_3x_1 = C_1 : C_2 : C_3,$$

wo C_1, C_2, C_3 gewisse Constanten sind, oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = C_1' : C_2' : C_3'.$$

Diese beiden Gleichungen mit einer der oben angeschriebenen quadratischen Gleichungen verbunden liefern 2 Punkte; die Punkte

$$x_7 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$
$$x_7 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$
$$x_7 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_1 = 0,$$

zählen demgemäss beim Schnitt der Flächen zweiten Grades für 6. Diese Punkte zählen also auch als 6 Schnittpunkte der Flächen vierten Grades; lassen wir nun wieder x_7' mit x_7 zusammenfallen, so superponiren sich diese 6 Punkte mit den schon gefundenen 32, welche durch den Kegelschnitt absorbirt werden.

Wir müssen demnach unseren Kegelschnitt für 38 Punkte zählen.

Ausser den hiermit nachgewiesenen gemeinsamen Punkten haben unsere Flächen vierten Grades aber drei Berührungspunkte gemein:

$$x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$
$$x_6 = x_4 = x_7 = 0,$$
$$x_4 = x_5 = x_7 = 0.$$

$x_7 = 0$ ist in der That gemeinsame Tangentenebene von der ersten und zweiten Fläche entlang

$$x_6 = x_7 = 0,$$

von der zweiten und dritten entlang

$$x_4 = x_7 = 0,$$

von der dritten und ersten entlang

$$x_5 = x_7 = 0.$$

In der Nähe eines dieser Punkte, z. B.

$$x_5 = x_6 = x_7 = 0,$$

haben die drei Flächen die folgende Gestalt, wenn wir sie wieder durch Flächen zweiten Grades approximiren:

$$\left.\begin{aligned} x_5 x_6 &= x_7^2, \\ x_6 A &= x_7^2, \\ x_5 A' &= x_7^2. \end{aligned}\right\}$$

Diese Flächen zweiten Grades schneiden sich ausserhalb des in Betracht kommenden Punktes nur da, wo

$$x_7^2 = AA',$$

d. h. in 2 Punkten. Jeder Berührungspunkt zählt deshalb für 6 Schnittpunkte, und wir müssen diesen Punkten entsprechend 3 . 6, im Ganzen also

$$38 + 18 = 56$$

von unserer Zahl 64 subtrahiren. In der That zeigt sich, dass diese Punkte von der zufälligen Auswahl der Unterdeterminanten der Matrix abhängig sind. Es bleibt als Grad der M_3 die Zahl 8, wie behauptet wurde.

§ 10. Die durch die l'Huilier'schen Gleichungen definirten Mannigfaltigkeiten: I. Die eigentliche Mannigfaltigkeit.

In den in §§ 8, 9 untersuchten Räumen haben wir die eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke erst durch Einführung einer unendlichen Anzahl Riemann'scher Blätter unterscheiden können. Jetzt aber werden wir einen solchen Raum aussuchen, in welchem die eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke auf verschiedene Mannigfaltigkeiten verteilt erscheinen.

Zu diesem Zwecke sollen die Gauss'schen Formeln etwas umgeformt werden; wir bekommen dann die zwölf l'Huilier'schen Formeln, nämlich die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\theta_0 \operatorname{tg}\theta_1 &= \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3,\\
\operatorname{tg}\theta_0 \operatorname{ctg}\theta_1 &= \operatorname{ctg}\varphi_0 \operatorname{tg}\varphi_1,\\
\operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{ctg}\theta_3 &= \operatorname{ctg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3,\\
\operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_3 &= \operatorname{tg}\varphi_0 \operatorname{tg}\varphi_1,
\end{aligned}$$

und die durch Permutation hieraus entstehenden. Hier haben θ und φ die Bedeutung von § 5.

Diese Formeln gelten nur für die eigentlichen Dreiecke; ein ähnliches aber anderes System gilt für die uneigentlichen, welches wir aber erst später einführen wollen.

Als Coordinaten wählen wir jetzt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \operatorname{tg}\theta_1, & x_2 &= \operatorname{tg}\theta_2, & x_3 &= \operatorname{tg}\theta_3,\\
x_4 &= \operatorname{tg}\varphi_1, & x_5 &= \operatorname{tg}\varphi_2, & x_6 &= \operatorname{tg}\varphi_3.
\end{aligned}$$

Ferner setzen wir der Kürze halber:

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1}{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3} = \Theta,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1-x_4x_5-x_5x_6-x_6x_4}{x_4+x_5+x_6-x_4x_5x_6} = \Phi.$$

Dann haben wir als Fundamentalgleichungen die folgenden 4:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Theta x_1 &= x_5x_6, & x_2\frac{1}{x_3} &= \frac{1}{x_5}x_6, \\ \Theta\frac{1}{x_1} &= \frac{1}{\Phi}x_4, & x_2x_3 &= \Phi x_4, \end{aligned}$$

und diejenigen acht, welche sich aus ihnen durch Vertauschung der Indices ergeben. Wir nennen diese Gleichungen die l'Huilier'schen Gleichungen.

Für gewisse Zwecke, namentlich für die Behandlung von unendlich weit entfernten Elementen, wird es uns nützlich sein die Gleichungen durch Einführung einer siebenten Variablen x_7 homogen zu schreiben.

Die Gleichungen (1) erscheinen an sich in homogener Form, wenn wir x_7 so in Θ und Φ einführen, dass diese Grössen die Dimensionen einer Coordinate bekommen. Wir ersetzen zu diesem Zwecke nicht nur x_i durch x_i/x_7 sondern auch Θ durch Θ/x_7 und Φ durch Φ/x_7. In homogener Gestalt sollen also Θ und Φ folgende Bedeutung haben:

$$\Theta = x_7^2\frac{x_7^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1}{x_7^2(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3},$$

$$\Phi = x_7^2\frac{x_7^2-x_4x_5-x_5x_6-x_6x_4}{x_7^2(x_4+x_5+x_6)-x_4x_5x_6}.$$

Aus unseren zweiten und dritten Gleichungen (1) lesen wir ab

$$x_1x_4 = x_2x_5 = x_3x_6 = \Theta\Phi,$$

wir bezeichnen den gemeinsamen Werth mit λ.

Multiplicieren wir die erste Gleichung mit x_4, die vierte mit x_1, so haben wir:

$$\lambda\Theta = x_4x_5x_6, \quad \lambda\Phi = x_1x_2x_3.$$

Daraus folgt:

$$\lambda^2 = x_1x_2x_3\Theta, \quad = x_4x_5x_6\Phi;$$

und also:

$$\lambda^2 = x_7^2 \frac{x_7^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1}{x_7^2\left\{\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_3 x_1}\right\} - 1} = x_7^2 \frac{x_7^2 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4}{x_7^2\left\{\frac{1}{x_4 x_5} + \frac{1}{x_5 x_6} + \frac{1}{x_6 x_4}\right\} - 1},$$

das heisst:

$$\lambda^2 = \lambda^2 x_7^2 \frac{x_7^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1}{x_7^2(x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_4) - x_1^2 x_4^2} = \lambda^2 x_7^2 \frac{x_7^2 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4}{x_7^2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - x_1^2 x_4^2}.$$

Wenn also $\lambda \gtrless 0$, so ist

$$1 = x_7^2 \frac{x_7^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1}{x_7^2(x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_4) - x_1^2 x_4^2} = x_7^2 \frac{x_7^2 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4}{x_7^2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - x_1^2 x_4^2};$$

und daher

$$x_7^4 - x_7^2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_4) + x_1^2 x_4^2 = 0.$$

Wir wollen jetzt ausdrücklich zeigen, dass diese Gleichung auch dann besteht, wenn $\lambda = 0$ ist.

Wenn $\lambda = 0$, so ist nach Definition

$$x_1 x_4 = 0,$$

und auch

$$\Theta\Phi = 0.$$

Nehmen wir nun zum Beispiel $\Theta = 0$, so ist

$$x_7^4 - x_7^2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = 0$$

und es ergibt sich aus der ersten der Gleichungen (1)

$$x_4 x_5 = 0, \quad x_5 x_6 = 0, \quad x_6 x_4 = 0.$$

Aus diesen Bedingungen folgt aber in der That, dass unsere Gleichung befriedigt wird. Das Gleiche würde folgen, wenn wir $\Phi = 0$ nehmen.

Setzen wir also:

(2) $$\begin{cases} U = x_2 x_5 - x_3 x_6, \\ U' = x_3 x_6 - x_1 x_4, \end{cases}$$

(3) $$V = x_7^4 - x_7^2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_4) + x_1^2 x_4^2,$$

oder in inhomogener Form

(3a) $$V = 1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4 + x_1^2 x_4^2,$$

so haben wir für die eigentlichen Dreiecke

$$U = 0, \quad U' = 0, \quad V = 0.$$

Dass diese drei Gleichungen von einander unabhängig sind, lässt sich folgendermaassen beweisen.

Zwischen den drei Formen U, U', V bestehen drei Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= U'\cdot U - U\cdot U' + 0\cdot V = 0, \\ \psi_2 &= V\cdot U + 0\cdot U' - U\cdot V = 0, \\ \psi_3 &= 0\cdot U + V\cdot U' - U'\cdot V = 0. \end{aligned}\right\}$$

Wenn nun irgend eine Syzygie zwischen U, U', V vorhanden wäre, so könnten wir, durch Addition einer linearen Verbindung der gegebenen Identitäten, aus dem Coefficient von V alle Glieder entfernen, welche als lineare Verbindung von U, U' darstellbar sind; und aus dem Coefficient von U' alle Glieder, welche U als Factor enthalten. Die so entstehende Syzygie schreiben wir abkürzend folgendermaassen:

$$AU + BU' + CV = 0,$$

wo die A, B, C die in der angedeuteten Weise reducirten Coëfficienten sind.

Wenn nun C' für die Gesamtheit der in C vorhandenen Glieder niedrigster Ordnung in $x_1 \dots x_6$ gesetzt wird, so muss, wegen der Homogeneität von U, U' in diesen Variablen eine identische Gleichung bestehen

$$A'U + B'U' + C' = 0,$$

unter A', B' geeignete Theile von A und B verstanden.

Da aber nach Voraussetzung C' keine lineare Verbindung von U und U' ist, so muss C', und folglich auch C verschwinden. Da nun weiter B nicht U als Factor enthält, so müssen auch A und B verschwinden.

Unsere ursprüngliche Syzygie ist darum nur eine lineare Verbindung der gegebenen Identitäten. Daraus folgt, dass U, U', V von einander unabhängig sind. —

Wir haben also für die eigentlichen Dreiecke drei ganze rationale Gleichungen aufgestellt, welche von einander unabhängig sind. Ausserdem haben wir eine unendliche Anzahl anderer Gleichungen, welche sich in den x rational und ganz ausdrücken; da aber mehr als drei unabhängige Gleichungen zwischen den

Dreieckselementen nicht bestehen mögen, so müssen wir alle diese Gleichungen aus den

$$U = 0, \quad U' = 0, \quad V = 0$$

durch algebraische Operationen herleiten können. Das ist aber nicht alles, wir werden sehen, wenn irgend eine rationale ganze algebraische Gleichung zwischen den Elementen eines eigentlichen Dreiecks besteht:

$$\psi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 0,$$

so hat die linke Seite dieser Gleichung immer die Form

$$\psi = AU + BU' + CV,$$

wo A, B, C ganze rationale Functionen der Coordinaten x sind.

Unsere Ausdrücke U, U', V bilden also ein vollständiges System*) für die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Dreiecke.

Der Beweis dieses Satzes findet sich auf Seite 56 ff., wohin er verschoben ist, damit der entsprechende Beweis für die uneigentliche Mannigfaltigkeit unmittelbar nachfolgen kann.

