А. Э. Еременко

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ИТЕРАЦИЕЙ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Методами теории итерации рациональных функций исследуются функциональные уравнения $f(g)=g(f)$ и $G(g)=f(G)$, где f и g – рациональные функции, а G – мероморфная функция в комплексной плоскости с существенной особенностью в бесконечности.

Введение

Создатели теории итерации рациональных функций, Фату, Жюлиа и Ритт, рассматривали ее прежде всего как метод исследования функциональных уравнений [1–3]. С начала 80-х годов эта теория переживает период бурного развития, связанного с применением новых методов геометрической теории функций и теории динамических систем. При этом на первое место выдвигаются вопросы, происходящие из теории динамических систем (регулярное и хаотическое поведение, бифуркации, структурная устойчивость и т. п.), а приложениям к функциональным уравнениям уделяется меньшее внимание. Цель этой работы – изучение двух классических функциональных уравнений при помощи новых методов теории итерации. Первое из них –

$$f_1\circ f_2=f_2\circ f_1. \tag{0.1}$$

Требуется найти все пары коммутирующих рациональных функций. Этой задаче посвящены обстоятельные исследования Фату [4, 5], Жюлиа [6] и Ритта [7].[1] Прежде чем описывать их результаты, приведем основные положения теории итерации рациональных функций. Их можно найти в [8], гл. VIII или в обзорах [9, 10]. Незаменимым источником продолжает оставаться классическая работа [1].

Ключевые слова: итерация, множество Жюлиа, орбиобразие, инвариантная мера, функциональные уравнения, коммутирующие функции.

[1] Авторы ряда последующих работ на эту тему не были знакомы с [4–7]. Обширная библиография по коммутирующим функциям (не только рациональным) содержится в [11].

Пусть f — рациональная функция, $\deg f \geqslant 2$. Обозначим через f^n ее n-ю итерацию. Функции f и g называются сопряженными, если существует дробно-линейное преобразование φ такое, что $f \circ \varphi = \varphi \circ g$. Множество $E \subset \bar{\mathbf{C}}$ называется вполне инвариантным, если его полный прообраз $f^{-1}E$ совпадает с E. Максимальное конечное вполне инвариантное множество $E(f)$ существует и называется исключительным множеством. Всегда справедливо $\operatorname{card} E(f) \leqslant 2$. При этом если $\operatorname{card} E(f) = 1$, то функция f сопряжена с полиномом (для полинома $E(f) \ni \infty$). Если же $\operatorname{card} E(f) = 2$, то f сопряжена с $g(z) = z^n, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0, 1\}$. Очевидно, что $E(g) = \{0, \infty\}$.

Точка z называется периодической с периодом n, если $f^n z = z$. Наименьший период называется порядком точки z. Неподвижная точка — это точка порядка 1. Если z — периодическая точка порядка n, то число $\lambda = (f^n)'(z)$ — ее мультипликатор. Периодическая точка называется отталкивающей, если $|\lambda| > 1$.

Пусть $N(f)$ — максимальное открытое множество, на котором семейство $\{f^n\}$ нормально в смысле Монтеля [8]. Его дополнение называется множеством Жюлиа $J(f) = \bar{\mathbf{C}} \setminus N(f)$. Множество Жюлиа совпадает с замыканием множества отталкивающих периодических точек, оно всегда непусто, совершенно и вполне инвариантно, кроме того, $J(f^n) = J(f)$. В частности, множество отталкивающих периодических точек бесконечно. С другой стороны, как показал Фату, множество неотталкивающих периодических точек конечно. Отталкивающих неподвижных точек может не быть, но всегда есть отталкивающие точки периода 2.

Множество Жюлиа либо нигде не плотно, либо совпадает с $\bar{\mathbf{C}}$. Отметим, что для полинома f справедливо $J(f) \neq \bar{\mathbf{C}}$, так как семейство $\{f^n\}$ нормально в окрестности ∞. Это же верно для $f(z) = z^{-n}$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Так что из $J(f) = \bar{\mathbf{C}}$ следует, что $E(f) = \phi$.

Пусть z_0 — отталкивающая неподвижная точка функции f, $\lambda = f'(z_0)$. Положим $\Lambda : z \mapsto \lambda z$. Тогда существует единственное мероморфное в $\mathbf{C}$ решение уравнения Пуанкаре

$$F \circ \Lambda = f \circ F, \; F(0) = z_0, \; F'(0) = 1. \tag{0.2}$$

Легко видеть, что исключительное множество $E(f)$ — это в точности множество значений, которые F не принимает в $\mathbf{C}$, а все значения из $\bar{\mathbf{C}} \setminus E(f)$ принимаются функцией F бесконечное число раз.

Следуя работам [4, 6], мы наложим дополнительное ограничение на функции f_1 и f_2 в (0.1) : $f_1^m \neq f_2^n$ при всех $m, n \in \mathbf{N}$. Задача описания всех пар функций, имеющих общую итерацию, требует особого рассмотрения и здесь обсуждаться не будет (см. по этому поводу [3, 7]). Изложим схему рассуждений Фату и Жюлиа [5, 6] (они совпадают). Прежде всего доказывается, что коммутирующие функции f_1 и f_2 имеют одинаковое множество Жюлиа J и что существует общая для f_1 и f_2 отталкивающая периодическая точка z_0. Заменяя f_1 и f_2 некоторыми их итерациями, которые снова обозначим через f_1 и f_2, добиваемся того, чтобы точка z_0 была неподвижной. Затем можно показать, что функция Пуанкаре F, соответствующая точке z_0, одна и та же для f_1 и f_2. Таким образом, мероморфная функция F удовлетворяет двум функциональным уравнениям:

$$F \circ \Lambda_j = f_j \circ F, \; \Lambda_j : z \mapsto \lambda_j z, \; \lambda_j = f_j'(z_0), \; F(0) = z_0, \; j = 1, 2.$$

Из того, что f_1 и f_2 не имеют общей итерации, выводится, что

$$\Lambda_1^n \neq \Lambda_2^m; \; m, n \in \mathbf{N}. \tag{0.3}$$

Пусть теперь $I = F^{-1}(J)$. Из полной инвариантности множества J относительно f_1 и f_2 следует, что $\Lambda_j I = I, j = 1, 2$. Пусть Γ — замкнутая группа, порожденная преобразованиями Λ_j, $j=1, 2$. В силу (0.3) Γ недискретна и, следовательно, содержит однопараметрическую подгруппу Γ_1. Это накладывает сильные ограничения на множество I, а следовательно, и на J. Имеются следующие возможности:

1) $I=\mathbf{C}$. Тогда $J=\overline{\mathbf{C}}$.

2) I нигде не плотно и состоит из аналитических кривых (логарифмических спиралей или лучей, исходящих из нуля, либо окружностей с центром в нуле).

