NOTICE

SUR LES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

Fatou, Pierre.

M. P. FATOU

Astronome titulaire de l'Observatoire de Paris

1929

TITRES & SERVICES

Elève à l'Ecole Normale Supérieure (1898-1901).
Agrégé des sciences mathématiques (1901).
Stagiaire à l'Observatoire de Paris (novembre 1901-janvier 1904).
Aide astronome (janvier-avril 1904).
Astronome adjoint (avril 1904-juillet 1928).
Docteur ès sciences mathématiques (février 1907).
Lauréat de l'Institut (Fondation Becquerel, 1918).
Président de la Société mathématique de France (1927).
Astronome titulaire (juillet 1928).

DISTINCTIONS HONORIFIQUES

Officier de l'Instruction publique.
Chevalier de la Légion d'honneur (promotion Pasteur, 1923).

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

Observations méridiennes
(en collaboration avec divers astronomes) :

Annales de l'Observatoire de Paris :

1. Observations méridiennes en 1903. Instruments de Gambey, positions conclues de la lune, des planètes et des étoiles (C. 1, 166).
2. Observations méridiennes en 1904 (C. 1, 74).
3. Observations méridiennes en 1905 (B. 1, 121).
4. Observations méridiennes en 1906 (B. 1, 103).
5. Catalogue d'étoiles fondamentales de l'Observatoire de Paris publié par M. A. Lambert (Paris, 1928).

Journal des Observateurs :

6. Observations d'étoiles doubles (vol. X., n° 8, août 1927).
7. Observations d'étoiles doubles (vol. XI, n° 5, mai 1928).

Comptes rendus de l'Académie des Sciences :

8. Sur les séries entières à coefficients entiers (t. 138, 1904, p. 341).
9. La série de Fourier et la série de Taylor sur son cercle de convergence (t. 139, 1904, p. 850).
10. Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques (t. 140, 1905, p. 359).
11. Sur quelques théorèmes de Riemann (t. 140, 1905, p. 569).
12. Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables (t. 142, 1906, p. 765).
13. Sur l'approximation des incommensurables (t. 139, 1904, p. 1019).
14. Sur l'application de l'analyse de Dirichlet aux formes quadratiques à indéterminées conjuguées (t. 142, 1906, p. 765).
15. Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles (t. 143, 1906, p. 546).
16. Sur les substitutions rationnelles (t. 164, 1917, p. 866).
17. Sur les substitutions rationnelles (t. 165, 1917, p. 992).
18. Sur les équations fonctionnelles et les propriétés de certaines frontières (t. 166, 1918, p. 204).
19. Sur les suites de fonctions analytiques (t. 167, 1918, p. 1024).

20. Sur les domaines d'existence de certaines fonctions uniformes (t. 173, séance du 8 août 1921).
21. Sur les fonctions qui admettent plusieurs théorèmes de multiplication (t. 173, séance du 10 octobre 1921).
22. Sur un groupe discontinu de substitutions algébriques (t. 173, séance du 24 octobre 1921).
23. Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant (t. 174, séance du 1er mai 1922).
24. Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant (t. 174, séance du 22 mai 1922).
25. Sur les fonctions méromorphes de deux variables (t. 175, séance du 13 novembre 1922).
26. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables (t. 175, séance du 27 novembre 1922).
27. Observations de la planète Baade (t. 178, séance du 10 novembre 1924).
28. Sur le mouvement d'un point matériel soumis à l'attraction d'un sphéroïde aplati (t. 180, séance du 2 février 1925).
29. Sur une propriété de certaines fonctions analytiques multiformes (t. 181, séance du 7 décembre 1925).
30. Sur le mouvement des nœuds de certaines orbites (t. 184, séance du 20 juin 1927).
31. Sur la recherche des orbites périodiques (t. 185, séance du 4 juillet 1927).
32. Sur le mouvement du périhélie des planètes (t. 186, séance du 9 janvier 1928).
33. Sur certains systèmes d'équations différentielles dépendant d'un paramètre (t. 186, séance du 13 février 1928).
34. Sur le déplacement du nœud de certaines orbites (t. 186, séance du 27 février 1928).