Wir werden hier den Satz als bewiesen annehmen, und geometrische Resultate daraus schliessen.

Erstens, sage ich, muss der Schnitt der drei M_6

$$U = 0, \quad U' = 0, \quad V = 0$$

irreducibel sein. Denn wenn der Schnitt nicht irreducibel wäre, würde es möglich sein, eine Gleichung

$$\psi\psi' \equiv AU + BU' + CV = 0$$

zu bilden, wo ψ' für die eigentlichen Dreiecke nicht verschwindet, wohl aber ψ, und die A, B, C keinen gemeinsamen Factor haben. Dann aber liesse sich ψ seinerseits nur als lineare Combination der U, U', V mit gebrochenen Coëfficienten darstellen, entgegen der Voraussetzung.

Hieraus folgt:

Die eigentliche M_3 ist der vollkommene Durchschnitt dreier M_6 von den Graden 2, 2, 4; sie besitzt also selbst den Grad 16.

---

*) Hilbert, Mathematische Annalen 36.

Eine naheliegende Frage ist die nach der characteristischen Function*) der eigentlichen Mannigfaltigkeit. Diese Function ist nach Definition eine ganze, rationale, algebraische Function von R, welche, für genügend grosse Werte von R, die Anzahl der Bedingungen liefert, welchen die Coefficienten einer Form Rten Grades der sieben homogenen Coordinaten $x_1 \ldots x_7$ genügen müssen, um für die eigentliche Mannigfaltigkeit zu verschwinden. Sie steht in engem Zusammenhang mit der geometrischen Gestalt der Mannigfaltigkeit, insbesondere ist ihr Grad nichts anderes als die Dimension der Mannigfaltigkeit. Ordnen wir die Function nicht nach fallenden Potenzen R^s sondern nach fallenden binomischen Coefficienten $\binom{R}{s}$, wo

$$\binom{R}{s} = \frac{R \cdot (R-1) \ldots (R-s+1)}{s!},$$

so sind die numerischen Coefficienten in der Function sämtlich ganze Zahlen und der Coefficient des ersten Gliedes ist der Grad der Mannigfaltigkeit. In unserem Falle wird also die characteristische Function die Gestalt haben

$$\chi(R) = 16\binom{R}{3} + a\binom{R}{2} + b\binom{R}{1} + c.$$

Um die anderen Coefficienten a, b, c wirklich zu berechnen, müssen wir berücksichtigen, dass die allgemeinste Form Rten Grades, welche für die eigentliche Mannigfaltigkeit verschwindet, die folgende Gestalt hat:

$$(4) \qquad A_{R-2}U + B_{R-2}U' + C_{R-4}V$$

wo die A, B, C ganze Formen der Variablen $x_1 \ldots x_7$ sind, deren Grad durch die Indices angedeutet wird. Die allgemeinste identisch verschwindende Form Rten Grades der betrachteten Gestalt wird durch die Identität gegeben:

$$(5) \quad (A_{R-4}U' + B_{R-6}V)U + (-A_{R-4}U + C_{R-6}V)U' - (B_{R-6}U + C_{R-6}U')V \equiv 0;$$

denn, wie wir schon gesehen haben, ist die allgemeinste Syzygie zwischen den Fundamentalformen U, U', V, (Syzygie erster

---

*) Hilbert, loc. cit.

Art, wie sie genannt wird), nur eine lineare Verbindung der drei Fundamentalsyzygien erster Art, nämlich der drei Identitäten

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0.$$

Die Coefficienten von U, U', V in (5) können aber selbst identisch verschwinden; dies wird dann, und nur dann, der Fall sein, wenn

$$\begin{aligned} A_{R-4} &= D_{R-8}V, \\ B_{R-6} &= -D_{R-8}U', \\ C_{R-6} &= D_{R-8}U. \end{aligned}$$

Wir haben also eine Fundamentalsyzygie zweiter Art:

$$\psi_{11} = V\psi_1 - U'\psi_2 + U\psi_3 = 0,$$

jede andere Syzygie zwischen den Fundamentalsyzygien erster Art erhalten wir aus ψ_{11} durch Multiplication mit einem Factor.

Da hiernach nur eine Fundamentalsyzygie zweiter Art vorhanden ist, so können wir keine Syzygie höherer Art bilden. Es schliesst sich die Kette der Syzygien nach zwei Schritten *).

Die characteristische Function ist nun, ihrer Definition zufolge, die Anzahl der Coefficienten in der allgemeinsten Form Rten Grades der sieben Variablen, vermindert um die Anzahl der Coefficienten in (4), vermehrt um die Anzahl der Coefficienten in (5), vermindert um die Anzahl der Coefficienten in D_{R-8}.

D. h.

$$\begin{aligned} 6!\,\chi(R) = {} & (R+1)(R+2)\ldots(R+6) - 2(R-1)R\ldots(R+4) \\ & - (R-3)(R-2)\ldots(R+2) + 2(R-5)(R-4)\ldots R \\ & + (R-3)(R-2)\ldots(R+2) - (R-7)(R-6)\ldots(R-2). \end{aligned}$$

Rechnen wir dies aus und ordnen nach fallenden binomischen Coefficienten, so finden wir:

$$\chi(R) = 16\binom{R}{3} + 8\binom{R}{2} + 12R - 3,$$

ein Ausdruck, der in der That die schon oben von vornherein gegebene Gestalt besitzt.

---

*) Hilbert, loc. cit., beweist, dass sich die Kette allemal nach n Schritten schliessen muss, wo n, in unserem Falle $= 7$, die Anzahl der Variablen ist: unser Fall ist also besonders einfach.

Wenn wir nun die Gruppe Γ_Δ betrachten, so sehen wir, dass die Untergruppe, welche wir beim Uebergange zum Raume der $x_1 \ldots x_6$ der Identität zuordnen, diejenige Untergruppe von $\mathfrak{K}$ ist, welche durch die Eigenschaft

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &\equiv 0, \\ \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } 2)$$

definirt ist. Diese Untergruppe erscheint unter der Haupteinteilung zweiter Stufe. Ihr Grad ist die Hälfte des Grades von $\mathfrak{K}$, also $\frac{1}{4}$ desjenigen von Π. Gegen Γ_Δ hat sie daher*) den Index $4 \times 768 = 3072$.

Die in den $x_1 \ldots x_6$ ausgedrückte Gruppe, welche aus Γ_Δ entsteht, indem wir die genannte Untergruppe der Identität zuordnen, und welche 3072 als Grad besitzt, besteht aus C_6, P_2, X_1, X_4 und den „Nachbaroperationen" Σ und S. Dabei ist:

1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Θ	Φ
X_1	$-\frac{1}{x_1}$	$-\frac{1}{x_2}$	$-\frac{1}{x_3}$	x_4	x_5	x_6	$-\frac{1}{\Theta}$	Φ
X_4	x_1	x_2	x_3	$-\frac{1}{x_4}$	$-\frac{1}{x_5}$	$-\frac{1}{x_6}$	Θ	$-\frac{1}{\Phi}$
Σ_1	$-\Theta$	$\frac{1}{x_3}$	$\frac{1}{x_2}$	$-\frac{1}{x_4}$	x_5	x_6	$-x_1$	$-\frac{1}{\Phi}$

Diese Gruppe teilt sich nun in zwei Hälften: die „l'Huilier'sche" Untergruppe

$$\{C_6,\ P_2,\ G_{64},\ X_1X_4\}$$

vom Grade 1536 lässt die eigentliche M_3, wie auch die uneigentliche M_3 ungeändert; die übrigen Substitutionen, welche entstehen, indem man X_1 mit der l'Huilier'schen Untergruppe verbindet, verwandeln die eigentliche M_3 in die uneigentliche.

Die Untergruppe der l'Huilier'schen Gruppe, welche U bis auf einen numerischen Factor ungeändert lässt, ist:

$$\{C_{23},\ P_2,\ X_1X_4,\ \Sigma_1,\ S_1,\ \Sigma_2\Sigma_3,\ S_2S_3\}$$

vom Grade 128. Daher können wir vermittelst der „l'Huilier-

*) Vergl. Seite 9 unten.

schen" Gruppe U in zwölf andere Functionen verwandeln, wie folgt:

$$U = x_2 x_5 - x_3 x_6,$$

$$\Sigma_2 U = \Theta \frac{1}{x_5} - \frac{1}{x_1} x_6 = - \frac{1}{x_1 x_5} \frac{f_0}{(x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3)},$$

$$S_2 U = \Phi \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_4} x_3 = - \frac{1}{x_4 x_2} \frac{\varphi_0}{(x_4 + x_5 + x_6 - x_4 x_5 x_6)},$$

$$S_2 \Sigma_2 U = \frac{1}{\Theta\Phi} - \frac{1}{x_1 x_4} = \frac{1}{x_1 x_4} \frac{Q_0}{(1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1)(1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4)},$$

$$C_{123} U = U', \quad C_{123} f_0 = f_0', \quad C_{123} \varphi_0 = \varphi_0', \quad C_{123} Q_0 = Q_0',$$

$$C_{123}^2 U = U'', \quad C_{123}^2 f_0 = f_0'', \quad C_{123}^2 \varphi_0 = \varphi_0'', \quad C_{123}^2 Q_0 = Q_0'',$$

womit die Bezeichnungen f_0, φ_0, Q_0 eingeführt sind, die in der Folge gebraucht werden sollen. Alle diese Ausdrücke verschwinden nothwendig für die eigentlichen Dreiecke; sie liefern nichts anderes als die 12 l'Huilier'schen Gleichungen.

In der That können wir, wie es sein muss, diese sämtlichen Gleichungen aus den U, U', V linear zusammensetzen; das Resultat ist folgendes:

$$U'' = -U - U',$$

$$V' = C_{123} V = V - (x_1 x_4 + x_2 x_5) U'',$$

$$V'' = C_{123}^2 V = V + (x_1 x_4 + x_3 x_6) U',$$

$$f_0 = (x_1^2 x_4 - x_6) U'' - (x_1 x_2 - 1) x_5 U' - x_1 V,$$

$$\varphi_0 = (x_4^2 x_1 - x_3) U'' - (x_4 x_5 - 1) x_2 U' - x_4 V,$$

$$Q_0 = -V + U''(x_1 x_4 + x_1 x_6 + x_3 x_4) - U'(x_2 x_5 + x_1 x_5 + x_2 x_4) - x_1 x_4 (x_4 f_0 - x_1 x_2 U' - x_3 x_1 U'').$$

Wollen wir jetzt den Raum mit Riemann'schen Blättern versehen, so können wir als Repräsentanten aus der Schaar übereinanderliegender Dreiecke (welche aus einander durch die den Raum definirende Untergruppe hervorgehen), dasjenige wählen, welches a_1, a_2, α_1, α_2 zwischen $0-2\pi$ hat, α_3, a_3 aber zwischen $0-4\pi$ *).

Diese Repräsentanten können wir wieder classificieren (I) in reducirte Dreiecke ($0-2\pi$); (II) in Dreiecke, welche α_3, a_3 zwischen $2\pi-4\pi$ haben, und welche aus den genannten reducirten Dreiecken

*) Die folgenden Erläuterungen beziehen sich selbstverständlich nur auf reelle Dreiecke.

continuirlich ableitbar sind; und (III) und (IV) in Dreiecke, welche entweder a_3 oder α_3, aber nicht beide, zwischen $2\pi - 4\pi$ haben.

I und II erzeugen einen Teil der Mannigfaltigkeit, für welchen λ immer positiv ist, indem θ_i, φ_i immer in demselben oder in gegenüberliegenden Quadranten liegen. (§ 5).