Фату [5] и Жюлиа [6] исследовали второй случай до конца. Оказалось, что в этом случае f_1 и f_2 сопряжением приводятся к виду $f_1(z)=z^m$, $f_2(z)=z^n$, либо $f_1=T_m$, $f_2=T_n$, где T_k – полином Чебышева, определяемый уравнением $\cos k\zeta = T_k(\cos\zeta)$.

Таким образом, задача описания коммутирующих функций без общей итерации была решена для случая $J\neq\overline{\mathbf{C}}$, в частности для полиномов. Исследовать аналогичным образом случай 1) не удавалось, так как в то время не было средств для описания хаотической динамики, которая в этом случае имеет место во всей плоскости.

В то же время Ритт [7] совершенно другим методом получил полное решение задачи о коммутирующих функциях. К указанным парам f_1, f_2 добавляется еще несколько пар, функции Пуанкаре которых выражаются через эллиптические функции. Метод этой работы Ритта никак не связан с теорией итерации и имеет тополого-алгебраический характер. Его доказательство представляется весьма сложным и лишено геометрической наглядности. Ритт пишет: „It would be interesting to know whether a proof can also be effected by the use of the Poincaré functions employed by Julia" ([7, c. 400]). Работа [5] вышла немного позже, и в ней Фату уже ссылается на [7]. Поиски доказательства теоремы Ритта в духе идей Фату и Жюлиа и привели к появлению настоящей статьи. Недавно появилась работа [12], в которой строятся примеры коммутирующих полиномиальных отображений $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$, обобщающие полиномы $z\to z^k$ и T_k. Новое доказательство теоремы Ритта может оказаться полезным для описания всех пар таких отображений.

Новый метод исследования уравнения (0.1) оказался применимым к еще одному функциональному уравнению

$$G\circ g=f\circ G, \tag{0.4}$$

где g и f – рациональные функции. В случае, когда $\deg g=1$, (0.4) сводится либо к уравнению Пуанкаре, либо к $G(z+1)=f\circ G(z)$, которые хорошо исследованы (см., например, [1, 13, 14]). Опираясь на результаты Фату, Ю.В. Азарина [15] дала полное описание всех мероморфных в $\mathbf{C}$ решений G уравнения (0.4) с $\deg g=1$. Далее, предполагаем, что $\deg g\geqslant 2$. Уравнение (0.4) встречается в ряде работ Фату и Жюлиа; ему специально посвящена большая статья [16], где подытожены все предшествующие результаты. Как правило, решение G – очень сложная многозначная функция, о которой в общем случае можно сказать мало содержательного. Представляет интерес изучение однозначных решений. Следуя Жюлиа, ограничимся однозначными трансцендентными[2] решениями G, имеющими конечное число существенно особых точек в $\overline{\mathbf{C}}$. Легко видеть, что множество E этих особых точек вполне инвариантно относительно g и поэтому $E\subset E(g)$. С помощью сопряжения дело сводится к одному из двух случаев:

а) $g(z)=z^n$, $n\in\mathbf{Z}\setminus\{0,\pm 1\}$, и G мероморфна в $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}\setminus\{0\}$;

б) g – полином и G мероморфна в $\mathbf{C}$.

Основной результат работы [16] состоит в том, что в обоих случаях а) и б) обязательно должно выполняться $J(f)=\overline{\mathbf{C}}$ и функция G принимает все значения

---

[2] Автору неизвестны какие-либо результаты о рациональных решениях.

из $\bar{\mathbf{C}}$ бесконечное число раз. На этом исследование Жюлиа заканчивается, так как не было подходящих методов для изучения динамики функций f с $J(f)=\bar{\mathbf{C}}$. В той же работе [16] были приведены примеры соотношений вида (0.4), построенные с помощью эллиптических функций. Это были единственные известные в то время примеры рациональных функций f с $J(f)=\bar{\mathbf{C}}$.[3]

Мы найдем все тройки функций (g,f,G), удовлетворяющие (0.4) и условиям а) или б). Все они явно выражаются через эллиптические функции.

§ 1. Формулировка результатов

Начнем с некоторых определений. Согласно Терстону [18, 19], (двумерным) орбиобразием (orbifold) называется риманова поверхность S вместе с функцией $n: S \to \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, равной 1 вне дискретного множества точек. (Это то же самое, что отмеченная риманова поверхность; мы предпочитаем короткий современный термин). Орбиобразия (S_1, n_1) и (S_2, n_2) считаются эквивалентными, если существует конформный гомеоморфизм

$$\varphi: S_1 \setminus \{z : n_1(z)=\infty\} \to S_2 \setminus \{z : n_2(z)=\infty\}, \quad n_2(\varphi(z)) \equiv n_1(z).$$

Например, если $S_1=\mathbf{C}$, $n_1 \equiv 1$, а $S_2=\bar{\mathbf{C}}$, $n_2(\infty)=\infty$, $n_2(z)=1$ при $z \neq \infty$, то $(S_1, n_1)=(S_2, n_2)$. Если поверхность S компактна, то эйлерова характеристика χ орбиобразия $\mathcal{O}=(S,n)$ определяется так. Триангулируем S с условием, чтобы все точки z с $n(z) \geqslant 2$ были вершинами. Пусть Δ – количество граней, Γ – количество ребер, а P – множество вершин этой триангуляции. Тогда

$$\chi(\mathcal{O}) = -\Delta + \Gamma - \sum_{z \in P} \frac{1}{n(z)}.$$

Накрытием орбиобразий $R:(S_1, n_1) \to (S_2, n_2)$ называется голоморфное разветвленное накрытие R

$$S_1 \setminus \{z : n_1(z)=\infty\} \to S_2 \setminus \{z : n_2(z)=\infty\}$$

со свойством $\deg_z R \cdot n_1(z) = n_2(R(z))$, $z \in S_1$. Здесь $\deg_z R$ – кратность функции R в точке z. Накрытие называется универсальным, если S_1 односвязна и $n_1 \equiv 1$. Если $f_1: \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}$ и $f_2: \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}$ – универсальные накрытия, то существует конформный гомеоморфизм $\varphi: \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ такой, что $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Если $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ – орбиобразия с компактными поверхностями и $R: \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ – конечнолистное накрытие, то справедлива формула Римана–Гурвица

$$\chi(\mathcal{O}_1) = \deg R \cdot \chi(\mathcal{O}_2).$$

Нас интересуют орбиобразия $\mathcal{O}=(\bar{\mathbf{C}}, n)$ с $\chi(\mathcal{O})=0$, т.е.

$$\sum_{z \in \bar{\mathbf{C}}} \left(1 - \frac{1}{n(z)}\right) = 2.$$

Это уравнение имеет 6 решений:

$$(\infty, \infty), \quad (2, 2, \infty), \tag{1.1}$$

[3] Обычно первый такой пример приписывают Латтэ (1918). Однако аналогичный пример встречается уже у Э. Л. Бетхера в 1903 г. [17].

$$(2,4,4),\ (3,3,3),\ (2,3,6),\ (2,2,2,2). \tag{1.2}$$

Каждому решению, кроме последнего, соответствует единственное орбиобразие с точностью до конформной эквивалентности, а решению $(2,2,2,2)$ – семейство, зависящее от одного комплексного параметра. Каждое орбиобразие (1.1), (1.2) универсально накрывается плоскостью $\mathbf{C}$ и имеет вид $\mathbf{C}/\Gamma$, где Γ – некоторая разрывная группа сохраняющих ориентацию перемещений плоскости [18, 19, 22]. Приведем явный вид универсально накрывающих функций F и образующие групп Γ [19, 22].