Au *Bulletin de la Société mathématique de France* :

35. Sur les lignes singulières des fonctions analytiques (t. 41, 1913).
36. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques (t. 41, 1913).
37. Sur les équations fonctionnelles (1er mémoire, t. 47, 1919).
38. Sur les équations fonctionnelles (2e mémoire, t. 48, 1920).
39. Sur les équations fonctionnelles (3e mémoire, t. 48, 1920).
40. Sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle (t. 50, 1922).
41. Sur les frontières de certains domaines (t. 51, 1923).
42. Sur un théorème de M. Picard (t. 52, 1924).
43. Sur les fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur d'un cercle (t. 51, 1923).
44. Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période (t. 56, 1928).

Au *Bulletin astronomique* :

45. Sur les généralisations de la condition des sinus (t. 30, 1913).
46. Sur l'aberration sphérique des lentilles épaisses (t. 34, 1917).

Au *Bulletin des publications astronomiques* :

47. Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant (t. 1, fasc. VI, 1921.)

Aux *Annales de l'Ecole normale supérieure* :

48. Sur une classe remarquable de séries de Taylor (t. 27, 1910).
49. Substitutions analytiques et équations fonctionnelles à deux variables (t. 41, 1924).

Aux *Acta Matematica* :

50. Séries trigonométriques et séries de Taylor (t. 30, 1906).
51. Sur l'itération des fonctions entières (t. 47, 1926).

Au *Journal de mathématiques pures et appliquées* :

52. Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (1er mémoire, 9e série, t. 2, 1923).
53. Sur l'itération analytique et les substitutions permutables (2e mémoire, 9e série, t. 3, 1924).

Au *Bulletin des Sciences mathématiques* :

54. Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une singulière (t. 45, 1921).
55. Sur l'itération de certaines fonctions algébriques (t. 46, 1922).
56. Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant (t. 47, 1923).

Ouvrage séparé :

57. Théorie des fonctions algébriques et des transcendantes qui s'y rapportent. Tome II : Fonctions automorphes (Gauthier-Villars, en cours d'impression).

Travaux exécutés à l'Observatoire de Paris

Admis comme stagiaire à l'Observatoire de Paris en 1901, je me suis d'abord initié à la pratique des observations méridiennes auxquelles j'ai consacré une grande partie de mon activité pendant une vingtaine d'années. J'ai participé comme observateur aux travaux d'astronomie méridienne effectués sous la direction de M. Lœwy, puis de M. B. Baillaud : détermination des positions absolues des étoiles fondamentales, des étoiles de repère du catalogue photographique du ciel, du soleil, de la lune et des planètes principales. Je me suis ainsi familiarisé avec l'emploi des divers types d'instruments et avec les méthodes de mesure et de détermination des constantes instrumentales qui ont été expérimentées ou couramment utilisées à l'Observatoire pendant une longue période. Mes premières observations ont été faites aux instruments de Gambey, aujourd'hui abandonnés, en utilisant pour l'observation des passages la méthode de fractionnement de la seconde, dite de « l'œil et l'oreille », remplacée aujourd'hui par des méthodes d'enregistrement plus précises, mais encore employée couramment dans la pratique des observations équatoriales. J'ai fait ensuite des observations avec des instruments plus modernes, en utilisant pour l'enregistrement des temps des passages divers types de chronographes.

En 1908, j'ai été chargé, en collaboration avec M.W. Ebert, de l'étude de l'instrument méridien photographique de Lippmann. Nous nous sommes attachés particulièrement à la détermination des constantes instrumentales. Bien que cet instrument ne pût fournir de mesures ayant la précision exigée aujourd'hui dans les observations méridiennes, nous étions parvenus, par l'emploi combiné de méthodes visuelles et photographiques, à des mesures satisfaisantes de la collimation et de l'inclinaison de l'axe. (V. *Rapport annuel de l'Observatoire de Paris*, 1908.)

