

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ

NOVA SERIES A. TOM. II N:o 3.

---

ÜBER  
EINE KLASSE VON RIEMANNSCHEN FLÄCHEN  
UND IHRE UNIFORMISIERUNG

VON  
GUSTAV ELFVING

*Wird mit Genehmigung  
der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Helsingfors am 17. November 1934 um 12 Uhr mittags  
im historisch-philologischen Auditorium zur  
öffentlichen Verteidigung vorgelegt.*



HELSINGFORS 1934

## INHALT.

Einleitung .....	5
Kap. I. Topologische Hilfsmittel .....	7
§ 1. Der topologische Baum .....	7
Kap. II. Topologie der Flächen $F$ .....	18
§ 2. Allgemeine Struktur der Flächen $F$ .....	18
§ 3. Flächen mit zwei logarithmischen Grundpunkten .....	22
§ 4. Konstruktion von Flächen mit vorgegebenen Windungspunkten .....	26
Kap. III. Die uniformisierenden Funktionen der Flächen $F$ .....	31
§ 5. Die rationalen Näherungsfunktionen .....	31
§ 6. Konvergenzbeweise .....	33
§ 7. Die Schwarz'sche Ableitung. Typus der Flächen $F$ .....	35
Kap. IV. Über die Lösungen der Gleichung $\langle w, z \rangle = R(z)$ .....	41
§ 8. Problemstellung .....	41
§ 9. Der Fall rationalen Charakters. Verwandte Fälle .....	42
§ 10. Die Fälle transzendenten Charakters .....	47
§ 11. Die meromorphen Lösungen der Gleichung $\langle w, z \rangle = R(z)$ .....	52
§ 12. Einige einfache Fälle .....	58

## Einleitung.

R. NEVANLINNA hat in mehreren neulich erschienenen Abhandlungen auf den Zusammenhang aufmerksam gemacht, welcher zwischen der Wertverteilung einer meromorphen Funktion  $w(z)$  und der Struktur der zu ihrer Umkehrfunktion  $z(w)$  gehörigen Riemannschen Fläche besteht. Dieser Zusammenhang wurzelt darin, dass einem Punkt, über dem die Riemannsche Fläche besonders stark verzweigt ist, im allgemeinen ein sogenannter Ausnahmewert von  $w(z)$  entspricht, d.h. ein Wert, der von  $w(z)$  verhältnismässig selten angenommen wird.

Veranlasst durch die hier angedeutete Beobachtung hat NEVANLINNA versucht, von den Riemannschen Flächen ausgehend, meromorphe Funktionen mit vorgeschriebenen Ausnahmewerten gegebener Stärke zu konstruieren. In seiner Abhandlung »Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten« untersucht er diejenigen meromorphen Funktionen, welche die  $z$ -Ebene auf Flächen von der im Titel genannten Art abbilden.<sup>1</sup> Diese Funktionenklasse ist auch dadurch interessant, dass sie gewissermassen als die einfachste Verallgemeinerung der Exponentialfunktion erscheint.

Die genannte Abhandlung beschränkt sich auf Flächen mit lauter logarithmischen Windungspunkten. Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist, die Nevanlinnaschen Ergebnisse auf Flächen mit endlich vielen logarithmischen und algebraischen Windungspunkten zu verallgemeinern. Die erweiterte Fragestellung zieht nach sich gewisse Probleme, welche eine besondere Darstellung des allgemeineren Falles motivieren.

Die zwei ersten Abschnitte der Abhandlung sind der Topologie der betrachteten Flächen gewidmet.

Für die Darstellung ihrer Struktur verwenden wir den sogenannten *topologischen Baum*, ein Hilfsmittel, welches neulich von SPEISER und R. NEVANLINNA in die Theorie der Riemannschen Flächen eingeführt worden ist.<sup>2</sup> Es leistet zwar nichts, das nicht auch durch direkte Betrachtung

---

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten (Acta math., B. 58, S. 295—373, 1932). — Vgl. auch L. AHLFORS: Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Funktionen (Acta math., B. 58, S. 375—406, 1932).

<sup>2</sup> A. SPEISER: Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen (Comm. Math. Helv., Vol. I, H. 2, 1929) und: Über Riemannsche Flächen (Ibidem, Vol. II, H. 4, 1930).

R. NEVANLINNA: Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion (Verhandlungen des internationalen Mathematiker-kongresses Zürich 1932, B. I).

der Flächen bewiesen werden könnte, ist aber wegen seiner Anschaulichkeit ein bequemes Werkzeug beim Studium der einfachsten Flächenklassen. Die Theorie des topologischen Baumes ist in Kap. I entwickelt.

In Kap. II wird die Struktur der von uns betrachteten Flächen  $F$  vollständig beschrieben. Ferner zeigen wir, dass eine Fläche  $F$  mit beliebig vorgeschriebenen Windungspunkten konstruiert werden kann, vorausgesetzt dass diese gewissen einfachen notwendigen Bedingungen genügen.

Im III. und IV. Kapitel untersuchen wir diejenige analytische Funktion  $w(z)$ , welche die konforme Abbildung einer Fläche  $F$  der betrachteten Klasse auf einen Kreis  $|z| < R \leq \infty$  vermittelt. Unser Hauptergebnis wird das folgende sein:  $w(z)$  ist eine meromorphe Funktion der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , wo  $p$  die Anzahl der logarithmischen Windungspunkte von  $F$  bedeutet; sie genügt einer Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form

$$(I) \quad \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2 = R(z),$$

wo  $R(z)$  eine rationale Funktion ist.

Das Resultat zieht nach sich die Frage: Welchen Bedingungen muss die rationale Funktion  $R(z)$  genügen, damit die Lösungen der Gleichung (I) meromorphe Funktionen seien? — Wir werden jene Bedingungen angeben. Sind sie erfüllt, dann bilden die Lösungen, wie wir zeigen werden, die  $z$ -Ebene auf Riemannsche Flächen der von uns betrachteten Art ab.

Die in Kap. III und IV angewandten Methoden werden in wesentlichen Stücken dieselben sein, welche R. NEVANLINNA in seiner Abhandlung benutzt; nur werden wir den Gebrauch von automorphen Funktionen vermeiden. †Die Frage nach den an  $R(z)$  zu stellenden Forderungen tritt bei NEVANLINNA nicht auf, weil in dem von ihm behandelten Fall  $R(z)$  ein Polynom wird, und die Lösungen von (I) somit ohne weiteres meromorph sind.

Wie aus dem Obigen hervorgeht schliesst sich die vorliegende Abhandlung nahe an die Untersuchungen des Herrn Professor ROLF NEVANLINNA an. Es sei mir an dieser Stelle gestattet, ihm meine Dankbarkeit zu bezeugen, sowohl für die Anregung zu dieser Arbeit, als auch für seine wertvolle Hilfe bei der Ausführung derselben. Ebenso gebührt meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor ERNST LINDELÖF, mein herzlichster Dank für das unermüdliche Interesse, mit welchem er stets meine Studien begleitet hat.

## Kap. I. Topologische Hilfsmittel.

### § 1. Der topologische Baum.

1. Die vorliegende Abhandlung wird sich mit *einfach zusammenhängenden*<sup>1</sup> Riemannschen Flächen beschäftigen, welche als einzige Singularitäten *endlich viele algebraische und logarithmische Windungspunkte*<sup>2</sup> besitzen. Für die Darlegung ihrer Struktur eignet sich besonders der in der Einleitung erwähnte *topologische Baum*. Der folgende Paragraph ist der Theorie dieses Hilfsmittels gewidmet.

Um die Idee der folgenden Überlegungen anzudeuten sei zuerst ein elementares Beispiel vorausgeschickt.

Wir fassen die zur Funktion

$$z(w) = \sqrt{\log w}$$

gehörige Riemannsche Fläche ins Auge. Sie wird durch die genannte Funktion auf die im unendlich fernen Punkt punktierte  $z$ -Ebene konform abgebildet. Als Bildbereich eines einfach zusammenhängenden Bereiches ist die Fläche selbst einfach zusammenhängend. Ferner hat sie, wie leicht bestätigt werden kann, endlich viele Windungspunkte, nämlich zwei logarithmische über  $w = 0$ , zwei über  $w = \infty$ , und einen algebraischen über  $w = 1$ . Sie gehört somit zu der von uns betrachteten Flächenklasse.

Wir denken uns die Fläche längs der reellen Achse zerschnitten; sie wird hierbei in *Halbblätter* zerlegt, welche über den zwischen den Windungspunkten gelegenen Segmenten der reellen Achse zusammenhängen. Die Halbblätter werden durch die Funktion  $z(w)$  auf gewisse *Halbbereiche* der  $z$ -Ebene abgebildet, welche längs den Bildkurven der genannten Segmente an einander grenzen. Zwei benachbarte Halbbereiche bilden zusammen einen *Fundamentalebenebereich* der eindeutigen Umkehrfunktion

$$w(z) = e^{z^2}$$

---

<sup>1</sup> Eine Riemannsche Fläche heisst *einfach zusammenhängend*, wenn sie sowohl durch jeden Rückkehrschnitt als jeden Querschnitt zerlegt wird. — Hierbei verstehen wir unter »Rückkehrschnitt« eine einfache, geschlossene Kurve auf der Fläche, unter »Querschnitt« eine einfache, offene Kurve mit folgender Eigenschaft: es gibt auf der Kurve zwei gegen die beiden Enden strebende Punktfolgen, welche sich in keinem Flächenpunkt häufen.

<sup>2</sup> Die algebraischen Windungspunkte werden als Flächenpunkte gezählt, die logarithmischen nicht.

von  $z(w)$ . — Die Halbbereiche sind in Abb. 1 dargestellt; diejenigen, welche der unteren Halbebene entsprechen, sind schraffiert.

Das Netz der Halbbereiche gibt eine vollständige Übersicht über die Struktur der betreffenden Riemannschen Fläche. Für diesen Zweck genügt sogar eine geeignete schematische Figur, welche mit der betrachteten topologisch äquivalent ist — z.B. ein Polygonnetz.<sup>1</sup>

Aus dem Fundamentalbereichnetz kann nun eine andere Darstellung der Zusammenhängeverhältnisse der Fläche in folgender Weise erhalten werden: In jedem Halbbereich nehme man einen beliebigen inneren Punkt  $K$  — einen *Knoten*; ferner verbinde man die Knoten je zweier benach-

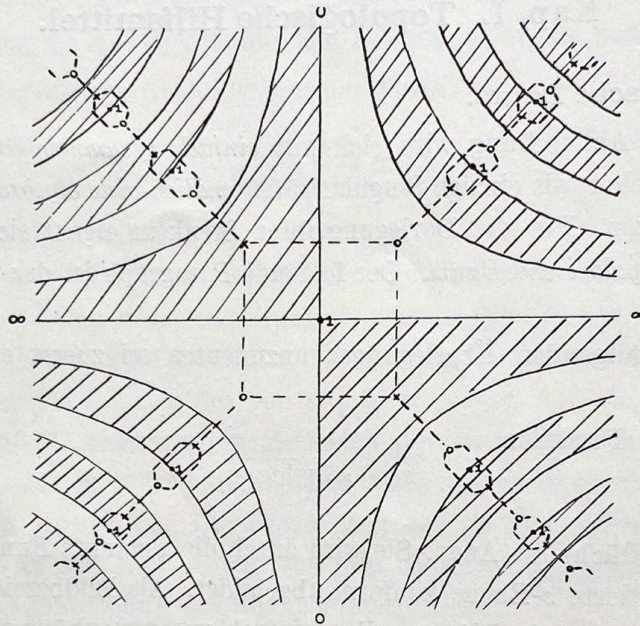


Abb. 1.

barter Halbbereiche durch Linienzüge — *Glieder* — welche die jene Bereiche trennenden Kurvenstücke schneiden, und zwar soll jede Bildkurve eines Segmentes  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  von genau einem Linienzug gekreuzt werden. Die entstandene Figur, welche in der Abb. 1 eingezeichnet ist, charakterisiert vollständig die Struktur der betrachteten Fläche, indem die Knoten die Halblätter andeuten, während die Glieder die Art und Weise angeben, in der jene mit einander zusammenhängen. Diese Figur, welche noch geeignet schematisiert werden kann, ist eben ein *topologischer Baum*. Es ist einleuchtend, dass ein solcher »Baum« in manchen Fällen eine einfachere Darstellung der Flächenstruktur liefern wird, als das Netz der Fundamentalbereiche.

2. Im folgenden soll die Theorie des topologischen Baumes allgemein und ohne Heranziehung der uniformisierenden Funktionen der Flächen aufgebaut werden. Wir brauchen uns hierbei nicht auf die im Anfang dieser Nummer genannte Flächenklasse zu beschränken, sondern stellen unsere Aufgabe etwas allgemeiner:

<sup>1</sup> Vgl. R. NEVANLINNA: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, S. 315, 318.

$R$  sei eine über die  $w$ -Kugel ausgebreitete, schlichtartige<sup>1</sup> Riemannsche Fläche, deren sämtliche singuläre Stellen Windungspunkte sind, welche sich auf endlich viele »Grundpunkte«

$$w = a_1, a_2, \dots, a_q$$

der  $w$ -Kugel projizieren. Es handelt sich darum, die Struktur von  $R$  zu untersuchen und zu veranschaulichen.

*Zerschneidung der Fläche.* — Wir ziehen auf der  $w$ -Kugel eine einfache, geschlossene Jordankurve  $L$ , welche die Grundpunkte  $a_1, a_2, \dots, a_q$  in der angegebenen Reihenfolge durchläuft.  $L$  wird durch die Grundpunkte in  $q$  Teilbogen zerlegt, und zerlegt selbst die  $w$ -Kugel in ein Innengebiet  $I$  und ein Aussengebiet  $A$ ;  $I$  sei dasjenige, für welche die Umlaufsrichtung von  $L$  als positiv erscheint. Wir numerieren die Bogen  $a_q a_1, \dots, a_{q-1} a_q$  mit  $1, 2, \dots, q$  (Abb. 2).

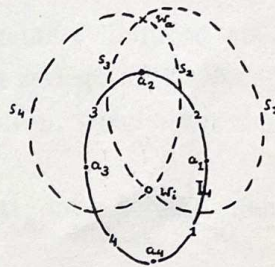


Abb. 2.

Wir zerschneiden nun die Fläche längs der Kurve  $L$ . Sie zerfällt hierbei in endlich oder abzählbar unendlich viele über  $I$  und  $A$  gelegene Teilflächen; wir nennen sie *Halbblätter* und bezeichnen sie mit  $Q$  und einem später festzulegenden Index. Mit Hinsicht auf die zerschneidende Kurve bezeichnen wir die betrachtete Zerlegung als die *Zerschneidung*  $L$ .

Um einige folgende Betrachtungen anschaulicher gestalten zu können, machen wir noch die folgende Hilfskonstruktion: Wir wählen zwei beliebige Punkte  $w_i$  und  $w_a$  in bzw.  $I$  und  $A$ , und verbinden sie mittels  $q$  Kurven  $s_1, s_2, \dots, s_q$ , welche bzw. die mit  $1, 2, \dots, q$  nummerierten Bogen von  $L$  schneiden, aber sonst untereinander und mit  $L$  punktfremd sind. — Über  $w_i$  und  $w_a$  liegen auf  $R$  endlich oder abzählbar unendlich viele Punkte, die wir mit  $P$  und dem Index des entsprechenden Halbblatts bezeichnen, und welche *Knotenpunkte* heißen sollen. Über den Kurven  $s_1, s_2, \dots, s_q$  liegen auf der Fläche gewisse Kurven, welche die Knotenpunkte verbinden; wir bezeichnen sie als *Gliedkurven* und teilen ihnen die Nummern der entsprechenden  $L$ -Bogen zu. Im folgenden treten die Knotenpunkte als Repräsentanten ihrer Halbblätter auf, während die Gliedkurven diejenigen Bogen vertreten, längs denen diese Gebiete mit einander zusammenhängen.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur

*Definition des topologischen Baumes:*

(I) Unter einem topologischen Baum der Ordnung  $q$  verstehen wir eine auf der Zahlenkugel gezeichnete zusammenhängende schematische Figur  $B$  mit den folgenden Eigenschaften:

$B$  besteht aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl von Strecken oder einfachen Streckenzügen. Sie heißen *Glieder*, ihre Endpunkte *Knoten*. Die Glieder sind, bis auf ihre Endpunkte, unter einander punktfremd.

Die Knoten sind zweierlei: *Innen-* und *Aussenknoten*. Jedes Glied hat einen Innen- und einen Aussenknoten als Endpunkte.

<sup>1</sup> Eine Fläche heisst *schlichtartig*, wenn sie durch jeden Rückkehrschnitt zerlegt wird.

<sup>2</sup> Wir können  $q \geq 2$  annehmen; sonst würde  $R$  die ganze  $w$ -Kugel umfassen.

Die Glieder sind mit Nummern von 1 bis  $q$  versehen. In jedem Knoten stiessen  $q$  Glieder zusammen, welche bei einem Umlauf um den Knoten in Nummerfolge erscheinen, und zwar bei positivem Umlauf um einen Innen-, bei negativem um einen Aussenknoten.

Über die Zeichnung des Baumes sei folgendes bemerkt: Wir markieren die Innenknoten mit  $\circ$ , die Aussenknoten mit  $\times$ . Zwei benachbarte Glieder, welche dieselben Knoten verbinden, werden mittels zweier parallelen Strecken angedeutet. Man vergleiche als Beispiel die Abb. 3.

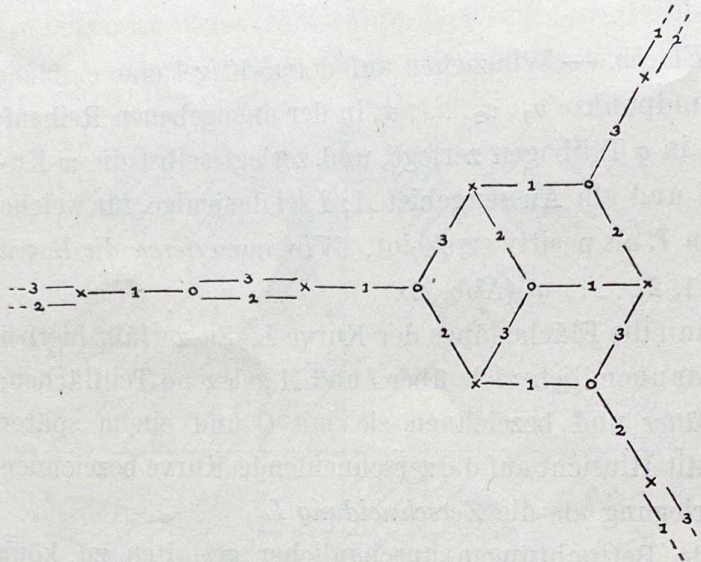


Abb. 3.

Der Zusammenhang zwischen den topologischen Bäumen und unseren Riemannschen Flächen wird durch die folgende Festsetzung vermittelt:

(II)  $B$  heisst topologischer Baum der Fläche  $R$ , bei der Zerschneidung  $L$ , falls  $B$  und  $R$  den folgenden Bedingungen gemäss auf einander bezogen werden können:

Jedem Innengebiet entspricht ein Innenknoten, jedem Aussengebiet ein Aussenknoten, und umgekehrt.

Hängen zwei Halbblätter über dem Bogen  $v$  zusammen, so sind die entsprechenden Knoten durch ein mit  $v$  nummeriertes Glied verbunden; und umgekehrt.

Die Festsetzung kann anschaulich so ausgedrückt werden: Die Knotenpunkte und Gliedkurven auf der Fläche sollen eineindeutig und stetig auf die Knoten und Glieder des Baumes bezogen werden können, und zwar sollen hierbei entsprechende Gliedkurven und Glieder dieselbe Nummer tragen.

In den beiden folgenden Nummern soll folgendes gezeigt werden:

1° Sind die Grundpunkte  $a_1, a_2, \dots, a_q$ , die Zerschneidende Kurve  $L$ , und ein topologischer Baum  $B$  der Ordnung  $q$  vorgelegt, so gibt es eine wohlbestimmte Riemannsche Fläche  $R$  mit den im Anfang dieser Nummer angegebenen Eigenschaften, welche  $B$  als topologischer Baum hat.

2° Jede Fläche  $R$  mit den genannten Eigenschaften besitzt, bei gegebener Zerschneidung  $L$ , einen (topologisch) wohlbestimmten Baum  $B$ .



3. Sind die Grundpunkte und die zerschneidende Kurve gegeben, und ist  $B$  ein vorgelegter Baum der Ordnung  $q$ , so kann die zugehörige Fläche folgendermassen konstruiert werden:

Man denke sich die durch  $L$  getrennten Gebiete  $I$  und  $A$  der  $w$ -Kugel in beliebig vielen Exemplaren vorhanden. Jedem Innenknoten von  $B$  ordne man ein  $I$ -Gebiet, jedem Aussenknoten ein  $A$ -Gebiet zu. Diese Gebiete sollen folgendermassen zusammengefügt werden: Sind zwei Knoten durch eines oder mehrere »parallele« Glieder mit den Nummern<sup>1</sup>  $\nu, \nu + 1, \dots, \nu'$  ( $\nu' \geq \nu$ ) verbunden, so sollen die entsprechenden Gebiete über dem Bogen  $a_{\nu-1} a_{\nu'}$  von  $L$  vereinigt werden.

Die so bestimmte Punktmannigfaltigkeit bildet offenbar eine Riemannsche Fläche  $R$ , welche keine anderen Singularitäten als Windungspunkte hat. Es erübrigt sich zu zeigen, dass  $R$  *schlichtartig* ist; dies wird indirekt bewiesen.

Eine *nicht schlichtartige* Riemannsche Fläche zeichnet sich definitionsgemäss dadurch aus, dass es auf ihr wenigstens einen Rückkehrschnitt gibt, welcher die Fläche nicht zerlegt. Ein solcher Rückkehrschnitt  $K$  hat folgende, für unseren Beweis wesentliche Eigenschaften, welche wir der allgemeinen Theorie der Riemannschen Flächen ohne Beweis entnehmen:

1°  $K'$  sei ein aus  $K$  durch stetige Abänderung erhaltener Rückkehrschnitt; dann zerlegt auch  $K'$  die Fläche nicht.

2°  $K$  werde durch die Punkte  $A, B$  in zwei Bogen  $ACB, BDA$  zerlegt. Werden  $A, B$  durch eine »Querkurve«  $AEB$  verbunden, so ist wenigstens eine der Kurven  $AEBCA, AEBDA$  ein nichtzerlegender Rückkehrschnitt.

Wäre nun  $R$  keine schlichtartige Fläche, so gäbe es auf ihr einen nichtzerlegenden Rückkehrschnitt  $K$ .

Als abgeschlossene Punktmenge auf  $R$  ist  $K$  in endlich vielen Halbblättern enthalten. Durch stetige Abänderung dieser Kurve kann stets erreicht werden, dass sie auch die Ränder der Halbblätter endlich oft trifft; hierbei wird (nach 1°) die Eigenschaft,  $R$  nicht zu zerlegen, nicht verletzt. —  $K$  durchläuft nunmehr eine endliche Folge von Halbblättern. Tritt hierbei dasselbe Halbblatt mehrmals auf, so ziehe man innerhalb desselben eine Querkurve; von den so erhaltenen beiden Rückkehrschnitten besitzt (nach 2°) wenigstens der eine die Eigenschaft,  $R$  nicht zu zerlegen. In dieser Weise wird verfahren, bis dass man einen  $R$  nicht zerlegenden Rückkehrschnitt hat, der eine einfache Folge von Halbblättern durchläuft. Dieser wird schliesslich in eine einfache, geschlossene *Gliedkurvenfolge*  $S$  deformiert. (Vgl. Nr. 2).

Die Kurve  $S$  zerlegt jedes Halbblatt, welches sie durchläuft, in zwei Hälften  $Q'$  und  $Q''$ , welche auf entgegengesetzten Seiten von  $S$  liegen; die ganze von  $S$  durchlaufene Halbblattsfolge zerfällt somit in zwei Gürtel ( $Q'$ ) und ( $Q''$ ) an den beiden Ufern von  $S$ . Da  $S$  die Fläche nicht zerlegt, so kann jedes Gebiet  $Q'$  mit jedem Gebiet  $Q''$  durch eine  $S$  nicht treffende Kurve verbunden werden. Insbesondere muss es ein Gebiet  $Q'$  und ein Gebiet  $Q''$  geben, welche, entweder unmittelbar oder durch Vermittelung einer von  $S$  nicht getroffenen Folge von Halbblättern, an einander grenzen. Es ist also möglich, eine einfache,  $S$  nicht treffende *Gliedkurvenfolge*  $S'$  anzugeben, welche auf dem einen Ufer von  $S$  anfängt und auf dem anderen endet.

<sup>1</sup> Alle Nummern und Indizes sollen auf ihre Reste mod  $q$  reduziert werden.

Hier stossen wir auf einen Widerspruch. Denn der Folge  $S$  würde im Baume  $B$  eine einfache, geschlossene Gliedfolge  $\Pi$  entsprechen. Der Folge  $S'$  entspräche eine Gliedfolge  $\Pi'$ , welche auf  $\Pi$  anfängt und endet, aber sonst mit dieser Folge punktfremd ist; und zwar würden die beiden Enden von  $\Pi'$  auf verschiedene Ufer von  $\Pi$  münden, da die Glieder einander in derselben Weise um die Knoten folgen, wie die entsprechenden Gliedkurven auf  $R$  um die Knotenpunkte. Eine solche Sachlage ist aber in der schlichten Ebene unmöglich.

Die Behauptung 1° auf S. 10 ist hiermit bewiesen.