1) (∞,∞); $\exp 2\pi z$; $z\mapsto z+i$;
2) $(2,2,\infty)$; $\cos 2\pi z$; $z\mapsto z+1, z\mapsto -z$;
3) $(2,4,4)$; $\wp^2(z,1,i)$; $z\mapsto z+1, z\mapsto iz$;
4) $(3,3,3)$; $\wp'(z,1,\omega)$; $z\mapsto z+1, z\mapsto z+\omega, z\mapsto \omega^2 z$;
5) $(2,3,6)$; $(\wp')^2(z,1,\omega)$; $z\mapsto z+1, z\mapsto z+\omega, z\mapsto \omega z$;
6) $(2,2,2,2)$; $\wp(z,1,\tau)$; $z\mapsto z+1, z\mapsto z+\tau, z\mapsto -z$.

Здесь $\wp(z,\omega_1,\omega_2)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса с периодами ω_1 и ω_2, $\omega=e^{\pi i/3}$, $\operatorname{Im}\tau>0$. Мероморфные функции F указанные в 1)–6) допускают много интересных характеризаций. Например, всякое мероморфное периодическое решение уравнения Пуанкаре имеет вид $L_1\circ F\circ L_2$, где L_1 – дробно-линейная, а L_2 – линейная функции [27] (см. также [14]).

С каждым из орбиобразий (1.1), (1.2) связано семейство рациональных функций, осуществляющих накрытие $f:\mathcal{O}\to\mathcal{O}$. Все такие функции f получаются из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "F"'] & \mathbf{C} \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{O} \arrow[r, "f"] & \mathcal{O}
\end{tikzcd}$$

Здесь $F:\mathbf{C}\to\mathcal{O}=\mathbf{C}/\Gamma$ – универсальное накрытие, Λ – конформный гомеоморфизм, $\Lambda\Gamma\subseteq\Gamma$. Приведем список допустимых Λ в случаях 1)–5), дающих функции f, $\deg f\geqslant 2$ [19].

1) $z\mapsto nz,\ n\in\mathbf{Z},\ |n|>1$;
2) $z\mapsto nz,\ z\mapsto nz+1/2,\ n\in\mathbf{Z},\ |n|>1$;
3) $z\mapsto az,\ z\mapsto az+\frac{1}{2}(1+i),\ a\in\mathbf{Z}[i],\ |a|\geqslant 2$;
4) $z\mapsto az,\ a\in\mathbf{Z}[\omega],\ |a|\geqslant 3,\ \omega=e^{\pi i/3}$;
5) $z\mapsto az,\ z\mapsto az+\frac{1}{3}(1+\omega),\ z\mapsto az+i\frac{\sqrt{3}}{3},\ a\in\mathbf{Z}[\omega],\ |a|\geqslant 3,\ \omega=\exp \pi i/3$.

В случае 6) при любом τ допустимы конформные гомеоморфизмы $\Lambda(z)=nz+a$, $n\in\mathbf{Z}$, $|n|\geqslant 2$, $2a\in\Gamma$, а при некоторых специальных τ имеются и другие возможности для Λ (так называемые, комплексные умножения), полное описание которых мы опускаем (см., например, [19]).

В случае 1) $f(z)=z^n$, а в случае 2) $f=T_n$ с точностью до сопряжения. Функции f, соответствующие случаям 3)–6), были первыми примерами рациональных функций, для которых $J(f)=\overline{\mathbf{C}}$. Сейчас известно много других примеров, в которых $J=\overline{\mathbf{C}}$ (см., например, [10, 20]).

Теорема 1. *Пусть f_1 и f_2 – рациональные функции,* $\deg f_j \geqslant 2$, $f_1^m \neq f_2^n$, $m, n \in \mathbf{Z}$. *Если $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, то существует орбиобразие $\mathcal{O}$ типа* (1.1) *или* (1.2) *такое, что f_1 и f_2 суть накрытия $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$.*

Рассмотрим теперь накрытия $\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ различных орбиобразий из списка 1)–6). Если $\mathcal{O}_k = \mathbf{C}/\Gamma_k$, то для существования накрытия $\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Степень накрытия равна индексу Γ_1 в Γ_2. Поэтому накрытия бесконечной степени $\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ возможны, когда $\mathcal{O}_1$ имеет вид (1.1), а $\mathcal{O}_2$ – (1.2), причем пара $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = ((2, 2, \infty), (3, 3, 3))$ исключается. Такие накрытия G выражаются через универсальные накрытия F_k орбиобразий $\mathcal{O}_k : F_2 = G \circ F_1$.

Теорема 2. *Пусть g и f – рациональные функции,* $\deg g \geqslant 2$, *а G – мероморфная функция в $\mathbf{C}$ или в $\mathbf{C}^*$ с существенной особенностью в ∞. Если G удовлетворяет уравнению $G \circ g = f \circ G$, то существуют орбиобразия $\mathcal{O}_1$ типа* (1.1) *и $\mathcal{O}_2$ типа* (1.2) *такие, что коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{O}_1 \arrow[d, "G"] \\ \mathcal{O}_2 \arrow[r, "f"] & \mathcal{O}_2 \end{tikzcd}$$

состоит из накрытий.

Примеры, приведенные в работе [16], соответствуют случаю, когда $\mathcal{O}_2$ имеет тип (2, 2, 2, 2).

Заметим, что если $h: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ – накрытие орбиобразия из списка 1)–6) и $h = h_1^m$, $m \in \mathbf{N}$, то $h_1: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ – тоже накрытие. Это замечание позволяет при доказательстве теорем 1 и 2 заменять функции f_i, f, g на их итерации.

§ 2. Вспомогательные результаты

Главным инструментом при доказательстве теорем 1 и 2 будет служить мера на множестве Жюлиа, которая описывает асимптотическое распределение корней уравнения $f^n(z) = a$ при $n \to \infty$. Все меры, если не оговорено противное, предполагаются борелевскими и локально конечными.

