УДК 517.9; 519.210

Функциональный анализ и прикладная математика: Сб. науч. тр. – Киев : Наук. думка, 1982. – 216 с.

Исследуются теория функций, теория операторов, дифференциальные уравнения и их приложения. Найдены интегральные представления типа Крейна – Мильмана для семейства функций, удовлетворяющих системе неравенств, изучены нули квазиполиномов многих переменных, предельный переход по малому параметру в матрицах Грина сингулярно возмущенных дифференциальных операторов. Доказано отсутствие абсолютно непрерывной компоненты спектра у случайных матриц Якоби. Рассмотрены задача о колебаниях идеальной жидкости, обратная задача рассеяния на оси для уравнения Штурма – Лиувилля с квадратично-убывающим потенциалом. На примере атома гелия предложена конструктивная реализация вариационного принципа.

Для специалистов в области теории функций, математического анализа и прикладной математики.

Редакция информационной литературы

Ф $\frac{1702070000-712}{М221(04)-82}$

УДК 517.925.6

А.Э.Еременко

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ О МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dy_j / dz = F_j(y_1, \dots, y_n, z, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad j=1,\dots,n, \qquad /1/$$

где F_j – целые функции от всех своих переменных, λ_k – комплексные параметры. Каждой точке $w = (y_1^0, \dots, y_n^0; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \in \mathbb{C}^{m+n} = \mathbb{C}^N$ соответствует решение задачи Коши для системы /1/ с начальными условиями $y_j(0) = y_j^0$, $j=1,\dots,n$. Это решение обозначим через $y(w, z)$. Вектор $y(w, z)$ голоморфен в некоторой окрестности гиперплоскости $z = 0$ в $\mathbb{C}^{N+1}$.

Нас интересует вопрос о множестве значений $w \in \mathbb{C}^N$, при которых вектор $y(w, z)$ целый /т.е., его компоненты – целые функции от z /. Если решение $y(w, z)$ целое при всех $w \in \mathbb{C}^N$, то система /1/ является системой без подвижных особенностей [1]. Таковы, например, линейные системы. Нелинейные системы обладают подвижными особенностями и могут иметь как целые, так и нецелые решения, в зависимости от w.

Например, система

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = y_2^3 - y_1^3 + y_1$$

имеет целое решение $y_1 = y_2 = exp(z - a)$ при начальных условиях $y_1(0) = y_2(0)$, однако, можно показать, что не все решения этой системы целые [1, с. 164]. Более простым примером такой ситуации служит уравнение $y' = (y-z)(y-z-1) + 1$, которое обладает только двумя целыми решениями: $y = z$ и $y = z+1$. /Если бы существовало другое целое решение y, то в силу теоремы единственности функция $y(z) - z$ нигде не обращалась бы в 0 и 1, что противоречит теореме Пикара./

Оказывается, если не все решения системы /1/ целые, то целых решений в некотором смысле очень мало.

Подмножество $\mathbb{C}^N$ называется $\mathbb{C}^N$-полярным, если существует плюрисупергармоническая в $\mathbb{C}^N$ функция, которая обращается в бесконечность в точности на этом множестве. Отметим, что пересечение $\mathbb{C}^N$-полярного множества с каждой комплексной прямой либо совпадает с этой прямой, либо имеет логарифмическую емкость нуль.

Теорема. Множество точек $w \in \mathbb{C}^N$, для которых $y(w,z)$ - целая функция от z, либо совпадает с $\mathbb{C}^N$, либо является $\mathbb{C}^N$-полярным.

Доказательство. Для любого $w \in \mathbb{C}^N$ обозначим через $\rho(w)$ радиус наибольшего круга в z-плоскости, внутри которого функция $y(w,z)$ голоморфна. Воспользуемся теоремой об аналитической зависимости от параметров в следующей форме /см. [2] /.

Пусть некоторое решение $y(w_0; z)$ системы /1/ голоморфно в круге $|z| < r$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякое решение $y(w, z)$, для которого $|w - w_0| < \delta$, голоморфно в круге $|z| < r - \varepsilon$. Кроме того, $y(w, z)$ есть аналитическая функция двух переменных в области $|w - w_0| < \delta$, $|z| < r < \varepsilon$.

По этой теореме функция $\rho(w)$ полунепрерывна снизу, то есть $\lim\limits_{w \to w_0} \rho(w) \geq \rho(w_0)$. Эта функция равна наименьшему из радиусов сходимости рядов Маклорена компонент $y(w, z)$. Полунепрерывная снизу регуляризация функции $\ln \rho(w)$ плюригармонична [3]. Поскольку $\ln \rho(w)$ полунепрерывна, она плюрисупергармонична, и если $\ln \rho(w) \not\equiv \infty$, то множество, на котором $\ln \rho(w) = \infty$, $\mathbb{C}^N$-полярно, что и требовалось доказать.

1. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. - М.-Л.: Гос. изд-во техн. тех. лит-ры, 1950.- 436 с.
2. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Изд-во иностр. лит., 1958. - 474 с.
3. Ронкин Л.И. Элементы теории аналитических функций многих комплексных переменных. - Киев: Наук. думка, 1977. - 163 с.

УДК 519.210

К теории матричных кругов Вейля / Потапов В.П. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с.113-121.

Излагается фундаментальная теорема С.А.Орлова об инвариантности рангов матричных радиусов предельных кругов Вейля. Естественная нормировка аналитических J-сжимающих матриц-функций к модулю позволила, сохранив основные черты доказательства автора, в значительной степени сократить и упростить доказательство.
Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.182

Конструктивная реализация вариационного принципа на примере атома гелия / Ратнер А.М. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка,1982,с.121-131.

Решение уравнения Шредингера вариационным методом обычно сводится к численной минимизации усредненного гамильтониана по вариационным параметрам. Существующие методы минимизации проанализированы с точки зрения практической пригодности для этой цели. Два наиболее подходящих, но медленно сходящихся метода объединены в один алгоритм таким образом, что сходимость существенно ускоряется по сравнению с каждым из них. Объединенный алгоритм минимизации проиллюстрирован на примере атома гелия. Показано, что хорошая сходимость алгоритма позволяет сопоставлять разные аппроксимации волновой функции для оценки их точности. Текст предлагаемого алгоритма приведен в алгольной записи.
Ил. 2. Табл. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.55

О квазиполиномах / Ронкин А.Л. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 131-157.

Рассматриваются функции многих переменных, являющиеся квазиполиномами по каждой переменной. Устанавливается общий вид таких функций. Полученный результат применяется для доказательства теорем о делении квазиполиномов многих переменных и теоремы об извлечении корня из квазиполинома многих переменных.
Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.9

Множители стокса и коэффициенты связи для некоторых уравнений/ Смилянский В.Р. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 157-173.

Для скалярного уравнения с линейными коэффициентами ("уравнения Лапласа") найдены множители Стокса и коэффициенты связи (связывающие решения при регулярной особой точке $z=0$ и при иррегулярной $z=\infty$). Для систем и уравнений общего вида найдены соотношения между множителями Стокса и коэффициентами связи. В случае первого ранга дан "геометрический" способ нумерации корней характеристического уравнения.
Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.