Ist  $B$  insbesondere aus endlich vielen Knoten (und folglich auch endlich vielen Gliedern) aufgebaut, so besteht die Fläche aus endlich vielen Halbblättern, und ihre Windungspunkte sind sämtlich algebraisch. Sie ist eine geschlossene Fläche; auch  $B$  wird als ein geschlossener Baum bezeichnet.

4. Es soll nun umgekehrt gezeigt werden, dass zu einer Fläche  $R$  mit den auf S. 9 angegebenen Eigenschaften, bei gegebener Zerschneidung  $L$ , ein wohlbestimmter topologischer Baum  $\bar{B}$  gehört.

Zu dem Zweck ordne ich erstens die Halbblätter von  $R$  in einer bestimmten Reihenfolge; dies geschieht am besten durch sogenannte

*Kranzförmige Ausschöpfung der Fläche.* — Ich wähle ein beliebiges Halbblatt  $Q_0$ , welches ich, in Bezug auf die Ausschöpfung, als die *nullte Generation* bezeichne. Diejenigen Halbblätter, welche über den Bogen von  $L$  mit  $Q_0$  zusammenhängen, bilden die *erste Generation*. Allgemein: Zur  $(n + 1)$ :ten Generation werden diejenigen Halbblätter gezählt, welche mit den Halbblättern der  $n$ :ten Generation zusammenhängen, und nicht schon einer niedrigeren Generation angehören.

Bei dieser Ausschöpfung werden sämtliche Halbblätter mitgenommen. Denn jedes Blatt kann, da die Fläche zusammenhängend ist, mit  $Q_0$  durch eine Kurve verbunden werden; diese gehört zu endlich vielen Halbblättern, welche in eine Folge von etwa  $n + 1$  sukzessiv zu einander grenzenden Blättern geordnet werden können. Das betrachtete Halbblatt wird dann zur  $n$ :ten oder einer niedrigeren Generation gehören.

Ordnet man noch die Halbblätter innerhalb jeder Generation nach irgendeiner Vorschrift, so erscheinen sie sämtlich schliesslich in einer Folge

$$(Q) \quad Q_0, Q_1, \dots, Q_n, \dots$$

Ich denke mir nun die Fläche  $R$  längs der Kurve  $L$  zerschnitten, und baue sie aus den Gebieten  $(Q)$  sukzessiv wieder auf in der folgenden Weise:

Ich fange mit  $Q_0$  an und füge an dieses Blatt das Blatt  $Q_1$ . Hängt  $Q_1$  über mehreren  $L$ -Bogen mit  $Q_0$  zusammen, so soll die Anheftung sukzessiv über den verschiedenen Bogen erfolgen, z.B. in Nummerfolge.

Die so erhaltene Teilfläche von  $R$  sei  $R_1$ . Ich hefte an sie das Blatt  $Q_2$ , und zwar wieder sukzessiv über den verschiedenen  $L$ -Bogen, über denen  $Q_2$  mit jener Teilfläche zusammenhängt. Die erhaltene Fläche sei  $R_2$ . Allgemein:

An die aus  $Q_0, \dots, Q_n$  aufgebaute Teilfläche  $R_n$  von  $R$  wird das Blatt  $Q_{n+1}$  geheftet, sukzessiv in Nummerfolge über allen  $L$ -Bogen, über denen  $Q_{n+1}$  mit der bereits vorhandenen Teilfläche zusammenhängt.

Man sieht sofort, dass bei diesem Verfahren alle Punkte von  $R$  mitgenommen werden. Der Prozess setzt sich abwechselnd aus Anheftung von neuen Blättern und »Einschmelzung« von zurückgebliebenen Einschnitten zusammen.

Nach jeder Anheftung bzw. Einschmelzung liegt eine Fläche vor, welche im allgemeinen gewisse, über den Bogen von  $L$  liegende *freie Randbogen* hat. Ist  $R$  geschlossen, so sind, nach einem gewissen Schritt, alle Halbblätter nebst Randbogen mitgenommen; der Prozess bricht ab.

*Konstruktion des topologischen Baumes.* — Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, den gewünschten Baum  $B$  der Fläche aufzubauen. Ich gebe erst eine Anweisung für die Konstruktion, dann den Beweis für ihre Möglichkeit.

Als Bausteine verwende ich gewisse Gebilde, die ich als *Sterne* bezeichne: jeder Stern besteht aus einem *Knoten* und  $q$  von ihm ausgehenden *Elementargliedern*, welche in Folge von 1 bis  $q$  numeriert sind; der Stern ist ein *Innen-* oder *Aussenstern*, je nachdem die Nummerfolge einer positiven oder negativen Drehung um den Knoten entspricht.

Jedem Innen- bzw. Aussengebiet  $Q_n$  von  $R$  wird ein Stern  $K_n$  von der entsprechenden Art zugeordnet. Den  $q$  Randbogen von  $Q_n$  entsprechen die  $q$  gleich numerierten Elementarglieder.

Die Konstruktion des Baumes erfolgt nun ganz parallel mit der kranzförmigen Ausschöpfung der Fläche.

Ich zeichne zuerst den Stern  $K_0$  (Abb. 4).

Das Halbblatt  $Q_1$  möge mit  $Q_0$  über den mit  $\nu, \nu', \dots$  ( $\nu < \nu' < \dots$ ) numerierten Bogen von  $L$  zusammenhängen. Ich zeichne dementsprechend den Stern  $K_1$  derart, dass ich die mit  $\nu$  numerierten Elementarglieder von  $K_0$  und  $K_1$  zu einem einzigen Glied vereinige. Dann verbinde ich sukzessiv die etwaigen anderen, mit  $\nu', \dots$  numerierten, zusammengehörigen Elementarglieder mittels Strecken, welche die bereits vorhandenen Teile der Figur vermeiden. Die erhaltene Figur  $B_1$  stellt die Struktur der Teilfläche  $R_1$  dar.

An  $B_1$  wird in derselben Weise der Stern  $K_2$  von  $Q_2$  gefügt usw. Allgemein:

Der Teilfläche  $R_n$  möge die Baumfigur  $B_n$  entsprechen; den freien Randbogen von  $R_n$  entsprechen dann in  $B_n$  gewisse *freie Glieder*, d.h. Elementarglieder, die noch nicht mit einem anderen zu vollständigen Glieder vereinigt sind.

Wenn, bei der Ausschöpfung von  $R$ , an den freien Randbogen  $b$  von  $R_n$  das Blatt  $Q_{n+1}$  geheftet wird, so soll in der Baumfigur an das entsprechende freie Glied  $k$  der Stern  $K_{n+1}$  von  $Q_{n+1}$ , gefügt werden, so dass das mit  $k$  gleichnumerierte Elementarglied  $l$  mit  $k$  vereinigt wird.

Wenn, bei der Ausschöpfung,  $Q_{n+1}$  längs (etwaigen) anderen Randbogen  $b', b'', \dots$  an  $R_n$  geheftet wird, so sollen die entsprechenden Gliedpaare  $(k', l'), (k'', l''), \dots$  in  $B_n$  und  $K_{n+1}$  sukzessiv mit Strecken vereinigt werden, welche die bereits vorhandenen Teile der Figur vermeiden.

Die entstandene Figur  $B_{n+1}$  stellt die Struktur von  $R_{n+1}$  dar.

*Beweis für die Möglichkeit der Konstruktion.* — Die obige Anweisung setzt voraus, dass zwei Elementarglieder, welche demselben Schnittbogen auf der Fläche entsprechen, immer vereinigt werden können, ohne dass hierbei der bereits vorhandene Teil des Baumes getroffen wird. Dies folgt in der Tat daraus, dass die Fläche *schlichtartig* ist.

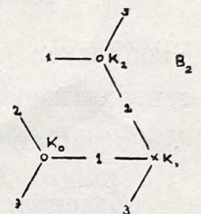


Abb. 4.

Antithese: Die Baumfigur  $B'$  (Abb. 5) ist nach der Anweisung konstruierbar, aber sie enthält zwei freie, demselben Schnittbogen auf  $R$  zugeordnete Glieder  $k, l$ , deren Endpunkte  $K, L$  durch die Glieder von  $B'$  getrennt sind.

Eine solche Sachlage kann offenbar nur dadurch entstehen, dass  $B'$  eine einfache, geschlossene Gliedfolge  $\Pi$  enthält, welche  $K$  und  $L$  trennt. Da alle Teile von  $B'$  in Zusammenhang stehen, kann man  $K$  und  $L$  mit  $\Pi$  mittels zweier einfacher Gliedzüge  $\Pi'_1, \Pi'_2$  verbinden; sie münden auf verschiedene Ufer von  $\Pi$ .

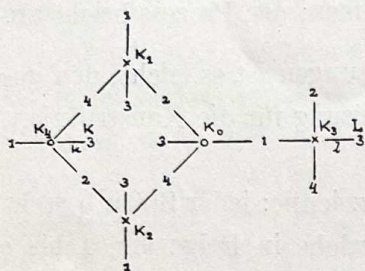


Abb. 5.

Der Folge  $\Pi$  entspricht auf der Fläche  $R$  eine einfache, geschlossene Gliedkurvenfolge  $S$ . Auch die den Gliedern von  $\Pi'_1, \Pi'_2$  entsprechenden Gliedkurven bilden eine einfache Folge  $S'$ , denn den Elementargliedern  $k, l$  entspricht, voraussetzungsgemäss, dieselbe Gliedkurve; und zwar münden die Enden von  $S'$  auf verschiedene Ufer von  $S$ , da die in einem Knotenpunkt zusammenstossenden

Gliedkurven einander in derselben Ordnung folgen, wie die entsprechenden Glieder um ihren gemeinsamen Knoten. Die beiden Ufer von  $S$  würden somit nicht von einander getrennt sein; dies steht aber in Widerspruch mit der Schlichtartigkeit der Fläche.

*Zusammenfassung.* — Nach dem Obigen ist die auf S. 13 angegebene sukzessive Konstruktion immer ausführbar. Sie führt, nach endlich oder abzählbar unendlich vielen Schritten, zu einer Figur  $B$ , welche die Eigenschaften (I) (Nr. 2) hat, also ein topologischer Baum ist, und zwar, im Sinne der Vorschrift (II), der Baum von  $R$  bei der Zerschneidung  $L$ .  $B$  ist in dem Sinne vollkommen bestimmt, dass zwei verschiedene, zur Fläche  $R$  und zur Kurve  $L$  gehörige Bäume eindeutig und stetig auf einander bezogen werden können.

Der Beweis für die Behauptung 2° auf S. 10 ist hiermit erbracht.

Ist  $R$  eine geschlossene Fläche, so bricht der Konstruktionsprozess nach einem gewissen Schritt ab, indem keine freien Glieder mehr vorhanden sind. Der Baum besteht dann aus endlich vielen Knoten und Gliedern; er ist ein *geschlossener Baum*.

*Die Elementarpolygone.*

5. Den Windungspunkten der Riemannschen Fläche entsprechen im topologischen Baum gewisse Gebilde, die jetzt besprochen werden sollen.

Ich betrachte z.B. die über  $a_\nu$  gelegenen Windungspunkte von  $R$ .  $P$  sei ein Punkt auf  $R$  über  $w_i$  (Nr. 2). Von  $P$  aus verfolge man die Fläche über der Kurve  $s_\nu$  nach  $w_a$ , dann über  $s_{\nu+1}$  zurück nach  $w_i$ , wieder über  $s_\nu$  nach  $w_a$  usw., indem man den Grundpunkt  $a_\nu$  in positiver Richtung umkreist; ebenso in negativer Richtung. Man wird hierbei entweder nach einem Umlauf, oder nach  $\lambda$  ( $\lambda > 1$ ) Umläufen, oder nie den Punkt  $P$  wieder erreichen. Der durchlaufene Gliedkurvenzyklus umschliesst in diesen drei Fällen bzw. eine über  $a_\nu$  gelegene schlichte Stelle, einen algebraischen oder einen logarithmischen Windungspunkt.

Im topologischen Baum entspricht dem Gliedkurvenzyklus ein 2-,  $2\lambda$ -,  $\infty$ -gliedriger Gliedzyklus (Vgl. die Abb. 3). Er besteht aus abwechselnd mit  $\nu$  und  $\nu+1$  nummerierten Gliedern. Von seinen Knoten gehen nach der einen Seite (der »linken«) keine Glieder aus. Einen solchen Gliedzyklus nennen wir ein *Elementarpolygon*, und zwar den drei Fällen entsprechend ein *reguläres*,

ein *algebraisches* oder ein *logarithmisches*. Ich werde auch kurz von Zweiecken, von  $2\lambda$ -Ecken und von  $\infty$ -Ecken reden. Aus dem Gesagten ist folgendes ersichtlich:

*Jeder über einem Grundpunkt gelegenen schlichten Stelle von  $R$  entspricht in  $B$  ein Zweieck, jeder algebraischen Stelle der Ordnung  $\lambda$  ein  $2\lambda$ -Eck, jeder logarithmischen Stelle ein  $\infty$ -Eck und umgekehrt.*

Die Zweiecke und  $2\lambda$ -Ecke umschliessen gewisse Gebiete, welche von Knoten und Gliedern frei sind; wir nennen sie reguläre bzw. algebraische *Elementargebiete*. Auch das von Gliedern freie Ufer eines logarithmischen Elementarpolygons werde ich gelegentlich als ein »logarithmisches Elementargebiet« bezeichnen<sup>1</sup>. — Die Namen »Elementarpolygon« und »Elementargebiet« rühren davon her, dass den regulären, algebraischen und logarithmischen *Elementen* einer *analytischen Funktion* gleichbenannte Stellen ihrer Riemannschen Fläche entsprechen.

Mit der *Nummer* eines Elementargebiets werden wir den Index des entsprechenden Grundpunktes verstehen.

#### Die Zusammenhangszahl des Baumes.

6. Die vorliegende Abhandlung wird sich, wie schon erwähnt, mit *einfach zusammenhängenden* Flächen beschäftigen. Es ist für die folgende Darstellung nötig klarzustellen, wie der einfache bzw. mehrfache Zusammenhang der Fläche im topologischen Baum zum Ausdruck kommt.

Eine *schlichtartige, mehrfach zusammenhängende* Fläche ist definitionsgemäss dadurch charakterisiert, dass es auf ihr einen die Fläche nicht zerlegenden Querschnitt gibt (Vgl. die Fussnote S. 7). Dieses Kriterium kann durch ein anderes, mit ihm äquivalentes ersetzt werden:

$N$  sei ein nichtzerlegender Querschnitt der Fläche  $R$ . Man verbinde zwei gegenüberliegende Punkte der beiden Ufer von  $N$  durch eine einfache,  $N$  nicht treffende Kurve  $K$ , die also einen Rückkehrschnitt auf  $R$  darstellt. Wegen der Schlichtartigkeit der Fläche zerlegt  $K$  diese in zwei Gebiete, welche je einen *Zweig* von  $N$  enthalten. Sie enthalten somit, laut der Definition des Querschnittes, je eine unendliche Punktmenge, welche sich in keinem Flächenpunkt häuft. Bezeichnen wir Gebiete mit dieser Eigenschaft kurz als *Randgebiete*, so können wir sagen: Es gibt auf  $R$  einen Rückkehrschnitt, der zwei Randgebiete trennt.

Umgekehrt: Gibt es auf  $R$  einen derartigen Rückkehrschnitt  $K$ , so gibt es auch einen Querschnitt  $N$ , der die Fläche nicht zerlegt. Denn  $K$  zerlegt, laut Voraussetzung,  $R$  in zwei Gebiete, welche je eine unendliche Punktmenge, z.B. eine Punktfolge, enthalten, die sich in keinem Flächenpunkt häuft. Zieht man nun, von einem Punkt auf  $K$  ausgehend, nach den beiden Gebieten hin zwei Kurven, welche die Punkte der genannten Folgen sukzessiv durchlaufen, so bilden diese Kurven zusammen einen Querschnitt  $N$  von  $R$ , der die Fläche nicht zerlegt; denn seine Ufer sind durch  $K$  verbunden.

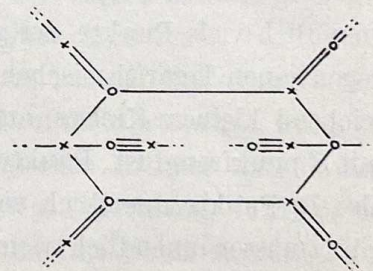


Abb. 6.

<sup>1</sup> Der Name ist nicht ganz glücklich, da ja eine offene Gliedfolge nicht den vollen Rand eines Gebietes ausmachen kann. In dem uns interessierenden Falle, wo  $R$  einfach zusammenhängend ist, kann aber  $B$  stets derart gezeichnet werden, dass der unendlich ferne Punkt die einzige Häufungsstelle der Knoten und Glieder wird; dann begrenzt jedes logarithmische Polygon, zusammen mit dem Punkt  $\infty$ , ein wirkliches Gebiet.

Eine schlichtartige Fläche ist also dann und nur dann mehrfach zusammenhängend, wenn es auf ihr einen Rückkehrschnitt gibt, welcher zwei Randgebiete trennt. Die entsprechende Eigenschaft des topologischen Baumes ist in dem nachstehenden Satz enthalten (Abb. 6):

*Ist die Fläche  $R$  mehrfach zusammenhängend, so gibt es in ihrem Baum  $B$  eine einfache, geschlossene Gliedfolge, welche zwei unendliche Mengen von Knoten trennt. Umgekehrt: Gibt es in  $B$  eine solche Folge, so ist  $R$  mehrfach zusammenhängend.*

Analogisch nennen wir auch den Baum *mehrfach* oder *einfach zusammenhängend*, je nachdem er eine Folge der besagten Art enthält oder nicht.

*Beweis:*

1°  $R$  sei eine schlichtartige, mehrfach zusammenhängende Fläche.

Nach dem obigen gibt es auf  $R$  einen Rückkehrschnitt  $K$ , der zwei Randgebiete von  $R$  trennt. Wir folgern zunächst hieraus, dass es sogar eine *Gliedkurvenfolge* mit derselben Eigenschaft gibt (Vgl. den Beweis auf S. 11). In der Tat:  $K$  ist in endlich vielen Halbblättern enthalten; durch stetige Abänderung kann erreicht werden, dass diese Kurve jedes von ihnen nur endlich oft trifft. Durch Zeichnung geeigneter Querkurven wird jene nunmehr durch endlich viele Rückkehrschnitte ersetzt, von denen jeder eine *einfache* Folge von Halbblättern durchläuft; unter diesen Rückkehrschnitten muss es offenbar einen geben, der immerhin zwei Randgebiete von  $R$  trennt. Dieser wird schliesslich in eine einfache, geschlossene Gliedkurvenfolge  $S$  deformiert, welche ebenfalls die genannte Trennungseigenschaft besitzt.

Wegen der Schlichtartigkeit von  $R$  zerlegt  $S$  die Fläche in zwei Teilflächen  $R_1$  und  $R_2$ . Ich werde zeigen, dass diese je unendlich viele vollständige Halbblätter enthalten.

Ich betrachte z.B. die Teilfläche  $R_1$ ; sie enthält, nach dem obigen, eine unendliche Punktmenge, die sich in keinem Flächenpunkt häuft. Dies ist nur in einer der folgenden Weisen möglich: Entweder enthält  $R_1$  Punkte unendlich vieler Halbblätter; oder es gibt ein Halbblatt, welches unendlich viele Punkte der genannten Menge enthält; diese häufen sich dann notwendigerweise gegen einen logarithmischen Windungspunkt. Im letzteren Falle kann man, mittels eines hinreichend kleinen Kreises, aus  $R$  eine unendlich vielblättrige Elementarfläche ausstanzen, welche mit  $S$  punktfremd ist, Punkte von  $R_1$  enthält, und somit ganz zu  $R_1$  gehört. In jedem Fall enthält also  $R_1$  Punkte unendlich vieler Halbblätter. Da es nur endlich viele von  $S$  zerlegte Halbblätter gibt, müssen unendlich viele vollständige Halbblätter zu  $R_1$  gehören; dasselbe kann von  $R_2$  bewiesen werden.

Die Knotenpunkte von  $R$  zerfallen nach dem Bewiesenen (insofern sie nicht auf  $S$  liegen) in zwei unendliche Mengen: die zu  $R_1$  und die zu  $R_2$  gehörigen. Verbinde ich einen Knotenpunkt mit  $S$  mittels eines einfachen Gliedkurvenzuges, so wird dieser auf verschiedene Ufer von  $S$  münden, je nachdem der Knotenpunkt zu  $R_1$  oder  $R_2$  gehört; denn sonst würden die Mengen nicht durch  $S$  getrennt sein.

Diesem Verhältnis entspricht im topologischen Baum das folgende: Es gibt eine einfache, geschlossene Gliedfolge  $\Pi$  (das Gegenstück zu  $S$ ), und zwei unendliche Knotenmengen mit folgender Eigenschaft: werden, von zwei Knoten verschiedener Mengen, einfache Gliedzüge nach  $\Pi$  gezogen, so münden diese auf verschiedene Ufer von  $\Pi$ ; d.h.  $\Pi$  trennt die Mengen, w.z.b.w.

2° Umgekehrt: Der topologische Baum  $B$  der Fläche  $R$  möge eine einfache, geschlossene Gliedfolge  $\Pi$  enthalten, welche zwei unendliche Knotenmengen trennt. Ziehe ich von zwei Knoten verschiedener Mengen einfache Gliedzüge nach  $\Pi$ , so werden diese also auf verschiedene Ufer münden.

Auf der Fläche  $R$  entspricht der Folge  $\Pi$  eine einfache, geschlossene Gliedkurvenfolge  $S$ , welche  $R$  in zwei Teilflächen zerlegt. Den Knotenmengen entsprechen zwei unendliche Mengen von Knotenpunkten mit folgender Eigenschaft: werden, von zwei Knotenpunkte verschiedener Mengen, Gliedkurvenzüge nach  $S$  gezogen, so münden diese auf verschiedene Ufer von  $S$ . Hieraus folgt, dass die genannten Mengen bzw. den beiden durch  $S$  getrennten Teilflächen angehören. Es gibt somit auf  $R$  einen Rückkehrschnitt, welcher zwei Randgebiete der Fläche trennt; diese ist folglich mehrfach zusammenhängend.

Der auf S. 16 ausgesprochene Satz ist hiermit vollständig bewiesen.

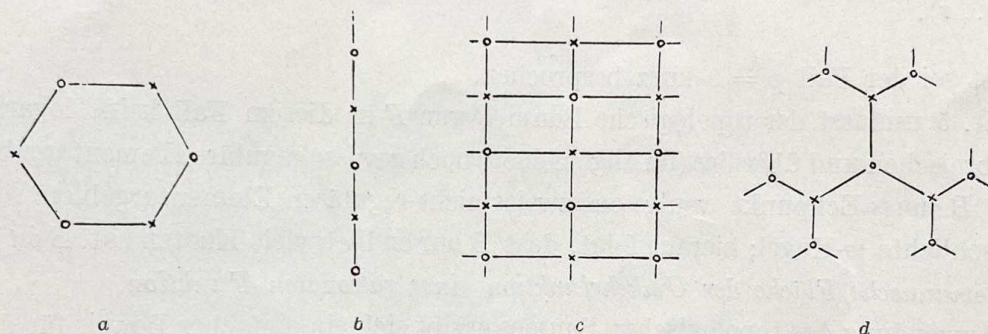


Abb. 7.

Der Baum gewonnen durch Abbildung von  $R$ . — Beispiele.

7. Wie schon bemerkt, hätten wir in viel einfacherer Weise als der obigen zum Begriff des topologischen Baumes gelangen können, falls wir die Möglichkeit einer konformen oder auch nur topologischen Abbildung von  $R$  auf ein schlichtes Gebiet benutzt hätten. Bei einer solchen Abbildung werden nämlich die Knotenpunkte und Gliedkurven von  $R$  auf ein System von Punkten und Kurven abgebildet, welche den Knoten und Gliedern des topologischen Baumes vollkommen entsprechen. Ich habe es jedoch vorgezogen, mit der schematischen Darstellung anzufangen; denn in dieser Abhandlung handelt es sich eben um die Auffindung und Untersuchung der Abbildungsfunktion einer topologisch gegebenen Fläche.

Auf Grund der obigen Bemerkung ist es leicht, die Bäume einiger elementaren Flächen zu zeichnen.

Abb. 7 a stellt den Baum der Fläche von  $z = \sqrt[3]{w}$  dar. Das Innere und Äussere des Elementarpolygons entsprechen den Windungspunkten  $z = 0$  und  $z = \infty$ .

Abb. 7 b zeigt den Baum der gewöhnlichen logarithmischen Fläche, Abb. 7 c denjenigen der zur  $p$ -Funktion gehörigen Fläche.

In Abb. 7 d finden wir den Baum einer »regulär verzweigten« Fläche mit drei Grundpunkten; sie wird durch die Umkehrfunktion der Modulfunktion auf das Innere des Einheitskreises abgebildet.

## Kap. II. Topologie der Flächen $F$ .

### § 2. Allgemeine Struktur der Flächen $F$ .

8. In der im vorigen Kapitel entwickelten Theorie des topologischen Baumes haben wir bei der Riemannschen Fläche nur vorausgesetzt, dass sie schlichtartig ist, und dass ihre singulären Stellen über endlich vielen Punkten liegende Windungspunkte sind. Wir wenden uns jetzt unserer eigentlichen Aufgabe zu:

*Ich betrachte diejenigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen  $F$ , welche als einzige singuläre Stellen endlich viele Windungspunkte aufweisen. Im vorliegenden Kapitel soll ihre Struktur unter Anwendung des topologischen Baumes untersucht werden.*

Die Anzahl der logarithmischen Windungspunkte soll im Folgenden mit  $p$ , diejenige der algebraischen mit  $r$  bezeichnet werden. Die Ordnungszahlen der letzteren bezeichnen wir mit  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ).