Пусть U и V – области в $\overline{\mathbf{C}}$, $\psi : U \to V$ – достаточно хорошая функция (например, голоморфная в U или гомеоморфизм). Тогда для любой меры μ в V определен прообраз

$$(\psi^* \mu)(E) = \int_{\psi E} n_\psi(z) d\mu, \quad E \subset U,$$

где $n_\psi(z)$ – количество прообразов в U точки $z \in V$ с учетом кратности. В частности, для рациональной функции f определен линейный оператор $A_f = \dfrac{1}{\deg f} f^*$, действующий на множестве вероятностных мер в $\overline{\mathbf{C}}$. Существует единственная вероятностная мера μ_f со свойствами

$$A_f \mu_f = \mu_f, \quad \mu_f(E(f)) = 0. \tag{2.1}$$

Эта мера не имеет дискретной компоненты; ее носитель совпадает с множеством Жюлиа. Мера μ_f называется уравновешенной мерой функции f. Существование и единственность μ_f для любой рациональной функции f впервые доказал

М. Ю. Любич [21].[4] Затем появился ряд других доказательств (см., например, [23]). В настоящей работе мера μ_f используется главным образом для изучения динамики функций f с $J(f)=\overline{\mathbf{C}}$. Это как раз тот случай, когда неприменимы методы Фату и Жюлиа. Мы покажем, что меры μ_f, соответствующие рациональным функциям f, f_j из уравнений (0.1) и (0.4), обладают одним очень специфическим свойством. Но прежде исследуем это свойство само по себе.

Гладкое неособое векторное поле в области $V\subset \mathbf{R}^2$ – это гладкая функция $w: V\to \mathbf{R}^2\setminus\{0\}$. С w связан локальный фазовый поток $g_t: V\to \mathbf{R}^2$ – решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}g_t=w(g_t),\ g_0=\mathrm{id},$$

определенное при достаточно малых $t\in \mathbf{R}$. Если $\varphi: U\to V$ – диффеоморфизм, то прообраз $\varphi^* w$ векторного поля w определяется так:

$$(\varphi^* w)(z) = (\varphi'(z))^{-1}(w(\varphi(z))), \tag{2.2}$$

где φ' – производная отображения φ (линейное отображение касательного пространства). Теорема о выпрямлении (см. [24], гл. 2, § 7) утверждает, что любое гладкое неособое векторное поле локально может быть превращено в постоянное векторное поле с помощью диффеоморфизма.

Определение. Мера μ в $\mathbf{R}^2$ называется слоистой в точке $z_0\in \operatorname{supp}\mu$, если в некоторой окрестности этой точки существует гладкое неособое векторное поле w такое, что его локальный фазовый поток сохраняет меру μ. Если $w(z_0)=a$, то мера μ называется слоистой в направлении a.

С помощью теоремы о выпрямлении получаем эквивалентное определение: существует диффеоморфизм ψ некоторой окрестности U точки z_0 на область $V\subset \mathbf{R}^2$ такой, что мера $\nu=(\varphi^{-1})^*\mu$ инвариантна относительно сдвигов в направлении оси x. Последнее эквивалентно тому, что ν есть произведение меры dx и некоторой меры $d\nu_1(y)$ (x и y – декартовы координаты в $\mathbf{R}^2$).

Если мера μ слоистая в точке z_0, то она слоистая и во всех точках, близких к z_0. Свойство быть слоистой сохраняется при действии оператора ψ^*, если ψ – диффеоморфизм.

Предложение 1. *Пусть мера μ слоистая в точке z_0 в двух направлениях a и b, причем векторы a и b линейно независимы (над $\mathbf{R}$). Тогда в некоторой окрестности точки z_0 мера μ абсолютно непрерывна и имеет гладкую плотность, не обращающуюся в* 0.

Доказательство. Обозначим через $B_k(z_0)$ семейство окрестностей E точки z_0, обладающих таким свойством $\max\{|z_0-\zeta|:\zeta\in\partial E\}\leqslant k\min\{|z_0-\zeta|:\zeta\in\partial E\}$, $k>1$. Положим $\mu'(z_0)=\lim \mu(E)/|E|$, $\operatorname{diam}E\to 0$, $E\in B_k(z_0)$, где $|\cdot|$ – мера Лебега. Согласно теореме Лебега (см. [25], гл. IV), при любом $k>1$ производная μ' существует почти всюду. Покажем, что μ' существует всюду в некоторой окрестности точки z_0 и является там гладкой функцией.

Пусть $g_t(z)$ и $h_t(z)$ – локальные фазовые потоки, сохраняющие меру μ, причем соответствующие векторные поля линейно независимы в точке z_0. Легко видеть, что существует окрестность V точки z_0 со следующим свойством: для любых точек $z_1, z_2\in V$ фазовые кривые $g_t(z_1)$ и $h_t(z_2)$ пересекаются в единственной точке $z_3\in V$. Поэтому существуют такие r и s, что $h_s\circ g_r(z_1)=z_2$. Диффеоморфизм $\varphi=h_s\circ g_r$ сохраняет меру μ и отображает семейство $B_k(z_1)$ в семейство

[4] В работе [21] также доказано, что μ_f – единственная мера максимальной энтропии для функции f.

$B_K(z_2)$ с некоторым K, причем K может быть выбрано не зависящим от $z_1, z_2 \in V$. Имеем $|\varphi(E)| \sim c|E|$ при $E \in B_k(z_1)$, $\operatorname{diam} E \to 0$, где c – якобиан отображения φ. Таким образом, если $\mu'(z_1)$ существует, то $\mu'(z_2)$ существует, причем $\mu'(z_2) = \mu'(z_1)/c$. Очевидно, что c гладко зависит от z_1' и z_2.

Мы показали, что μ' существует и является гладкой функцией. Осталось показать, что мера μ абсолютно непрерывна (тогда ее плотность с необходимостью равна μ'). Возьмем произвольное $\epsilon > 0$ и множество K, $\bar{K} \subset V$, $|K| < \epsilon$. Нужно оценить сверху $\mu(K)$. Пусть U – открытое множество, содержащее K, $|U| < 2\epsilon$. Выберем $M > \max\{\mu'(z) : z \in \bar{U}\}$. Для любого $z \in K$ рассмотрим кружок $O(z) \subset U$ с центром в точке z и такой, что $\mu(O(z)) \leqslant M|O(z)|$. Согласно теореме Безиковича (см., например, [26], гл. 1, теорема 1.1), найдется не более чем счетное покрытие $\{O_j\}$ множества K этими кружками такое, что каждая точка плоскости принадлежит не более чем шести кружкам. Тогда

$$\mu(K) \leqslant \sum_j \mu(O_j) \leqslant M \sum_j |O_j| \leqslant 6M|U| \leqslant 12M\epsilon,$$

что и требовалось доказать.

Абсолютно непрерывные меры с гладкой плотностью, не обращающейся в нуль, далее называем просто гладкими.

Рассмотрим поведение слоистых мер при голоморфных отображениях плоскости. Теперь отождествляем $\mathbf{R}^2$ с $\mathbf{C}$, а векторные поля – с гладкими функциями $V \to \mathbf{C}^*$. Если φ голоморфная функция, то формула (2.2) сохраняется, причем φ' – комплексная производная.