Le rôle des observateurs chargés des observations méridiennes ne se borne pas à l'observation elle-même ; ils doivent en outre *réduire* leurs observations, c'est-à-dire les corriger d'une part des erreurs dues à un réglage imparfait des instruments, en tenant compte par conséquent des valeurs fournies par les mesures quotidiennes pour les constantes instrumentales, d'autre part des déviations apparentes dues à la réfraction astronomique et à l'aberration, enfin de l'effet de la précession et de la nutation ; tandis que ces derniers calculs constituent un travail purement matériel d'ailleurs assez long, les corrections instrumentales exigent des discussions minutieuses, comme il s'en présente dans toutes les questions de métrologie de haute précision, discussions qui conduisent souvent l'observateur à diverses modifications de détail des méthodes d'observation employées. J'ai participé dans une large mesure à ces travaux, ayant fait, au total, plus de dix mille observations méridiennes, publiées en partie dans les *Annales de l'Observatoire*, et collaboré au nouveau catalogue de fondamentales publié récemment par M. Lambert. J'ai fourni, en outre, de nombreuses corrections de pendule utilisées pour ses besoins journaliers par le Bureau International de l'heure.

A partir de 1923, j'ai été chargé des observations à l'Equatorial de la tour de l'Ouest, où j'ai fait des observations de comètes, de planètes, d'occultations d'étoiles par la lune ; mais je me suis attaché principalement aux mesures d'étoiles doubles, les recherches récentes dans le domaine de la dynamique et de la statistique stellaires ayant montré l'importance que présente une connaissance aussi étendue que possible des mouvements de ces systèmes. J'ai donc étudié les couples du catalogue de Burnham qui peuvent être observés dans de bonnes conditions à la latitude de Paris et avec l'instrument dont je dispose, muni d'un objectif de 31 cm. d'ouverture, qui possède un pouvoir séparateur voisin du pouvoir théorique, soit environ 0″4. J'ai choisi autant que possible ceux de ces couples pour lesquels un mouvement orbital sensible peut être soupçonné. On sait en effet que les couples à période relativement courte, inférieure par exemple à cinquante ans, et qui peuvent être observés par la méthode visuelle avec des instruments de moyenne puissance comme ceux de l'Observatoire de Paris, sont en nombre assez restreint ; la plupart d'entre eux ont déjà été fréquemment observés et leurs éléments orbitaux calculés avec une certaine précision. En revanche le plus grand nombre des systèmes binaires facilement observables dans nos instruments sont des systèmes à longue période, plusieurs milliers d'années — pour lesquels le déplacement relatif apparent depuis l'époque des premières observations, qui datent au plus de cent ans, est à peine sensible au degré de précision que l'on peut atteindre. On voit par là que, quel que soit le choix de ces objets, une utilisation immédiate des résultats obtenus par un observateur isolé est rarement possible. On doit donc comparer avec soin les observations récentes avec les observations antérieures du même couple, ou avec les éphémérides lorsque des éléments orbitaux ont pu être calculés ; on pourra ainsi, pour les systèmes à longue période, mettre parfois en évidence un faible déplacement relatif, et quelquefois obtenir tout au moins un ordre de grandeur de la période et une valeur approchée de la parallaxe dynamique ; pour les systèmes à courte période dont les éléments ont été calculés, on pourra se rendre compte du degré d'exactitude des valeurs adoptées et de la nécessité éventuelle de refaire les calculs. On doit naturellement s'être assuré, avant d'utiliser les mesures faites, qu'elles ne sont pas affectées d'erreurs systématiques aussi bien en ce qui concerne les distances que les angles de position ; pour ces derniers, j'ai pu constater que, grâce aux précautions prises, l'équation personnelle était négligeable et qu'il n'y avait pas lieu d'apporter de correction systématique à mes mesures ; cela est résulté d'une part de la comparaison de ces mesures avec les mesures antérieures pour les couples dont le mouvement relatif peut être regardé comme absolument nul, au degré de précision exigé, ou comme parfaitement connu ; d'autre part de mesures comparatives faites avec emploi du prisme à réversion. Pour les distances, le premier procédé de comparaison est seul utilisable et m'a conduit d'ailleurs à la même conclusion. Je continue ces travaux de mesure et ces discussions qui ont déjà fait l'objet de deux mémoires insérés au *Journal des Observateurs*.