9. Zuerst sei der Fall  $p = 0$  kurz besprochen.

Nach Nr. 5 umfasst der topologische Baum  $B$  von  $F$  in diesem Fall keine logarithmischen, genau  $r$  algebraischen und überdies (im allgemeinen) noch gewisse reguläre Elementargebiete. Jeder Knoten von  $B$  muss Eckpunkt wenigstens zweier nicht-regulären Elementargebiete sein — sonst wäre  $F$  die schlichte  $w$ -Kugel; hieraus folgt, dass  $B$  nur endlich viele Knoten hat.  $B$  ist geschlossen,  $F$  ist die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion einer rationalen Funktion.

Unter Anwendung des topologischen Baumes ergibt sich ein einfacher Beweis für den bekannten Riemannschen Satz über die Windungspunkte einer algebraischen Fläche vom Geschlecht Null. Angesichts einer späteren Anwendung derselben Methode sei es uns erlaubt, den Beweis hier anzugeben.

Die Elementargebiete, Glieder und Knoten von  $B$  bilden auf der Zahlenkugel ein Polyeder (im topologischen Sinne) vom Geschlecht Null. Wir werden auf dieses den bekannten Eulerschen Polyedersatz anwenden; für ein geschlossenes Polyeder vom Geschlecht Null lautet er:

$$(1) \quad K - S - E + 2 = 0$$

wo  $K$  die Kanten-,  $S$  die Seiten- und  $E$  die Eckenzahl bedeuten.

Ich bezeichne mit  $n$  die Blätterzahl von  $F$  und mit  $\bar{n}(a)$  die Anzahl der über  $w = a$  gelegenen Punkte<sup>1</sup> dieser Fläche; es ist mithin  $\bar{n}(a) \leq n$ , wobei Ungleichheit nur für die Grundpunkte stattfindet. In diesem Fall ist  $n - \bar{n}(a_v)$  die gesamte Verzweigungszahl<sup>2</sup> der über  $a_v$  gelegenen algebraischen Windungspunkte. — Mit diesen Bezeichnungen wird die Anzahl der Knoten von  $B$  gleich  $2n$ , diejenige der Glieder also  $\frac{q \cdot 2n}{2} = nq$ . Die Gesamtzahl der Elementargebiete wird gleich der Anzahl aller über den Grundpunkten gelegenen Punkte von  $F$ , also  $\sum_1^q \bar{n}(a_v)$ . In die Formel (1) ist also

<sup>1</sup> Ein algebraischen Windungspunkt wird als ein Punkt gerechnet.

<sup>2</sup>  $\lambda - 1$  ist die Verzweigungszahl eines Windungspunktes von der Ordnung  $\lambda$ .



$$E = 2n, \quad K = nq, \quad S = \sum_1^q \bar{n}(a_\nu)$$

einzusetzen; sie gibt dann

$$\sum_{\nu=1}^q (n - \bar{n}(a_\nu)) = 2(n - 1)$$

oder, da die linke Summe die gesamte Verzweigungszahl von  $F$  ist,

$$\sum_{i=1}^r (\lambda_i - 1) = 2(n - 1).$$

Dieses ist die Riemannsche Formel.

10. Ich gehe zum Fall  $p > 0$  über. Wir haben es da mit einer *offenen* Riemannschen Fläche zu tun; ihr topologischer Baum  $B$  umfasst dementsprechend unendlich viele Knoten und Glieder.

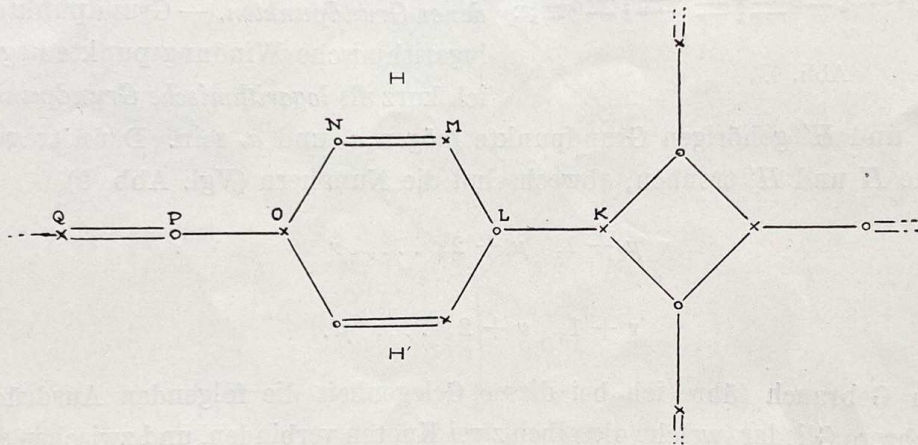


Abb. 8.

der, und, von Elementargebieten,  $p$  logarithmische,  $r$  ( $\geq 0$ ) algebraische und ausserdem noch reguläre. Wir wollen untersuchen, wie sich diese Gebilde im Baum anordnen.

Ich betrachte ein beliebiges logarithmisches Elementarpolygon (Abb. 8), und verfolge es, von irgendeinem Knoten ausgehend, unbeschränkt nach der einen Richtung hin, z.B. nach derjenigen, welche einem negativen Umlauf um den zugehörigen Windungspunkt entspricht. Hierbei habe ich an der einen (»rechten«) Seite ein von Gliedern freies »logarithmisches Elementargebiet«  $H$ . An der anderen Seite grenzt das Polygon entweder unmittelbar (längs  $KL$ ,  $LM$ ,  $NO$ , ... in Abb. 8) oder über einem oder mehreren Zweiecken ( $MN$ ,  $PQ$ ) an ein algebraisches oder logarithmisches Gebiet. *Ich sehe von den Zweiecken ab, und sage kurz:  $H$  grenzt an jene Gebiete.*

Ich behaupte nun: *Von einem gewissen Knoten ab grenzt  $H$  an ein und dasselbe logarithmische Gebiet  $H'$ .*

Erstens kann  $H$  nicht in infinitum an algebraische Gebiete grenzen; denn diese, und somit auch ihre Seiten, sind nur in endlicher Anzahl vorhanden. — Von einem gewissen Knoten ab grenzt  $H$  also an lauter logarithmische Gebiete. Da es nur endlich viele solche gibt, muss entweder nach einem bestimmten Schritt immer dasselbe der Nachbar von  $H$  sein; oder es müsste

sich ein Gebiet  $H'$  unendlich oft wiederholen. Im letzteren Fall würden  $H$  und  $H'$  zwischen sich unendlich viele Polygone einschliessen. Wegen des einfachen Zusammenhangs von  $F$  (Vgl. den Satz in Nr. 6) enthielte das Innere jedes solchen Polygons nur endlich viele Knoten und Glieder, und zerfiel also in gewisse reguläre und algebraische Elementargebiete. Es würde dann unendlich viele Gebiete dieser letzteren Art geben, was gegen die Voraussetzung ist. Die Behauptung ist hiermit bewiesen.

Der Satz gilt selbstverständlich auch, wenn man das Ufer von  $H$  nach der anderen Richtung hin verfolgt; nur ist das Nachbargebiet im allgemeinen ein anderes.

Zu den Gebieten  $H$  und  $H'$  gehören auf der Fläche  $F$  logarithmische Windungspunkte, welche über *verschiedenen* Grundpunkten liegen; sonst könnten  $H$  und  $H'$  nicht dieselben Knoten als Ecken haben. Hieraus folgt: *Die Anzahl der logarithmischen Windungspunkte ist mindestens*

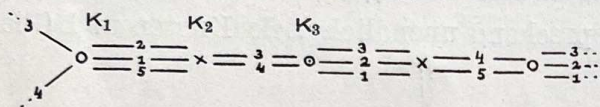


Abb. 9.

*zwei, und sie liegen über mindestens zwei verschiedenen Grundpunkten.* — Grundpunkte, über denen logarithmische Windungspunkte liegen, bezeichne ich kurz als *logarithmische Grundpunkte*.

Die zu  $H$  und  $H'$  gehörigen Grundpunkte mögen  $a_\mu$  und  $a_\nu$  sein. Dann tragen diejenigen Glieder, welche  $H$  und  $H'$  trennen, abwechselnd die Nummern (Vgl. Abb. 9)

(2)  $\mu + 1, \mu + 2, \dots, \nu$

und

(3)  $\nu + 1, \nu + 2, \dots, \mu.$

Zum späteren Gebrauch führe ich bei dieser Gelegenheit die folgenden Ausdrücke ein: Ein Glied, oder mehrere Glieder, welche dieselben zwei Knoten verbinden, und zwischen sich Zweiecke einschliessen, nenne ich ein *Bündel*. Zwei Bündel mit zusammen  $q$  Gliedern, welche in der Art von (2) und (3) sämtliche Nummern  $1, 2, \dots, q$  aufweisen, bezeichne ich als *Komplementarbündel*. Zwei Komplementarbündel, welche von demselben Knoten ausgehen, bilden ein *Doppelbündel*. — In Abb. 9 ist  $K_1 K_2$  ein Bündel,  $K_2 K_3$  sein Komplementarbündel, beide zusammen bilden ein Doppelbündel. — Unter Benutzung dieser Ausdrücke kann man kurz sagen:

*Zwei benachbarte logarithmische Elementargebiete werden durch eine unendliche Folge von Doppelbündeln getrennt.*

Auf der Riemannschen Fläche haben wir, dem obigen entsprechend, die folgenden Verhältnisse:

Den Knoten  $K_1, K_2, \dots$  (Abb. 9) entspricht eine unendliche Folge von Halbblättern, welche abwechselnd über den Bogen  $a_\mu a_\nu$  und  $a_\nu a_\mu$  zusammenhängen. Sie bilden einen *Zweig* von  $F$ , so wie die Fläche der Funktion

$$z = \log \frac{w - a_\mu}{w - a_\nu}.$$

Wir nennen daher, mit SPEISER und NEVANLINNA, einen derartigen *Zweig* der Fläche, sowie auch das entsprechende Gebilde im topologischen Baum, ein *logarithmisches Ende*.

11. Wir haben in der vorigen Nummer die Berandung und die Nachbargebiete eines einzelnen logarithmischen Elementargebiets untersucht. Nun wenden wir uns wieder der Beschreibung des topologischen Baumes als ganzen zu.

Ich betrachte ein beliebiges logarithmisches Elementargebiet  $H_1$ , und verfolge sein Ufer in negativer Richtung. Nach dem Satz auf S. 19 grenzt  $H_1$ , von einem bestimmten Knoten  $K_{12}$  ab, an ein einziges logarithmisches Elementargebiet  $H_2$ , und wird von ihm durch ein logarithmisches Ende  $L_{12}$  getrennt (Abb. 10).

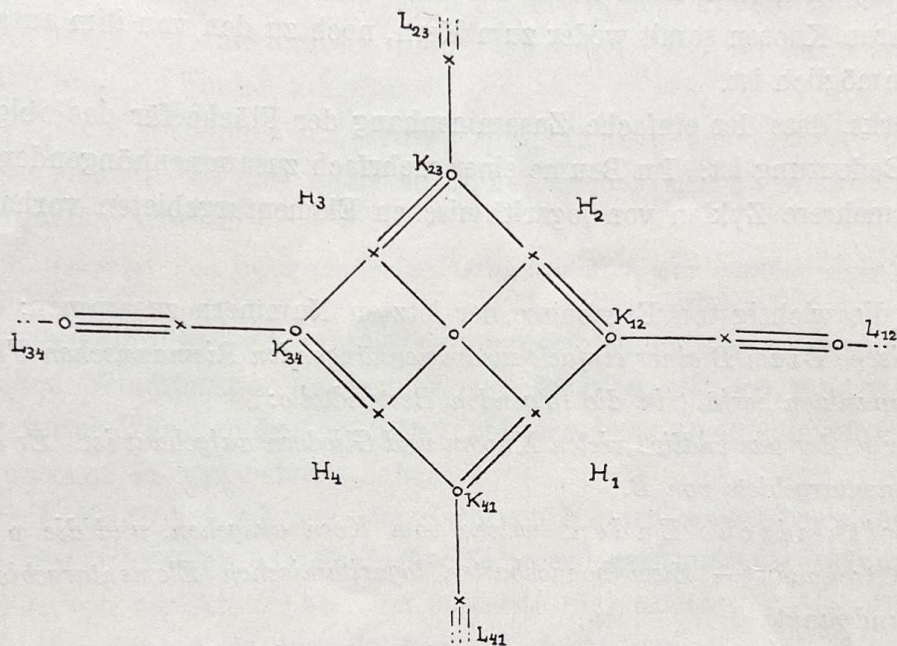


Abb. 10.

Von  $K_{12}$  aus verfolge ich das Ufer von  $H_2$  in negativer Richtung bis zum Knoten  $K_{23}$ ,<sup>1</sup> von welchem ab  $H_2$  an das logarithmische Elementargebiet  $H_3$  grenzt.  $H_2$  und  $H_3$  werden durch ein von  $K_{23}$  ausgehendes logarithmisches Ende  $L_{23}$  getrennt.

In dieser Weise fahre ich fort, und erhalte so einen Zyklus von logarithmischen Elementargebietern  $H_1, H_2, \dots$ . Ich werde folgendes zeigen: *Der Zyklus schliesst sich nach dem  $p$ :ten Schritt, indem  $H_p$  an seiner linken Seite an  $H_1$  grenzt.*

*Beweis:* Da  $B$  nur  $p$  logarithmische Elementargebiete enthält, muss nach höchstens  $p$  Schritten das Gebiet  $H_1$  wieder im Zyklus auftreten, indem ein gewisses Gebiet  $H_{p'}$  ( $p' \leq p$ ) an seiner linken Seite an  $H_1$  grenzt.\* Es muss gezeigt werden, dass  $p' = p$  ist.

Verfolgt man das Ufer des Gebietes  $H_2$  von  $K_{12}$  nach  $K_{23}$ , dasjenige des Gebietes  $H_3$  von  $K_{23}$  nach  $K_{34}$  usf., schliesslich das Ufer von  $H_1$  von  $K_{p'-1}$  zurück nach  $K_{12}$ , so beschreibt man eine geschlossene Gliedfolge  $\Pi$ .<sup>2</sup> Von  $\Pi$  gehen nach rechts keine anderen Glieder aus als die in den logarithmischen Enden  $L_{12}, \dots, L_{p'-1}$  enthaltenen. An der linken Seite schliesst  $\Pi$  ein oder mehrere

<sup>1</sup> Es kann der Fall eintreten, dass  $K_{23}$  mit  $K_{12}$  zusammenfällt.

<sup>2</sup>  $\Pi$  braucht nicht einfach zu sein (Vgl. Abb. 8).

Vielecke ein. Wegen des einfachen Zusammenhangs von  $B$  enthalten diese in ihrem Innern nur endlich viele Knoten und Glieder (S. 16).

Die Gesamtheit der in der Folge  $\Pi$  und ihrem Innern enthaltenen, endlich vielen Knoten und Glieder nenne ich den *Kern* des Baumes. Da vom Kern keine andere Glieder ausgehen als die in  $L_{12}, \dots, L_{p'1}$  enthaltenen, muss jedes Glied und jeder Knoten von  $B$  entweder dem Kern oder einem dieser logarithmischen Enden angehören.

Hieraus ergibt sich  $p' = p$ . Denn wären nicht alle logarithmischen Elementargebiete im Zyklus  $H_1, \dots, H_p$  enthalten, dann würde es ausser  $L_{12}, \dots, L_{p'1}$  noch andere logarithmische Enden geben, deren Knoten somit weder zum Kern, noch zu den von ihm ausgehenden Enden gehörten, was unmöglich ist.

Es sei bemerkt, dass der einfache Zusammenhang der Fläche für das obige Ergebnis von entscheidender Bedeutung ist. Im Baume einer mehrfach zusammenhängenden Fläche werden im allgemeinen mehrere Zyklen von logarithmischen Elementargebieten vorhanden sein (Vgl. Abb. 6).

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse der letzten Nummern zusammen:

*Der topologische Baum  $B$  einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche mit endlich vielen Windungspunkten zerfällt in die folgenden Bestandteile:*

1) *Der Kern, der aus endlich vielen Knoten und Gliedern aufgebaut ist. Er enthält sämtliche algebraische Elementargebiete von  $B$ .*

2)  *$p$  logarithmische Enden, welche vom Kern ausgehen, und die  $p$  logarithmischen Elementargebiete trennen. — Zwei benachbarten logarithmischen Elementargebieten entsprechen verschiedene Grundpunkte.*

Aus der letzten Bemerkung folgt, dass von den  $p$  logarithmischen Gebieten höchstens jede zweite zu demselben Grundpunkt gehören kann. Also:

*Die Anzahl  $\mu_\nu$  der über dem Grundpunkt  $a_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, q$ ) gelegenen logarithmischen Windungspunkte genügt der Ungleichung*

$$(4) \quad \mu_\nu \leq \frac{p}{2}.$$

### § 3. Flächen mit zwei logarithmischen Grundpunkten.

12. Unter den im vorigen Paragraph betrachteten Flächen gibt es eine Klasse, welche durch gewisse besondere Eigenschaften ausgezeichnet ist. Es sind diejenigen Flächen, deren sämtliche logarithmische Windungspunkte über nur zwei Grundpunkten liegen. Sie sollen in diesem Paragraph näher behandelt werden.

Ich bezeichne wie vorher mit  $F$  die betrachtete Fläche, mit  $B$  ihren topologischen Baum bei einer bestimmten Zerschneidung. Die logarithmischen Windungspunkte von  $F$  mögen über den Grundpunkten  $a_i, a_j$  liegen; sie sind, nach der Ungleichung (4), zur gleichen Anzahl  $\mu = \frac{p}{2}$  über diese verteilt. Ausserdem können auch algebraische Windungspunkte über  $a_i, a_j$  und den  $q - 2$  anderen Grundpunkten vorhanden sein.

Aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ist folgendes ersichtlich (man vergleiche hierzu das Beispiel in Nr. 1):

$B$  besteht aus einem Kern und  $2\mu$  von ihm ausgehenden logarithmischen Enden. Diese trennen  $2\mu$  logarithmische Elementargebiete, welche abwechselnd den Grundpunkten  $a_i$  und  $a_j$  zugeordnet sind. Die logarithmischen Enden sind aus zweierlei Gliedbündeln zusammengesetzt, welche die Nummern

$$(5) \quad i + 1, \quad i + 2, \quad \dots, \quad j$$

bzw.

$$(6) \quad j + 1, \quad j + 2, \quad \dots, \quad i$$

tragen. In denjenigen Enden, welche das dem Punkte  $a_i$  zugeordnete Gebiet an der rechten Seite haben, folgt auf einen Innenknoten immer ein Bündel (5), auf einen Aussenknoten ein Bündel (6); in den anderen Enden umgekehrt.

Die in den Enden vorhandenen *Zweiecke* sind offenbar den von  $a_i, a_j$  verschiedenen Grundpunkten zugeordnet. Es gibt daher in  $B$  nur endlich viele zu  $a_i$  und  $a_j$  gehörige *Zweiecke*; oder mit anderen Worten:

*Die Fläche  $F$  hat über den logarithmischen Grundpunkten nur endlich viele schlichte Stellen.*

Zwischen der Anzahl dieser Stellen, den Ordnungszahlen der algebraischen und der Anzahl der logarithmischen Windungspunkte besteht eine Relation, die wir jetzt herleiten wollen. Dieses geschieht unter Anwendung derselben topologischen Methode, die wir in Nr. 9 zum Beweis der Riemannschen Formel benutzt haben.

Zu dem Zweck schaffe ich mir aus dem Kern von  $B$  einen *geschlossenen Baum*, was in der folgenden Weise geschieht (Abb. 11): Ich schneide jedes logarithmische Ende an der Mitte seines ersten Bündels von der Art (5) ab. Der äusserste rückständige Knoten ist dann abwechselnd ein Innenknoten und ein Aussenknoten. Nun verbinde ich die entsprechenden »freien« Glieder je zweier benachbarten Bündel, und erhalte so einen geschlossenen topologischen Baum  $\bar{B}$ . — Auf der Riemannschen Fläche gedeutet: Ich schaffe mir aus  $F$ , durch Abschneidung der Enden und Zusammenheftung, eine geschlossene Fläche.

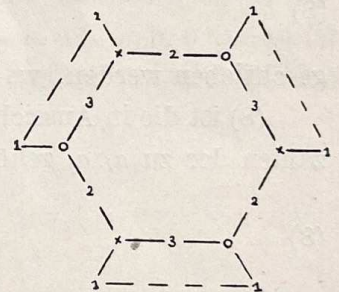


Abb. 11.

Die Glieder, Knoten und Elementargebiete von  $\bar{B}$  sind Kanten, bzw. Ecken und Seitenflächen eines Polyeders vom Geschlecht Null. Auf dieses Polyeder wende ich den Eulerschen Satz an.

$n$  bedeute die halbe Knotenzahl von  $\bar{B}$ ; mit  $\bar{n}(a_\nu)$  bezeichne ich die Anzahl derjenigen Elementargebiete in  $\bar{B}$ , welche dem Grundpunkt  $a_\nu$  zugeordnet sind.

$\bar{B}$  enthält sämtliche algebraische Elementargebiete, welche in  $B$  vorhanden waren, ebenso sämtliche *Zweiecke* des Kerns von  $B$ . Die Anzahl jener, d.h. die Anzahl der algebraischen Windungspunkte von  $F$ , sei wie vorher  $r$ ; ihre Ordnungszahlen seien  $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, r)$ . Insbesondere bezeichne ich mit  $r_i$  und  $r_j$  die Anzahl der über  $a_i$  und  $a_j$  gelegenen algebraischen Windungspunkte. Schliesslich sei  $l$  die Gesamtzahl der über den logarithmischen Windungspunkten gelegenen schlichten Stellen von  $F$ , also die Anzahl der zu  $a_i$  und  $a_j$  gehörigen *Zweiecke* in  $B$ ; diese sind sämtlich auch in  $B$  vorhanden. — Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich für die Kanten-, Ecken- und Seitenflächenzahlen des Polyeders

$$K = nq, \quad E = 2n, \quad S = \sum_{\nu=1}^q \bar{n}(a_\nu)$$

und die Eulersche Formel (1) (S. 18) gibt

$$(q-2)n - \sum_{\nu=1}^q \bar{n}(a_\nu) + 2 = 0$$

oder

$$(7) \quad \sum_{\nu \neq i, j} (n - n(a_\nu)) = \sum_{\nu = i, j} \bar{n}(a_\nu) - 2.$$

Nun ist die *gesamte Ordnungszahl* der zu einem gewissen Grundpunkt  $a_\nu$  ( $\nu \neq i, j$ ) gehörigen Elementargebiete gleich  $n$ , denn jeder Knoten ist Ecke genau eines Elementargebietes mit der Nummer  $\nu$ , und die *gesamte Ordnungszahl* ist eben die halbe Anzahl aller dieser Ecken. Die *Anzahl* der zu  $a_\nu$  gehörigen Elementargebiete ist  $\bar{n}(a_\nu)$ . Die Differenz  $n - \bar{n}(a_\nu)$  stellt also die *gesamte Verzweigungszahl* der über  $a_\nu$  gelegenen algebraischen Windungspunkte dar, und die Summe an der linken Seite von (7) ist die *gesamte Verzweigungszahl* aller über nicht-logarithmischen Grundpunkten gelegenen Windungspunkte.

Die Summe an der rechten Seite ist gleich der Anzahl aller zu  $a_i, a_j$  gehörigen Elementargebiete von  $\bar{B}$ ; darunter zählen: die  $r_i + r_j$  zu  $a_i, a_j$  gehörigen algebraischen Polygone, die  $l$  zu diesen Punkten gehörigen Zweiecke, und schliesslich diejenigen  $\mu + 1$  Elementargebiete, welche bei der Schliessung des Baumes aus den ehemaligen logarithmischen Elementargebieten entstanden sind (eines umfasst das »Äussere« von  $\bar{B}$ ).

Nach dem oben Gesagten kann die Gleichung (7) auch

$$(8) \quad \sum' (\lambda_k - 1) = r_i + r_j + l + \mu - 1$$

geschrieben werden, wo  $\Sigma'$  über sämtliche nicht-logarithmische Grundpunkte zu erstrecken ist.

(8) ist die in Aussicht gestellte Relation. Wenn ich rechts und links noch die Verzweigungszahlen der zu  $a_i, a_j$  gehörigen algebraischen Windungspunkte hinzufüge, erhalte ich

$$(8') \quad \sum_1^r (\lambda_k - 1) = \sum_{a_i, a_j} \lambda_k + l + \mu - 1.$$

Auf der rechten Seite steht hier die *gesamte Ordnungszahl* der über  $a_i, a_j$  gelegenen Stellen, vermehrt um  $\mu - 1$ .

Ich fasse die Ergebnisse dieser Nummer zusammen:

*F* sei eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche mit endlich vielen Windungspunkten, von denen die logarithmischen über nur zwei Grundpunkten liegen. Dann gilt folgendes:

Die logarithmischen Windungspunkte sind zu gleicher Anzahl über die genannten zwei Grundpunkte verteilt. Diese Anzahl sei  $\mu$ .

*F* besitzt über den logarithmischen Grundpunkten nur endlich viele nicht-logarithmische Stellen. Ihre *gesamte Ordnungszahl* sei  $m$ .