III und IV dagegen erzeugen einen Teil für welchen λ negativ ist, weil θ_i, φ_i in nebeneinanderliegenden Quadranten liegen.

Die Zerlegung der Mannigfaltigkeit in zwei Hälften nach dem Vorzeichen von λ bringt mit sich die Frage, wo und wie hängen diese Hälften zusammen? Die Antwort auf diese Frage führt zu gewissen Uebergangsflächen, für welche $\lambda = 0$ ist. Wir treffen hier auf die Frage, wie weit wir unsere M_3 anschaulich machen können. Flächen können wir wirklich zeichnen, und diese Uebergangsflächen insbesondere, als ausgezeichnete Flächen auf der Mannigfaltigkeit, wollen wir wirklich vor Augen haben.

Wir fragen also, wo die beiden Teile zusammenhängen. Da λ eine ganze Function der homogenen Coordinaten ist, muss in der That $\lambda = 0$ sein.

Wir haben also

$$x_1 x_4 = 0, \quad x_2 x_5 = 0, \quad x_3 x_6 = 0.$$

Dies führt auf acht Tripel verschwindender Coordinaten; für jedes Tripel reducirt sich die Gleichung

$$V = 0$$

auf eine quadratische Gleichung in den drei nicht verschwindenden Coordinaten.

Die beiden Teile der eigentlichen Mannigfaltigkeit treffen sich daher im Endlichen in acht gewöhnlichen Flächen zweiten Grades. Es sind dies die folgenden 4 Flächen und die durch die Polaroperation P_2 aus ihnen hervorgehenden:

1) $$x_1 = x_2 = x_6 = 0, \quad -1 + x_4 x_5 = 0;$$

also ein hyperbolischer Cylinder mit der Axe

$$x_4 = x_5 = 0.$$

2) $$x_1 = x_5 = x_6 = 0, \quad -1 + x_2 x_3 = 0;$$

ein hyperbolischer Cylinder mit der Axe

$$x_2 = x_3 = 0.$$

3) $$x_1 = x_3 = x_5 = 0, \quad -1 + x_4 x_6 = 0;$$

ein hyperbolischer Cylinder mit der Axe

$$x_4 = x_6 = 0.$$

4) $$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad -1 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_4 = 0,$$

oder

$$-1 + \tfrac{1}{2}(x_4 + x_5 + x_6)^2 - \tfrac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) = 0.$$

Nennen wir hier das vom Punkte x auf die Gerade $x_4 = x_5 = x_6$ gefällte Perpendikel r und bezeichnen mit z den Abstand des zum Perpendikel gehörigen Fusspunktes vom Coordinatenanfangspunkte, so wird unsere Gleichung:

$$-1 + \tfrac{3}{2} z^2 - \tfrac{1}{2}(r^2 + z^2) = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$-1 + z^2 - \tfrac{1}{2} r^2 = 0.$$

Hier haben wir ein Rotationshyperboloid mit der Geraden

$$x_4 = x_5 = x_6$$

als Axe und einer Hyperbel mit den Halbaxen 1, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ als erzeugender Curve.

Zusammenfassend:

Wenn wir die eigentliche l'Huilier'sche Mannigfaltigkeit in zwei Hälften zerlegen jenachdem das Vorzeichen von λ positiv oder negativ ist, so haben wir als Uebergangsflächen sechs gleichseitige hyperbolische Cylinder mit den sechs Coordinatenlinien als Hauptaxen und zwei Rotationshyperboloïde mit den Geraden

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad x_4 = x_5 = x_6,$$

bez.

$$x_1 = x_2 = x_3, \qquad x_4 = x_5 = x_6 = 0,$$

als Rotationsaxen.

Durch diese Untersuchung haben wir aber noch etwas Weiteres über die Gestalt der M_3 gelernt; wir haben nämlich die Gebilde gefunden, welche unsere Mannigfaltigkeit mit den verschiedenen dreifach ausgedehnten Räumen gemeinsam hat, welche durch drei verschwindende Coordinaten definirt sind*). Wir haben in der That diese Gebilde als Flächen zweiten Grades für acht dieser Räume bestimmt; wenn wir aber irgend einen anderen der Räume auswählen, so führt dies vermittelst der Gleichungen

$$U = 0, \quad U' = 0,$$

allemal zu unseren Fällen zurück und wir bekommen einen ebenen Schnitt unserer Fläche zweiten Grades.

Nehmen wir z. B.

$$x_2 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_1 x_4 = 0,$$

so bekommen wir den Schnitt

$$x_6 = 0$$

mit einer von zwei schon gefundenen Flächen zweiten Grades.

Im Allgemeinen hat eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit im R_6 mit einer zweiten (und insbesondere einer linearen Mannigfaltigkeit) nur eine endliche Anzahl von Punkten gemein; unsere Mannigfaltigkeit hat also gegen die untersuchten linearen Räume eine ganz besondere Lage.

Die Anzahl der axialen Räume ist 20; in 8 Fällen ist der Schnitt mit unserer Mannigfaltigkeit eine Fläche zweiten Grades und in 12 Fällen eine ebene Curve zweiten Grades, welche auf einer der genannten Flächen liegt.

§ 11. Die durch die l'Huilier'schen Gleichungen definirten Mannigfaltigkeiten: II. Die uneigentliche Mannigfaltigkeit.

Durch Anwendung der Operation X_1 (oder X_1 und der l'Huilier'schen Untergruppe) auf die 12 Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen kommen wir auf 12 Gleichungen, welche für die uneigentlichen Dreiecke gelten, die 12 uneigentlichen l'Huilier'schen Gleichungen. Es sind dies:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \Theta x_1 &= \frac{1}{x_5 x_6}, & \qquad \frac{x_2}{x_3} &= \frac{x_5}{x_6}, \\ \frac{\Theta}{x_1} &= \frac{\Phi}{x_4}, & \qquad x_2 x_3 &= \frac{1}{\Phi x_4}, \end{aligned}$$

beziehungsweise die 8 Gleichungen, die aus ihnen durch Vertauschung der Indices hervorgehen.

*) Diese Räume werde ich weiterhin „axiale Räume“ nennen.

Es ist hier zu bemerken, dass diese Gleichungen, wenn wir homogene Variablen einführen, nicht, wie die entsprechenden eigentlichen Gleichungen, ihre Form behalten, d. h. dass nun x_7 explicite hervortritt. Die homogenen Gleichungen lauten nämlich:

$$
\text{(1a)} \qquad \left.\begin{aligned}
\frac{\Theta x_1}{x_7^2} &= \frac{x_7^2}{x_5 x_6},\\
\frac{\Theta}{x_1} &= \frac{\Phi}{x_4},\\
\frac{x_2}{x_3} &= \frac{x_5}{x_6},\\
\frac{x_2 x_3}{x_7^2} &= \frac{x_7^2}{\Phi x_4}.
\end{aligned}\right\}\ \text{etc.}
$$

Dementsprechend kommen wir auf 12 für die uneigentlichen Dreiecke verschwindende Formen, von denen vier als Repräsentanten hingeschrieben werden sollen. Die anderen, welche durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehen, werde ich, wie dies schon bei den eigentlichen Formen geschah, mit Strichen bezeichnen. Unsere 4 Formen sind:

$$U_1 = x_3 x_5 - x_2 x_6 = x_5 x_6 (X_4 U),$$

$$f = x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3 - x_1 x_5 x_6 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1) = x_5 x_6 (X_4 f_0),$$

$$\varphi = x_4 + x_5 + x_6 - x_4 x_5 x_6 - x_4 x_2 x_3 (1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4) = x_2 x_3 (X_1 \varphi_0),$$

$$Q = x_4 (x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3)(1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4 \left(\frac{x_1}{x_4} - \frac{\Theta}{\Phi}\right) = x_1^2 x_2 x_3 (X_1 Q_0).$$

Zwischen den drei Formen U_1, U_1', U_1'' bestehen die Syzygien:

$$\psi_1 = x_1 U_1 + x_2 U_1' + x_3 U_1'' = 0,$$

$$\psi_2 = x_4 U_1 + x_5 U_1' + x_6 U_1'' = 0.$$

Eine einfache Umformung gibt φ in der Gestalt:

$$\varphi = x_4 + x_5 + x_6 - x_4 x_2 x_3 - x_4 x_5 x_6 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_5 - x_3 x_1) + x_3 x_4 x_6 U_1'' - x_2 x_4 x_5 U_1'.$$

Daraus folgen drei weitere Syzygien:

$$\psi_3 = x_1 \varphi - x_4 f - (1 - x_1 x_4 x_2 x_5) U_1' + (1 - x_1 x_4 x_3 x_6) U_1'' = 0,$$

$$\psi_4 = x_2 \varphi - x_5 f - (1 - x_2 x_5 x_3 x_6) U_1'' + (1 - x_2 x_5 x_1 x_4) U_1 + P U_1'' = 0,$$

$$\psi_5 = x_3 \varphi - x_6 f - (1 - x_3 x_6 x_1 x_4) U_1 + (1 - x_3 x_6 x_2 x_5) U_1' - P U_1' = 0,$$

wo

$$P = x_2 x_3 (1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4) + x_5 x_6 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1).$$

Wir wollen jetzt beweisen, dass die einzigen Syzygien erster Art, welche zwischen den Fundamentalformen U_1, U'_1, U''_1, f, φ bestehen mögen, lineare Verbindungen der fünf Fundamental-Syzygien

$$\psi_1 = 0, \ldots\ldots \psi_5 = 0$$

sind.

Zunächst, wenn eine Syzygie vorgelegt ist

$$AU_1 + BU'_1 + CU''_1 + Df + E\varphi = 0,$$

wo A, B, C, D, E, f und φ durch Einführung von x_7 in homogener Form geschrieben zu denken sind, so können wir die Coefficienten durch Benutzung der gefundenen Syzygien so umgestalten, dass E keine der Variablen x_1, x_2, x_3 enthält.

Setzen wir jetzt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, so muss die Gleichung

$$E\left\{(x_4 + x_5 + x_6)\ x_7^2 - x_4 x_5 x_6\right\} x_7^2 = 0$$

identisch befriedigt werden. Es folgt also

$$E \equiv 0.$$

Wir haben nun nur die einfachere Syzygie zu untersuchen:

$$AU_1 + BU'_1 + CU''_1 + Df = 0.$$

Hier können wir wieder die Coefficienten so umgestalten, dass weder x_1 noch x_4 in A vorkommt, und dass D kein Glied mit $x_3 x_5$, $x_1 x_5$, oder $x_1 x_6$ enthält; denn solche Glieder können wir unter Benutzung der uns bekannten Syzygien entfernen.

Setzen wir hier $x_1 = x_4 = 0$, so muss die Gleichung

$$AU_1 + [D]_{x_1 = x_4 = 0}\,(x_2 + x_3) x_7^4 = 0$$

für alle Werte von x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 befriedigt werden. Da nun D kein Glied mit $x_3 x_5$ enthält, so ist die Lösung

$$[D]_{x_1 = x_4 = 0} = MU_1, \qquad A = M(x_2 + x_3) x_7^4$$

nicht zulässig. Es muss demnach sein:

$$A = 0, \qquad [D]_{x_1 = x_4 = 0} = 0.$$

Da aber D weder $x_1 x_5$ noch $x_1 x_6$ enthält und doch wegen der Gestalt von f, U'_1, U''_1 kein Glied in x_1, x_2, x_3 allein enthalten kann, so muss D den Factor x_4 enthalten.