Ces travaux ne sont pas les seuls dont j'ai été chargé à l'Observatoire. J'ai participé notamment aux travaux de réduction des clichés du catalogue photographique et déterminé à cette occasion un certain nombre de mouvements propres. Je pense avoir par cet ensemble de travaux apporté une contribution importante à ces recherches ingrates de l'astronomie de position, qui, malgré le développement pris aujourd'hui par l'astronomie physique, conservent cependant une importance fondamentale non seulement pour l'étude des constantes du système solaire, mais encore pour servir de base aux recherches modernes sur la constitution du monde sidéral.

Recherches théoriques

Les travaux d'astronomie pratique dont il vient d'être question, bien que parfois assez absorbants, ne m'ont pas empêché de poursuivre des recherches mathématiques, les unes inspirées par le contact permanent avec les faits et les doctrines astronomiques, les autres découlant de préoccupations d'ordre plus général. Je donne dans ce qui suit un aperçu des principaux résultats auxquels je suis parvenu dans des domaines très variés.

Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période (33, 44).

On sait que pour calculer les perturbations séculaires produites par une planète P′ sur le mouvement d'une planète P, Gauss a eu l'idée de répartir la masse de P′ sur son orbite, la masse de chaque élément d'arc étant proportionnelle au temps employé à la décrire. Ce procédé est légitime, mais la théorie des petits diviseurs montre qu'en opérant ainsi, on néglige des perturbations périodiques importantes à longue période lorsque le rapport n/n' des moyens mouvements de P et de P′ est presque commensurable et qui deviennent proprement séculaires dans le cas de commensurabilité exacte. J'en ai induit que l'assimilation de l'orbite réelle avec l'orbite intermédiaire de Gauss n'est légitime que si n/n' est très petit, la distinction des perturbations séculaires et périodiques devenant alors inutile. J'ai donc étudié au moyen des théorèmes généraux d'existence des solutions des équations différentielles le mouvement des systèmes soumis à des forces périodiques dont la période tend vers zéro, et obtenu la justification du principe en question ; j'ai trouvé en effet que les solutions ont pour limites celles qu'on obtient en remplaçant les forces à courte période par leurs valeurs moyennes ; ce résultat intuitif et souvent utilisé dans les applications astronomiques n'avait pas été jusqu'ici justifié d'une manière satisfaisante au point de vue logique. L'écart des coordonnées du système quand on passe du mouvement primitif au mouvement *réduit* est, en général, de l'ordre de la période, mais dans des cas encore très généraux et importants pour la pratique on peut obtenir un résultat plus précis. Soit donné un système de points matériels soumis à des actions mutuelles qui dépendent de la position de ces points et qui

*

dans la nature, où le champ est de révolution autour d'un axe, avec un plan de symétrie perpendiculaire à ce dernier. On a alors deux intégrales premières des équations du mouvement du point matériel : celle des aires et celle des forces vives. Moyennant certaines hypothèses, généralement vérifiées dans les applications, on peut conclure de là que les trajectoires restent comprises à l'intérieur d'un anneau tout entier à distance finie, de révolution autour de l'axe, ce qui entraîne la stabilité au sens de Laplace. Diverses propriétés générales des trajectoires sont mises en évidence en utilisant les théorèmes d'oscillation de Sturm et les méthodes de M. Hadamard pour l'étude des trajectoires en dynamique ; l'utilisation de l'équation différentiielle du second ordre, due à Laplace, pour le rayon vecteur conduit à des résultats particulièrement nets. L'étude des mouvements du nœud et du périhélie est également facile et permet de retrouver d'une manière simple certains résultats généraux de la mécanique céleste.

Parmi les questions d'astronomie qui conduisent à un problème de ce genre on peut citer l'étude des perturbations planétaires produites par un anneau circulaire, remplaçant, suivant la conception de Gauss dont il est question plus haut, une planète perturbatrice d'orbite circulaire, lorsqu'on a égard seulement aux inégalités séculaires. On peut par exemple donner ainsi en quelques lignes une théorie élémentaire du mouvement du nœud de la lune (30), pour lequel on obtient de suite une durée de révolution de $17^{a}9$ au lieu de la valeur exacte, $18^{a}6$, le sens rétrograde de ce moment résultant avec une extrême simplicité des équations du mouvement.