Die *Ordnungszahlen* der algebraischen Windungspunkte von *F* seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Dann besteht die Gleichung

$$(9) \quad \sum_1^r (\lambda_k - 1) = m + \mu - 1.$$

13. Nach den allgemeinen Sätzen der Uniformisierungstheorie kann jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche auf das Innere eines Kreises  $|z| < R$  ( $R \leq \infty$ ) konform abgebildet werden. Diejenigen analytischen Funktionen, welche die Abbildung der von uns betrachteten Flächen vermitteln, sollen im III. und IV. Kapitel dieser Abhandlung näher untersucht werden.

Der im vorliegenden Paragraph behandelte Fall zweier logarithmischen Grundpunkte trägt nun, wie es sich herausstellt, einen funktionentheoretisch besonders elementaren Charakter. Es sei uns deshalb erlaubt, schon hier etwas auf die Frage nach der abbildenden Funktion einzugehen.

Zu diesem Zweck bedürfen wir der folgenden zwei Ergebnisse, die später bewiesen werden sollen: ]

*Die konforme Abbildung der in diesem und den folgenden Kapiteln betrachteten Flächen  $F$  erfolgt auf die punktierte Ebene (parabolischer Fall).*

*Die (folglich meromorphe) Umkehrfunktion  $w(z)$  der abbildenden Funktion ist von endlicher Ordnung.*

Diese Ergebnisse wende ich auf die uns jetzt interessierenden Flächen mit zwei logarithmischen Grundpunkten an.

Nach Nr. 12 hat eine solche Fläche über den logarithmischen Grundpunkten nur endlich viele reguläre und algebraische Stellen;  $w(z)$  hat dementsprechend nur endlich viele  $a_i$ - und  $a_j$ -Stellen. Durch eine lineare Transformation ist stets zu erreichen, dass  $a_i$  und  $a_j$  in 0 und  $\infty$  fallen; dann ist  $w(z)$  eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung mit endlich vielen Nullstellen und Polen. Eine solche Funktion ist bekanntlich von der Form

$$(10) \quad w(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{G(z)},$$

wo  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $G(z)$  Polynome sind.

Es gilt auch umgekehrt: jede Funktion von der Form (10) leistet die konforme Abbildung der  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche, von der in diesem Paragraph behandelten Art. Um dies zu zeigen, betrachte ich die Umkehrfunktion  $z(w)$  der vorgelegten Funktion (10), und ihre Riemannsche Fläche  $F$ .

Den *algebraischen* Windungspunkten von  $F$  entsprechen die mehrfachen Stellen der Funktion (10). Sie sind also in endlicher Anzahl vorhanden, denn die Ableitung von (10) verschwindet nur endlich oft.

Jeder *transzendenten* (d.h. nicht-algebraischen) Singularität von  $F$  entspricht ein asymptotischer Wert von  $w(z)$ . Nach (10) hat also  $F$  transzendente Stellen nur über Null und Unendlich; diese Stellen sind demnach sämtlich logarithmische Windungspunkte.

Zwei wesentlich verschiedenen Konvergenzwegen von  $w(z)$  (d.h. solchen, die nicht in einander stetig deformierbar sind) entsprechen verschiedene transzendente Stellen von  $F$ , und um-

gekehrt. Die Funktion (10) hat offenbar nur endlich viele solche Wege; also sind auch die logarithmischen Windungspunkte von  $F$  nur in endlicher Anzahl vorhanden, und  $F$  ist von der behaupteten Art.

Die Gradzahl  $g$  des Polynoms  $G(z)$  in (10) ist, wie es sich herausstellt, gleich der halben Anzahl  $\mu$  der logarithmischen Windungspunkte von  $F$ . Diese Tatsache folgt zwar leicht aus der oben skizzierten Betrachtung der asymptotischen Werte von  $w(z)$ , kann aber auch auf Grund der topologischen Relation (9) bewiesen werden.

In dieser Relation ist  $m$  die gesamte Ordnungszahl aller über 0 und  $\infty$  gelegenen nicht-logarithmischen Stellen von  $F$ , d.h. die Summe der Gradzahlen der Polynome  $P(z)$  und  $Q(z)$  in (10). Andererseits ist die Summe an der linken Seite von (9) gleich der gesamten Verzweigungszahl der algebraischen Stellen von  $F$ , d.h. gleich der (nach Ordnung gezählten) Nullstellenanzahl der Ableitung von (10)

$$(11) \quad w'(z) = \frac{e^{G(z)}}{Q(z)^2} \{Q(z)P'(z) - P(z)Q'(z) + P(z)Q(z)G'(z)\}^1.$$

Die Gradzahl des in Klammer stehenden Polynoms ist  $m + g - 1$ . Durch Vergleichung mit (9) ergibt sich  $g = \mu$ .

Unser Resultat lässt sich so zusammenfassen:

*F sei eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche mit endlich vielen Windungspunkten, von denen die logarithmischen zu je  $\mu$  über  $w = 0$  und  $w = \infty$  liegen.*

*Dann wird die konforme Abbildung der  $z$ -Ebene auf  $F$  durch eine Funktion der Form*

$$w(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{G(z)}$$

*geleistet, wo  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $G(z)$  Polynome sind. Die Gradzahl von  $G(z)$  ist  $\mu$ .*

*Umgekehrt bildet jede Funktion von dieser Form die  $z$ -Ebene auf eine Riemannsche Fläche der besagten Art ab.*

#### § 4. Konstruktion von Flächen mit vorgegebenen Windungspunkten.

14. Wir haben in §§ 2—3 die Riemannsche Fläche als *gegeben* gedacht. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, eine Fläche zu *konstruieren*, welche als einzige Singularitäten gewisse *vorgeschriebene* Windungspunkte besitzt. Genauer ausgedrückt:

Auf der  $w$ -Kugel seien  $q$  Grundpunkte  $a_1, a_2, \dots, a_q$  gegeben. Jedem Grundpunkt  $a_\nu$  seien gewisse ganze Zahlen  $\mu_\nu; r_\nu; \lambda_1^{(\nu)}, \dots, \lambda_{r_\nu}^{(\nu)}$  zugeordnet, die  $\geq 0$  sind.

Es gilt, eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche  $F$  mit der folgenden Eigenschaft zu konstruieren:  $F$  besitzt über  $a_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, q$ )  $\mu_\nu$  logarithmische<sup>2</sup> und  $r_\nu$  algebraische Punkte sind die einzigen singulären Stellen von  $F$ ,  $\lambda_1^{(\nu)}, \dots, \lambda_{r_\nu}^{(\nu)}$ , und diese Windungs-

<sup>1</sup> In einem Punkt, wo  $Q(z)$   $\lambda$ -fach verschwindet, hat zwar  $w'(z)$  einen  $(\lambda + 1)$ -fachen Pol, aber das Polynom im Klammer hat auch in diesem Falle eine  $(\lambda - 1)$ -fache Nullstelle in dem betreffenden Punkt.

<sup>2</sup> Wir setzen  $\sum \mu_\nu > 0$  voraus; es handelt sich also im folgenden nur um offene Flächen.



Es ist leicht, Beispiele anzugeben, welche zeigen, dass das Problem im allgemeinen *mehrdeutig* ist.

Andererseits zeigen die Ergebnisse der Nummern 11 und 12, dass die Zahlen  $\mu$  und  $\lambda$  gewissen *notwendigen* Bedingungen genügen müssen, damit eine Fläche mit den vorgeschriebenen Windungspunkten existiere.

$p = \sum \mu_\nu$  sei wie früher die Gesamtzahl der logarithmischen Windungspunkte. Nach Nr. 11 kann höchstens die Hälfte aller solchen Windungspunkte über demselben Grundpunkt liegen. Wir haben also die

*Bedingung I:* Ist  $p$  die Gesamtzahl der logarithmischen Windungspunkte, so muss  $\mu_\nu \leq \frac{p}{2}$  ( $\nu = 1, \dots, q$ ) sein.

Sollen sämtliche logarithmischen Windungspunkte über nur zwei Grundpunkten liegen, so müssen sie sich, nach der Bedingung I, zu gleicher Anzahl, etwa  $\mu$ , über diese verteilen. Für die Zahl  $\mu$  und die Ordnungszahlen der algebraischen Windungspunkte ergibt sich nun aus der Gleichung (8) (S. 24), da  $l \geq 0$  ist, die

*Bedingung II:* Sollen sämtliche logarithmischen Windungspunkte über nur zwei Grundpunkten  $a_i, a_j$  liegen, und ist ihre Gesamtzahl  $p = 2\mu$ , so muss

$$(12) \quad \Sigma' (\lambda - 1) \geq r_i + r_j + \mu - 1$$

sein, wo die Summe über sämtliche von  $a_i, a_j$  verschiedene Grundpunkte zu erstrecken ist.

Ich nehme an, dass die vorgeschriebenen Windungspunkte den Bedingungen I und II genügen, und werde zeigen, dass sich unter dieser Voraussetzung eine Fläche von der gewünschten Art konstruieren lässt, d.h. dass die Bedingungen *hinreichend* sind.

Die Konstruktion geschieht am einfachsten unter Anwendung des topologischen Baumes. Ich denke mir, genau wie in Nr. 2, eine zerschneidende Kurve  $L$  durch  $a_1, \dots, a_q$  gezogen, und ihre Teilbogen mit  $1, 2, \dots, q$  numeriert. Ist  $B$  eine Figur mit den Eigenschaften (I) (S. 9), so gibt es nach Nr. 3 eine wohlbestimmte Riemannsche Fläche  $F$ , welche  $B$  als topologischen Baum hat. Das Problem ist somit auf das Folgende zurückgeführt:

Man konstruiere einen topologischen Baum  $B$  der Ordnung  $q$  mit den folgenden Eigenschaften:

- 1°  $B$  ist einfach zusammenhängend (Nr. 6).
- 2° Die Nummer  $\nu$  ( $\nu = 1, \dots, q$ ) tragen (Nr. 5) in  $B$  genau  $\mu_\nu$  logarithmische und  $r_\nu$  algebraische Elementargebiete, die letzteren mit den Ordnungszahlen  $\lambda_{1\nu}^{(\nu)}, \dots, \lambda_{r_\nu}^{(\nu)}$ .

15. Die Anzahl derjenigen Grundpunkte, für welche logarithmische Windungspunkte vorgeschrieben sind, sei  $\bar{q}$ . Der Fall  $\bar{q} = 2$  bietet wegen der Bedingung II gewisse besondere Schwierigkeiten. Wir setzen daher vorläufig  $\bar{q} \geq 3$  voraus.

Die im Folgenden auftretenden Begriffe »Bündel« usw. sind in Nr. 10 erklärt worden. — Die algebraischen und logarithmischen Elementargebiete werden wir auch kurz als  $H^\lambda$ - und  $H^\infty$ -Gebiete bezeichnen.

Die Konstruktion von  $B$  erfolgt in drei Schritten:

1° Man zeichne einen Stern mit  $q$  Gliedern. Diese werden derart numeriert und in Bündel verknüpft, dass die Winkel zwischen den Bündeln den logarithmischen Grundpunkten zugeordnet werden.

An jedes Bündel wird sein Komplementärbündel gefügt, an dieses wieder das erste Bündel usw. in infinitum (Abb. 12). Hierdurch entsteht ein Baum  $B_1$  mit  $\bar{q}$  logarithmischen Elementargebieten, die den logarithmischen Grundpunkten zugeordnet sind.

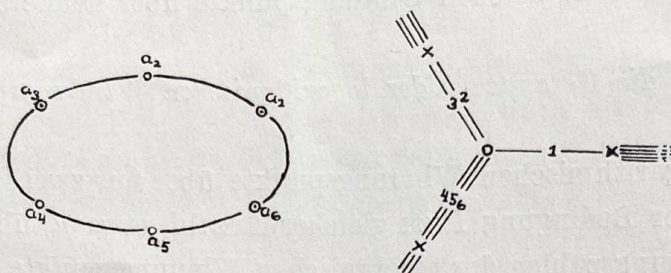


Abb. 12. ( $\odot$  = log. Grundpunkt).

2° In die logarithmischen Enden von  $B_1$  werden die vorgeschriebenen algebraischen Elementargebiete »eingeschaltet«. Dies gelingt unter Anwendung der folgenden

*Konstruktion I:* In einem Baum  $B$  der Ordnung  $q$  sei  $KLM$  ein Doppelbündel (Abb. 13 a). Die von ihm getrennten Elementargebiete  $H_1, H_2$  mögen die Nummern  $m_1, m_2$  tragen. — Ist  $m$

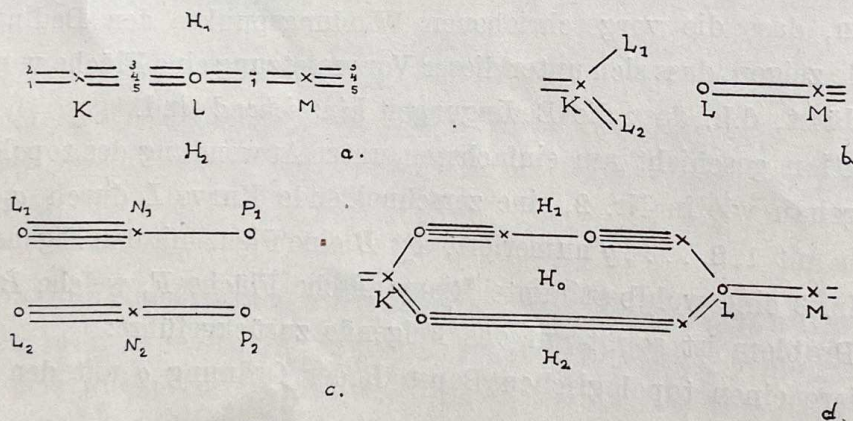


Abb. 13. ( $m_1 = 2, m_2 = 5, m = 3$ ).

eine von  $m_1$  und  $m_2$  verschiedene Nummer, so lässt sich entweder zwischen  $K$  und  $L$  oder zwischen  $L$  und  $M$  ein mit  $m$  nummeriertes algebraisches Elementargebiet  $H_0$  von beliebiger Ordnung »einschalten«. Die entstandene Figur  $B'$  ist stets ein topologischer Baum, und hat, bis auf  $H_0, H_1, H_2$ , genau dieselben algebraischen und logarithmischen Elementargebiete wie  $B$ .

*Beweis:* Es gibt, entweder zwischen  $K$  und  $L$  oder zwischen  $L$  und  $M$ , ein mit  $m$  nummeriertes Zweieck; sei es z.B. zwischen  $K$  und  $L$ . Wir schneiden das Bündel  $KL$  bei  $L$  ab, und trennen die jetzt von  $K$  ausgehenden freien Glieder in zwei Teilbündel  $KL_1, KL_2$  an beiden Seiten des Zweiecks (Abb. 13 b). Dann konstruieren wir diejenigen Doppelbündel  $L_1N_1P_1, L_2N_2P_2$  (Abb. 13 c), deren zweite Teilbündel  $N_1P_1, N_2P_2$  mit  $KL_1$  bzw.  $KL_2$  identisch sind. Wir können nun

an  $L_1$  und  $L_2$  beliebig viele (auch 0) Exemplare des entsprechenden Doppelbündels sukzessiv hinzufügen und dann die freien Enden wieder an  $L$  heften (Abb. 13 d). Sind  $\lambda - 1$  Doppelbündel zugefügt worden, so haben wir nunmehr zwischen  $K$  und  $L$  ein  $2\lambda$ -Eck. — Es sei hervorgehoben, dass die hinzugefügten Doppelbündel willkürlich zwischen die beiden Seiten des  $2\lambda$ -Ecks verteilt werden können; diese Tatsache werden wir später gebrauchen.

Unter Anwendung der obigen Konstruktion ist es leicht, einen Baum  $B_2$  zu konstruieren, der die  $\bar{q}$  logarithmischen Elementargebiete von  $B_1$  und ausserdem sämtliche vorgeschriebenen algebraischen Gebiete besitzt. Es handle sich z.B. um ein zum Grundpunkt  $a_v$  gehöriges Polygon von der Ordnung  $\lambda$ . Unter den  $\bar{q}$  logarithmischen Enden des Baumes  $B_1$  (Abb. 12) gibt es (da  $\bar{q} \geq 3$ ) gewiss eines, welches zwei nicht zu  $a_v$  gehörige Elementargebiete trennt. In ein Doppelbündel dieses Endes kann, laut der Konstruktion I, ein zu  $a_v$  gehöriges  $2\lambda$ -Eck eingeschaltet werden. Der entstandene Baum besitzt dieselben logarithmischen Enden wie  $B$ ; in eines von ihnen kann ein folgendes algebraisches Polygon eingeschaltet werden usw., bis dass wir den gewünschten Baum  $B_2$  haben.

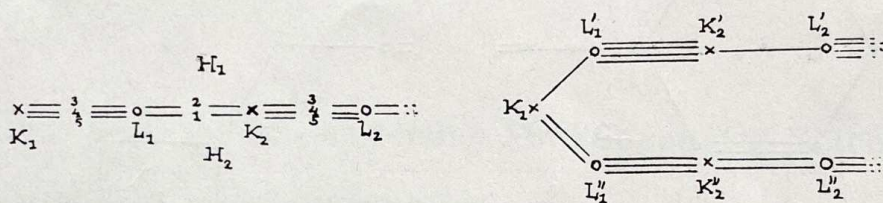


Abb. 14. ( $m_1 = 2, m_2 = 5, m = 3$ ).

3° Es gilt nun, die etwa noch fehlenden  $q - \bar{q}$  logarithmischen Elementargebiete anzubringen. Dies gelingt mittels der

*Konstruktion II:* In einem Baum  $B$  der Ordnung  $q$  sei  $K_1 L_1 K_2 L_2 \dots$  (Abb. 14) ein logarithmisches Ende, welches zwei mit  $m_1, m_2$  numerierte logarithmische Elementargebiete  $H_1, H_2$  trennt. — Ist  $m$  eine von  $m_1, m_2$  verschiedene Nummer, so lässt sich das Ende in zwei neue Enden »spalten«, welche zwischen sich ein logarithmisches Elementargebiet  $H_0$  einschliessen, dem die Nummer  $m$  zukommt. Die entstandene Figur  $B'$  ist stets ein topologischer Baum, und hat, bis auf  $H_0, H_1, H_2$ , dieselben algebraischen und logarithmischen Elementargebiete wie  $B$ .

Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich ohne weiteres aus der Abb. 14. Es muss in einem von den zwei Bündeln  $K_1 L_1, L_1 K_2$  ein Zweieck mit der Nummer  $m$  geben; nehmen wir an, in  $K_1 L_1$ . Man spalte dieses Bündel in zwei Teilbündel  $K_1 L_1', K_1 L_1''$  an beiden Seiten des Zweiecks. An die Teilbündel füge man ihre Komplementärbündel, an diese wieder die ersten Bündel usw. in infinitum. Hierdurch entstehen zwei logarithmische Enden, deren »innere« Randglieder die Nummern  $m, m + 1$  tragen, und die also ein logarithmisches Elementargebiet der gewünschten Art einschliessen.

Unter Anwendung dieser Konstruktion werden die im Baume noch fehlenden logarithmischen Elementargebiete sukzessiv angebracht.

Ein mit  $\nu$  nummeriertes  $H^\infty$ -Gebiet kann nach dem Obigen eingespaltet werden, vorausgesetzt, dass noch nicht jede zweite der schon vorhandenen logarithmischen Gebiete die Nummer

$\nu$  tragen. Ein solcher Fall kann nicht auf einmal für zwei Nummern  $\nu, \nu'$  eintreten; denn es gab ja von Anfang an  $H^\infty$ -Gebiete mit wenigstens drei verschiedenen Nummern. Der Spaltungsprozess kann also jedenfalls fortgesetzt werden, bis dass alle  $H^\infty$ -Gebiete aller Grundpunkte mit Ausnahme höchstens eines einzigen, etwa  $a_\nu$ , angebracht sind. Würden dann jede zweite der bereits vorhandenen  $H^\infty$ -Gebiete die Nummer  $\nu$  tragen, und würde es dennoch nicht angebrachte Gebiete mit dieser Nummer geben, so würden die zu  $a_\nu$  gehörigen vorgeschriebenen logarithmischen Windungspunkte mehr als die Hälfte aller solcher Punkte ausmachen; dies ist aber durch die Bedingung I ausgeschlossen.

Es ist also möglich, einen Baum mit den sämtlichen vorgeschriebenen Elementargebieten zu konstruieren.

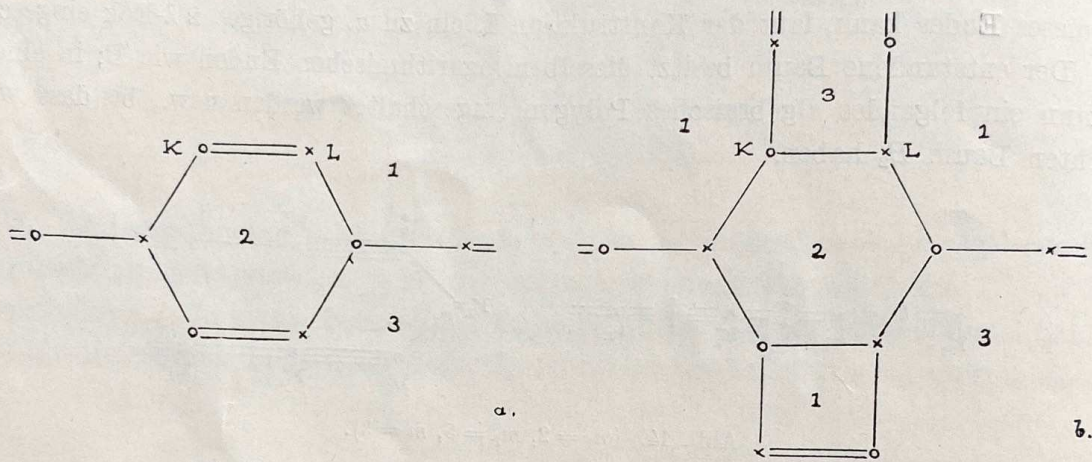


Abb. 15. ( $\mu = 2; \Sigma'(\lambda - 1) = 2; i = 1, j = 3; r_i = 1, r_j = 0$ ).

16. Es bleibt noch übrig, den Fall  $\bar{q} = 2$  zu behandeln. Konstruktion:

1° Man zeichne einen  $q$ -gliedrigen Stern, dessen Glieder derart in zwei Bündel verknüpft werden, dass den dazwischenliegenden Winkeln die Nummern  $i, j$  zukommen (Vgl. die Bezeichnungen der Bedingung II, S. 27). An die beiden Bündel füge man ihre Komplementarbündel usw. in infinitum. Das Ergebnis ist ein Baum mit zwei logarithmischen Enden, welche zwei  $H^\infty$ -Gebiete  $H_i, H_j$  mit den Nummern  $i, j$  trennen.

2° In die logarithmischen Enden schalte man, unter Anwendung der Konstruktion I, sämtliche nicht zu  $a_i, a_j$  gehörigen algebraischen Elementargebiete ein (Abb. 15 a).

3° Es gilt noch, die fehlenden  $2\mu - 2$  logarithmischen und  $r_i + r_j$  algebraischen Elementargebiete anzubringen.]

Wie aus der Konstruktion I hervorgeht, gibt es in den Perimetern der bereits eingeschalteten  $H^\lambda$ -Gebiete  $\Sigma'(\lambda - 1)$  Doppelbündel, welche entweder an  $H_i$  oder  $H_j$  grenzen, und zwar können wir sie, bei der Konstruktion 2°, in beliebigem Verhältnis als Nachbarn jener logarithmischen Gebiete verteilen.

Wir sorgen zuerst dafür, dass es mindestens  $r_i$  zu  $H_j$  grenzende und  $r_j$  zu  $H_i$  grenzende derartige Doppelbündel gibt. Dies ist auf Grund der Bedingung II möglich. In jedes der ersteren kann, laut der Konstruktion I, eines der zu  $a_i$  gehörigen fehlenden  $H^\lambda$ -Gebiete eingeschaltet werden; die zu  $a_j$  gehörigen werden in entsprechender Weise in die Randbündel von  $H_i$  eingeschaltet.

Auf Grund der Bedingung II sind in den Perimetern der unter  $2^\circ$  eingeschalteten Polygone wenigstens noch  $\mu - 1$  Doppelbündel verfügbar, welche nur an ein  $H^\infty$ -Gebiet grenzen. Ein solches Doppelbündel enthält, falls es z.B. an  $H_i$  grenzt, in einem seiner beiden Bündel ( $KL$  in Abb. 16) ein Zweieck mit dem Nummer  $j$ . Man schneide die Glieder zwischen  $H_i$  und dem Zweieck ab, binde die von  $K$  und  $L$  ausgehenden freien Glieder in zwei Bündel und füge an diese ihre Komplementarbündel usw. in infinitum. Es entstehen zwei logarithmische Enden, welche ein zu  $a_j$  gehöriges  $H^\infty$ -Gebiet einschliessen, und das ursprüngliche  $H_i$  in zwei mit  $i$  numerierte logarithmische Gebiete trennen. Im ganzen ist also ein zu  $a_i$  und ein zu  $a_j$  gehöriges  $H^\infty$ -Gebiet zugekommen. — In dieser Weise können die sämtlichen fehlenden logarithmischen Gebiete angebracht werden, und der Baum ist fertig (Abb. 15 b).