Die Syzygie reducirt sich daher auf

$$BU'_1 + CU''_1 + x_4 Ef = 0.$$

Da nun

$$U_1' = x_1 x_6 - x_3 x_4, \qquad U_1'' = x_2 x_4 - x_1 x_5,$$

so muss

$$B = M x_5, \qquad C = M x_6$$

sein, damit $BU_1' + CU_1''$ den Factor x_4 enthält.

Berücksichtigen wir nun, dass

$$x_5 U_1' + x_6 U_1'' = -x_4 U_1 \quad \text{ist,}$$

so lässt sich unsere Syzygie in der Gestalt schreiben

$$-M x_4 U_1 + x_4 E f = 0.$$

Dies ist wiederum nur möglich, wenn

$$E = 0,$$
$$M = 0,$$

da doch E nicht U_1 als Factor enthalten kann.

Es folgt aus dieser Betrachtung, dass alle möglichen Syzygien zwischen U_1, U_1', U_1'', f, φ als lineare Verbindungen von den fünf Fundamentalsyzygien darstellbar sind.

Was die sieben anderen l'Huilierschen Formeln betrifft, so ergibt sich zunächst nach einer Zwischenrechnung:

$$Q = x_1 f' - x_4 \varphi' - (x_1 x_4 + x_2 x_5) U_1' + (x_1 + x_2)(x_4 + x_6) U_1'' + (x_1 x_2 + x_4 x_5)(x_1 x_4 U_1 - x_2 x_6 U_1'').$$

Q ist daher überflüssig. Dasselbe gilt von den gestrichenen f und φ, denn wir sehen sofort:

$$\begin{aligned}
f' - f &= -x_6 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1)\, U_1'', \\
f'' - f &= +x_5 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1)\, U_1', \\
\varphi' - \varphi &= +x_3 (1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4)\, U_1'', \\
\varphi'' - \varphi &= -x_2 (1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4)\, U_1'.
\end{aligned}$$

Unsere 12 Formen sind deshalb nichts anderes als lineare Verbindungen der 5 Formen U_1, U_1', U_1'', f, φ.

Diese 5 Formen bilden in der That ein **vollständiges System** für die uneigentlichen Dreiecke. Der Beweis dieses Satzes findet sich p. 60 ff. Wir werden den Satz hier als bewiesen annehmen und folgendermaassen formuliren:

Das vollständige System für die uneigentliche Mannigfaltigkeit besteht aus 5 Formen U_1, U_1', U_1'', f, φ von den Graden 2, 2, 2, 5, 5. Zwischen diesen Formen bestehen fünf Syzygien:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
\psi_1 &= x_1 U_1 + x_2 U_1' + x_3 U_1'' = 0,\\
\psi_2 &= x_4 U_1 + x_5 U_1' + x_6 U_1'' = 0,\\
\psi_3 &= x_1 \varphi - x_4 f + (1 - x_1 x_4 x_3 x_6) U_1'' - (1 - x_1 x_4 x_2 x_5) U_1' = 0,\\
\psi_4 &= x_2 \varphi - x_5 f + (1 - x_2 x_5 x_1 x_4) U_1 - (1 - x_2 x_5 x_3 x_6 - P) U_1'' = 0,\\
\psi_5 &= x_3 \varphi - x_6 f + (1 - x_3 x_6 x_2 x_5 - P) U_1' - (1 - x_3 x_6 x_1 x_4) U_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Des Näheren stellt sich die Sache folgendermaassen. Die drei Gleichungen U_1, U_1', U_1'' haben ausser der linearen Mannigfaltigkeit $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, die nicht in Betracht kommt, eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit dritten Grades M_4^3 gemein. Diese M_4^3 hat mit f eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit fünfzehnten Grades gemein. Diese aber zerfällt nach den drei letzten Syzygien in zwei Teile: erstens, die lineare Mannigfaltigkeit

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

welche wieder nicht in Betracht kommt, und zweitens, eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit vierzehnten Grades, welche in $\varphi = 0$ enthalten ist.

Diese letztere ist also unsere Mannigfaltigkeit, welche daher den Grad 14 besitzt.

Die Aufstellung der characteristischen Function für die uneigentliche Mannigfaltigkeit gewinnt nun ein besonderes Interesse aus dem Grunde, dass wirkliche Syzygien, nicht nur Identitäten, zwischen den Fundamentalformen U_1, U_1', U_1'', f, φ bestehen. Nach der vorangehenden Entwickelung muss die Function die Gestalt haben

$$\chi(R) = 14\binom{R}{3} + a\binom{R}{2} + b\binom{R}{1} + c,$$

und die Berechnung der Coefficienten a, b, c geschieht nun in ähnlicher Weise, wie für die characteristische Function des eigentlichen Falles.

Die allgemeinste Form von der Ordnung R, welche für die uneigentliche Mannigfaltigkeit verschwindet, hat die Gestalt

$$(2)\qquad A_{R-2} U_1 + B_{R-2} U_1' + C_{R-2} U_1'' + D_{R-5} f + E_{R-5} \varphi,$$

wo wir f und φ durch Einführung von x_7 in homogener Weise geschrieben denken.

Die allgemeinste identisch verschwindende Form wird durch eine lineare Verbindung der 5 Fundamentalsyzygien erster Art ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 geliefert:

$$
\begin{aligned}
&[A_{R-3}x_1+B_{R-3}x_4 \qquad +D_{R-6}(x_7^4-x_1x_4x_2x_5)+E_{R-6}(-x_7^4+x_2x_5x_3x_6)]\,U_1\\
&+[A_{R-3}x_2+B_{R-3}x_5+C_{R-6}(-x_7+x_1x_4x_2x_5) \qquad +E_{R-6}(-x_7^4+x_2x_5x_3x_6+P)]\,U'_1\\
(3)\;&+[A_{R-3}x_3+B_{R-3}x_6+C_{R-6}(x_7-x_3x_6x_1x_4)+D_{R-6}(x_7^4-x_2x_5x_3x_6-P)]\,U''_1\\
&\qquad +[C_{R-6}x_1+D_{R-6}x_2+E_{R-6}x_3]\,\varphi\\
&\qquad -[C_{R-6}x_4+D_{R-6}x_5+E_{R-6}x_6]\,f = 0.
\end{aligned}
$$

Wenn wir untersuchen, ob wir A, B, C, D, E so bestimmen können, dass die in Klammer eingesetzten Coefficienten verschwinden, so sehen wir aus den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
C_{R-6}x_1+D_{R-6}x_2+E_{R-6}x_3 &= 0,\\
C_{R-6}x_4+D_{R-6}x_5+E_{R-6}x_6 &= 0,
\end{aligned}
$$

dass (wenn C, D und E nicht identisch verschwinden, was auf den trivialen Fall führt, wo auch A und B identisch verschwinden)

$$C_{R-6} = M_{R-8}U_1, \qquad D_{R-6} = M_{R-8}U'_1, \qquad E_{R-6} = M_{R-8}U''_1$$

gesetzt werden kann.

Führen wir diese Werte in die ersten drei Coefficienten ein und setzen die Coefficienten gleich Null, so haben wir die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&A_{R-3}x_1+B_{R-3}x_4 \qquad +M_{R-8}U'_1(x_7^4-x_1x_4x_2x_5)+M_{R-8}U''_1(-x_7^4+x_3x_6x_1x_4)=0,\\
&A_{R-3}x_2+B_{R-3}x_5+M_{R-8}U_1(-x_7^4+x_1x_4x_2x_5) \;+M_{R-8}U''_1(-x_7^4+x_2x_5x_3x_6+P)=0,\\
&A_{R-3}x_3+B_{R-3}x_6+M_{R-8}U_1(x_7^4-x_3x_6x_1x_4)+M_{R-8}U'_1(x_7^4-x_2x_5x_3x_6-P) \quad =0.
\end{aligned}
$$

Multiplicieren wir hier die erste Gleichung mit U_1, die zweite mit U'_1, die dritte mit U''_1 und addiren, so bekommen wir auf der linken Seite, wie auf der rechten Null: diese drei Gleichungen sind also nicht von einander unabhängig; und wenn wir A und B aus den beiden ersten bestimmen, so wird die dritte von selbst befriedigt sein.

Durch eine solche Rechnung, oder, was einfacher ist, durch Vergleichung mit den Syzygien (1), finden wir als Werte der A, B

$$
\begin{aligned}
A_{R-3} &= -M_{R-8}\varphi,\\
B_{R-3} &= M_{R-8}f.
\end{aligned}
$$

Es besteht also zwischen den fünf Fundamentalsyzygien erster Art eine Fundamentalsyzygie zweiter Art

$$-\varphi\psi_1+f\psi_2+U_1\psi_3+U'_1\psi_4+U''_1\psi_5 = 0.$$

Alle andere Syzygien zweiter Art bekommt man hieraus durch Multiplication mit einem Factor.

Syzygien höherer Art gibt es wie für die eigentliche Mannigfaltigkeit auch hier nicht. Die Kette der Syzygien schliesst sich wieder nach zwei Schritten.

Die characteristische Function ist nun die Anzahl der Coefficienten in der allgemeinsten Form R-ter Ordnung in $x_1 \ldots x_7$, vermindert um die Anzahl der Coefficienten in (2), vermehrt um die Anzahl der Coefficienten in (3), vermindert um die Anzahl der Coefficienten in M_{R-8}.

Hiernach haben wir:

$$\begin{aligned} 6!\,\chi(R) = &(R+1)(R+2)\ldots(R+6) \\ &-3(R-1)R\ldots(R+4)-2(R-4)(R-3)\ldots(R+1) \\ &+2(R-2)(R-1)\ldots(R+3)+3(R-5)(R-4)\ldots R \\ &-(R-7)(R-6)\ldots(R-2), \end{aligned}$$

oder nach Ausführung der Rechnung:

$$\chi(R) = 14\binom{R}{3}+7\binom{R}{2}+12R-6.$$

Wie die eigentliche, so können wir auch die uneigentliche M_3', so weit sie im Reellen verläuft, in zwei Hälften teilen, welche sich durch das Vorzeichen einer ausgezeichneten Function unterscheiden. Als solche wählen wir:

$$\mu = \frac{x_1}{x_4} = \frac{x_2}{x_5} = \frac{x_3}{x_6} = \frac{\Theta}{\Phi},$$

$$\mu^2 = \Theta x_1 x_2 x_3, \qquad \mu^{-2} = \Phi x_4 x_5 x_6.$$

Wo die beiden Hälften an einander stossen, muss entweder sein

(A) $\qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad x_4+x_5+x_6-x_4x_5x_6 = 0,$

oder

(B) $\qquad x_4 = x_5 = x_6 = 0, \qquad x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3 = 0.$

Die Gestalt der hier in Betracht kommenden Flächen dritten Grades habe ich in einem Anhange[1]) discutirt.

Wenn wir die Schnitte suchen, welche die uneigentliche Mannigfaltigkeit mit den dreifach ausgedehnten „axialen Räumen" besitzt, so finden wir, dass, ausser Teilen, welche im Unendlichen liegen, die beiden gefundenen Flächen dritten Grades alle Möglichkeiten erschöpfen. Denn, wenn z. B. zwei von den verschwinden-

1) p. 64 ff.

den Coordinaten, welche den in Betracht kommenden Raum definiren

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

sind, dann muss vermöge unserer Gleichungen entweder

$$x_3 = 0,$$

oder

$$x_4 = 0, \qquad x_5 = 0 \text{ sein.}$$

In letzterem Falle aber reduciren sich f und φ, wenn wir dieselben durch Einführung von einer siebenten Coordinate x_7 homogen machen,

$$f \text{ auf } x_3 x_7^4,$$
$$\varphi \text{ auf } x_6 x_7^4,$$

es muss demgemäss

$$x_7^4 = 0 \text{ sein.}$$

Die Schnitte

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0,$$
$$x_1 = x_2 = x_5 = 0$$

liegen daher ganz im Unendlichen. Der Schnitt

$$x_1 = x_2 = x_6 = 0$$

zerfällt demgemäss in die zwei unendlich weit liegenden Geraden

$$x_1 = x_2 = x_6 = x_4 x_5 = x_7^4$$

und den Schnitt der Fläche A mit der Ebene

$$x_6 = 0.$$

Letzterer besteht, soweit er im Endlichen verläuft, aus der zweifach gezählten Geraden

$$x_4 + x_5 = 0,$$

welche eine von den drei auf A liegenden nicht unendlich fernen reellen Geraden ist.