Пусть U и V – окрестности нуля, $f: U \to V$ голоморфное отображение, $f(z) = az^k + O(z^{k+1})$, $z \to 0$, μ – мера в V, а $\nu = f^*\mu$ – ее прообраз.

Предложение 2. *Если $k \geqslant 3$ и ν слоистая в нуле, то ν – гладкая.*

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем, когда $f(z) = z^k$. Тогда $\nu(E) = \nu(\epsilon_k E)$, где $E \subset U$ – любое борелевское множество, $\epsilon_k = \exp 2\pi i/k$. Поэтому, если ν слоистая в нуле в направлении a, то она слоистая и в направлении $\epsilon_k a$. Если $k \geqslant 3$, то векторы a и $\epsilon_k a$ линейно независимы над $\mathbf{R}$ и применение предложения 1 заканчивает доказательство.

Предложение 3. *Если $k \geqslant 2$, то меры μ и ν не могут быть одновременно слоистыми в нуле.*

Доказательство. Если ν – гладкая мера, то ее образ μ гладкая мера в проколотой окрестности нуля, а в нуле ее плотность имеет особенность. Это противоречит тому, что μ слоистая.

Таким образом, в силу предложения 2, достаточно рассмотреть случай, когда $k = 2$. Можно считать. что $f(z) = z^2$. Предположим, что обе меры μ и ν слоистые. Обозначим через w и u соответствующие векторные поля. Имеем

$$u(z) = u(0)(1 + o(1)),\ w(z) = w(0)(1 + o(1)),\ z \to 0.$$

В точке $z \in U$ мера ν должна быть слоистой в направлении прообраза $f^*w(f(z))$ вектора $w(f(z))$. Имеем

$$f^*w(f(z)) = \frac{w(0)}{2z}(1 + o(1)),\ z \to 0.$$

Легко видеть, что найдется угловая область A с вершиной в нуле и раствором угла $(3\pi/4)$, в которой векторы $u(z)$ и $f^*w(f(z))$ линейно независимы над $\mathbf{R}$. В силу предложения 1 мера ν гладкая в A. Поэтому мера μ гладкая в $f(A)$, некоторой угловой области с раствором угла $3\pi/2$. Но мера μ слоистая в точке 0. Очевидно, что образы угла $f(A)$ под действием локального фазового потока, определяемого векторным полем w, заполняют полную окрестность нуля. Поэтому мера μ гладкая в окрестности нуля. Но тогда и ν гладкая, а это невозможно, как мы видели в начале доказательства.

П р е д л о ж е н и е 4. *Если мера μ удовлетворяет в окрестности точки z_0 условию $g_t^*\mu = e^{at}\mu$, где g_t – локальный фазовый поток, а $a>0$, то μ слоистая в z_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы о выпрямлении достаточно ограничиться случаем, когда $g_t(x, y) = (x+t, y)$. Имеем в этом случае $\mu(E+t) = e^{at}\mu(E)$. Положим

$$\nu(E) = \int_E e^{-ax} d\mu \quad (z = x+iy).$$

Легко видеть, что мера ν инвариантна относительно потока g_t. Поэтому $d\nu = (dx) \times d\lambda(y)$ и $d\mu = e^{ax} dx\, d\lambda(y)$. Проверим, что мера μ инвариантна относительно локального фазового потока

$$(x, y) \mapsto (\varphi_t(x), y), \quad \varphi_t(x) = \frac{1}{a}\log(e^{ax}+t),$$

удовлетворяющего дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\varphi_t = \frac{1}{a}e^{-a\varphi_t}.$$

В самом деле,

$$e^{a\varphi_t(x)}\left(\frac{d}{dx}\varphi_t(x)\right) dx\, d\lambda(y) = e^{ax} dx\, d\lambda(y).$$

Таким образом, мера μ слоистая.

§ 3. Коммутирующие функции

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Если $f_1^n z = z$, то $f_1^n \circ f_2 z = f_2 \circ f_1^n z = f_2 z$, т. е. f_2 отображает в себя конечное множество корней уравнения $f_1^n z = z$. Поэтому найдется бесконечно много общих периодических точек для f_1 и f_2. Все они, кроме конечного числа, отталкивающие. Заменяя f_1 и f_2 на некоторые итерации (которые снова обозначаем через f_1 и f_2), добьемся существования общей отталкивающей неподвижной точки z_0. Положим $\lambda_j = f_j'(z_0)$, $\Lambda_j : z \mapsto \lambda_j z$, $j = 1, 2$. Рассмотрим функцию Пуанкаре.

$$F \circ \Lambda_1 = f_1 \circ F, \; F(0) = z_0, \; F'(0) = 1. \tag{3.1}$$

Пусть $\varphi = f_2 \circ F \circ \Lambda_2^{-1}$. Имеем $\varphi(0) = z_0$, $\varphi'(0) = 1$,

$$f_1 \circ \varphi = f_1 \circ f_2 \circ F \circ \Lambda_2^{-1} = f_2 \circ f_1 \circ F \circ \Lambda_2^{-1} =$$
$$= f_2 \circ F \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2^{-1} = f_2 \circ F \circ \Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1 = \varphi \circ \Lambda_1,$$

т. е. φ удовлетворяет (3.1) в качестве F. В силу единственности нормированной функции Пункаре, $\varphi = F$, т. е.

$$F \circ \Lambda_2 = f_2 \circ F. \tag{3.2}$$

Таким образом, F — общая функция Пуанкаре для f_1 и f_2.

Рассмотрим теперь операторы A_{f_1} и A_{f_2}, определенные в начале §2. Очевидно, что $A_{f_1} A_{f_2} = A_{f_2 \circ f_1} = A_{f_1 \circ f_2} = A_{f_2} A_{f_1}$. Поэтому единственные неподвижные точки этих операторов совпадают, $\mu_{f_1} = \mu_{f_2} = \mu$. В частности, множества Жюлиа совпадают, $J(f_1) = J(f_2) = J$.