Das Ergebnis des letzten Paragraphen ist:

*Die Konstruktion einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche mit endlich vielen, vorgeschriebenen Windungspunkten ist dann und nur dann möglich, wenn diese den Bedingungen I und (im Falle zweier logarithmischen Grundpunkte) II genügen.*

### Kap. III. Die uniformisierenden Funktionen der Flächen $F$ .

#### § 5. Die rationalen Näherungsfunktionen.

17. Nach den allgemeinen Sätzen der Uniformisierungstheorie kann eine Riemannsche Fläche  $F$  von der in dieser Abhandlung betrachteten Klasse auf eine Kreisscheibe  $|z| < R \leq \infty$  konform abgebildet werden<sup>1</sup>. Die nachstehenden Abschnitte sind den Eigenschaften der abbildenden Funktion gewidmet.

Es liegt in der Natur der Sache, und ist auch für alle Beweise der Uniformisierungssätze charakteristisch, dass die Abbildung einer offenen Fläche nur durch einen Näherungsprozess erbracht und untersucht werden kann. Zu diesem Zweck werden wir, im Anschluss an R. NEVANLINNA, die uniformisierende Funktion durch eine Folge von rationalen Funktionen approximieren, deren Riemannsche Flächen immer grössere Teilgebiete der Fläche  $F$  enthalten.

Die Sachgemässheit eines solchen Verfahrens wird deutlich, wenn man an den elementaren Grenzprozess denkt, durch welchen die Exponentialfunktion gewonnen wird:

$$w(z) = e^z; \quad w_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n; \quad w(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(z).$$

Die Flächen der Näherungsfunktionen haben, genau wie diejenige der Grenzfunktion, zwei Windungspunkte, welche über  $w = 0$  und  $w = \infty$  liegen; nur sind sie bei dieser von unendlicher, bei jenen von endlicher Ordnung. Die Flächen der Näherungsfunktionen umfassen immer grössere Teilbereiche der logarithmischen Fläche, und werden aus dieser durch Wegschneidung der Enden und Zusammenheftung erhalten — genau so wie in Nr. 12 geschehen ist.

<sup>1</sup> Wir setzen im folgenden voraus, dass  $F$  keine geschlossene Fläche ist.

18. Nach dem Gesagten wird unsere erste Aufgabe diese sein: Man konstruiere eine Folge von geschlossenen Flächen vom Geschlecht Null

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$$

welche mit der gegebenen Fläche  $F$  immer grössere Teilflächen  $T_1, T_2, \dots$  gemein haben. Die gemeinsamen Bereiche sollen  $F$  ausschöpfen.

Die Struktur der Flächen  $F; F_1, F_2, \dots$  charakterisieren wir mittels des in Kap. I—II eingeführten topologischen Baumes. Zu diesem Zweck zerlegen wir  $F$  durch eine zerschneidende Kurve  $L$  (Nr. 2); der Baum  $B$  von  $F$  ist damit vollkommen bestimmt. Ferner wählen wir die in Nr. 2 genannten Punkte  $w_i$  und  $w_a$ , und setzen schliesslich ein gewisses Halbblatt der Fläche als nullte Generation fest (Nr. 4).

Es scheint nun natürlich, die für  $F$  und die geschlossenen Flächen gemeinsamen Bereiche  $T_n$  derart zu wählen, dass man von  $F$  die Halbblätter bis zur  $n$ :ten Generation einschl. mitnimmt. Wir schneiden dementsprechend im Baume  $B$  von  $F$  diejenigen Glieder ab, welche die Knoten  $n$ :ter und  $(n + 1)$ :ter Generation verbinden. Von einer gewissen Generation ab ist der ganze Kern des Baumes mitgenommen, und die Zerschneidung erfolgt auf den logarithmischen Enden (Vgl. Nr. 11).

Die zurückgebliebene Figur — sie sei mit  $B_n$  bezeichnet — ergänzen wir folgenderweise zu einem geschlossenen Baum: Wir denken uns die auf der Kugel gezeichnete Figur  $B_n$  derart topologisch transformiert, dass sie ganz auf die untere Halbkugel fällt, und dass die abgeschnittenen Glieder auf den Äquator münden.<sup>1</sup> Dann spiegeln wir  $B_n$  am Äquator, und erhalten so eine zu  $B_n$  symmetrische Figur  $\bar{B}_n$  auf der oberen Halbkugel. Die Spiegelbilder der Innenknoten sollen nun Aussenknoten sein und umgekehrt; die Glieder von  $\bar{B}_n$  sollen dieselbe Nummer tragen wie die entsprechenden Glieder von  $B_n$ .  $B_n$  und  $\bar{B}_n$  bilden zusammen eine geschlossene Figur  $B_n + \bar{B}_n$ , welche offenbar alle Eigenschaften eines topologischen Baumes besitzt. Sie charakterisiert eine über  $L$  zerschnittene, geschlossene Riemannsche Fläche  $F_n$  vom Geschlecht Null, welche mit  $F$  den gemeinsamen Bereich  $T_n$  hat.

19. Nach der Uniformisierungstheorie kann jede geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht Null auf die volle  $z$ -Kugel konform abgebildet werden, und zwar ist die Abbildung bis auf eine lineare Transformation von  $z$  vollkommen bestimmt.

Die Abbildungsfunktionen der in der vorigen Nummer konstruierten Flächen  $F_n$  seien mit  $z_n(w)$ , ihre Umkehrfunktionen mit  $w_n(z)$  bezeichnet. Die verfügbaren drei komplexen Parameter benutzen wir zu folgender Normierung: Der Bildpunkt desjenigen über  $w_i$  gelegenen Punktes  $P_0$  von  $F$ , der dem Knoten nullter Generation von  $B_n$  entspricht, soll in  $z = 0$  fallen. Der zum Spiegelpunkt jenes Knotens gehörige Punkt über  $w_a$  soll auf  $z = \infty$  abgebildet werden. Schliesslich soll die Ableitung in  $z = 0$  gleich 1 sein. Es ist also

$$w_n(0) = w_i, \quad w_n(\infty) = w_a, \quad w'_n(0) = 1.$$

<sup>1</sup> Es kann der Fall eintreten, dass dies erst von einem gewissen  $n$  ab möglich ist. Der Einfachheit halber lassen wir jedoch im folgenden alle Folgen mit dem Index 1 anfangen.

Die rationalen Funktionen

$$w_1(z), w_2(z), \dots$$

sowie ihre Umkehrfunktionen

$$z_1(w), z_2(w), \dots$$

sind hierdurch vollkommen bestimmt.

### § 6. Konvergenzbeweise.

20. In diesem und dem folgenden Paragraphen soll gezeigt werden, dass die rationalen Funktionen  $w_n(z)$  gegen eine Grenzfunktion streben, welche in der ganzen  $z$ -Ebene meromorph ist und diese auf die Fläche  $F$  konform abbildet;  $F$  ist somit von *parabolischem Typus*. — Ebenso streben die algebraischen Funktionen  $z_n(w)$  auf  $F$  gegen die Umkehrfunktion jener meromorphen Funktion.

Der Verlauf der Konvergenzbeweise wird der folgende sein:

Zuerst zeigen wir, unter Anwendung des *Koebe'schen Verzerrungssatzes* und des *Auswahlprinzips*, dass es eine Teilfolge  $z_{k_1}(w), \dots$  der Funktionenfolge  $z_1(w), \dots$  mit nachstehender Eigenschaft gibt: Die Funktionen  $z_{k_\nu}(w)$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilbereich  $G$  der Fläche  $F^1$  gleichmässig gegen eine einwertige analytische Funktion  $z = z(w)$ , welche  $F$  auf ein gewisses Gebiet  $H$  der  $z$ -Ebene abbildet (tatsächlich ist  $H$  die ganze Ebene).

Ferner wird gezeigt, dass die der genannten Folge entsprechenden rationalen Funktionen  $w_{k_\nu}(z)$  im Gebiete  $H$  gegen die Umkehrfunktion  $w = w(z)$  von  $z(w)$  streben.

Unter Anwendung der *Schwarz'schen Ableitung* beweisen wir dann, dass  $H$  die ganze  $z$ -Ebene umfasst, und  $F$  also von parabolischem Typus ist.

Hieraus wird schliesslich in bezug auf die rationalen Näherungsfunktionen zu folgern sein, dass nicht nur die Teilfolge  $w_{k_1}(z), \dots$  sondern auch die vollständige Folge  $w_1(z), \dots$  gegen  $w(z)$  konvergiert.

21. Es sei

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$$

eine Folge von abgeschlossenen Teilbereichen von  $F$  mit den Eigenschaften:  $G_1$  enthält  $P_0$  (Nr. 19);  $G_{n+1}$  enthält  $G_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); die Bereiche  $G_n$  schöpfen  $F$  aus. — Die Bereiche mögen der Bequemlichkeit halber derart gewählt werden, dass  $G_n$  für jeden Index innerhalb der Teilfläche  $T_n$  (Nr. 18) von  $F$  liegt.

Auf der Teilfläche  $T_n$  sind die algebraischen Funktionen

$$(13) \quad z_n(w), z_{n+1}(w), \dots$$

erklärt und einwertig; ausserdem sind sie derart normiert, dass sie in  $P_0$  verschwinden und die Ableitung Eins haben. Hieraus folgt: Es lässt sich aus (13) (sowie auch aus jeder Teilfolge von (13)) eine Funktionenfolge auswählen, welche in  $G_n$  gleichmässig gegen eine einwertige analytische Grenzfunktion konvergiert. Dies wird am übersichtlichsten folgenderweise gezeigt:

<sup>1</sup> Ist  $n_0$  so gross, dass  $G$  in dem für  $F$  und  $F_{n_0}$  gemeinsamen Bereich  $T_{n_0}$  enthalten ist, so sind die Funktionen  $z_n(w)$  von  $n = n_0$  ab in  $G$  erklärt.

Wir bilden  $T_n$  auf eine Kreisscheibe  $|\zeta| < R_n$  konform ab<sup>1</sup>, und zwar so, dass der Punkt  $P_0$  auf  $\zeta = 0$  abgebildet wird, und dass die Ableitung in  $P_0$  gleich Eins wird.  $G_n$  wird hierbei auf einen Teilbereich  $\bar{G}_n$  des Kreises abgebildet — er möge etwa innerhalb  $|\zeta| = \rho_n < R_n$  liegen. — Tragen wir die Funktionen (13) (oder die betrachtete Teilfolge von (13)) in die Kreisscheibe über, so haben wir nunmehr eine Folge von regulären, einwertigen, normierten Funktionen. Nach dem *Koebe'schen Verzerrungssatz* ist diese Folge im Bereiche  $|\zeta| \leq \rho_n$  gleichmässig beschränkt. — Da  $\bar{G}_n$  ein abgeschlossener Teilbereich dieses Bereiches ist, so lässt sich nach dem *Auswahlssatz* eine Teilfolge jener Folge auswählen, welche in  $\bar{G}_n$  gleichmässig gegen eine reguläre Grenzfunktion konvergiert. Diese besitzt dieselben Normierungseigenschaften wie ihre Näherungsfunktionen und ist als nichtkonstante Grenzfunktion einwertiger Funktionen selbst einwertig, wie man unter Anwendung einer klassischen, von CAUCHY stammenden Schlussweise leicht zeigen kann. — Tragen wir die ausgewählte Folge und ihre Grenzfunktion wieder nach  $T_n$  über, so haben wir die gewünschte, in  $G_n$  gleichmässig konvergente Teilfolge von (13) und ihre einwertige Grenzfunktion.

Nun wird, mittels des bekannten *Diagonalverfahrens*, eine auf der *ganzen* Fläche  $F$  konvergente Folge ausgewählt. Zu diesem Zweck greife man zuerst eine Folge

$$z_{n_1^1}(w), z_{n_2^1}(w), \dots$$

aus, welche in  $G_1$  konvergiert; aus dieser wieder eine Teilfolge

$$z_{n_1^2}(w), z_{n_2^2}(w), \dots,$$

welche, ausser in  $G_1$ , auch in  $G_2$  konvergiert; usw. in infinitum. Aus den erhaltenen Folgen nimmt man schliesslich die Diagonalfolge  $S$

$$(S) \quad z_{k_1}(w), z_{k_2}(w), \dots$$

(der Kürze wegen ist  $n'_\nu = k_\nu$  gesetzt worden). Die Funktionen von  $S$  sind, für beliebiges  $\nu$ , in  $T_\nu$  erklärt und in  $G_\nu$  gleichmässig konvergent. Die Grenzfunktion stimmt in  $G_\nu$  mit derjenigen der Folge  $z_{n'_\nu}(w), \dots$  überein; sie hat also, nach dem obigen, die Normierungseigenschaften der algebraischen Näherungsfunktionen, und ist wie diese einwertig. Zusammengefasst:

*Die Funktionen der Folge  $S$  konvergieren auf  $F$  gegen eine einwertige, analytische Grenzfunktion  $z(w)$ , welche in  $P_0$  verschwindet und daselbst die Ableitung Eins hat.*

22. Die Funktion  $z(w)$  leistet die konforme Abbildung der Fläche  $F$  auf ein gewisses Gebiet  $H$  der  $z$ -Ebene (tatsächlich ist  $H$  die ganze Ebene). Es bleibt noch übrig, folgendes zu zeigen: Die der Folge  $S$  entsprechenden rationalen Funktionen

$$(13)' \quad w_{k_1}(z), w_{k_2}(z), \dots$$

konvergieren im Gebiete  $H$  gegen die Umkehrfunktion  $w(z)$  von  $z(w)$ ; und zwar ist die Konvergenz gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $H$ , der die Pole von  $w(z)$  auslässt.

<sup>1</sup>  $T_n$  wird, als Teilfläche von  $F_n$ , durch  $z = z_n(w)$  auf ein schlichtes, einfach zusammenhängendes Gebiet abgebildet, und dieses (laut des Riemannschen Abbildungssatzes für solche Bereiche) auf die Kreisscheibe. — Die Abbildung geschieht nur, um die Anwendung des Verzerrungs- und Auswahlssatzes zu vereinfachen.



Zum Beweise empfiehlt es sich, statt der Riemannschen Fläche  $F$  selbst, vorläufig ihr durch die Funktion  $z(w)$  entworfenen schlichtes Bild  $H$  zu betrachten. Tragen wir die algebraischen Funktionen  $z_{k_\nu}(w)$  von  $F$  nach  $H$  über, so haben wir eine Folge von Funktionen nebst Umkehrfunktionen

$$f_{k_\nu}(z) = z_{k_\nu}(w(z)) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{k_\nu}(z) = z(w_{k_\nu}(z)). \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

In jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $H$  sind die Funktionen  $f_{k_\nu}(z)$  von einem gewissen Index ab erklärt, regulär und einwertig, und konvergieren gleichmässig gegen die Identität.

Es sei  $z_0$  ein willkürlicher Punkt in  $H$ ,  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl. Der Kreis  $|z - z_0| < \varepsilon$  wird durch die Funktionen  $f_{k_\nu}(z)$  auf gewisse Gebiete abgebildet, welche, nach dem *Koebeschen Verzerrungssatz*, die Kreise

$$(14) \quad |z - f_{k_\nu}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{4} |f'_{k_\nu}(z_0)|$$

enthalten. Die Halbmesser dieser Kreise sind, wegen der gleichmässigen Konvergenz der Funktionen  $f_{k_\nu}(z)$  gegen die Identität, von einem gewissen Index  $\nu'_\varepsilon$  ab grösser als z.B.  $\frac{\varepsilon}{8}$ . Wir nehmen  $\nu_\varepsilon (\geq \nu'_\varepsilon)$  so gross, dass

$$|f_{k_\nu}(z_0) - z_0| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{für} \quad \nu \geq \nu_\varepsilon$$

gilt. Dann liegt  $z_0$  sicher in sämtlichen durch die Funktionen  $f_{k_\nu}(z)$  ( $\nu \geq \nu_\varepsilon$ ) entworfenen Bildgebieten des Kreises  $|z - z_0| < \varepsilon$ ; es gilt somit

$$|\varphi_{k_\nu}(z_0) - z_0| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geq \nu_\varepsilon.$$

Dies ist, da  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, dem gleichbedeutend, dass die Funktionen  $\varphi_{k_\nu}(z)$  gegen die Identität konvergieren; und zwar ist die Konvergenz gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $H$ , denn in dem obigen Beweis können  $\nu'_\varepsilon$  und  $\nu_\varepsilon$  wegen der gleichmässigen Konvergenz der Funktionen  $f_{k_\nu}(z)$  so gewählt werden, dass sie für den ganzen Bereich gelten.

Wir übertragen das Ergebnis auf die rationalen Funktionen  $w_{k_\nu}(z)$ . In jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $H$  sind diese, von einem gewissen Index ab, in der Form

$$w_{k_\nu}(z) = w(\varphi_{k_\nu}(z))$$

darstellbar. Enthält der Bereich keine Pole von  $w(z)$ , so gilt in ihm: die Funktionen  $\varphi_{k_\nu}(z)$  streben gleichmässig gegen  $z$ ;  $w(z)$  ist gleichmässig stetig. Wir schliessen somit zusammenfassend:

*Die rationalen Funktionen  $w_{k_\nu}(z)$  konvergieren im Gebiete  $H$  gegen die Funktion  $w(z)$ , welche  $H$  auf die Fläche  $F$  abbildet. Die Konvergenz ist gleichmässig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $H$ , der keine Pole von  $w(z)$  enthält.*

### § 7. Die Schwarzsche Ableitung. Typus der Flächen $F$ .

23. Das Hauptziel des vorliegenden Paragraphen ist zu zeigen, dass die in dieser Abhandlung betrachteten Riemannschen Flächen  $F$  von *parabolischem Typus* sind. Zu diesem Zweck werden wir, wie schon erwähnt, eines der klassischen Hilfsmittel der Uniformisierungstheorie, die *Schwarzsche*

*Ableitung*, heranziehen. Wir werden aber nicht, wie es in der Theorie der automorphen Funktionen üblich ist, die Ableitung der mehrdeutigen Funktionen auf der Fläche, sondern diejenige der eindeutigen Funktionen in der  $z$ -Ebene betrachten. Es wird sich zeigen, dass die Schwarzischen Ableitungen der im vorigen Paragraphen betrachteten rationalen Näherungsfunktionen und ihrer Grenzfunktion *rationale* Funktionen sind.

24. Die Schwarzische Ableitung einer Funktion  $w$  in bezug auf eine Veränderliche  $z$  sei mit

$$\langle w, z \rangle = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2$$

bezeichnet. Wir wollen zunächst an einige bekannte Eigenschaften dieses Differentialausdrucks erinnern; wir geben sie der Kürze wegen ohne Beweis wieder.

1) *Pole*. An einer Stelle  $z_0$ , wo  $w(z)$  eine Potenzentwicklung der Form

$$w(z) - c_0 = c_\lambda (z - z_0)^\lambda + c_{\lambda+1} (z - z_0)^{\lambda+1} + \dots \quad (\lambda \neq 0, \pm 1)$$

besitzt, hat  $\langle w, z \rangle$  eine Entwicklung der Form

$$\langle w, z \rangle = \frac{1 - \lambda^2}{2} \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{a_1}{z - z_0} + \dots$$

An einer einfachen Stelle von  $w(z)$  ( $\lambda = \pm 1$ ) ist  $\langle w, z \rangle$  regulär.

Hat  $w(z)$  in  $z = \infty$  eine Entwicklung der Form

$$w(z) - c_0 = \frac{c_\lambda}{z^\lambda} + \frac{c_{\lambda+1}}{z^{\lambda+1}} + \dots \quad (\lambda \neq 0, \pm 1),$$

so hat  $\langle w, z \rangle$  an dieser Stelle eine Entwicklung

$$\langle w, z \rangle = \frac{1 - \lambda^2}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + \dots$$

Hat  $w(z)$  in  $z = \infty$  eine einfache Stelle ( $\lambda = \pm 1$ ), so fängt die Entwicklung von  $\langle w, z \rangle$  wenigstens mit der *vierten* Potenz von  $\frac{1}{z}$  an.

Es sei hervorgehoben, dass in den ersten Behauptungen der obigen Sätze  $\lambda$  jede von 0 und  $\pm 1$  verschiedene komplexe Zahl bedeuten kann.

2) *Substitutionsformel*: Die Schwarzische Ableitung einer zusammengesetzten Funktion  $w(z(x))$  genügt der Gleichung

$$(15) \quad \langle w, x \rangle = \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \langle w, z \rangle + \langle z, x \rangle.$$

3) *Invarianzeigenschaft*: Für eine lineare Funktion  $S(z)$  gilt

$$(16) \quad \langle S(z), z \rangle = 0.$$

Setzt man in (15) für  $w(z)$  eine lineare Funktion  $S(z)$  ein, so wird wegen (16)

$$(17) \quad \langle S(z), x \rangle = \langle z, x \rangle.$$

Die Schwarzische Ableitung ist also invariant gegenüber einer linearen Transformation der Funktion.

25. Ich betrachte nunmehr die Differentialgleichung

$$(18) \quad \langle w, z \rangle = F(z),$$

wo  $F(z)$  eine beliebige analytische Funktion bedeutet. Die Auflösung dieser Gleichung wird bekanntlich folgendermassen auf diejenige einer Gleichung zweiter Ordnung zurückgeführt: Man setze

$$(19) \quad g(z) = (w'(z))^{-\frac{1}{2}}$$

und lege das Zeichen von  $g(z)$  beliebig fest. Wie eine einfache Rechnung zeigt, gilt dann

$$(20) \quad \langle w, z \rangle = -2 \frac{g''(z)}{g(z)}.$$

Also: Ist  $w(z)$  eine Lösung von (18), so genügt die Funktion (19) der Gleichung

$$(21) \quad g''(z) + \frac{1}{2} F(z) g(z) = 0.$$

Umgekehrt: Ist  $g(z)$  eine Lösung von (21), so ist

$$(22) \quad w(z) = \int \frac{dz}{(g(z))^2}$$

eine Lösung von (18).

Sind  $g_1(z)$  und  $g_2(z)$  zwei linear unabhängige Lösungen von (21), so ist ihr Quotient eine Lösung von (18). Denn durch Differentiation von  $\frac{g_1}{g_2}$  ergibt sich unter Beachtung der aus der Voraussetzung folgenden Relation  $g_1 g_2'' - g_2 g_1'' = 0$ :

$$\left\{ \frac{g_1}{g_2}, z \right\} = -2 \frac{g_1''}{g_2} = F(z).$$

Wegen der Invarianz von  $\langle w, z \rangle$  gegen lineare Transformationen von  $w$  ist dann auch

$$w(z) = \frac{c_1 g_1 + c_2 g_2}{c_3 g_1 + c_4 g_2},$$

wo  $c_1, c_2, c_3, c_4$  beliebige Konstanten von nichtverschwindender Determinante sind, eine Lösung von (18), und zwar die allgemeine, da man durch geeignete Bestimmung der drei wesentlichen Parameter erreichen kann, dass  $w, w', w''$  in einem gegebenen Punkt gegebene Werte bekommen.

26. Das Vorhandensein einer allgemeinen Lösung von (18) in der Umgebung eines Punktes, wo  $F(z)$  regulär ist, würde leicht aus den klassischen Existenzsätzen für Differentialgleichungen gefolgert werden können. Ich ziehe jedoch vor, die Lösung direkt, unter Anwendung unbestimmter Koeffizienten zu konstruieren; dies wegen einer späteren Anwendung derselben Methode.

Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich den betrachteten Punkt nach  $z = 0$  verlege.  $F(z)$  habe im Nullpunkt die Entwicklung

$$(23) \quad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Für  $g(z)$  nehme ich eine Entwicklung

$$(24) \quad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

an. Ich setze die Entwicklungen von  $g(z)$ ,  $g''(z)$ ,  $F(z)$  in (21) ein und erhalte durch Koeffizientenvergleichung

$$(25) \quad n(n-1)b_n + \frac{1}{2}(a_0 b_{n-2} + a_1 b_{n-3} + \dots + a_{n-2} b_0) = 0 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Aus dieser Rekursionsformel lassen sich  $b_2, b_3, \dots$  bestimmen, nachdem  $b_0$  und  $b_1$  willkürlich festgelegt sind.

Ich behaupte nun: Die erhaltene Entwicklung (24) konvergiert in der Umgebung von  $z = 0$ , und zwar ist ihr Konvergenzradius grösser oder gleich demjenigen der Entwicklung (23) von  $F(z)$ .

Der letztgenannte sei mit  $\varrho$  bezeichnet; für  $|z| \leq r < \varrho$  ist dann

$$|a_n z^n| < k \quad (n = 1, 2, \dots),$$

wo  $k$  eine von  $r$  abhängige Konstante bedeutet. Durch Multiplikation der Rekursionsformel (25) mit  $z^n$  ergibt sich

$$n(n-1)b_n z^n + \frac{z^2}{2} \sum_{\nu=0}^{n-2} (a_{n-2-\nu} z^{n-2-\nu}) b_\nu z^\nu = 0,$$

$$n(n-1)|b_n z^n| \leq \frac{r^2 k}{2} \sum_{\nu=0}^{n-2} |b_\nu z^\nu|.$$

Setze ich kurz  $s_n = \sum_0^n |b_\nu z^\nu|$ , so wird

$$s_n - s_{n-1} \leq \frac{r^2 k}{2n(n-1)} s_{n-2} \leq \frac{r^2 k}{2n(n-1)} s_{n-1}.$$

$$s_n \leq s_{n-1} \left(1 + \frac{r^2 k}{2n(n-1)}\right) \leq \dots \leq s_1 \prod_2^n \left(1 + \frac{r^2 k}{2i(i-1)}\right).$$

Das Produkt ist offenbar für  $n \rightarrow \infty$  konvergent. Also konvergiert auch die Reihe (24) gleichmässig für  $|z| \leq r < \varrho$ ; wegen der Bestimmung der Koeffizienten stellt sie in ihrem Konvergenzkreis eine Lösung der Gleichung (21) dar, und zwar die allgemeine, denn durch geeignete Festsetzung der Konstanten  $b_0$  und  $b_1$  kann erreicht werden, dass die Lösung mit einer vorgegebenen, in  $z = 0$  regulären Lösung übereinstimmt.