Wir sehen also, die uneigentliche Mannigfaltigkeit sowohl wie die eigentliche hat gegen die „axialen Räume“ eine eigentümliche

Lage. Sie wird von einem beliebigen derselben nicht in einer endlichen (14) Anzahl von Punkten, sondern in einer Fläche oder in geraden Linien geschnitten; diese Schnitte sind in der That folgendermaassen characterisirt:

Der Schnitt der uneigentlichen Mannigfaltigkeit mit einem „axialen Raume" ist entweder eine der Flächen A, B dritter Ordnung, oder er besteht aus gewissen mehrfach gezählten Geraden im Unendlichen mit etwa einer der auf A, B liegenden im Endlichen verlaufenden reellen Geraden.

§ 12. Gemeinsame Punkte der beiden l'Huilier'schen Mannigfaltigkeiten.

Die gemeinsamen Punkte unserer beiden Mannigfaltigkeiten werden durch die Gleichungen geliefert:

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad V = 0,$$
$$U_1 = 0, \qquad U_1' = 0, \qquad U_1'' = 0, \qquad f = 0, \qquad \varphi = 0.$$

Nehmen wir zuerst die Gleichungen

$$\begin{aligned} U \; &= x_2 x_5 - x_3 x_6 = 0, \\ U' \; &= x_3 x_6 - x_1 x_4 = 0, \\ U_1 \; &= x_3 x_5 - x_2 x_6 = 0, \\ U_1' \; &= x_1 x_6 - x_3 x_4 = 0, \\ U_1'' &= x_2 x_4 - x_1 x_5 = 0. \end{aligned}$$

Verschwindet hier beispielsweise x_1, so kommt:

$$x_2 x_5 = 0, \qquad x_3 x_6 = 0, \qquad x_3 x_4 = 0, \qquad x_2 x_4 = 0,$$
$$x_3 x_5 - x_2 x_6 = 0;$$

analog wird die Sache, wenn eine beliebige andere Coordinate verschwindet; es muss also allemal entweder $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, oder aber $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ sein. Wenn keine Coordinate verschwindet, so können wir U_1', U_1'' etwa mit x_4 multiplicieren und dann $U = 0$, $U' = 0$ benutzen.

So entsteht:

$$x_3 (x_6^2 - x_4^2) = 0,$$
$$x_2 (x_4^2 - x_5^2) = 0,$$

und also

$$x_4^2 = x_5^2 = x_6^2.$$

Wir können also unsere 5 Gleichungen durch die drei folgenden Systeme ersetzen:

1) $$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$

2) $$x_4 = 0, \qquad x_5 = 0, \qquad x_6 = 0.$$

3) $$\begin{cases} x_4^2 = x_5^2 = x_6^2, \\ x_1 x_4 = x_2 x_5 = x_3 x_6. \end{cases}$$

Diese müssen wir mit folgenden Gleichungen combinieren:

$$\begin{aligned} V &= 1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4 + x_1^2 x_4^2 = 0, \\ f &= x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3 - x_1 x_5 x_6 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1) = 0, \\ \varphi &= x_4 + x_5 + x_6 - x_4 x_5 x_6 - x_4 x_2 x_3 (1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4) = 0. \end{aligned}$$

Schreiben wir unsere Gleichungen vorübergehend in homogener Form, so folgt hieraus in dem Falle 1):

$$\left.\begin{aligned} x_7^4 - x_7^2 (x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_4) &= 0, \\ x_7^4 (x_4 + x_5 + x_6) - x_7^2 x_4 x_5 x_6 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Entweder also es ist $x_7^2 = 0$, oder, wieder inhomogen geschrieben,

$$\left.\begin{aligned} 1 - x_4 x_5 - x_5 x_6 - x_6 x_4 &= 0, \\ x_4 + x_5 + x_6 - x_4 x_5 x_6 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Multiplicieren wir die erste dieser Gleichungen mit x_4 und subtrahiren wir sie von der zweiten, so folgt:

$$(x_5 + x_6)(1 + x_4^2) = 0.$$

In ähnlicher Weise kommt:

$$\begin{aligned} (x_6 + x_4)(1 + x_5^2) &= 0, \\ (x_4 + x_5)(1 + x_6^2) &= 0. \end{aligned}$$

Unsere zwei Gleichungen zerfallen also in drei Systeme:

$$\left.\begin{aligned} 1 + x_4^2 &= 0, \\ x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 1 + x_5^2 &= 0, \\ x_5 + x_6 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 1 + x_6^2 &= 0, \\ x_6 + x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Aus Symmetriegründen müssen wir einen ähnlichen Schluss in dem Falle (2) ziehen.

Wenn also **eine** Coordinate verschwindet so haben wir nur folgende Möglichkeiten:

1) $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$

$$\text{Entweder} \quad x_7 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oder} \begin{cases} 1+x_4^2 = 0, \\ x_4+x_5 = 0. \end{cases} \\ \text{oder} \begin{cases} 1+x_5^2 = 0, \\ x_5+x_6 = 0. \end{cases} \\ \text{oder} \begin{cases} 1+x_6 = 0, \\ x_6+x_4 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

oder

2) $x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0.$

$$\text{Entweder} \quad x_7 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oder} \begin{cases} 1+x_1^2 = 0, \\ x_1+x_2 = 0. \end{cases} \\ \text{oder} \begin{cases} 1+x_2^2 = 0, \\ x_2+x_3 = 0. \end{cases} \\ \text{oder} \begin{cases} 1+x_3^2 = 0, \\ x_3+x_1 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

In dem Falle 3) haben wir für nicht verschwindende Werte

$$\left. \begin{array}{r} x_4^2 = x_5^2 = x_6^2, \\ x_1 x_4 = x_2 x_5 = x_3 x_6. \end{array} \right\}$$

Setzen wir zuerst

$$\left. \begin{array}{l} x_4 = -x_5 = x_6, \\ x_1 = -x_2 = x_3, \end{array} \right\}$$

oder aber

$$\left. \begin{array}{l} x_4 = x_5 = -x_6, \\ x_1 = x_2 = -x_3 \end{array} \right\}$$

in V, f und φ so entsteht

$$1 + x_1^2 + x_4^2 + x_1^2 x_4^2 = 0,$$
$$1 + x_1^2 + x_4^2 - x_1^2 x_4^2 = 0,$$

oder, durch Addition,

$$x_1^2 x_4^2 = 0,$$

was nicht zulässig ist, da wir den Fall verschwindender Coordinaten schon erledigt haben. Es muss also sein:

$$x_1 = x_2 = x_3,$$
$$x_4 = x_5 = x_6,$$

und daher

$$1-3x_1^2-3x_4^2+\ x_1^2x_4^2 = 0,$$
$$3-\ x_1^2-\ x_4^2+3x_1^2x_4^2 = 0.$$

Hieraus folgt durch Addition und Subtraction:

$$\left.\begin{aligned} 1+x_1^2x_4^2 &= 0, \\ x_1^2+x_4^2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

das heisst

$$x_1^2 = -x_4^2 = \pm 1.$$

Wenn wir also von den Fällen absehen, in denen eine Coordinate verschwindet, so haben die beiden Mannigfaltigkeiten noch 8 gemeinsame Punkte, welche in folgendem Schema gegeben werden:

$x_1 = x_2 = x_3 =$	1	1	-1	-1	i	i	$-i$	$-i$
$x_4 = x_5 = x_6 =$	i	$-i$	i	$-i$	1	-1	1	-1

Zusammenfassend können wir sagen:

Unsere beiden Mannigfaltigkeiten besitzen, ausser zwei gemeinsamen Ebenen im Unendlichen, nämlich:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_7 = 0,$$

und

$$x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 0,$$

zwölf im Endlichen gelegene gemeinsame imaginäre Geraden von dem Typus

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad 1+x_4^2 = 0, \quad x_4+x_5 = 0,$$

und 8 im Endlichen gelegene imaginäre Schnittpunkte von dem Typus

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \qquad x_4 = x_5 = x_6 = i.$$

Weitere gemeinsame Punkte existiren nicht.

Nun ist sehr bemerkenswert, dass, obwohl die algebraischen eigentlichen und uneigentlichen Mannigfaltigkeiten sich in den hiermit aufgezählten im Endlichen gelegenen imaginären Punkten treffen, die entsprechenden transcendenten Mannigfaltigkeiten im Endlichen keine gemeinsamen Punkte haben.

Denn der Winkel arc. tang. i ist ein complexer Winkel mit unendlich grossem imaginären Teil und unbestimmtem reellen Teil.

Die im Endlichen gelegenen Schnittpunkte der algebraischen Mannigfaltigkeiten geben also jedesmal für einige θ oder φ unendliche Werte.

Die im Unendlichen gelegenenen gemeinsamen Ebenen aber, welche augenscheinlich endliche Werte für die θ und φ und daher für die a, α geben würden, sind nicht auf den transcendenten Fall zu übertragen; weil sie nämlich, wie leicht zu sehen ist, durch die Wahl der algebraischen Coordinaten eingeführt worden sind. Wenn wir die 12 l'Huilier'schen Gleichungen ansehen, so genügen die unendlichen Lösungen zwar den ganzen Gleichungen

$$f_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

nicht aber den gebrochenen Gleichungen, aus denen wir diese ganzen Gleichungen abgeleitet hatten.

Im transcendenten Gebiete also gibt es keine (reelle oder complexe) Dreiecke, welche endliche Elemente besitzen und zu gleicher Zeit eigentlich und uneigentlich sind.

Damit haben wir das Resultat, welches schon p. 15 gegeben war, bewiesen:

Die eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke sind nicht continuirlich aus einander abzuleiten, wenn man nicht unendliche imaginäre Werthe der a_i, α_i benutzen will, ebensowenig ist die Operation X_1 continuirlich ausführbar.

§ 13. **Das vollständige System U, U', V des eigentlichen M_3.**

Für ein eigentliches Dreieck haben wir früher die Gleichungen aufgestellt:

$$x_1 x_4 = x_2 x_5 = x_3 x_6 = \lambda \tag{1}$$

$$\lambda^2 = \Theta x_1 x_2 x_3 = \Phi x_4 x_5 x_6 . \tag{2}$$

Wir ordnen die fernere Ueberlegung nun folgendermassen:

I. Irrationalität von λ in x_1, x_2, x_3 bez. in x_4, x_5, x_6 und Normirung der für die eigentlichen Dreiecke verschwindenden Formen.

Wenn wir irgend eine für die eigentlichen Dreiecke verschwindende Form F haben, deren in x_4, x_5, x_6 bez. ungerade und gerade Bestandteile wir mit F_1 und F_2 bezeichnen wollen, und wir eliminiren nun aus der Gleichung

$$F \equiv F_1 + F_2 = 0$$

vermöge (1) und (2) x_4, x_5, x_6, so müssen wir auf eine Identität kommen, da zwischen x_1, x_2, x_3 keine Gleichung besteht. Wegen der Irrationalität von λ hat diese Identität die Gestalt:

$$F_1' \sqrt{\Theta x_1 x_2 x_3} + F_2' \equiv 0,$$

wo F_1', F_2' rationale algebraische Functionen von x_1, x_2, x_3 sind, welche F_1, F_2 ersetzen.