Положим $\nu = F^* \mu$. Уравнения (3.1) и (3.2) дают $\Lambda_j^* F^* = F^* f_j^*$, $j = 1, 2$. Учитывая, что $f_j^* \mu = \deg f_j \cdot \mu$, получаем

$$(\deg f_j)^{-1} \Lambda_j^* \nu = \nu, \; j = 1, 2. \tag{3.3}$$

Заметим теперь, что из $f_1^m \neq f_2^n$ следует в силу (3.1) и (3.2), что $\Lambda_1^m \neq \Lambda_2^n$ при любых $m, n \in \mathbf{N}$. Поэтому можно выбрать последовательности m_k и n_k, стремящиеся к ∞, такие, что $\Lambda_1^{m_k} \Lambda_2^{-n_k} \to 1$. Используя (3.3), получаем

$$\frac{(\deg f_2)^{n_k}}{(\deg f_1)^{m_k}} \Lambda_1^{*m_k} \Lambda_2^{*-n_k} \to \mathrm{id},$$

следовательно, группа, порожденная преобразованиями $(\deg f_j)^{-1} \Lambda_j^*$, $j = 1, 2$, недискретна и ее замыкание содержит однопараметрическую подгруппу $\Gamma = \{B_t : t \in \mathbf{R}^+\}$, $B_t \nu(E) = t^\rho \nu(t^a E)$, $a \in \mathbf{C}^*$, $\rho \geqslant 0$. Мера ν инвариантна относительно Γ,

$$B_t \nu = \nu, \; t \in \mathbf{R}^+, \tag{3.4}$$

поэтому в силу предложения 4 она слоистая всюду в $\mathbf{C}^*$ (в нуле векторное поле имеет особенность). Если $I = \operatorname{supp} \nu = F^{-1} J$, то в силу (3.4) выполняется

$$t^a I = I \quad \text{для всех } t > 0. \tag{3.5}$$

Теперь нужно рассмотреть два случая.

1-й случай. $J = \bar{\mathbf{C}}$. Тогда $I = \mathbf{C}$. Если точка $z \in \bar{\mathbf{C}}$ имеет простой (не кратный) прообраз $\zeta \in F^{-1}(z)$, $\zeta \neq 0$, то мера μ слоистая в точке z. Это следует из того, что $\nu = F^* \mu$ слоистая в ξ и F — диффеоморфизм в окрестности точки ζ. Далее, в силу предложения 3 все F — прообразы точки z в $\mathbf{C}^*$ простые. Пусть теперь точка z не имеет простых прообразов в $\mathbf{C}^*$. Если мера ν негладкая во всех точках из $F^{-1}(z) \setminus \{0\}$, то все эти точки имеют кратность 2 в силу предложения 2. Пусть теперь $\zeta \in F^{-1}(z)$ и ν гладкая в ζ. Тогда μ гладкая в проколотой окрестности точки z. Следовательно, ν гладкая в проколотых окрестностях всех точек из $F^{-1}(z) \setminus \{0\}$. Поскольку ν к тому же слоистая в $\mathbf{C}^*$, получаем, что она гладкая во всех точках из $F^{-1}(z) \setminus \{0\}$. Если одна из этих точек имеет кратность k, то μ имеет в окрестности точки z такой вид: $p(z') dx dy$, $z' = x + iy$, где $p(z') \sim c|z - z'|^{2(1-k)}$ при $z' \to z$. Поэтому все точки $\zeta \in F^{-1}(z) \setminus \{0\}$ имеют одинаковую кратность.

Таким образом, любой точке $z \in \bar{\mathbf{C}}$ соответствует натуральное число $n(z)$ такое, что все точки $\zeta \in F^{-1}(z) \setminus \{0\}$ имеют кратность $n(z)$. Заметим, что $F|_{\mathbf{C}^*}$ принимает все значения из $\bar{\mathbf{C}}$. Если бы это было не так, то f_j имели бы непустое исключительное множество, что невозможно, так как $J = \bar{\mathbf{C}}$.

Рассмотрим орбиобразие $\mathcal{O} = (\overline{\mathbf{C}}, n)$ и покажем, что $f_j : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ – накрытия. Возьмем произвольную точку $z \in \overline{\mathbf{C}}$ и пусть $\zeta \in F^{-1}(z) \setminus \{0\}$. Положим $z_j = f_j(z)$, $\zeta_j = \Lambda_j \zeta$. Тогда $F(\zeta_j) = z_j$ в силу (3.1) и (3.2). Из этих же уравнений следует, что $\deg_z f_j \cdot \deg_\zeta F = \deg_{\zeta_j} F$, т. е. $\deg_z f_j \cdot n(z) = n(z_j)$, $j = 1, 2$, что и требовалось.

В силу формулы Римана–Гурвица $\deg f_1 \cdot \chi(\mathcal{O}) = \chi(\mathcal{O})$, откуда $\chi(\mathcal{O}) = 0$. Это доказывает теорему 1 в 1-м случае.

Как сказано во Введении, 2-й случай разобран Фату и Жюлиа. Однако применение слоистых мер и здесь существенно упрощает доказательство.

2-й случай. J нигде не плотно. Тогда $I = \operatorname{supp} \nu$ тоже нигде не плотно. Из (3.5) следует, что I – либо объединение непересекающихся в $\mathbf{C}^*$ логарифмических спиралей (в частности, лучей), исходящих из нуля, либо объединение окружностей с центром в нуле и самой точки 0. Во всяком случае любая точка $\zeta \in I \setminus \{0\}$ имеет окрестность V такую, что $I \cap V$ диффеоморфно произведению интервала на некоторое замкнутое нигде не плотное подмножество отрезка.

Покажем, что I – прямая или луч. Заметим, что $z_0 = F(0) \notin E(f_j)$. Это следует из описания исключительного множества $E(f)$ во Введении и того, что z_0 – отталкивающая неподвижная точка. Поэтому функция Пуанкаре F принимает бесконечно много раз значение z_0. Возьмём точку $\zeta \in F^{-1}(z_0)$, $\zeta \neq 0$. Пусть W – достаточно малая окрестность точки z_0, а U_1 и U_2 – компоненты множества $F^{-1}W$, содержащие точки 0 и ζ соответственно. Окрестности выбираем так, чтобы сужение $F|_{U_1}$ было однолистным (напомним, что $F'(0) = 1$), а сужение $F|_{U_2}$ не имело критических точек, кроме, возможно, точки ζ. Очевидно, что $\zeta \in I$, так как $F(\zeta) = z_0 \in J$. Компонента множества $I \cap U_2$, содержащая ζ, есть простая аналитическая кривая. Поэтому компонента множества $J \cap W$, содержащая z_0, – тоже простая аналитическая кривая (если ζ – критическая точка, то эта кривая оканчивается в точке z_0, но имеет в z_0 определенную касательную). Поскольку $F : U_1 \to V$ – конформное однолистное отображение, то компонента множества $U_1 \cap I$, содержащая 0, есть простая аналитическая кривая, возможно, оканчивающаяся в нуле, но имеющая там касательную. С учетом приведенного выше описания структуры множества I это возможно только тогда, когда I – прямая или луч.