Das Ergebnis gilt für jeden Punkt  $z_0$ , wo  $F(z)$  regulär ist. Da die Konvergenzkreise der Lösungen (24) grösser oder gleich denjenigen von  $F(z)$  sind, folgt: *Jede Lösung von (21) ist überall fortsetzbar, wo  $F(z)$  fortsetzbar ist.*

Da jede Lösung  $w(z)$  der ursprünglichen Gleichung (18) Quotient zweier Lösungen von (21) ist, können wir das Ergebnis in bezug auf die erstgenannte Gleichung folgendermassen formulieren:

*Die Gleichung (18) besitzt eine allgemeine Lösung in der Umgebung jeder Stelle, wo  $F(z)$  regulär ist. Jede Lösung von (18) ist mit rationalem Charakter überall fortsetzbar, wo  $F(z)$  fortsetzbar ist.*

27. Nach diesen Vorbereitungen kehre ich zu den in §§ 5—6 behandelten rationalen Funktionen zurück und betrachte ihre Schwarzschen Ableitungen.

Diese Ableitungen sind ebenfalls rational; als einzige (und zwar doppelte) Pole besitzen sie (Nr. 24) die mehrfachen Stellen der Funktionen  $w_n(z)$  (wegen der angenommenen Normierung von  $w_n(z)$  ist  $z = \infty$  eine einfache Stelle). Die Gradzahl von  $\{w_n, z\}$  ist demnach gleich  $2k$ , wo  $k$

die Anzahl jener mehrfachen Stellen bedeutet;  $k$  ist also auch die Anzahl der Windungspunkte der zu  $w_n(z)$  gehörigen Riemannschen Fläche  $F_n$ .

Über diese Anzahl gibt uns der topologische Baum  $B_n + \bar{B}_n$  Auskunft (Nr. 18). Er enthält<sup>1</sup> folgende algebraische Polygone: 1) Die  $r$   $H^\lambda$ -Gebiete des Kerns von  $B_n$ , welche den algebraischen Windungspunkten von  $F$  entsprechen, 2) ihre Spiegelbilder in  $\bar{B}_n$ , 3) die aus den  $p$   $H^\infty$ -Gebieten von  $B$  entstandenen Polygone.

Die rationale Funktion  $w_n(z)$  besitzt also  $2r + p$  mehrfache Stellen; ihre Schwarzsche Ableitung  $\langle w_n, z \rangle$  ist demnach vom Grade  $4r + 2p$ , *unabhängig von  $n$* . Hierbei bedeutet  $r$  die Anzahl der algebraischen,  $p$  diejenige der logarithmischen Windungspunkte der Fläche  $F$ .

Ich betrachte nun die in § 6 ausgewählte Folge

$$(13)' \quad w_{k_1}(z), w_{k_2}(z), \dots$$

welche in jedem Punkt eines gewissen Gebietes  $H$  gegen eine Grenzfunktion  $w(z)$  konvergiert;  $w(z)$  bildet  $H$  auf die Fläche  $F$  ab.

Nach den Überlegungen von Nr. 22 ist die Konvergenz gleichmässig in jedem Bereich, der keinen Pol von  $w(z)$  enthält. Wegen der Normierung  $w(0) = w_i$ ,  $w'(0) = 1$  ist es daher möglich, einen Kreis  $|z| \leq d$  anzugeben, in welchem die Konvergenz von (13)' gleichmässig ist, und ausserdem die Ableitungen  $w'(z)$  und  $w'_{k_\nu}(z)$  von Null verschieden sind. Innerhalb dieses Kreises gilt dann

$$(26) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle w_{k_\nu}, z \rangle = \langle w, z \rangle$$

Man sieht nun leicht ein, dass die Grenzfunktion einer Folge von rationalen Funktionen fester Gradzahl ebenfalls eine rationale Funktion sein muss und zwar von höchstens demselben Grade. Wir schliessen also:

*Die Funktion  $w(z)$  genügt einer Differentialgleichung*

$$(27) \quad \langle w, z \rangle = R(z),$$

wo  $R(z)$  eine rationale Funktion von höchstens  $(4r + 2p)$ :tem Grade bedeutet.

Wir werden später sehen, dass diese Gradzahl tatsächlich  $2r + p - 2$  beträgt.

28. Aus dem eben ausgesprochenen Satz können wir endlich auf den parabolischen Typus der Fläche  $F$  schliessen.

Wäre das einfach zusammenhängende Gebiet  $H$ , welches durch  $w(z)$  auf  $F$  abgebildet wird, nicht die ganze  $z$ -Ebene, dann hätte  $H$  im Endlichen ein gewisses Randkontinuum. Da  $w(z)$ , als Lösung der Gleichung (27), in der ganzen  $z$ -Ebene (die Pole von  $R(z)$  möglicherweise ausgenommen) fortsetzbar ist (Nr. 26), so wäre die in  $H$  erklärte Funktion  $w(z)$  keine vollständige analytische Funktion. Dementsprechend wäre ihre auf  $F$  erklärte Umkehrfunktion  $z(w)$  ebenfalls

<sup>1</sup>  $n$  sei so gross, dass die Zerschneidung auf den logarithmischen Enden erfolgt.

keine vollständige Funktion, sondern Teilfunktion einer vollständigen, etwa  $w^*(z)$ , und die Fläche  $F$  wäre Teilfläche der Fläche  $F^*$  von  $w^*(z)$ .<sup>1</sup>

Diese Folgerung steht in Widerspruch damit, dass  $F$  keine andere Singularitäten als Windungspunkte hat. In der Tat: Wäre  $F$  Teilfläche von  $F^*$ , so gäbe es einen Punkt  $P_0$  auf  $F$  — sein Spurpunkt sei  $w_0$  —, sowie eine Kurve  $\Gamma$  mit dem Anfangspunkt  $w_0$  und dem Endpunkt  $\omega$ , welche die folgende Eigenschaft hätten:  $P_0$  ist für  $F$  und  $F^*$  gemeinsam; verfolgt man die beiden Flächen von  $P_0$  aus über  $\Gamma$ , so erreicht man auf  $F^*$  einen Punkt  $P_1$  über  $\omega$ , während auf  $F$  zwar die inneren Punkte, nicht aber der Endpunkt von  $\Gamma$  erreichbar sind.  $F$  hätte also über  $\omega$  eine nicht zur Fläche gezählte singuläre Stelle; diese müsste notwendigerweise ein logarithmischer Windungspunkt sein. Da aber  $F$  Teilfläche von  $F^*$  ist, so ist jeder logarithmische Windungspunkt von  $F$  auch ein solcher von  $F^*$ , und der Punkt  $\omega$  wäre also auch auf  $F^*$  nicht längs  $\Gamma$  erreichbar. Hier haben wir den Widerspruch; die Antithese, dass  $H$  nicht die ganze  $z$ -Ebene ausmachen würde, fällt, und wir schliessen zusammenfassend:

*Die Fläche  $F$  ist von parabolischem Typus.*

*Die Funktion  $w(z)$  ist eine meromorphe Funktion, welche die  $z$ -Ebene auf  $F$  konform abbildet. Sie ist also die normierte uniformisierende Funktion von  $F$ .*

Da die Fläche nur  $r$  algebraische Windungspunkte besitzt, so hat  $w(z)$  nur  $r$  mehrfache Stellen, und  $R(z)$  im Endlichen  $r$  zweifache Pole. Diejenigen  $r + p$  mehrfachen Stellen der Funktionen  $w_n(z)$ , welche nicht zum Kern von  $F$  gehören, rücken also während des Grenzprozesses gegen Unendlich, und die Gradzahl des Nenners der Schwarzschen Ableitung wird hierbei auf  $2r$  erniedrigt.

29. Unter Anwendung der Ergebnisse der vorigen Nummer ist es leicht, die Konvergenz der vollständigen Folge der rationalen Näherungsfunktionen nachzuweisen. Ich behaupte:

*Die rationalen Funktionen*

$$(28) \quad w_1(z), w_2(z), \dots$$

*konvergieren in der ganzen  $z$ -Ebene gegen die Funktion  $w(z)$ , welche diese Ebene auf die Fläche  $F$  abbildet. Die Konvergenz ist gleichmässig in jedem abgeschlossenen Bereich, welcher keine Pole von  $w(z)$  enthält.*

*Beweis* (indirekt):  $G$  sei ein Gebiet der besagten Art. Wäre die Behauptung nicht richtig in bezug auf  $G$ , dann gäbe es

- (a) eine Zahl  $\sigma > 0$ ,
- (b) eine konvergente Punktfolge in  $G$ :

$$z_1, z_2, \dots; \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = Z,$$

- (c) eine Folge ganzer Zahlen

<sup>1</sup>  $F$  wäre eine sogenannte *begrenzte* Fläche. Vgl. H. WEYL: Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig 1913) S. 47. — Es handelt sich bei WEYL um die Begrenztheit von sogenannten Überlagerungsflächen in bezug auf eine gegebene Fläche.

$$m_1, m_2, \dots; \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} m_\nu = \infty$$

mit folgender Eigenschaft: es gilt für jedes  $\nu$

$$|w_{m_\nu}(z_\nu) - w(z_\nu)| \geq \sigma.$$

Die Funktionenfolge

$$(28)' \quad w_{m_1}(z), w_{m_2}(z), \dots$$

hat genau ähnliche Normierungs- und Abbildungseigenschaften wie die vollständige Folge (28). Es kann daher, genau wie in § 6, aus (28)' eine Teilfolge

$$(28)'' \quad w_{l_1}(z), w_{l_2}(z), \dots$$

ausgewählt werden, welche in einem gewissen Gebiet  $H^*$  gegen eine Grenzfunktion  $w^*(z)$  konvergiert, und zwar gleichmässig in jedem Bereich, welcher die Pole von  $w^*(z)$  auslöst.  $w^*(z)$  bildet  $H^*$  auf  $F$  ab.

Wie in Nr. 28 kann gezeigt werden, dass  $H^*$  die ganze  $z$ -Ebene ist. Hieraus folgt, mit Rücksicht auf die überall vorgenommene Normierung,  $w^*(z) = w(z)$ .

Ich schlage um den in (b) genannten Punkt  $Z$  einen kleinen Kreis  $c$ , der die Pole von  $w(z)$  auslöst. Nach dem eben Gesagten streben die Funktionen (28)'' in  $c$  gleichmässig gegen  $w(z)$ . Es ist also möglich,  $N$  so gross zu wählen, dass

$$|w_{l_\nu}(z) - w(z)| < \sigma \quad \text{für } l_\nu > N$$

in jedem Punkt von  $c$  gilt.

Nehme ich einen solchen Index  $\nu$ , dass  $z_\nu$  in  $c$  liegt, dass  $m_\nu > N$  ist, und dass  $m_\nu$  zur Folge  $l_1, l_2, \dots$  gehört, dann gilt

$$|w_{m_\nu}(z_\nu) - w(z_\nu)| < \sigma.$$

Dies steht aber in Widerspruch mit der Annahme (c). Unsere Behauptung ist somit bewiesen.

## Kap. IV. Über die Lösungen der Gleichung $\{w, z\} = R(z)$ .

### § 8. Problemstellung.

30. Es ist gezeigt worden, dass die uniformisierenden Funktionen der in dieser Abhandlung betrachteten Flächen Gleichungen der Form

$$(27) \quad \{w, z\} = R(z)$$

genügen, wo  $R(z)$  eine rationale Funktion bedeutet. Das Ergebnis ruft die folgende Frage hervor:

*Welchen Bedingungen muss  $R(z)$  genügen, damit (27) meromorphe Lösungen ergäbe? Und, wenn dies der Fall ist: Sind die Riemannschen Flächen dieser Lösungen von der von uns betrachteten Art?*

Diese Fragen sollen in den folgenden Paragraphen beantwortet werden.

Nach Nr. 26 sind die Lösungen von (27) in der ganzen  $z$ -Ebene mit rationalem Charakter fortsetzbar, möglicherweise mit Ausnahme der Pole von  $R(z)$ . Damit diese Lösungen meromorph seien, ist also notwendig und hinreichend, dass sie auch in jedem endlichen Pol von  $R(z)$  von rationalem Charakter sind. Ist diese Bedingung erfüllt, dann sind sie, nach dem Monodromiesatz, eindeutig in der ganzen Ebene und von rationalem Charakter im Endlichen, d.h. meromorph.<sup>1</sup>

Unser Problem reduziert sich somit auf die folgende »lokale« Frage: Welchen Charakter haben die Lösungen der Gleichung (27) in der Umgebung eines Poles von  $R(z)$ ? Bei der Beantwortung dieser Frage wird die Voraussetzung hinsichtlich der Rationalität von  $R(z)$  nicht benutzt.

Als Hauptergebnis der Untersuchung werden wir die gesuchten Bedingungen für die Existenz meromorpher Lösungen erhalten, sowie Auskünfte über das asymptotische Verhalten dieser Lösungen im unendlich Fernen. Daneben erhalten wir Aufschlüsse über den lokalen Charakter der Lösungen auch in den mehrdeutigen Fällen.

31. Es empfiehlt sich, auch beim Studium einer endlichen kritischen Stelle  $\alpha$ , sie nach dem unendlich fernen Punkt durch die Substitution  $z - \alpha = \frac{1}{x}$  zu verlegen. Die Substitutionsformel (15) in Nr. 24 gibt

$$(29) \quad \langle w, x \rangle = \frac{1}{x^4} R\left(\frac{1}{x} + \alpha\right) = \bar{R}(x),$$

d.h.  $w$  genügt in bezug auf  $x$  einer Differentialgleichung von derselben Form wie die ursprüngliche Gleichung. Fängt die Entwicklung von  $R(z)$  in  $z = \alpha$  mit  $(z - \alpha)^{-\mu}$  an, so beginnt diejenige von  $\bar{R}(x)$  in  $x = \infty$  mit  $x^{\mu-4}$ . Die Koeffizientenfolge der Entwicklung wird durch die Substitution nicht verändert. — Ist eine Lösung von (29) gewonnen, so bekommt man die entsprechende Lösung von (27) durch Substitution von  $x = \frac{1}{z - \alpha}$ . Der (rationale, transzendente, mehrdeutige) Charakter der Lösung bleibt hierbei erhalten.

Nach diesen vorbereitenden Ausführungen formulieren wir die Aufgabe der nächstfolgenden Paragraphen folgendermassen:

$R(z)$  sei eine in der Umgebung von  $z = \infty$  analytische Funktion mit der Entwicklung

$$(30) \quad R(z) = \frac{a_0}{z^\mu} + \frac{a_1}{z^{\mu+1}} + \dots$$

Es wird nach dem Charakter der Lösungen von

$$(27) \quad \langle w, z \rangle = R(z)$$

in der genannten Umgebung gefragt.

### § 9. Der Fall rationalen Charakters. Verwandte Fälle.

32. Wir fragen in diesem Paragraphen nach den Bedingungen für die Existenz von Lösungen rationalen Charakters.

<sup>1</sup> Ist eine Lösung meromorph, so ist es jede, da alle Lösungen aus dieser durch lineare Transformation erhalten werden können.



Ist  $w(z)$  eine solche Lösung von (27), dann wissen wir nach Nr. 24 folgendes: Hat  $w(z)$  in  $z = \infty$  eine einfache Stelle, so fängt die Entwicklung von  $R(z)$  in diesem Punkte mit der vierten Potenz von  $\frac{1}{z}$  an. Ist  $w(z)$  dagegen von der Form

$$(31) \quad w(z) = \text{Const.} + c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda-1} z^{\lambda-1} + \dots \quad (\lambda \neq 0, \pm 1),$$

so beginnt die Entwicklung von  $R(z)$  mit

$$(32) \quad \frac{1-\lambda^2}{2} \frac{1}{z^2},$$

und zwar gilt dies nicht nur für ganze, sondern für beliebige komplexe Werte von  $\lambda (\neq 0, \pm 1)$ . Lösungen rationalen Charakters zu (27) können also nur dann vorhanden sein, wenn  $R(z)$  in  $z = \infty$  eine 4-fache oder eine 2-fache Nullstelle hat. — Umgekehrt:

Hat  $R(z)$  eine (wenigstens) 4-fache Nullstelle in  $z = \infty$ , dann besitzt (27) im unendlich Fernen eine allgemeine Lösung rationalen Charakters. Denn die Transformation  $z = \frac{1}{x}$  verwandelt, nach Nr. 31, (27) in eine Gleichung derselben Form, wo die rationale Funktion an der rechten Seite in  $x = 0$  regulär ist; und eine solche Gleichung hat nach Nr. 26 eine allgemeine Lösung rationalen Charakters in der Umgebung des betrachteten Punktes.

Fängt die Entwicklung von  $R(z)$  dagegen mit der zweiten Potenz von  $\frac{1}{z}$  an, dann sind noch gewisse andere Bedingungen nötig, um die Existenz einer Lösung rationalen Charakters zu sichern. Der vorliegende Paragraph ist der Untersuchung dieses Falles gewidmet.

33. Im folgenden nehme ich also

$$(33) \quad R(z) = \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + \dots$$

an und versuche, eine Lösung der Gleichung  $\langle w, z \rangle = R(z)$  in der Umgebung von  $z = \infty$  zu konstruieren. Zu dem Zweck gehe ich wieder zu der in Nr. 25 betrachteten Gleichung zweiter Ordnung über:

$$(21) \quad g''(z) + \frac{1}{2} R(z) g(z) = 0.$$

Ist  $w(z)$  eine Lösung von (27) von der Form (31), so fängt die Entwicklung von  $R(z) = \langle w, z \rangle$ , wie bereits erwähnt, mit  $\frac{1-\lambda^2}{2} \frac{1}{z^2}$  an. Die Entwicklung der entsprechenden Lösung  $g(z) = (w'(z))^{-\frac{1}{2}}$  von (21) beginnt mit der  $\nu$ -ten Potenz von  $z$ , wobei  $\nu = \frac{1-\lambda}{2}$  gesetzt worden ist. Ich bestimme deshalb  $\lambda$  und  $\nu$  durch die Gleichungen

$$(34) \quad \frac{1-\lambda^2}{2} = a_0, \quad \nu = \frac{1-\lambda}{2},$$

was auf zweierlei Weise möglich ist ( $\lambda$  und  $\nu$  werden im allgemeinen keine ganzen Zahlen sein). Dann nehme ich für  $g(z)$  eine Entwicklung

$$g(z) = z^\nu + b_1 z^{\nu-1} + b_2 z^{\nu-2} + \dots \quad 1$$

<sup>1</sup> Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, dass der erste Koeffizient gleich Eins gesetzt worden ist; denn aus jeder Lösung  $g(z)$  wird durch Multiplikation mit einer Konstante wieder eine Lösung gewonnen.

an und berechne die unbestimmten Koeffizienten mittels Substitution in (21). Nachher zeige ich, dass die gewonnene Reihe konvergiert und eine Lösung von (21) darstellt.

Die Koeffizientenvergleichung ergibt erstens

$$\nu(\nu - 1) + \frac{1}{2} a_0 = 0$$

und allgemein

$$(\nu - n)(\nu - n - 1) b_n + \frac{1}{2} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Die erste Gleichung ist wegen der Bestimmung (34) von  $\nu$  erfüllt. Der Faktor von  $b_n$  wird nach Multiplikation mit 2, wenn man (34) beachtet,

$$2(\nu - n)(\nu - n - 1) + a_0 = 2[(\nu - n)(\nu - n - 1) - \nu(\nu - 1)] = 2n(n - 2\nu + 1) = 2n(n + \lambda).$$

Ich erhalte demnach für die Koeffizienten  $b_n$  die Rekursionsgleichung

$$(35) \quad 2n(n + \lambda) b_n + (a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Aus (35) lassen sich  $b_1, b_2, \dots$  berechnen, wenn nur  $\lambda$  keine negative ganze Zahl ist. Von den aus (34) bestimmten Werten  $\lambda$  kann aber höchstens der eine ganz und negativ sein; die Rekursion wird also immer für wenigstens einen Wert  $\lambda$  gelingen. Wir kommen bald auf die Diskussion des erwähnten Ausnahmefalles, dass  $\lambda$  ganz und negativ ist, zurück.

Nachdem  $b_1, b_2, \dots$  bestimmt sind, betrachte ich die Reihe

$$(36) \quad 1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

In genau derselben Weise wie in Nr. 26 wird folgendes gezeigt: Konvergiert die Entwicklung von  $R(z)$  im Kreise  $|z| > \rho$ , so ist (36) in jedem Kreis  $|z| \geq r > \rho$  gleichmässig konvergent. — In der Tat folgt aus (35), wenn  $k$  die obere Grenze von  $\left| \frac{a_n}{z^n} \right|$  in  $|z| \geq r$  bedeutet,

$$2n|n + \lambda| \left| \frac{b_n}{z^n} \right| \leq k \sum_0^{n-1} \left| \frac{b_i}{z^i} \right|,$$

$$\sum_0^n \left| \frac{b_i}{z^i} \right| \leq \left( 1 + \frac{k}{2n|n + \lambda|} \right) \sum_0^{n-1} \left| \frac{b_i}{z^i} \right| \leq \dots \leq \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{k}{2i|i + \lambda|} \right),$$

woraus sich die Konvergenz ergibt.

Schliesslich bilde ich die Funktion

$$(37) \quad g(z) = z^\nu + b_1 z^{\nu-1} + b_2 z^{\nu-2} + \dots$$

Setze ich sie und ihre zweite Ableitung in die Differentialgleichung (21) ein, so wird diese, wegen der eben ausgeführten Koeffizientenbestimmung, identisch erfüllt. (37) ist also eine Lösung von (21).

Aus (37) erhält man ohne weiteres eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (27). Nach Nr. 25 ist nämlich

$$(38) \quad w(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{y(z)^2} = \int_{z_0}^z z^{-2\nu} \left( 1 + \frac{b_1'}{z} + \dots \right) dz$$

eine solche;  $z_0$  bedeutet einen beliebigen Punkt im Konvergenzkreise von (37).



Bei ganzzahligem  $\lambda$  ist also die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Lösungen rationalen Charakters  $w(z)$ , dass die Gleichungen (40) vereinbar sind, d.h. dass ihre Determinante verschwindet.<sup>1</sup> — SCHWARZ hat <sup>2</sup> dieselbe Bedingung in etwas anderer Weise aufgestellt; er zeigt, dass das Residuum  $A$  in (39) bis auf einen nur von  $\lambda$  abhängigen Faktor mit der Determinante von (40) übereinstimmt.

Wir fassen die Ergebnisse der letzten Nummern zusammen:

Wenn die Entwicklung von  $R(z)$  in  $z = \infty$  mit der vierten Potenz von  $\frac{1}{z}$  anfängt, so sind die Lösungen der Gleichung

$$(27) \quad \langle w, z \rangle = R(z)$$

von rationalem Charakter im unendlich Fernen und besitzen daselbst eine einfache Stelle.

Wenn  $R(z)$  eine Entwicklung

$$R(z) = \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + \dots$$

hat, so sind die Lösungen von (27) dann und nur dann von rationalem Charakter, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

I. Es gibt eine solche ganze Zahl  $\lambda$ , dass

$$(32) \quad a_0 = \frac{1 - \lambda^2}{2}.$$

II. Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 2 \cdot 1 \cdot (1 - \lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 2 \cdot 2 (2 - \lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\lambda-1} & a_{\lambda-2} & a_{\lambda-3} & \dots & a_1 & 2(\lambda-1)(-1) \\ a_\lambda & a_{\lambda-1} & a_{\lambda-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

verschwindet.

Wenn I erfüllt ist, nicht aber II, so sind die Lösungen von (27) lineare Transformationen einer Funktion von der Form

$$w(z) = A \log z + z^\lambda + c_1 z^{\lambda-1} + \dots \quad (A \neq 0).$$

Derselbe Fall tritt ein, wenn (32)  $\lambda = 0$  ergibt, d.h. wenn  $a_0 = \frac{1}{2}$ .

Wenn I nicht erfüllt ist, so sind die Lösungen mehrdeutig und zwar lineare Transformationen einer Funktion von der Form (31).

35. An den oben behandelten Fall schliesst sich derjenige nahe an, wo die Entwicklung von  $R(z)$  mit der dritten Potenz von  $\frac{1}{z}$  anfängt:

$$R(z) = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^4} + \dots,$$

Man mache hier die Substitution  $z = x^2$ . Nach der Formel (15) (Nr. 24) nimmt unsere Differentialgleichung jetzt die Form

<sup>1</sup> Man sieht sofort, dass sie wenigstens eine nichtverschwindende Unterdeterminante besitzt, nämlich diejenige, welche die Nummerzahlen  $2 \cdot 1 (1 - \lambda), \dots$  in der Hauptdiagonale hat.

<sup>2</sup> H. A. SCHWARZ, Ges. math. Abh. II, S. 221 ff., insbes. S. 230.

$$(27)' \quad \langle w, x \rangle = \bar{R}(x)$$

an, wo

$$\bar{R}(x) = 4x^2 R(x^2) - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2} = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{4a_0}{x^4} + \dots$$

Wir sind also auf den eben behandelten Fall zurückgekommen.