Diese Identität kann aber nur dann bestehen, wenn

$$F_1' \equiv 0, \quad F_2' \equiv 0.$$

Wenn wir nun die Elimination rückwärts durchführen, so finden wir, dass für ein eigentliches Dreieck nothwendig gleichzeitig:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0.$$

Wir brauchen also nur solche Formen zu betrachten, welche in x_4, x_5, x_6 entweder gerade oder ungerade sind.

Eine ähnliche Betrachtung zeigt, dass wir nur solche Formen zu betrachten brauchen, welche in x_1, x_2, x_3 gerade oder ungerade sind.

Es gibt also vier Typen von Formen, welche wir in Betracht ziehen müssen:

	Grad in x_4, x_5, x_6:	Grad in x_1, x_2, x_3:
1.	gerade,	gerade.
2.	gerade,	ungerade.
3.	ungerade,	gerade.
4.	ungerade,	ungerade.

Aus solchen verschwindenden Formen setzt sich also die allgemeinste verschwindende Form linear zusammen. Wir mögen die vier Typen, die ich normirte Formen nenne, auch folgendermassen characterisiren:

Die Grade, welche irgend zwei Glieder einer normirten Form in x_1, x_2, x_3, bez. in x_4, x_5, x_6 besitzen, unterscheiden sich immer um eine gerade ganze Zahl.

II. Typus der möglichen Gleichungsglieder.

Ich betrachte alle Glieder

$$g \equiv x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d x_5^e x_6^f$$

mit positiven ganzen Exponenten a, b . . . als einem und demselben vorgeschriebenen Typus angehörend, wenn für sie

$$a-d,\quad b-e,\quad c-f,\quad d+e+f$$

dieselben vorgeschriebene Werte haben.

Daraufhin gilt der Satz:

Alle Glieder eines Typus sind (mod. U, U'), identisch.

Um dies zu beweisen, müssen wir die Vorzeichen wissen, welche

$$a-d,\quad b-e,\quad c-f$$

im einzelnen Falle besitzen mögen.

Nehmen wir z. B. an, dieselben seien

$$+,\qquad -,\qquad +,$$

dann hat man sofort:

$$g \equiv x_1^{a-d}\, x_3^{c-f}\, x_5^{e-b}\, (x_1 x_4)^{d+f+b} \qquad (\text{mod. } U,\ U'),$$

denn alle Exponenten sind in diesem Ausdrucke positiv.

Da aber

$$d+f+b \equiv d+e+f-(e-b),$$

so ist die rechte Seite der Congruenz für einen bestimmten Typus völlig bestimmt. Es sind also alle Glieder des Typus unter einander (mod. U, U') identisch.

Dasselbe gilt, wenn wir irgend eine andere Wahl der Vorzeichen treffen. Es ist demgemäss der Satz allgemein gültig.

III. Reduction der normirten Form.

Nun ordnen wir die normirte Gleichung

$$F = 0$$

nach fallenden Graden in x_4, x_5, x_6:

$$P_n + P_{n-2} + \cdots + P_m = 0,$$

wo

$$\left.\begin{aligned} n &= 2\mu + 2\nu + \varepsilon, \\ m &= \phantom{2\mu +{}} 2\nu + \varepsilon, \end{aligned}\right\}\ (\varepsilon = 0 \text{ oder } 1).$$

Wenn wir nun x_4, x_5, x_6 vermittelst (1), (2) eliminiren, so kommen wir auf die Identität

$$(\Theta x_1 x_2 x_3)^{\mu} P'_n + (\Theta x_1 x_2 x_3)^{\mu-1} P'_{n-2} \cdots + P'_m = 0,$$

wo das P' die Gestalt eines Bruches hat mit $x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$ im Nenner, unter α, β, γ gewisse ganze positive Zahlen verstanden.

Es muss also P'_m gleichzeitig mit Θ und daher mit

$$1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1$$

identisch verschwinden. Wenn also P'_m nicht überhaupt identisch verschwindet, was auf den nachher zu untersuchenden Fall $P_n = 0$ führt, so ist

$$P'_m = \frac{(1-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_1)\Sigma x_1^A x_2^B x_3^C}{x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma}.$$

Daraus folgt, da Glieder eines und desselben Typus (mod. U, U', V) identisch sind und P eine ganze homogene Function der x_4, x_5, x_6 ist:

$$P_m \equiv (1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)\Sigma x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d x_5^e x_6^f \qquad (\text{mod. } U,\ U',\ V),$$

wo $x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d x_5^e x_6^f$ dasjenige in P_m vorkommende Glied ist, welches bei der vorher besprochenen Elimination das Glied

$$\frac{x_1^A x_2^B x_3^C}{x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma}$$

ergibt.

Wenn wir nun V benutzen, so können wir P_m durch Glieder in x_4, x_5, x_6 vom Grade $\overline{m+2}$ ersetzen.

Indem wir nun denselben Process, so oft wir wollen, wiederholen, werden wir am Ende die ganze Gleichung

$$F = 0$$

auf Glieder n^{ten} Grades in x_4, x_5, x_6 reduciren können. Unsere Gleichung reducirt sich also (mod. U, U', V) auf

$$P_n = 0.$$

Diese Gleichung aber muss identisch verschwinden, wenn wir x_4 in $\frac{1}{x_1}$, u. s. w. verwandeln. Wir werden sie also so ordnen können, dass sie in lauter Gliederpaare desselben Typus zerfällt, und also (mod. U, U') congruent Null ist.

Es muss also $F_n \equiv 0$ (mod. U, U', V) sein, oder in anderen Worten:

Die Formen U, U', V bilden für die eigentliche Mannigfaltigkeit in der That ein vollständiges System.

§ 14. Das vollständige System U_1, U_1', U_1'', f, φ der uneigentlichen M_3.

Für ein uneigentliches Dreieck haben wir:

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{x_2}{x_5} = \frac{x_3}{x_6} = \frac{\Theta}{\Phi} = \mu, \tag{1}$$

$$\mu^2 = x_1 x_2 x_3 \Theta = \frac{1}{x_4 x_5 x_6 \Phi}. \tag{2}$$

Ebenso wie für die eigentlichen Dreiecke so können wir auch hier die Untersuchung folgendermaassen gliedern.

I. Irrationalität von μ in x_1, x_2, x_3, bez. in x_4, x_5, x_6 und Normirung der für die uneigentlichen Dreiecke verschwindenden Formen.

Aus denselben Gründen wie vorher ergibt sich, dass wir nur solche Formen F in Betracht zu ziehen brauchen, in denen die Grade irgend zweier Glieder in x_1, x_2, x_3 bez. in x_4, x_5, x_6 sich um eine gerade ganze Zahl unterscheiden.

II. Typus der möglichen Gleichungsglieder.

Für die uneigentlichen Dreiecke betrachte ich alle Glieder

$$g = x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d x_5^e x_6^f$$

mit positiven ganzen Exponenten $a, b \ldots$ als demselben Typus angehörig, für welche

$$a+d, \quad b+e, \quad c+f, \quad d+e+f$$

dieselben Werte haben.

Alle Glieder eines Typus sind (mod. U_1, U_1', U_1'') identisch.

Um dies zu beweisen, nehmen wir irgend welche zwei Glieder von demselben Typus

$$x_1^a x_2^b x_3^{n-a-b} x_4^{k-a} x_5^{l-b} x_6^{m+a+b},$$
$$x_1^A x_2^B x_3^{n-A-B} x_4^{k-A} x_5^{l-B} x_6^{m+A+B}.$$

Wenn hier (1) $a \geq A$, $b \geq B$, so ist das erste Glied

$$\begin{aligned} & x_1^A x_2^B x_3^{n-a-b} x_4^{k-a} x_5^{l-b} x_6^{m+A+B} (x_1 x_6)^{a-A} (x_2 x_6)^{b-B} \\ \equiv\; & x_1^A x_2^B x_3^{n-a-b} x_4^{k-a} x_5^{l-b} x_6^{m+A+B} (x_3 x_4)^{a-A} (x_3 x_5)^{b-B} \\ \equiv\; & \text{dem zweiten Gliede} \quad (\text{mod. } U_1, U_1', U_1''). \end{aligned}$$

Wenn aber (2) $a \geq A$, $b \leq B$, so ist das erste Glied

$$\begin{aligned} & x_1^A x_2^b x_3^{n-a-B} x_4^{k-a} x_5^{l-B} x_6^{m+A+b} (x_1 x_6)^{a-A} (x_3 x_5)^{B-b} \\ \equiv\ & x_1^A x_2^b x_3^{n-a-B} x_4^{k-a} x_5^{l-B} x_6^{m+A+b} (x_3 x_4)^{a-A} (x_2 x_6)^{B-b} \\ \equiv\ & \text{dem zweiten Gliede} \quad (\text{mod. } U_1, U_1', U_1''). \end{aligned}$$

Beidemal also, — und es sind dies die einzigen zu betrachtenden Möglichkeiten —, sind die beiden Glieder identisch (mod. U_1, U_1', U_1'') w. z. b. w.

III. Reduction der normirten Formen.

Nun ordnen wir die einzelne normirte Gleichung

$$F = 0$$

nach fallenden Graden in x_4, x_5, x_6:

$$P_n + P_{n-2} + P_{n-4} + \cdots = 0,$$

wo P_r in x_4, x_5, x_6 homogen r-ten Grades sein soll mit Coefficienten, welche Functionen von x_1, x_2, x_3 sind. Eliminiren wir hier vermöge der Gleichungen (1), (2), so kommen wir auf eine Identität:

$$P_n' + x_1 x_2 x_3 \Theta \left\{ P_{n-2}' + x_1 x_2 x_3 \Theta P_{n-4}' \cdots \right\} \equiv 0,$$

wo P_n' die (nicht homogene) ganze algebraische Function von x_1, x_2, x_3 ist, welche aus P_n entsteht, wenn wir überall x_1 statt x_4, x_2 statt x_5, x_3 statt x_6 einsetzen.

Wir schliessen aus dieser Identität, dass P_n' gleichzeitig mit

$$x_1 x_2 x_3 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1)$$

verschwindet.

Es sind also zwei Möglichkeiten:

1) P_n' verschwindet identisch,

2) P_n' enthält als Factor $x_1 x_2 x_3 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1)$.

In dem ersten Falle ist für die uneigentlichen Dreiecke

$$P_n = 0,$$

und diese Gleichung wird zu einer Identität, wenn wir x_4 in x_1, x_5 in x_2, x_6 in x_3 verwandeln. Es muss also P_n aus Gliederpaaren bestehen, welche demselben Typus angehören und daher (mod. U_1, U_1', U_1'') identisch sind. Es ist also

$$P_n \equiv 0 \quad (\text{mod. } U_1, U_1', U_1'');$$

und wir können den übrigbleibenden Teil von F für sich weiter untersuchen und wieder auf die Fälle (1), (2) reduciren.

In dem zweiten Falle haben wir

$$P'_n = x_1 x_2 x_3 (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1) \Sigma x_1^{a+d-1} x_2^{b+e-1} x_3^{c+f-1},$$

wo

$$a + d \geq 1, \quad b + e \geq 1, \quad c + f \geq 1.$$

Nun ist P_n in x_4, x_5, x_6 homogen und zwar vom Grade ≥ 2. Denn, wenn $n = 0$ oder $= 1$, so muss sich die ganze Gleichung $F = 0$ auf $P_n = 0$ reduciren, was wieder der Fall (1) ist.