Сведем для удобства оба случая к одному. Положим $F_1(\zeta) = F(c\zeta^m)$, где $m = 1$, если I – прямая и $m = 2$, если I – луч, а число c выбрано с таким расчетом, чтобы множество $I_1 = F_1^{-1}(J)$ было вещественной прямой $\mathbf{R}$. Имеем

$$F_1(\rho_j \zeta) = f_j \circ F_1(\zeta), \; \rho_j^m = \lambda_j. \tag{3.6}$$

Положим $\nu_1 = F_1^* \mu$, $\operatorname{supp} \nu_1 = \mathbf{R}$. Из (3.5) следует, что число a в (3.4), (3.5) вещественно. Не уменьшая общности, считаем, что $a > 0$. Тогда из (3.4) следует, что $\nu_1(tE) = t^\sigma \nu_1(E)$ для всех $t \in \mathbf{R}^+$, для всех борелевских $E \subset \mathbf{R}$ и для некоторого $\sigma > 0$. Поэтому мера ν_1 имеет вид

$$c|x|^{\sigma-1}dx. \tag{3.7}$$

Мы покажем, что $\sigma = 1$. Сначала убедимся в том, что J – простая аналитическая кривая (замкнутая или нет). Пусть $z \in J$, $\zeta \in F_1^{-1}(z)$, V – окрестность точки z, $U \subset F_1^{-1}(V)$ – окрестность точки ζ. Выбираем V настолько малой, чтобы функция F_1 не имела критических точек в $U \setminus \zeta$. Кроме того, считаем U выпуклой, что не уменьшает общности. Тогда $U \cap \mathbf{R}$ – интервал. Если ζ – некритическая точка, то $V \cap J$ – простая открытая дуга. Если ζ – критическая точка, то $\deg_\zeta F_1 = 2$ и $V \cap J$ – полуоткрытая дуга с концом в точке z. Отсюда следует, что J – простая аналитическая кривая. Если J – замкнутая кривая, то F_1 не имеет критических точек в $\mathbb{R}$. Если J — незамкнутая кривая с концами z_1 и z_2, то множество критических точек функции F_1 на $\mathbf{R}$ совпадает с $F_1^{-1}(\{z_1, z_2\})$ и все эти критические точки имеют кратность 2. Пусть теперь $\zeta_1 \in F_1^{-1}(z_0)$, $\zeta_1 \neq 0$ (здесь $z_0 = F_1(0)$). Из сказанного следует, что $\deg_0 F_1 = \deg_{\zeta_1} F_1$, поэтому существует конформное отображение φ окрестности нуля на окрестность точки ζ_1 такое, что $F_1(\zeta) = F_1(\varphi(\zeta))$, $\varphi(0) = \zeta_1$. Из определения меры ν_1 следует, что φ сохраняет ν_1. Поэтому плотность меры ν_1 относительно меры dx не может обращаться в 0 или ∞ в точке 0, так как она не обращается в 0 или ∞ в точке ζ_1. Этим доказано, что $\sigma = 1$ в (3.6) и мера ν_1 пропорциональна dx.

Пусть ζ_1 и ζ_2 — любые различные прообразы произвольной точки $z \in J$. Как и выше, существует росток конформного отображения φ, $\varphi(\zeta_1) = \zeta_2$, $F_1(\zeta) = F_1(\varphi(\zeta))$ в окрестности точки ζ_1. Это отображение φ сохраняет вещественную ось и меру Лебега на ней. Поэтому $\varphi(\zeta) = \pm\zeta + T$. Отсюда следует, что точки, склеиваемые функцией F_1, принадлежат орбитам некоторой группы Γ, состоящей из преобразований $z \mapsto \pm z + T$, $T \in \mathbf{R}$. Иначе говоря, F_1 — универсальное накрытие одного из орбиобразий типа (1.1). Вместе с (3.6) это завершает доказательство.

§ 4. Уравнение Жюлиа

Докажем теорему 2. Положим $n = \deg g$, $m = \deg f$. Мы будем считать, что g — полином. (Согласно Введению, при этом не охватывается только случай $g(z) = z^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, который, однако, сводится к случаю полинома $g^2(z) = z^{n^2}$, переходом к уравнению $G \circ g^2 = f^2 \circ G$). Нам понадобится следующая

Т е о р е м а Б е т х е р а [3, 9, 10, 17]. *Для любого полинома g степени $n \geqslant 2$ существует окрестность D точки ∞ и однолистное конформное отображение $B : \Delta \to D$, где $\Delta = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : |z| > r\}$, $r > 1$, такое, что*

$$B(z^n) = g \circ B(z), \quad z \in \Delta. \tag{4.1}$$

Положим $\varphi = G \circ B \circ \exp : H \to \bar{\mathbb{C}}$, где $H = \{z : \operatorname{Re} z > \log r\}$:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "z \mapsto nz"] \arrow[d, "\exp"'] & H \arrow[d, "\exp"] \arrow[dddd, bend left, "\varphi"] \\
\Delta \arrow[r, "z \mapsto z^n"] \arrow[d, "B"'] & \Delta \arrow[d, "B"] \\
D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "G"'] & D \arrow[d, "G"] \\
\bar{\mathbb{C}} \arrow[r, "f"] & \bar{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

Функция φ мероморфна в H и удовлетворяет уравнению

$$\varphi \circ N = f \circ \varphi, \quad N : z \mapsto nz, \tag{4.2}$$

которое следует из (0.4) и (4.1). Кроме того, очевидно, что

$$\varphi \circ T = \varphi, \quad \text{где} \quad T : z \mapsto z + 2\pi i. \tag{4.3}$$

Отметим, что $\varphi: H \to \bar{\mathbf{C}}$ сюръективно, так как функция G принимает все значения из $\bar{\mathbf{C}}$ бесконечно много раз (см. Введение). Пусть $\mu = \mu_f$ – уравновешенная мера, $\nu = \varphi^* \mu$. Тогда $\operatorname{supp} \nu = H$, так как $\operatorname{supp} \mu = J(f) = \bar{\mathbf{C}}$ в силу результата Жюлиа, приведенного во Введении. Из (4.2) следует $N^* \varphi^* = \varphi^* f^*$. Учитывая, что $f^* \mu = m\mu$, получаем

$$N^* \nu = m\nu, \tag{4.4}$$

а из (4.3) вытекает

$$T^* \nu = \nu. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что мера ν инвариантна относительно преобразований $N^{-k} T N^k : z \mapsto z + 2\pi i / n^k$, $k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, она инвариантна относительно замкнутой группы, порожденной этими преобразованиями, т.е.

$$T_a^* \nu = \nu, \ a \in \mathbf{R},$$

где $T_a : z \mapsto z + ia$. Таким образом, мера ν слоистая в H.

Повторяя дословно рассуждения из доказательства теоремы 1 (1-й случай; роль $F: \mathbf{C}^* \to \bar{\mathbf{C}}$ играет $\varphi: H \to \bar{\mathbf{C}}$), получаем, что существует орбиобразие $\mathcal{O}_2$ типа (1.2) такое, что $f: \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_2$ – накрытие.