Von den Bedingungen I und II ist I mit  $\lambda = 2$  erfüllt, II dagegen nicht, denn es wird

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4a_0 & 0 \end{vmatrix} = 8a_0 \neq 0.$$

Die Rekursionsformel (35) gibt, wenn 0 und  $4a_0$  für  $a_1$  bzw.  $a_2$  eingesetzt wird,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -\frac{a_0}{4}$ . Die Lösung der zu (27)' gehörigen Gleichung zweiter Ordnung wird

$$g(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{a_0}{4} \frac{1}{x^2} + \dots \right).$$

Nehmen wir als Lösung von (27)' z.B.

$$\bar{w}(x) = 2 \int \frac{dx}{g(x)^2} = a_0 \log x + x^2 + c_0 + \frac{c_1}{x^2} + \dots^1,$$

so wird die Lösung der ursprünglichen Gleichung (27)

$$(41) \quad w(z) = \frac{a_0}{2} \log z + z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots$$

Umgekehrt lässt sich leicht bestätigen, dass jede Funktion der Form (41) eine Schwarzsche Ableitung hat, deren Entwicklung mit  $\frac{a_0}{z^3}$  anfängt.

Wenn die Entwicklung von  $R(z)$  mit der dritten Potenz von  $\frac{1}{z}$  anfängt, so sind sämtliche Lösungen von (27) unendlich vieldeutig und lassen sich durch lineare Transformationen einer Funktion von der Form (41) ausdrücken.

### § 10. Die Fälle transzendenten Charakters.

36. Im vorliegenden Paragraphen setzen wir voraus, dass die in unserer Differentialgleichung (27) auftretende Funktion  $R(z)$  in  $z = \infty$  eine Entwicklung hat, welche mit einer niedrigeren als der zweiten Potenz von  $\frac{1}{z}$  anfängt. Wir werden das Verhalten der Lösungen in der Umgebung des unendlich fernen Punktes untersuchen. In den in § 9 behandelten Fällen verhielten sie sich asymptotisch wie Potenzen (im Falle  $\lambda = 0$  wie der Logarithmus). Im vorliegenden Fall tragen sie, wie sich herausstellen wird, einen rein transzendenten Charakter.

R. NEVANLINNA behandelt in seiner auf S. 5 zitierten Arbeit denjenigen Fall, dass  $R(z)$  ein Polynom ist; zur Untersuchung der Lösungen verwendet er eine von HILLE angegebene asymptotische Integrationsmethode.<sup>2</sup> Der von uns betrachtete allgemeinere Fall weicht, in bezug auf

<sup>1</sup> Die Entwicklung ist gerade. Denn nach der Substitutionsformel (15) (Nr. 24) genügen die Funktionen  $\bar{w}(x)$  und  $\bar{w}(-x)$  derselben Gleichung (27)', da  $\bar{R}(x)$  eine gerade Funktion ist. Da sie ausserdem beide in  $x = \infty$  asymptotisch gleich  $x^2$  werden, sind sie bis auf ein konstantes Glied identisch. Dies ist nur möglich, wenn die Entwicklung gerade ist.

<sup>2</sup> E. HILLE: Zero point problems for linear differential equations of second order (Matematisk Tidskrift, B, n:o 2, Kopenhagen 1927).

das Ergebnis, insofern von dem NEVANLINNA'schen ab, dass die Lösungen im allgemeinen nicht eindeutig sind. Die Methode, welche wir verwenden werden, ist aber genau die HILLE-NEVANLINNA'sche. Wir werden daher das Problem unter Anwendung der Resultate dieser Verfasser und nur in aller Kürze behandeln.

37. Der Exponent von  $z$  im ersten Gliede der Entwicklung von  $R(z)$  sei mit  $p - 2$  bezeichnet; es ist also  $p \geq 1$ . Durch Multiplikation der Variable  $z$  mit einer geeigneten Konstante kann erreicht werden, dass der Faktor von  $z^{p-2}$  gleich  $-\frac{p^2}{2}$  ist; es sei also

$$(42) \quad R(z) = -\frac{p^2}{2} z^{p-2} + c_1 z^{p-3} + \dots$$

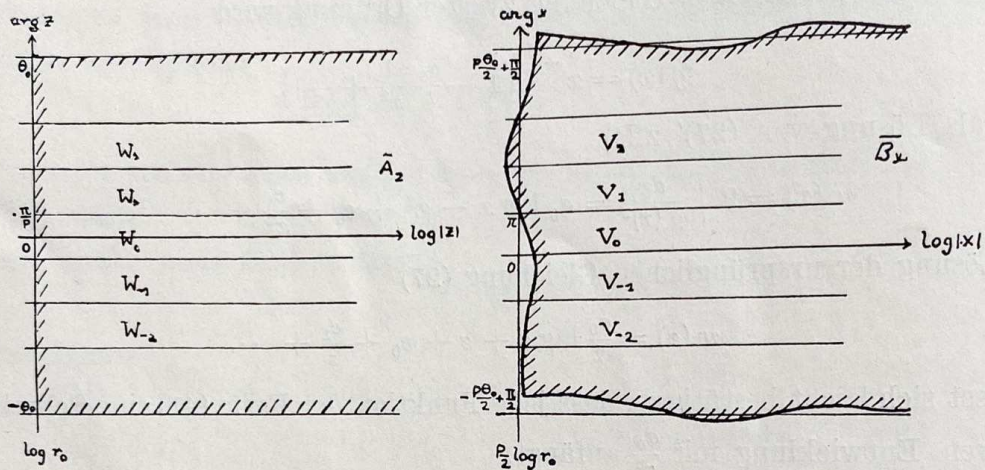


Abb. 16.

Wir unterwerfen die Veränderliche  $z$  der LIOUVILLE'schen Transformation

$$(43) \quad x = x(z) = \int \sqrt{\frac{1}{2} R(z)} dz = iz^{\frac{p}{2}} + c'_1 z^{\frac{p'}{2}-1} + \dots$$

Die Integralfunktion sei z.B. dadurch festgelegt, dass das konstante Glied gleich Null sein soll. Falls  $p$  gerade ist, kann auch ein logarithmisches Glied in der Entwicklung auftreten.

Wir fassen die von (43) geleistete konforme Abbildung ins Auge. Um die Begriffe zu präzisieren grenzen wir auf der Windungsfläche von  $\arg z$  ein Gebiet  $A_z$

$$(A_z) \quad |\arg z| < \Theta_0, \quad |z| > r_0$$

ab. Hier ist  $\Theta_0$  eine beliebige Konstante  $> 3\pi$ ; über die Zahl  $r_0$  soll später näher verfügt werden, jedenfalls soll sie so gross sein, dass  $R(z)$  für  $r_0 < |z| < \infty$  weder Pole noch Nullstellen hat. (Vgl. die Abb. 16, wo die logarithmischen Bilder der Windungsflächen von  $\arg z$  und  $\arg x$  dargestellt sind.)

$x(z)$  ist offenbar eine in  $A_z$  eindeutige und reguläre Funktion. Ist  $r_0$  genügend gross gewählt, so ist, wie man leicht zeigen kann,  $\log x(z)$  in  $A_z$  einwertig<sup>1</sup>; d.h.,  $A_z$  wird durch die Funktion (43) auf ein gewisses, auf der Windungsfläche von  $\arg x$  gelegenes Gebiet  $B_x$  konform abgebildet.

<sup>1</sup> Man sieht dies z.B. folgenderweise ein: Nach (43) ist

$$(43)' \quad \log x = \frac{\pi i}{2} + \frac{p}{2} \log z + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right), \quad d \log x = \frac{p}{2} d \log z \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

Die Umkehrfunktion  $z(x)$  von (43) ist in  $B_x$  regulär; es gilt  $z \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , und zwar ist nach (43)

$$(44) \quad \frac{x}{i} = z^{\frac{p}{2}} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{z} \right) \right), \quad z = \left( \frac{x}{i} \right)^{\frac{2}{p}} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{x} \right) \right),^1$$

wo  $\varepsilon(a)$  eine mit  $a$  verschwindende Grösse bedeutet.

Bei der Abbildung werden die Winkelräume  $W_\nu$

$$(W_\nu) \quad \left| \arg z - \nu \frac{2\pi}{p} \right| < \frac{\pi}{p} \quad (\nu = 0, \pm 1, \dots)$$

auf gewisse Gebiete abgebildet, welche sich asymptotisch den Winkelräumen  $V_\nu$

$$(V_\nu) \quad \left| \arg x - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \pi \right| < \frac{\pi}{2} \quad (\nu = 0, \pm 1, \dots)$$

anschlüssen, und umgekehrt.

38. Wir werden nun, unter Anwendung der Transformation (43) und der HILLE-NEVANLINNA'schen Integrationsergebnisse, gewisse *partikuläre Lösungen* unserer Differentialgleichung (27) angeben, welche sich durch besonders einfache asymptotische Eigenschaften auszeichnen. Hierdurch werden in der Tat auch die Eigenschaften aller anderen Lösungen bestimmt, da diese aus den partikulären Lösungen durch lineare Transformation erhalten werden.

Jede Lösung  $w(z)$  von (27) ist in  $A_z$  unbeschränkt mit rationalem Charakter fortsetzbar, also eindeutig. Tragen wir sie ins Gebiet  $B_x$  über, so erhalten wir eine Funktion

$$v(x) = w(z(x)).$$

Sie genügt, nach der Substitutionsformel (15) (Nr. 24), der Gleichung

$$(45) \quad \langle v, x \rangle = 2(1 + h(x)),$$

wo

$$h(x) = -\frac{1}{2} \langle x, z \rangle \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{p^2}{4} \right) z^{-2} + \dots}{-\frac{p^2}{4} z^{p-2} + \dots} = \frac{4-p^2}{4p^2} \frac{1}{z^p} + \dots$$

gesetzt worden ist. Nach (44) gilt

Durchläuft  $z$  die drei Randstücke von  $A_z$  in positiver Richtung, so wird nach (43)' bei genügend grossem  $r_0$   $\arg(d \log x)$  beliebig wenig von bzw.  $-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0$  abweichen. Die Bildkurven jener Randstücke können also weder sich selbst, noch einander (ausser in den Eckpunkten) schneiden. Sie bilden somit zusammen mit dem unendlich fernen Punkt eine einfache, geschlossene Kurve, welche ein gewisses Gebiet  $\bar{B}_x$  einschliesst. Unter Anwendung des Argumentprinzips schliesst man dann in gewöhnlicher Weise, dass  $\log x(z)$  in  $A_z$  jeden zu  $\bar{B}_x$  gehörigen Wert genau einmal annimmt.

<sup>1</sup> Wir bewegen uns im folgenden auf den Windungsflächen von  $\arg z$  und  $\arg x$ , wo diese Argumente eindeutig sind. Hierdurch sind auch die Zweige aller vorkommenden Potenzen und Logarithmen ohne weiteres festgelegt.

$$(46) \quad h(x) = \frac{p^2 - 4}{4p^2} \frac{1}{x^2} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{x} \right) \right).$$

Im Falle  $p = 2$  verhält sich  $h(x)$  asymptotisch wie  $\frac{1}{x^4}$ .

Wir gehen nun, wie in Nr. 33, zur Gleichung zweiter Ordnung über, und setzen daher

$$y(x) = (v'(x))^{-\frac{1}{2}};$$

$y(x)$  genügt (Nr. 25) der Differentialgleichung

$$(47) \quad y'' + (1 + h(x))y = 0.$$

Wäre in dieser Gleichung  $h(x) \equiv 0$ , so hätten wir als Lösung die Funktionen  $e^{\pm ix}$  und ihre linearen Kombinationen. Es scheint plausibel, dass sich auch für eine von Null verschiedene, aber genügend rasch verschwindende Funktion  $h(x)$  Lösungen ergeben, welche sich den genannten Exponentialfunktionen asymptotisch anschliessen. Diese Vermutung wird durch folgendes Ergebnis bestätigt, das wir der mehrmals zitierten NEVANLINNA'schen Abhandlung<sup>1</sup> ohne Beweis entnehmen; es stützt sich auf die Anwendung der bereits erwähnten asymptotischen Integrationsmethode von HILLE:

In der Gleichung (47) sei  $h(x)$  eine im Winkelraum  $V_{\nu-1} + V_\nu + V_{\nu+1}$  reguläre Funktion, welche daselbst, bis auf einen konstanten Faktor, asymptotisch gleich  $\frac{1}{x^2}$  (oder einer noch höheren Potenz von  $\frac{1}{x}$ ) ist. Dann hat (47) eine Lösung  $y_\nu(x)$ , welche in jedem inneren Teilsektor von  $V_{\nu-1} + V_\nu + V_{\nu+1}$  gleich

$$e^{(-1)^\nu ix} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{x} \right) \right)$$

ist.

Aus den Lösungen  $y_\nu(x)$  ( $\nu = 0, \pm 1, \dots$ ) von (47) konstruieren wir nun gewisse partikuläre Lösungen der Gleichung (45):

Nach Nr. 25 ist der Quotient zweier linear unabhängigen Lösungen von (47) stets eine Lösung von (45). Im Winkelraume  $V_\nu + V_{\nu+1}$  sind, unter den im obigen Ergebnis erwähnten Lösungen, sowohl  $y_\nu(x)$  als  $y_{\nu+1}(x)$  vorhanden; sie sind offenbar linear unabhängig. Also:

In jedem inneren Teilsektor des Winkelraumes  $V_\nu + V_{\nu+1}$  hat (45) eine Lösung von der Form

$$(48) \quad v_\nu(x) = \frac{y_\nu(x)}{y_{\nu+1}(x)} = e^{(-1)^\nu 2ix} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{x} \right) \right).$$

In bezug auf die asymptotischen Werte der Funktionen  $v_\nu(x)$  schliessen wir aus (48) folgendes:  $v_\nu(x)$  strebt in jedem inneren Teilsektor von  $V_\nu$  gegen Null, in jedem von  $V_{\nu+1}$  gegen Unendlich.

Ausser diesen Werten hat  $v_\nu(x)$  in einem Teilsektor von  $V_\nu + V_{\nu+1}$  keine asymptotischen Werte. Denn sonst würde  $v_\nu(x)$  auf einem gewissen Konvergenzweg  $\Gamma$ , der notwendigerweise in der Umgebung des Strahles  $\arg x = (\nu + 1)\pi$  verlaufen müsste, gegen einen Wert  $c \neq 0, \infty$  streben. In jener Umgebung ist aber nach (48)

<sup>1</sup> S. 345—349.



$$\arg v_\nu(x) = (-1)^\nu 2 \Re(x) + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

d.h.  $|\arg v_\nu(x)|$  wächst stetig gegen Unendlich, was mit einem von 0 und  $\infty$  verschiedenen Grenzwert für  $v_\nu(x)$  unvereinbar ist.

Auf Grund von (48) kann man noch folgendes zeigen: Es gibt in der Umgebung des Strahles  $\arg x = (\nu + 1)\pi$  keinen Konvergenzweg mit  $v_\nu(z) \rightarrow 0$ , der nicht in den Weg  $\arg x = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi$  ohne Beeinträchtigung der Konvergenz stetig deformierbar wäre.<sup>1</sup> Ebenso ist jeder Weg in der Umgebung jenes Strahles, auf welchem  $v_\nu(x) \rightarrow \infty$  gilt, in den Weg  $\arg x = \left(\nu + \frac{3}{2}\right)\pi$  stetig deformierbar.

Was die Wertverteilung von  $v_\nu(x)$  im Innern des Winkelraumes  $V_\nu + V_{\nu+1}$  betrifft, so ist klar, dass ein von 0 und  $\infty$  verschiedener Wert  $a$  nur in der Umgebung des Randstrahles zwischen  $V_\nu$  und  $V_{\nu+1}$  unendlich oft angenommen werden kann. Über die Häufigkeit der  $a$ -Stellen in einer Umgebung

$$(49) \quad |\arg x - (\nu + 1)\pi| < \eta$$

dieses Strahles ergibt sich nach (48) folgendes:

Die  $a$ -Stellen von  $v_\nu(x)$  sind Nullstellen der Funktion  $y_\nu(x) - ay_{\nu+1}(x)$ . Nimmt man für einen Augenblick  $\nu$  gerade an, und setzt man

$$e^{ix} - ae^{-ix} = c \sin(x - x_0),$$

so wird

$$y_\nu(x) - ay_{\nu+1}(x) \sim c \sin(x - x_0)$$

im Sektor (49) gelten, wenn man nur die Nullstellen  $x_0 - n\pi$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) von  $\sin(x - x_0)$  durch kleine Kreise  $C_n$  ausschliesst. — Hieraus folgt unter Anwendung des Argumentprinzips, dass bei genügend grossem  $|x|$  in jeden Kreis  $C_n$  genau eine Nullstelle von  $y_\nu(x) - ay_{\nu+1}(x)$  fällt und ausserhalb dieser Kreise keine. Die Anzahl der innerhalb des Kreises  $|x| = \rho$  und des Sektors (49) gelegenen  $a$ -Stellen von  $v_\nu(x)$  ist also asymptotisch gleich  $\frac{\rho}{\pi}$ . — Dasselbe gilt auch wenn  $\nu$  ungerade ist.

Universitäts-Bibliothek  
Kiel

39. Wir übertragen die Ergebnisse ins Gebiet  $A_z$ . Den partikulären Lösungen  $v_\nu(x)$  von (45) entsprechen hier die Lösungen

<sup>1</sup> Beweis (Abb. 17): Es sei  $\Gamma$  eine Kurve, auf welcher  $v_\nu(x)$  gegen 0 strebt,  $x = \rho e^{i\varphi}$  ein Punkt auf  $\Gamma$  und  $x' = \rho e^{i\varphi'}$  ein beliebiger Punkt auf dem Kreisbogen  $C_x$  durch  $x$ . Nach (48) ist dann, z.B. für gerades  $\nu$ ,

$$\log |v_\nu(x')| - \log |v_\nu(x)| = -2\rho(\sin \varphi' - \sin \varphi) + \varepsilon\left(\frac{1}{\rho}\right) < \varepsilon\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Bis auf einen Faktor  $\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$  ist also

$$|v_\nu(x')| < |v_\nu(x)|$$

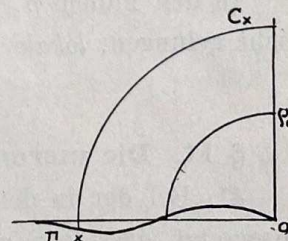


Abb. 17.

auf dem ganzen Bogen  $C_x$ . Hieraus folgt die behauptete Deformierbarkeit.

$$w_\nu(z) = v_\nu(x(z)) \quad (\nu = 0, \pm 1, \dots),$$

der Gleichung (27); den Lösungen  $y_\nu(x)$  von (47) entsprechen die Funktionen

$$g_\nu(z) = (w'_\nu(z))^{-\frac{1}{2}} = (x'(z) v'_\nu(x))^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} R(z)\right)^{-\frac{1}{4}} y_\nu(x),$$

welche nach Nr. 25 der Gleichung

$$(50) \quad g''(z) + \frac{1}{2} R(z) g(z) = 0$$

genügen. Nach den bereits erzielten Ergebnissen lässt sich in Anbetracht der asymptotischen Relation (44) folgendes über die Funktionen  $g_\nu(z)$  bzw.  $w_\nu(z)$  aussagen:

*In jedem inneren Teilsektor des Winkelraumes  $W_{\nu-1} + W_\nu + W_{\nu+1}$ , ( $\nu = 0, \pm 1, \dots$ ) existiert eine Lösung  $g_\nu(z)$  der Gleichung (50) mit der Eigenschaft*

$$\log g_\nu(z) = (-1)^{\nu+1} z^{\frac{p}{2}} \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

*Ebenso gibt es in jedem inneren Teilsektor von  $W_\nu + W_{\nu+1}$  ( $\nu = 0, \pm 1, \dots$ ) eine Lösung  $w_\nu(z)$  der Gleichung  $\langle w, z \rangle = R(z)$  mit der Eigenschaft*

$$(49) \quad \log w_\nu(z) = (-1)^{\nu+1} 2 z^{\frac{p}{2}} \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

*Diese Lösung strebt auf jedem Halbstrahl innerhalb  $W_\nu$  gegen Null, auf jedem innerhalb  $W_{\nu+1}$  gegen Unendlich. Auch in der Umgebung von  $\arg z = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{p}$  hat sie keine von jenen Strahlen wesentlich verschiedene Konvergenzwege.*

*In jeder Winkelumgebung des Halbstrahles  $\arg z = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{p}$  nimmt  $w_\nu(z)$  jeden Wert  $a$  ( $\neq 0, \infty$ ) unendlich oft an; die Anzahl derjenigen unter diesen  $a$ -Stellen, welche innerhalb des Kreises  $|z| = r$  liegen, ist asymptotisch gleich  $\frac{p}{\pi} r^2$ .*

40. Aus dem Obigen kann man sofort schliessen, dass die Lösungen von (27) im Falle  $p = 1$  stets mehrdeutig sind. Denn nehmen wir z.B.  $\nu = 0$ , so haben wir eine Lösung  $w_0(z)$ , für welche innerhalb des Sektors  $W_0 + W_1$

$$-\pi < \arg z < 3\pi$$

$\log w_0(z) \sim 2\sqrt{z}$  gilt. Diese Lösung strebt für  $\arg z = 0$  und  $\arg z = 2\pi$  gegen  $\infty$  bzw. 0 und kann also nicht eindeutig sein.

In den Fällen  $p \geq 2$  können die Lösungen entweder ein- oder mehrdeutig sein. Es ist uns nicht gelungen, lokale Kriterien für die Eindeutigkeit anzugeben.

### § 11. Die meromorphen Lösungen der Gleichung $\langle w, z \rangle = R(z)$ .

41. Bei der in den vorigen Paragraphen ausgeführten »lokalen« Integration wurde nur vorausgesetzt, dass  $R(z)$  an der betrachteten Stelle von rationalem Charakter war. Ich kehre nun zur Annahme » $R(z)$  rational« zurück.

Die Lösungen unserer Gleichung sind offenbar dann und nur dann meromorph, wenn sie in jedem endlichen Pol von  $R(z)$  von rationalem Charakter sind. Nach Nr. 31 entspricht einem endlichen Pol der Ordnung  $\mu$  ein  $(\mu - 4)$ : facher Pol in  $z = \infty$  mit denselben Entwicklungskoeffizienten. Insbesondere entspricht einem zweifachen endlichen Pol eine zweifache Nullstelle im Unendlichen. Aus den Ergebnissen von § 9 können wir somit folgendes ablesen:

Damit die Lösungen der Gleichung  $\{w, z\} = R(z)$  meromorph seien, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

$R(z)$  hat im Endlichen lauter zweifache Pole,  
Die Koeffizienten der Entwicklung von  $R(z)$

$$R(z) = \frac{a_0}{(z-a)^2} + \frac{a_1}{z-a} + a_2 + \dots$$

genügen in jedem Pol  $\alpha$  den nachstehenden Bedingungen:

- I. Es gibt eine solche ganze positive Zahl  $\lambda$ , dass  $\frac{1-\lambda^2}{2} = a_0$  ist,
- II. Die Determinante  $D$  (S. 46) verschwindet.

Wir nehmen im folgenden an, dass die obigen Bedingungen erfüllt sind, und wollen unter dieser Voraussetzung die Eigenschaften der Lösungen in der Umgebung von  $z = \infty$  untersuchen.

Erstens sind diese Lösungen nach dem Monodromiesatz eindeutig auch im Unendlichen. Die Fälle, dass die Entwicklung von  $R(z)$  in  $z = \infty$  mit der ersten oder dritten Potenz von  $\frac{1}{z}$  anfängt, sind also ausgeschlossen (Nr. 35, 40). Übrig bleiben folgende Möglichkeiten:

Entweder hat  $R(z)$  in  $z = \infty$  eine  $\lambda$ -fache Nullstelle, wobei  $\lambda \geq 4$  oder  $\lambda = 2$  ist. In dem ersteren Falle haben die Lösungen daselbst eine einfache Stelle; in dem zweiten haben sie eine mehrfache, und  $R(z)$  genügt auch in  $z = \infty$  den Koeffizientenbedingungen I—II, denn sonst wären die Lösungen mehrdeutig. In beiden Fällen sind die Lösungen auf der ganzen  $z$ -Kugel von rationalem Charakter; sie sind *rationale Funktionen*, welche die Kugel auf *geschlossene Riemannsche Flächen* abbilden.

Oder: Die Entwicklung von  $R(z)$  fängt mit einem Polynom vom Grade  $p - 2$  ( $p \geq 2$ ) an. Diesen Fall werden wir im folgenden unter Anwendung der Ergebnisse von § 10 näher untersuchen.

Wir nehmen an, die Differentialgleichung sei durch Multiplikation von  $z$  mit einer passenden Konstante auf die in § 10 vorausgesetzte Normalform gebracht.

42. Zuerst sei der Fall  $p = 2$  erörtert. — Nach Nr. 39 hat unsere Gleichung im Winkelraume

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < +\frac{3\pi}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

eine Lösung

(51)

$$w_0(z) = e^{-2z(1 + \varepsilon(\frac{1}{z}))}$$

und im Winkelraume

$$+\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < +\frac{5\pi}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

eine Lösung

$$w_1(z) = e^{2z(1 + \varepsilon(\frac{1}{z}))}$$

Beide Lösungen sind, nach unserer jetzigen Annahme, eindeutig.  $w_0(z)$  ist eine lineare Transformation von  $w_1(z)$ . Da auf der positiven reellen Achse  $w_0 \rightarrow 0$ ,  $w_1 \rightarrow \infty$ , auf der negativen  $w_0 \rightarrow \infty$ ,  $w_1 \rightarrow 0$  gilt, so muss sich jene Transformation auf  $w_0 = \frac{\text{Const.}}{w_1}$  reduzieren. Die asymptotische Eigenschaft (51) besteht hiernach in der *ganzen Ebene*.