Es muss also, da Glieder desselben Typus identisch sind,

$$P_n \equiv (1 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1) \Sigma x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d x_5^e x_6^f \text{ (mod. } U_1, U'_1, U''_1)$$

sein, wo

$$d + e + f \geq 2$$
$$a + d \geq 1, \quad b + e \geq 1, \quad c + f \geq 1.$$

Wir können also (mod. U_1, U'_1, U''_1) immer einen von zwei Faktoren aus

$$x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d x_5^e x_6^f$$

herausgreifen, nämlich entweder

$$x_4 x_5 x_6,$$

oder

$$x_1 x_5 x_6.$$

Es folgt, dass in allen Fällen

$$P_n \equiv 0 \text{ (mod. } U_1, U'_1, U''_1, f, \varphi).$$

Auf diese Weise können wir die Form F (mod. $U_1, U'_1, U''_1, f, \varphi$) immer weiter reduciren; es muss also schliesslich die Form F selbst (mod. $U_1, U'_1, U''_1, f, \varphi$) congruent Null sein, d. h.

Jede für die uneigentlichen Dreiecke verschwindende ganze Form F ist eine lineare Verbindung von $U_1, U'_1, U''_1, f, \varphi$ mit ganzen Coefficienten; oder in anderen Worten, $U_1, U'_1, U''_1, f, \varphi$ bilden für die uneigentliche Mannigfaltigkeit ein vollständiges System.

§ 15. **Beispiel der Reduction einer Gleichung** (mod. U, U', V) bez. (mod. U_1, U_1', U_1'', f, φ). **Reduction der Cosinus Gleichung.**

Es soll sich um die Gleichung $C' = 0$ handeln, wo

$$C' = \cos a_1 - \cos a_2 \cos a_3 + \sin a_2 \sin a_3 \cos \alpha_1$$
$$= -2 \sin 2\theta_2 \sin 2\theta_3 + \sin a_2 \sin a_3 \, 2 \cos^2 \frac{\alpha_1}{2}.$$

Da

$$a_3 = 2(\theta_1 + \theta_2)$$

ist, so ist

$$\sin a_3 = \frac{2\tan(\theta_1+\theta_2)}{1+\tan^2(\theta_1+\theta_2)} = \frac{2(x_1+x_2)(1-x_1x_2)}{(1-x_1x_2)^2+(x_1+x_2)^2} = \frac{2(x_1+x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)},$$

$$\cos^2\frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{1+\tan^2(\varphi_2+\varphi_3)} = \frac{(1-x_5x_6)^2}{(1+x_5^2)(1+x_6^2)}.$$

Setzen wir

$$C = 8C'(1+x_1^2)^2(1+x_2^2)(1+x_3^2)(1+x_5^2)(1+x_6^2),$$

so ist

$$C = -x_2x_3(1+x_1^2)^2(1+x_5^2)(1+x_6^2)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)(1-x_1x_2)(1-x_1x_3)(1-x_5x_6)^2,$$

eine rationale ganze Function der x, die wir nun reduciren müssen.

Die Glieder, welche in x_5, x_6 von der nullten Ordnung sind, lauten:

$$x_1(1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)(x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3),$$
$$= x_1(x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3)(V+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_4-x_1^2x_4^2),$$
$$= (x+x_2+x_3-x_1x_2x_3)\{x_1V - x_5U' + x_6U'' + x_1x_4x_5U' - x_1^2x_4U''\}$$
$$+ x_5x_6(x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3)^2.$$

2) Die Glieder, welche in x_5, x_6 von der 2ten Ordnung sind, lauten:

$$-x_2x_3(1+x_1^2)^2(x_5^2+x_6^2)-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(1-x_1x_2)(1-x_1x_3)2x_5x_6,$$
$$= -(1+x_1^2)^2(x_3x_5-x_2x_6)U - x_5x_6\{2(x_1+x_2)(x_1+x_3)(1-x_1x_2)(1-x_1x_3)+(x_2^2+x_3^2)(1+x_1^2)^2\},$$
$$= -(1+x_1^2)^2UU_1 - x_1^2x_5x_6(1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)^2 - x_5x_6(x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3)^2.$$

Wenn wir nun die schon für die Glieder 0-ter Ordnung benutzte Transformation des Ausdrucks

$$x_1(1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)$$

benutzen und die Glieder 0^{ter} und 2^{ter} Ordnung addiren, so kommen wir auf den Ausdruck

$$-(1+x_1^2)^2\,UU_1 - f\left\{x_1V - x_5\,U' + x_6\,U'' + x_1x\ \,x_5U' - x_1^2x_4U''\right\}$$
$$-x_1x_5^2x_6^2(x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3)(1-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1).$$

Das letzte Glied ist aber nichts anderes als der Inbegriff der Glieder höchster Ordnung in C. Wir haben also für die Reduction:

$$C = -(1+x_1^2)^2\,UU_1 - \left\{x_1V - x_5U' + x_6U'' + x_1x_2x_5U' - x_1^2x_4U''\right\}f,$$

womit C ebensowohl für das System U, U', V der eigentlichen Dreiecke, wie für das System U_1, U_1', U_1'', f, φ der uneigentlichen Dreiecke reducirt ist. Man erinnere sich, dass $U'' = -U-U'$ war.

Anhang.

Ueber die Gestalt der Fläche dritter Ordnung:

(1) $$xyz - x - y - z = 0.$$

Diese Fläche geht durch sechs congruente Umformungen in sich selbst über, nämlich durch die sechs Permutationen der Buchstaben x, y, z. Sie hat demgemäss drei Symmetrie-Ebenen

$$(x-y)(y-z)(z-x) = 0.$$

Im Unendlichen hat die Fläche drei singuläre Punkte

$$y = 0,\ z = 0; \quad z = 0,\ x = 0; \quad x = 0,\ y = 0$$

und der Tangentencylinder in jedem singulären Punkte wird durch zwei der Coordinatenebenen gebildet, was als Grenzfall eines hyperbolischen Cylinders aufzufassen ist. Sonst besitzt die Fläche keine singulären Punkte. Die Ebene

$$x+y+z = 0$$

ist eine singuläre Ebene, welche die Fläche in drei unter gleichen Winkeln zusammenlaufenden Geraden schneidet.

Wir wollen ein neues Coordinatensystem einführen, wo diese Ebene als XY-Ebene und eine Symmetrie-Ebene als YZ-Ebene erscheint. Wir setzen dementsprechend:

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} \sqrt{3}\,Z &= x+y+z,\\ \sqrt{6}\,Y &= x-2y+z,\\ \sqrt{2}\,X &= x-z, \end{aligned}\right\}$$

oder, was dasselbe ist:

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}} = \xi+\eta+\zeta,\\ y &= -\frac{2Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}} = -2\eta+\zeta,\\ z &= -\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{6}}+\frac{Z}{\sqrt{3}} = -\xi+\eta+\zeta. \end{aligned}\right\}$$

Die Gleichung (1) wird jetzt

$$(\xi+\eta+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta)(-2\eta+\zeta)-3\zeta = 0,$$

oder geordnet

$$(4)\qquad \zeta^3-\zeta(\xi^2+3\eta^2+3)+2\eta(\xi^2-\eta^2) = 0.$$

Um die auf der Fläche liegenden Geraden zu finden, schneiden wir die Fläche zunächst mit der Ebene

$$(5)\qquad \frac{\eta}{\mu} = \frac{\zeta}{\nu}$$

Gleichung (4) gibt dann

$$\nu^3\rho^2-\nu(\xi^2+3\mu^2\rho^2+3)+2\mu(\xi^2-\mu^2\rho^2) = 0$$

wo wir für den gemeinsamen Werth von $\frac{\eta}{\mu}$ und $\frac{\zeta}{\nu}$ ρ geschrieben haben.

Diese Gleichung zerfällt in lineare Faktoren, wenn

$$(\nu^3-3\nu\mu^2-2\mu^3)(\nu-2\mu)\nu = 0,$$

oder

$$(\nu+\mu)^2(\nu-2\mu)^2\nu = 0.$$

Die entsprechenden Ebenen (5) sind

$$(\zeta+\eta)^2(-2\eta+\zeta)^2\zeta = 0$$

oder

$$(x+z)^2y^2(x+y+z) = 0.$$

Hiermit haben wir die fünf dreifachen Tangenten-Ebenen bestimmt, welche durch die Gerade

$$x+y+z = 0, \qquad y = 0$$

hindurchgehen.

Wenn wir diese Gleichungen mit der Gleichung der Fläche combiniren, so bekommen wir ausser den schon bekannten geraden Linien die folgenden neuen:

$$\left.\begin{aligned}(x+z)^2 &= 0,\\ x^2+1 &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}y^2 &= 0,\\ w^2 &= 0.\text{*)}\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}x+y+z &= 0,\\ xz &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Indem wir die Buchstaben vertauschen, können wir nun die sämtlichen 27 auf der Fläche liegenden Geraden aufzählen:

1—3.	$x+y+z = xyz = 0.$	Endliche reelle Geraden.
4—7.	$x = w = 0.$	Unendlich ferne reelle Geraden, jede dreifach zählend.
8—11.	$y = w = 0.$	
12—15.	$z = w = 0.$	
16—19.	$y = -z = \pm i.$	Endliche imaginäre Geraden, jede zweifach gezählt.
20—23.	$z = -x = \pm i.$	
25—27.	$x = -y = \pm i.$	

Nehmen wir jetzt einen Schnitt parallel der Symmetrie-Ebene

$$\xi = 0.$$

Die Gleichung (4) lässt sich schreiben:

$$(\zeta - 2\eta)[(\zeta+\eta)^2 - \xi^2] - 3\zeta = 0,$$

oder

$$(Z - \sqrt{2}\,Y)[(\sqrt{2}\,Z + Y)^2 - 3X^2] - 18Z = 0,$$

wo jetzt X als Parameter anzusehen ist. Wir haben dann eine Curve dritter Ordnung mit drei Aesten und einem Wendepunkt im Anfangspunkte (Fig. 10). Die Wendetangente ist

$$Z = \frac{\frac{\sqrt{2}\cdot Y}{6}}{1+\frac{6}{X^2}}.$$

*) w soll hier die Homogeneitätscoordinate sein, welche im Unendlichen verschwindet.

Diese dreht sich um den Anfangspunkt mit der Y-Axe anfangend und mit der Geraden $Z = \sqrt{2}\,Y$ schliessend, in dem Maasse wie X von 0 bis ∞ wächst.

Die Asymptoten sind

$$Z = \sqrt{2}\,Y,$$
$$\sqrt{2}\,Z + Y = \pm\sqrt{3\,X^2 + 6}.$$

Die beiden letzteren berühren den mittleren Ast asymptotisch, und jede derselben berührt ausserdem einen der äusseren Aeste, welche ihrerseits beide von der ersten Asymptote berührt werden.

Diese äusseren Aeste schneiden die Z-Axe in den Punkten

$$Z = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}\,X^2 + 9},$$

diese Schnittpuncte werden also, in dem Maasse wie X wächst, immer mehr und mehr ins Unendliche rücken, und wenn

$$X = \infty$$

ist, so fallen beide geradezu auf die unendlich ferne Gerade.

Die Fläche selbst ist nun sehr leicht zu construiren, wenn wir bemerken, dass die Schnitte

$$y = \text{Constans}$$

sowie
$$z - \sqrt{2} = \text{Constans}$$

gleichseitige Hyperbeln sind.

Fig. 13 stellt den Verlauf der Fläche in endlichem Abstande vom Anfangspuncte dar.