Пусть теперь F_1 – функция Пуанкаре для g, соответствующая неподвижной точке z_0, причем $G'(z_0) \neq 0$. (Такая неподвижная точка z_0 может быть найдена потому, что отталкивающие периодические точки плотны на множестве Жюлиа. Если нужно, заменяем g и f на некоторые итерации). Имеем

$$F_1 \circ \Lambda = g \circ F_1, \ F_1(0) = z_0, \ F_1'(0) = 1, \ \Lambda: z \mapsto g'(z_0) \cdot z. \tag{4.6}$$

Положим $F = G \circ F_1$. Тогда

$$F \circ \Lambda = G \circ g \circ F_1 = f \circ G \circ F_1 = f \circ F,$$

$$F(0) = G(z_0), \ F'(0) = G'(z_0) \neq 0,$$

т. е. F пропорциональна функции Пуанкаре для f. В частности, F мероморфна в $\mathbf{C}$. (Сразу это было не вполне очевидно, так как G мероморфна лишь в $\mathbf{C}^*$). Покажем, что $F: \mathbf{C} \to \mathcal{O}_2$ – универсальное накрытие. Выберем универсальное накрытие $\Phi: \mathbf{C} \to \mathcal{O}_2$ с условиями $F(0) = \Phi(0)$, $F'(0) = \Phi'(0)$. Тогда $f \circ \Phi$ – тоже универсальное накрытие, поэтому существует линейная функция L со свойствами $f \circ \Phi = \Phi \circ L$, $L(0) = 0$. Имеем $L'(0) = \Lambda'(0)$, так как $f' \circ \Phi(0) = f' \circ F(0)$. Следовательно, $L = \Lambda$ и $\Phi = F$ потому, что нормированное решение уравнения Пуанкаре единственно.

Таким образом, $F: \mathbf{C} \to \mathcal{O}_2$ – универсальное накрытие орбиобразий. Пусть $\mathcal{O}_2 = (\bar{\mathbf{C}}, n_2)$, $\Sigma_2 = \{z : n_2(z) > 1\}$. Из соотношения

$$F = G \circ F_1 \tag{4.7}$$

следует, что G – разветвленное накрытие над $\bar{\mathbf{C}}$, которое может быть разветвлено только над Σ_2, причем все G – прообразы точки $e \in \Sigma_2$ имеют кратность, делящую $n_2(e)$. Поэтому можно ввести орбиобразие $\mathcal{O}_1 = (\mathbf{C}, n_1)$ так, чтобы $G: \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ было накрытием орбиобразий. Иначе говоря, полагаем

$$n_1(z) = \frac{n_2(G(z))}{\deg_z G}, \ z \in \mathbf{C}.$$

Если G мероморфна только в $\mathbf{C}^*$, то полагаем $n_1(0) = \infty$. Обозначим через Σ_1 множество точек, в которых $n_1(z) > 1$. Из (4.7) следует, что функция F_1 неразветвлена над $\mathbf{C} \setminus \Sigma_1$, и все прообразы точки $z \in \Sigma_1$ имеют кратность $n_1(z)$. Осталось показать, что $g: \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_1$ – накрытие орбиобразий. Это делается точно так же, как в доказательстве 1-го случая теоремы 1. Вместо (3.1), (3.2) используется (4.6). Далее, из $\deg g \cdot \chi(\mathcal{O}_1) = \chi(\mathcal{O}_1)$ следует $\chi(\mathcal{O}_1) = 0$. Так что $\mathcal{O}_1$, рассматриваемое как орбиобразие $(\bar{\mathbf{C}}, n_1)$, $n_1(\infty) = \infty$, имеет тип (1.1). Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Fatou P.* Sur les équations fonctionnelles // Bul. Soc. Math. France. *1919*. T. 47. P. 161–271. 1920. T. 48. P. 33–94, 208–314.

[2] *Julia G.* Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles // J. Math. Pure Appl. *1918*. T. 8. P. 47–245.

[3] *Ritt J. F.* On the iteration of rational functions // Trans. Amer. Math. Soc. *1920*. Vol. 21. P. 348–356.

[4] *Fatou P.* Sur les fonctions qui admettent plusieurs théorèmes de multiplication // C. R. A. S. *1921*. T. 173. P. 571-573.

[5] *Fatou P.* Sur l'itération analytique et les substitutions permutables // J. de Math. *1923*. T. 2. P. 343.

[6] *Julia G.* Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles // Annales de l'Ecole Norm. Supér. *1922*. T. 39. P. 131–215.

[7] *Ritt J. F.* Permutable rational functions // Trans. Amer. Math. Soc. *1923*. Vol. 25. P. 399–448.

[8] *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, *1936*. 240 с.

[9] *Blanchard P.* Complex analytic dynamics on the Riemann sphere // Bul. Amer. Math. Soc. *1984*. Vol. 11. P. 85–141.

[10] *Любич М. Ю.* Динамика рациональных преобразований: топологическая картина // Успехи мат. наук. *1986*. Т. 41, вып. 4. С. 35–95.

[11] *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. Warszawa: PWN-Polish sci. publ., *1968*. 383 p.

[12] *Веселов А. П.* Интегрируемые отображения и алгебры Ли // ДАН СССР. *1987*. Т. 292, № 6. С. 1289–1291.

[13] *Julia G.* Sur quelques applications de la représentation conforme a la résolution d'équations fonctionnelles // J. Math. pures Appl. *1924*. T. 3. P. 279–315.

[14] *Ritt J. F.* Transcendental transcendency of certain functions of Poincaré // Math. Annalen. *1925–1926*. Vol. 95. P. 671–682.

[15] *Азарина Ю. В.* Мероморфные решения уравнения $w(z+1) = R(w(z))$ // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. *1987*. Вып. 48. С. 26–32.

[16] *Julia G.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // Annales de l'Ecole Norm. Supér. *1923*. T. 40. P. 97–150.

[17] *Бетхеръ Э. Л.* Главнѣйшіе законы сходимости итерацій и приложеніе ихъ къ Анализу // Изв. Физ.-мат. общ. при Импер. Казанском ун-те. *1903*. Т. 13, № 1. С. 1–37. *1904*. Т. 14, № 3–4. С. 155–234.

[18] *Thurston W.* On the combinatorics of iterated rational maps. Preprint. Princeton, *1985*. 87 p.

[19] *Douady A., Hubbard J. H.* A proof of Thurston's topological characterization of rational functions. Report N 2. Inst. Mittag–Leffler. *1985*. 54 p.

[20] *Herman M. R.* Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann // Bul. Soc. Math. France. *1984*. T. 112. P. 93–142.

[21] *Ljubich M. Ju.* Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere // Ergod. Theory and Dynam. Syst. *1983*. Vol. 3. P. 351–386.

[22] *Форд Р. Л.* Автоморфные функции. М.; Л.: Гостехиздат, *1936*. 340 с.

[23] *Еременко А. Э., Содин М. Л.* Итерации рациональных функций и распределение значений функций Пуанкаре // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. *1989*. Вып. 53.

[24] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, *1971.* 239 с.
[25] *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., *1949.* 494 с.
[26] *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbf{R}^n$. М.: Мир. *1978.* 200 с.
[27] *Ritt J. F.* Periodic functions with a multiplication theorem // Trans. Amer. Math. Soc. *1922.* Vol. 23. P. 16–25.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР
Харьков

Поступило 1 декабря 1988 г.