Hieraus folgt, dass  $w_0(z)$  nur endlich viele Nullstellen und Pole hat. Diese Funktion ist also, bis auf einen rationalen Faktor, von der Form  $e^{G(z)}$ , wo  $G(z)$  eine ganze Funktion ist. Nach (51) muss endlich  $G(z) = -2z + \text{Const.}$  sein, und wir haben das Ergebnis:

*Sind die Lösungen der Gleichung  $\{w, z\} = R(z)$  meromorph, und ist  $R(\infty) \neq 0, \infty$ , so sind jene Lösungen, bis auf eine lineare Transformation, von der Form*

$$w(z) = S(z) e^{az},$$

wo  $S(z)$  eine rationale Funktion bedeutet.

43. Wir gehen zu dem allgemeinen Fall  $p > 2$  über;  $w(z)$  sei im folgenden eine beliebige Lösung unserer Differentialgleichung.

Wir benutzen die in Nr. 39 besprochenen partikulären Lösungen  $w_\nu(z)$ , eine für jeden Winkelraum  $W_\nu + W_{\nu+1}$  (wir nehmen z.B.  $\nu = 0, \dots, p-1$ ); sie sind jetzt, wie alle andere Lösungen, eindeutig. Die Lösung  $w(z)$  kann mittels einer linearen Transformation durch jede der Funktionen  $w_\nu(z)$  dargestellt werden; es sei

$$w(z) = \frac{\alpha_\nu w_\nu + \beta_\nu}{\gamma_\nu w_\nu + \delta_\nu} \quad (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu \neq 0; \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1).$$

*Asymptotisches Verhalten.* Aus den auf S. 52 angegebenen asymptotischen Eigenschaften der Funktionen  $w_\nu(z)$  schliesst man:

$w(z)$  strebt in jedem Sektor

$$(52) \quad \left| \arg z - \nu \frac{2\pi}{p} \right| < \frac{\pi}{p} - \varepsilon \quad (\nu = 0, 1, \dots, p-1)$$

gleichmässig gegen einen asymptotischen Wert

$$c_\nu = \frac{\beta_\nu}{\delta_\nu} = \frac{\alpha_{\nu-1}}{\gamma_{\nu-1}}.$$

Es ist stets  $c_\nu \neq c_{\nu+1}$ , denn sonst wäre  $\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\delta_\nu}$ ,  $\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 0$ . — Unter den Werten  $c_0, \dots, c_{p-1}$  können zwar mehrere gleich sein, jedoch höchstens  $\frac{p}{2}$ , da  $w(z)$  in zwei Nachbarsektoren verschiedene asymptotische Werte hat. Aus den Ergebnissen auf S. 52 sieht man noch, dass  $w(z)$  keine von den Halbstrahlen der Sektoren (52) wesentlich verschiedene Konvergenzwege besitzt.

Ferner:  $a$  sei ein von  $c_\nu$  und  $c_{\nu+1}$  verschiedener Wert. Die  $a$ -Stellen von  $w(z)$  sind  $a'$ -Stellen von  $w_\nu(z)$ , wo  $a' = \frac{\delta_\nu a - \beta_\nu}{\alpha_\nu - \gamma_\nu a}$  ( $\neq 0, \infty$ ) gesetzt worden ist. Wir können also nach Nr. 39 folgendes schliessen:

$w(z)$  nimmt im Sektor

$$\left| \arg z - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{p} \right| < \eta$$

jeden Wert  $a (\neq c_\nu, c_{\nu+1})$  unendlich oft an; die Anzahl der in diesem Sektor und innerhalb des Kreises  $|z| = r$  gelegenen  $a$ -Stellen ist asymptotisch gleich  $\frac{p}{\pi} r^{\frac{p}{2}}$ .

Ordnung von  $w(z)$ . Ist  $c$  ein  $\mu$ -facher asymptotischer Wert von  $w(z)$  ( $1 \leq \mu \leq \frac{p}{2}$ ), so ist nach dem Obigen die Anzahl der  $c$ -Stellen innerhalb des Kreises  $|z| = r$

$$n(r, c) \sim \frac{p-2\mu}{\pi} r^{\frac{p}{2}};$$

für einen von  $c_0, \dots, c_{p-1}$  verschiedenen Wert  $a$  gilt dagegen

$$n(r, a) \sim \frac{p}{\pi} r^{\frac{p}{2}}.$$

Von den NEVANLINNA'schen Wertverteilungsfunktionen sind demnach, wenn man z.B. einen Wert  $a \neq c_\nu (\nu = 0, \dots, p-1)$  betrachtet,

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log r$$

von der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , während

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|w - a|} d\varphi \quad (z = re^{i\varphi})$$

beschränkt bleibt, wie man unter Berücksichtigung der asymptotischen Eigenschaften von  $w(z)$  leicht zeigen könnte. Es ist also auch

$$T(r) = N(r, a) + m(r, a) + O(1)$$

von derselben Ordnung, und wir haben das Ergebnis

Die Funktion  $w(z)$  ist von der Ordnung  $\frac{p}{2}$ .

Darstellung durch ganze Funktionen. Nach Nr. 25 ist die Funktion  $w(z)$  als Quotient zweier Lösungen der Gleichung

$$(50) \quad g''(z) + \frac{1}{2} R(z) g(z) = 0$$

darstellbar. Ebenso genügt die Funktion  $g(z) = (w'(z))^{-\frac{1}{2}}$  dieser Gleichung.

Die Lösungen von (50) sind in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Pole  $z = \alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) von  $R(z)$  analytisch fortsetzbar. In der Umgebung eines Poles  $\alpha_i$ , dem eine  $\lambda_i$ -fache Stelle von  $w(z)$  entspricht, hat die Gleichung, nach Nr. 33—34, zwei Fundamentallösungen, welche die Faktoren  $(z - \alpha_i)^{\frac{1-\lambda_i}{2}}$  bzw.  $(z - \alpha_i)^{\frac{1+\lambda_i}{2}}$  enthalten und bis auf diese Faktoren regulär sind; alle andere Lösungen sind als lineare Kombinationen dieser beiden darstellbar.

Jede Lösung von (50) ist also, durch  $(z - \alpha_i)^{\frac{1-\lambda_i}{2}}$  dividiert, in  $z = \alpha_i$  regulär; sie ist somit von der Form

$$(53) \quad g(z) = \frac{p(z)}{\sqrt{L(z)}},$$

wo  $p(z)$  eine ganze Funktion und  $L(z)$  das Polynom

$$(54) \quad L(z) = (z - \alpha_1)^{\lambda_1 - 1} \dots (z - \alpha_r)^{\lambda_r - 1}$$

bedeuten.

Setzt man in (50)  $g = L^{-\frac{1}{2}} p$  ein, so ergibt sich für  $p(z)$  die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(55) \quad L^2 p'' - LL' p' + \left[ \frac{3}{4} L'^2 - \frac{1}{2} LL'' + \frac{1}{2} L^2 R \right] p = 0.$$

Ist die Schwarzsche Ableitung  $R(z)$  gegeben, so können die Koeffizienten dieser Gleichung leicht ermittelt werden; denn die linearen Faktoren von  $L(z)$  sind nichts anders als diejenigen des Nenners von  $R(z)$ , während ihre Multiplizität aus den Koeffizienten der Partialbrüche von  $R(z)$  hervorgeht.

Die Ordnung der ganzen Funktionen  $p(z)$  ist  $\frac{p}{2}$ . Denn nach Nr. 39 gibt es in jedem Winkelraum mit einer Öffnung kleiner als  $\frac{2\pi}{p}$  zwei partikuläre Lösungen von (50), für welche bzw.

$$\log g(z) = \pm \text{Const. } z^{\frac{p}{2}} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{z} \right) \right)$$

gilt. Da jede Lösung von (50) als lineare Kombination zweier Fundamentallösungen darstellbar ist, und da die Funktionen  $p(z)$  nur durch einen algebraischen Faktor von den entsprechenden Funktionen  $g(z)$  abweichen, folgt für sämtliche Lösungen  $p(z)$

$$\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\log \log |p(z)|}{\log |z|} = \frac{p}{2}.$$

Diese Gleichung enthält unsere Behauptung.

Wir können die Ergebnisse der obigen Überlegungen folgendermassen zusammenfassen:  
*Jede Lösung  $w(z)$  der Gleichung (27) ist in den beiden Formen*

$$(56) \quad w(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)}, \quad w(z) = \int^z \frac{L(z)}{(p(z))^2} dz$$

darstellbar; hierbei bedeutet  $L(z)$  das Polynom (54) und  $p_1(z)$ ,  $p_2(z)$ ,  $p(z)$  ganze Funktionen von der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , welche der Gleichung (55) genügen.

*Riemannsche Fläche.* Die Funktion  $w(z)$  bildet die  $z$ -Ebene auf eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche  $F$  ab. Es stellt sich heraus, dass  $F$  als einzige singuläre Stellen endlich viele algebraische und logarithmische Windungspunkte besitzt.

Erstens: Jedem algebraischen Windungspunkt von  $F$  entspricht eine mehrfache Stelle von  $w(z)$ , also ein Pol von  $\langle w, z \rangle$ . Wegen der Gleichung  $\langle w, z \rangle = R(z)$ , welcher  $w(z)$  genügt, sind nur endlich viele solche Stellen vorhanden.

Ferner: Hat  $F$  über  $w = a$  eine transzendente Stelle, und ist  $L$  eine Kurve auf  $F$ , welche gegen diese Stelle strebt, dann strebt die Bildkurve von  $L$  in der  $z$ -Ebene gegen  $z = \infty$ ; sie ist ein Konvergenzweg, längs welchem  $w(z)$  dem asymptotischen Wert  $a$  zustrebt. Da  $w(z)$  nach dem obigen nur endlich viele solche Werte hat, schliessen wir daraus: Die transzendenten Stellen von  $F$  liegen über endlich vielen Punkten der  $w$ -Kugel; sie sind demnach sämtlich *logarithmische Windungspunkte*.

Umgekehrt: Jedem asymptotischen Wert von  $w(z)$  entspricht eine transzendente Stelle von  $F$ ; und zwar entspricht zwei verschiedenen Konvergenzwegen dann und nur dann dieselbe transzendente Stelle, wenn sie in einander stetig deformierbar sind, ohne dass dabei die Konvergenz beeinträchtigt wird. Wir schliessen daraus:

*Die Fläche  $F$  hat als einzige singuläre Stellen  $p$  logarithmische und endlich viele algebraische Windungspunkte.*

Sie ist also eine Fläche von der in Kap. II—III betrachteten Art.

*Zusammenfassung.*

44. Ich greife auf das Ergebnis des Kap. III zurück: Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche  $F$  mit  $p$  logarithmischen und  $r$  algebraischen Windungspunkten als einzigen Singularitäten ist von parabolischem Typus; ihre uniformisierende Funktion  $w(z)$  genügt einer Gleichung  $\langle w, z \rangle = R(z)$ , wo  $R(z)$  eine rationale Funktion höchstens  $(4r + 2p)$ -ten Grades ist.

Die Resultate der letzten Nummern gestatten uns, die Gradzahl von  $R(z)$  genau anzugeben. Im Endlichen hat  $R(z)$   $r$  zweifache Pole, nämlich die  $r$  mehrfachen Stellen von  $w(z)$ . In  $z = \infty$  habe  $R(z)$  eine Entwicklung, welche mit  $z^{\mu-2}$  anfängt. Wäre  $\mu \leq 0$ , so wäre nach § 9  $w(z)$  in  $z = \infty$  entweder von rationalem Charakter oder mehrdeutig. Im Falle  $\mu = 1$  wäre diese Funktion, nach Nr. 40, ebenfalls mehrdeutig. Übrig bleibt nur  $\mu \geq 2$ ; und zwar muss, nach dem Ergebnis von Nr. 43,  $\mu = p$  sein, denn sonst hätte die Fläche von  $w(z)$  mehr oder weniger als  $p$  logarithmische Windungspunkte. — Die Gradzahl von  $R(z)$  ist also  $2r + p - 2$ .

Ich fasse die Ergebnisse der Kap. II und III folgendermassen zusammen:

*$F$  sei eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, welche als einzige singuläre Stellen  $p$  logarithmische und  $r$  algebraische Windungspunkte besitzt. Dann wird  $F$  durch eine meromorphe Funktion  $w(z)$  der Ordnung  $\frac{p}{2}$  uniformisiert; die Schwarzsche Ableitung von  $w(z)$  ist eine rationale Funktion vom Grade  $2r + p - 2$ , welche den in Nr. 41 angegebenen Bedingungen genügt.*

*Umgekehrt: Ist  $R(z)$  eine rationale Funktion, welche den genannten Bedingungen genügt und im Unendlichen einen  $(p - 2)$ -fachen Pol hat, so sind die Lösungen der Gleichung  $\langle w, z \rangle = R(z)$  meromorphe Funktionen der Ordnung  $\frac{p}{2}$ , welche die  $z$ -Ebene auf Riemannsche Flächen von der bereits angegebenen Art abbilden.*

45. Wir machen noch eine Bemerkung hinsichtlich der Parameter, von welchen die Lösungen der Gleichung  $\langle w, z \rangle = R(z)$  abhängen.

Eine rationale Funktion mit  $r$  Doppelpolen im Endlichen und einem  $(p - 2)$ -fachen Pol im Unendlichen kann in die Form

$$(57) \quad R(z) = b_{p-2} z^{p-2} + \dots + b_0 + \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{a_0^i}{(z - \alpha_i)^2} + \frac{a_1^i}{z - \alpha_i} \right\}$$

geschrieben werden; sie enthält also  $3r + p - 1$  komplexe Parameter. Hierzu kommen noch geschrieben werden; sie enthält also  $3r + p - 1$  willkürlichen Konstanten. Sind zwei von ihnen die in der allgemeinen Lösung verfügbaren drei willkürlichen Konstanten. Sind zwei von ihnen durch eine Normierung, z.B.  $w(0) = w_i$ ,  $w'(0) = 1$  festgelegt, so bleiben  $3r + p$  Parameter übrig, welche die normierte Lösung  $w(z)$  bestimmen.

Liegt andererseits eine Riemannsche Fläche  $F$  mit  $r$  algebraischen und  $p$  logarithmischen Windungspunkten vor, so ergeben sich für die Bestimmung von  $w(z)$  folgende Bedingungen: 1) die Schwarzche Ableitung (57) muss in jedem ihrer  $r$  Pole den Bedingungen I und II (Nr. 41) genügen ( $2r$  Relationen), 2) Die  $r$  mehrfachen Werte und die  $p$  asymptotischen Werte der Funktion  $w(z)$  sollen mit den  $w$ -Werten der Grundpunkte von  $F$  übereinstimmen ( $r + p$  Relationen).

Diese  $3r + p$  Relationen sind im allgemeinen notwendig und hinreichend für die Bestimmung der ebensovielen Parameter, was daraufhin deutet, dass die gefundenen Bedingungen *unabhängig* sind.

## § 12. Einige einfache Fälle.

46. Wir geben zum Schluss eine kurze Übersicht über die einfachsten Flächen der in dieser Abhandlung behandelten Klasse.

Hierher gehören erstens, wie schon mehrmals erwähnt, alle *geschlossene Flächen vom Geschlecht Null*. Ihre Uniformisierende sind *rationale Funktionen*. In der zugehörigen Differentialgleichung  $\langle w, z \rangle = R(z)$  ist  $R(z)$  eine rationale Funktion, welche den in Nr. 41 angegebenen Bedingungen genügt und in  $z = \infty$  eine zwei- oder vierfache Nullstelle hat.

Unter den *offenen* Flächen zeichnen sich diejenigen mit *zwei logarithmischen Windungspunkten* ( $p = 2$ ) durch ihren besonders elementaren analytischen Charakter aus. Nach den Ergebnissen von § 3 sind ihre uniformisierenden Funktionen lineare Transformationen einer Funktion von der Form

$$w(z) = S(z) e^{az}$$

wo  $S(z)$  eine rationale Funktion bedeutet. Die Schwarz'sche Ableitung  $\langle w, z \rangle$  ist eine rationale Funktion, welche den Bedingungen in Nr. 41 genügt, und deren Zähler und Nenner, nach Nr. 44, beide vom Grade  $2r$  sind, wo  $r$  die Anzahl der algebraischen Windungspunkte der Fläche bedeutet.

In den Fällen  $p > 2$  reichen die elementaren Funktionen im allgemeinen nicht mehr aus. R. NEVANLINNA hat in seiner Abhandlung »Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten« (S. 359—371) die Fälle  $p = 3, r = 0$  und  $p = 4, r = 0$  eingehend behandelt. Wir beschränken uns hier auf die Erwähnung zweier besonderen Flächenklassen, welche durch ihre einfache topologische und analytische Eigenschaften bemerkenswert sind.

47. *Die symmetrischen Flächen.* — Die  $w$ -Kugel sei in den Punkten

$$a_\nu = \varepsilon^\nu \quad \left( \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}; \nu = 0, 1, \dots, p-1 \right)$$

punktiert und mittels des Einheitskreises in zwei Gebiete  $I$  und  $A$  zerlegt. Wir denken uns diese »Halbblätter« in beliebig vielen Exemplaren vorhanden und bauen aus ihnen in folgender Weise eine Fläche auf: Wir nehmen als »Kern« ein Halbblatt  $I$ ; an dieses fügen wir, längs den  $p$  Bogen  $a_{\nu-1} a_\nu$ ,  $p$  verschiedene Halbblätter  $A$ . An jedes von ihnen wird, längs dem Elementbogen  $a_\nu a_{\nu-1}$  des vorigen Bogens, ein  $I$ -Blatt angefügt, an dieses, längs  $a_{\nu-1} a_\nu$ , ein  $A$ -Blatt, usw. in infinitum. Das Ergebnis ist eine Riemannsche Fläche  $F_p$ , welche aus dem Kernhalbblatt und  $p$  von ihm ausgehenden logarithmischen Enden besteht. Ihre Struktur wird



durch einen topologischen Baum mit einem einzigen Kernknoten und  $p$  symmetrischen Enden dargestellt.

Wir bezeichnen die in dieser Weise aufgebauten (und alle aus ihnen durch lineare Transformation erhaltenen) Flächen als *symmetrisch*. In seiner Abhandlung »Über die Herstellung transzendenten Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen«<sup>1</sup> hat R. NEVANLINNA die entsprechenden uniformisierenden Funktionen, insbesondere ihre Annäherung durch rationale Funktionen, ausführlich behandelt. Wir beschränken uns hier auf die Angabe ihrer Haupteigenschaften.

Die uniformisierende Funktion der Fläche  $F_p$  sei  $w(z)$ ; wir nehmen an, sie sei derart normiert, dass der Punkt  $z = 0$  dem Nullpunkt des Kernhalbblatts von  $F_p$  entspricht. Die Funktion  $w(z)$  besitzt die Symmetrieeigenschaft

$$w(\varepsilon z) \equiv \varepsilon w(z);$$

dies ist vom Standpunkt der Theorie der konformen Abbildung einleuchtend, wird aber von NEVANLINNA in der erwähnten Abhandlung auch analytisch nachgewiesen. Hieraus folgt durch eine einfache Rechnung, dass die Schwarz'sche Ableitung  $R(z)$  von  $w(z)$  der Gleichung  $R(\varepsilon z) = \varepsilon^{p-2} R(z)$  genügt. Da  $F_p$  keine algebraischen Windungspunkte hat und  $R(z)$  somit ein Polynom vom Grade  $p - 2$  ist, folgt:  $w(z)$  genügt einer Differentialgleichung der Form

$$(58) \quad \langle w, z \rangle = a z^{p-2}$$

Normiert man die Gleichung durch eine Ähnlichkeitstransformation von  $z$  derart, dass  $a = -2$  wird, so folgt aus ihr eine einfache Reihendarstellung für  $w(z)$ . Nach Nr. 25 ist diese Funktion, bis auf eine lineare Transformation, gleich dem Quotient zweier Fundamentallösungen der Gleichung

$$g''(z) = z^{p-2} g(z).$$

Unter Anwendung unbestimmter Koeffizienten ergibt sich hieraus die Lösung

$$w_0(z) = \frac{z + \frac{z^{p+1}}{p(p+1)} + \frac{z^{2p+1}}{p(p+1) \cdot 2p(2p+1)} + \dots}{1 + \frac{z^p}{(p-1)p} + \frac{z^{2p}}{(p-1)p \cdot (2p-1)2p} + \dots}$$

von (58). Sie besitzt tatsächlich die Symmetrieeigenschaft  $w_0(\varepsilon z) = \varepsilon w_0(z)$ ; dividiert man die Lösung mit dem reellen Grenzwert von  $w_0(z)$  für  $z \rightarrow \infty$ , so hat man eine Lösung, welche die  $p$  gewünschten asymptotischen Werte  $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-1}$  hat und also mit  $w(z)$  identisch sein muss.

48. *Der Exponentialfall.* — Wir betrachten nunmehr diejenigen Flächen  $F$ , welche eine gerade Anzahl  $p = 2\mu$  von logarithmischen Windungspunkten besitzen, von denen  $\mu$  über einem und demselben Grundpunkt, etwa  $w = \infty$ , liegen. Ausserdem dürfen die Flächen auch algebraische Windungspunkte besitzen; ihre Anzahl sei  $r$ .

$w(z)$  sei die uniformisierende Funktion einer Fläche  $F$  der besagten Art. Es stellt sich heraus, dass  $w(z)$  in engstem Zusammenhang mit der Exponentialfunktion steht.

Um dies zu zeigen erinnern wir an die Eigenschaften des topologischen Baumes von  $F$ .

<sup>1</sup> Acta math. 55.

Er besteht nach Kap. II aus einem Kern und  $2\mu$  logarithmischen Enden, welche ebensoviele logarithmische Elementargebiete trennen. Diese sind den  $2\mu$  logarithmischen Windungspunkten zugeordnet, und zwar muss zu jedem zweiten von ihnen ein über  $w = \infty$  gelegener Windungspunkt gehören; denn zwei benachbarten Elementargebieten entsprechen Windungspunkte, welche über verschiedenen Grundpunkten liegen (Vgl. Nr. 10).

Über dem Grundpunkt  $w = \infty$  können, ausser den  $\mu$  logarithmischen Windungspunkten, auch noch algebraische und reguläre Stellen liegen. Jeder solchen entspricht im topologischen Baum ein Zweieck oder Vieleck, welchem die Nummer des Grundpunktes  $w = \infty$  zukommt. Die logarithmischen Enden enthalten nun keine Zweiecke dieser Art, denn jedes Ende hat an seiner einen Seite ein zu  $w = \infty$  gehöriges logarithmisches Elementargebiet. Wir schliessen daraus, dass  $F$  über  $w = \infty$  nur endlich viele reguläre und algebraische Stellen hat.

Die uniformisierende Funktion  $w(z)$  von  $F$  ist demnach gleich einer ganzen Funktion, dividiert durch ein Polynom  $Q(z)$ . Ebenso ist ihre Ableitung, bis auf einen Nenner  $(Q(z))^2$ , ganz.

Andererseits ist  $w(z)$ , nach unserem allgemeinen Ergebnis auf S. 57, Lösung einer Differentialgleichung  $\langle w, z \rangle = R(z)$ , wo  $R(z)$  eine rationale Funktion vom Grade  $2r + p - 2$  ist. Nach Nr. 43 sind die Lösungen einer solchen Gleichung, falls sie meromorph sind, in der Form

$$w(z) = \int^z \frac{L(z)}{(p(z))^2} dz$$

darstellbar, wobei  $L(z)$  das Polynom (54) auf S. 56 und  $p(z)$  eine ganze Funktion der Ordnung  $\frac{p}{2}$  bedeuten. Nach dem oben Gesagten ist nun der Nenner von  $w'(z)$ , bis auf den polynomischen Faktor  $(Q(z))^2$ , nullfremd;  $p(z)$  ist also gleich  $Q(z)$ , multipliziert mit einem Exponentialausdruck, dessen Exponent offenbar ein Polynom vom Grade  $\mu = \frac{p}{2}$  sein muss. Wir haben somit das Ergebnis:

*Die uniformisierende Funktion einer Riemannschen Fläche mit  $2\mu$  logarithmischen Windungspunkten, von denen  $\mu$  über  $w = \infty$  liegen, ist von der Form*

$$(59) \quad w(z) = \int^z \frac{L(z)}{(Q(z))^2} e^{G(z)} dz$$

wo  $L(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $G(z)$  Polynome bedeuten, das letzte vom Grade  $\mu$ .

Umgekehrt lässt sich leicht bestätigen, dass jede Funktion von der Form (59), falls sie überhaupt eindeutig ist, genau  $2\mu$  wesentlich verschiedene Konvergenzsektoren besitzt. In jedem zweiten von ihnen nähert sich die Funktion dem Wert  $\infty$ , während sie in den zwischenliegenden Sektoren gewissen endlichen asymptotischen Werten zustrebt. Ferner hat sie nur endlich viele mehrfache Stellen. Die entsprechende Riemannsche Fläche gehört also zu der bereits betrachteten speziellen Klasse.

49. Ein Sonderfall des obigen ist in § 3 behandelt worden; es war derjenige Fall, dass auch die nicht über  $w = \infty$  liegenden  $\mu$  logarithmischen Windungspunkte über einem einzigen Grundpunkt, etwa  $w = 0$ , gelegen sind. Wie in Nr. 13 gezeigt wurde, ist in diesem Fall nicht nur  $w'(z)$ , sondern sogar  $w(z)$  selbst von der Form

$$w(z) = S(z) e^{G(z)},$$

wo  $S(z)$  eine rationale Funktion und  $G(z)$  ein Polynom  $\mu$ -ten Grades bedeutet.