Die Fläche besteht aus einem mittleren Stücke und zwei hyperboloïdartigen Schalen, welche sich im Unendlichen zu einem geschlossenen Flächenstück vereinigen.

Der Querschnitt dieses letzteren Flächenstücks wird in wachsender Entfernung vom Anfangspunkte immer mehr und mehr dreieckig, und die Gestalt nähert sich immer den in Fig. 11 gezeichneten Teilen der Coordinatenebenen. Die Ebene im Unendlichen schneidet deshalb aus unserem Stücke ein geradliniges Dreieck mit den Seiten

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

aus. Die Ecken dieses Dreiecks sind die drei auf der Fläche liegenden singulären Punkte, in denen unser Flächenstück mit dem mittleren Stücke zusammenhängt.

Die Gestalt des mittleren Stückes ist etwas complicierter. Dasselbe verläuft in der Nähe des Anfangspunktes sehr flach und weicht wenig ab von der Ebene der drei unter gleichen Winkeln zusammenlaufenden Geraden

$$x+y+z=0, \qquad xyz=0.$$

Mit wachsender Entfernung vom Coordinatenanfangspunct verläuft die Fläche zwischen diesen Linien immer mehr wellenartig auf und ab; was wir am besten veranschaulichen können, wenn wir die Teile der Coordinatenebenen betrachten, an welche in grosser Entfernung vom Anfangspunkte der mittlere Teil der Fläche sich eng anschmiegt.

In Fig. 12 sehen wir diese angenäherte Fläche: der Rand derselben ist ein räumliches Sechseck, $(xy'z'x'yz)$. Es ist aber zu bemerken, dass im Unendlichen selbst die gegenüberliegenden Ecken xx' yy', zz' sich vereinigen, und wir also in der unendlich weiten Ebene nicht ein Sechseck, sondern eine Art Dreieck bekommen, welches dieselben Ecken hat wie das Dreieck, welches dieselbe Ebene aus dem zuerst beschriebenen Flächenteile ausschneidet. Schematisch werden die Verhältnisse im Unendlichen in Fig. 14 dargestellt.

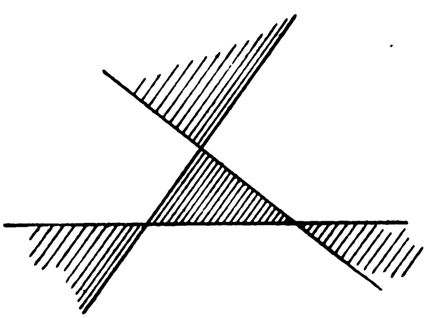


Fig. 14.

Vita.

Ich, Grace Emily Chisholm, Tochter des früheren Warden of the Standards Henry Williams Chisholm und seiner Ehefrau Anna Louisa Chisholm geb. Bell, wurde am 15. März 1868 in London geboren. Ich bin Mitglied der englischen Kirche.

Vor meiner Uebersiedelung an die Universität Cambridge habe ich nur Privatunterricht gehabt und habe dann im Dec. 1885 die Prüfung bestanden, welche von der Universität Cambridge für Studierende unter 18 Jahren in allen Teilen Englands veranstaltet wird. (Senior Cambridge Examination).

Im April 1889 bin ich als „Sir Francis Goldsmid Scholar" in das Girton College, Cambridge, eingetreten. Die erste Universitätsprüfung (Previous Examination) bestand ich im Juni desselben Jahres die zweite Universitätsprüfung (Tripos Examination. Part I), und zwar in reiner und angewandter Mathematik, im Juni 1892*). Unmittelbar nachher reiste ich nach Oxford und bestand dort die sogenannte Schlussprüfung. (Final Mathematical Schools). Nachher bin ich noch ein Jahr im Girton College geblieben und habe meine mathematischen Studien dort weiter geführt. Endlich bestand ich im Juni 1893 an der Universität Cambridge die mathematische Prüfung für graduirte Studierende. (Mathematical Tripos. Part II).

Im Herbst 1893 reiste ich nach Göttingen und habe an der dortigen Universität nach Zulassung als Hospitantin durch den Herrn Minister meine Studien in Mathematik, Physik und Astronomie fortgesetzt.

Meine hauptsächlichen Lehrer in Cambridge waren die Herren: Berry, Young und Richmond. Ich habe auch Vorlesungen bei den Herren: Smith (Master of Sidney Sussex College) und

*) Diese beiden Prüfungen sind die Examina für den Grad des B. A. an der Universität Cambridge; der Titel wird indess den Damen nicht verliehen, sondern nur ein Zeugnis über die bestandenen Prüfungen.

Webb, später auch bei den Herren: Prof. Forsyth, Prof. Darwin und Prof. Cayley gehört. In Göttingen habe ich bei den Herren Professoren: Klein, Weber, Riecke, Voigt und Schur gehört und bin die ganze Zeit Mitglied des mathematisch-physikalischen Seminars gewesen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um sämtlichen vorgenannten Herren, namentlich den Herren Berry und Prof. Voigt und vor Allem meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Klein, für die Unterstützung, die sie mir bei meinen Studien gewährt haben, meinen besonderen Dank auszusprechen. Auch Herrn Professor Hilbert bin ich für mannigfache Unterstützung verpflichtet.

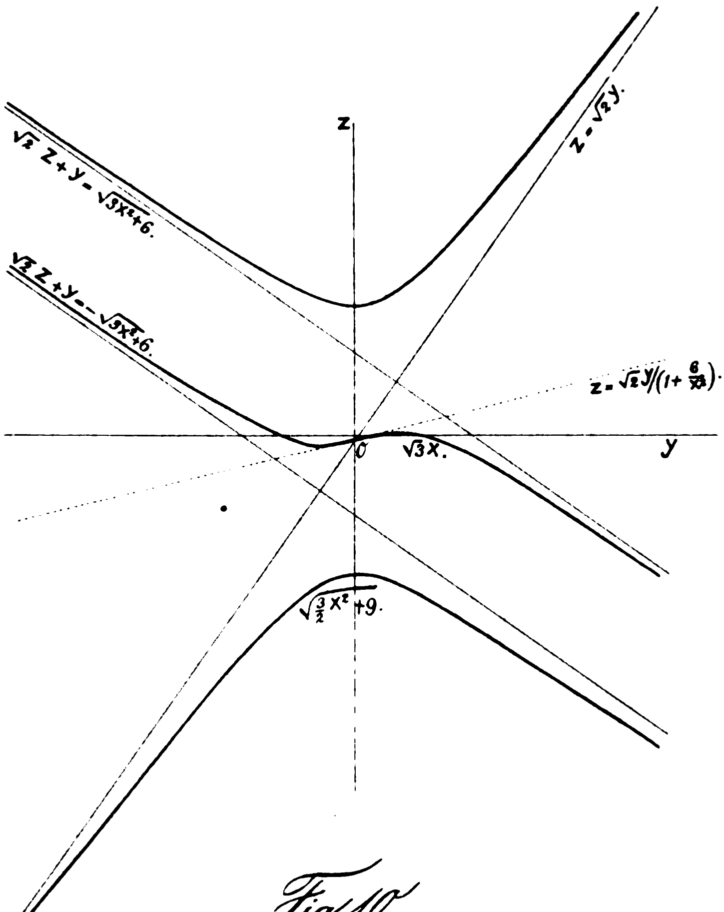

z
y
0
$\sqrt{3}x$.
$z = \sqrt{2}y$.
$\sqrt{2}z + y = \sqrt{3x^2+6}$.
$\sqrt{2}z + y = -\sqrt{3x^2+6}$.
$z = \sqrt{2}y/(1+\frac{6}{x^2})$.
$\sqrt{\frac{3}{2}x^2+9}$.

Fig. 10.

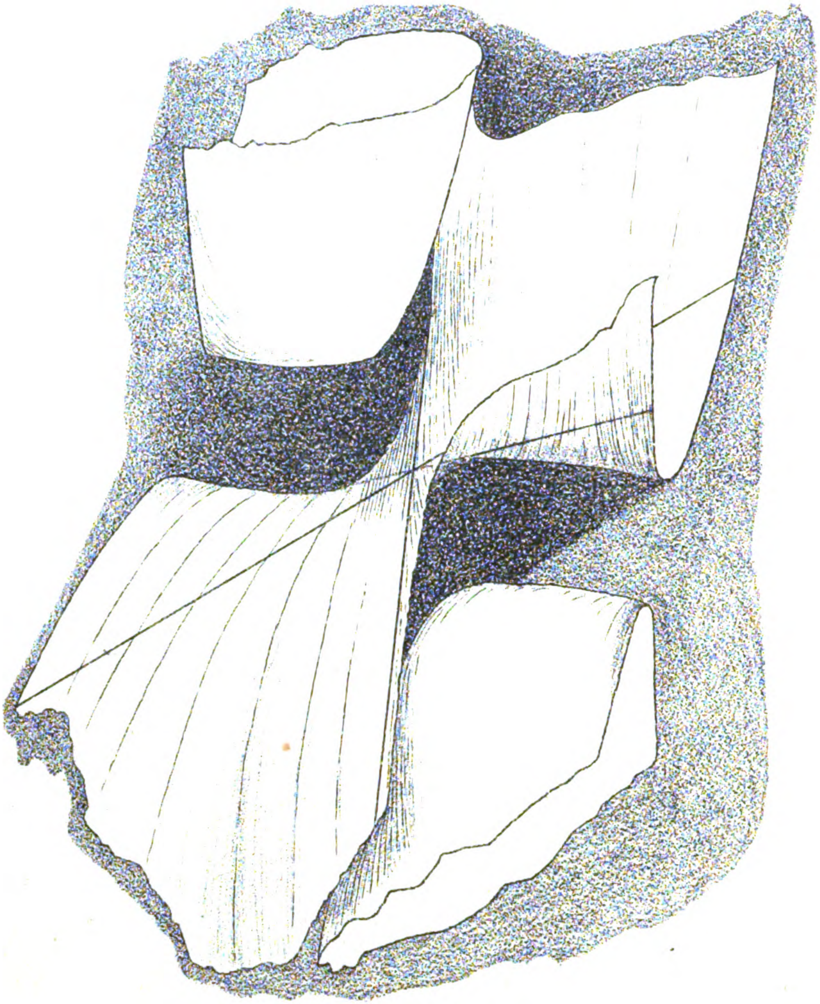


Fig. 13.

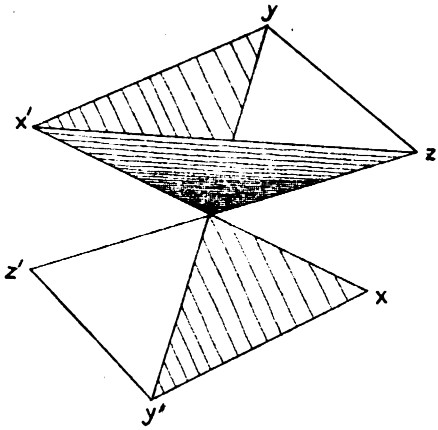


Fig. 11.

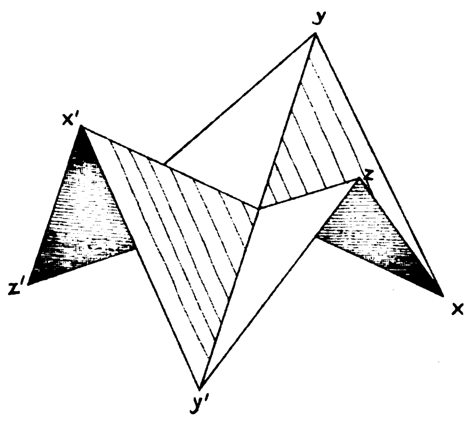


Fig. 12.