Ce problème se présente également dans l'étude du mouvement d'un satellite quand la planète présente un aplatissement notable et que le satellite est rapproché (5^{e} satellite de Jupiter). J'ai remarqué à ce sujet qu'il y avait lieu de reprendre l'étude de l'influence de l'aplatissement solaire sur le mouvement du nœud et du périhélie des planètes ; on a considéré jusqu'ici que cette influence était négligeable, les mesures du disque solaire n'ayant jamais montré d'aplatissement notable ; mais la conclusion, fondée sur l'existence d'un état d'équilibre relatif pour la masse solaire en rotation et sur la théorie de Clairaut, devient caduque si l'on admet avec Jeans que les couches intérieures du soleil, de densité beaucoup plus grande que les couches extérieures, sont anisont en outre des fonctions périodiques du temps de période très courte, et réduisons les forces agissant sur chaque point à leurs valeurs moyennes ; on peut, en faisant varier les vitesses initiales de quantités de l'ordre de la période, faire en sorte que les écarts de position, quand on passe du mouvement donné au mouvement réduit, soient de l'ordre du carré de la période.

Revenons à l'exemple des deux planètes P et P′ de tout à l'heure. Si l'on remplace P′ par l'anneau de Gauss, équivalent quant au calcul des inégalités séculaires, on trouve que les erreurs qui en résultent pour les coordonnés rectangulaires de P sont de l'ordre du produit de la masse perturbatrice par la puissance cinquième de la *parallaxe* (rapport des grands axes), à condition de choisir convenablement les axes de coordonnées et les vitesses initiales pour l'orbite intermédiaire.

J'étudie d'autre part les solutions périodiques pour les mouvements des systèmes généraux envisagés tout à l'heure. Les trajectoires correspondantes ont pour limites des positions d'équilibre pour le système réduit, lorsqu'on fait tendre la période vers zéro. Inversement, je recherche dans quels cas une position d'équilibre de cette sorte est voisine de trajectoires périodiques du système primitif ; la discussion se fait aisément en suivant les méthodes de Poincaré. J'applique ces considérations à l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à l'attraction d'un corps tournant avec une vitesse uniforme autour de l'un de ses axes principaux d'inertie, quand le corps n'est pas de révolution autour de l'axe de rotation. Si la durée de rotation du corps est beaucoup plus courte que la durée de révolution du satellite, il existera pour ce dernier des trajectoires périodiques voisines d'un cercle ayant pour axe l'axe de rotation du corps ,ce cercle étant un lieu de positions d'équilibre relatif lorsqu'on réduit le potentiel à sa valeur moyenne.

Sur le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe (30, 31, 32, 34).

J'ai publié sur cette question diverses notes aux Comptes Rendus, et j'achève actuellement la rédaction du mémoire qui contiendra l'ensemble de mes recherches dans cet ordre d'idées, très important au point de vue des applications. J'ai surtout étudié le cas, souvent réalisé approximativement mées d'une vitesse angulaire également plus grande. Si l'on suppose, comme le fait Jeans d'après une déduction approchée, que la vitesse angulaire dans les couches extérieures varie comme l'inverse du carré de la distance au centre et si l'on prend comme modèle grossièrement approché de la constitution interne du soleil un noyau homogène recouvert d'une atmosphère de densité négligeable, on trouve que le noyau doit être unellipsoïde de révolution aplati d'excentricité 0,36 (Jeans, *Astronony and Cosmogomy*, p. 275). Or, une masse ainsi constituée donnerait lieu à un déplacement important du nœud et du périhélie des planètes, en particulier de Mercure, à moins que ses dimensions linéaires ne soient très faibles. J'ai calculé qu'il suffirait d'attribuer au demi grand axe une longueur égale à 1/9 du rayon solaire pour obtenir un déplacement séculaire du périhélie de Mercure égal à celui que l'on attribue à l'effet Einstein,mais comme il en résulterait un retard du nœud à peu près égal à l'avance du périhélie, une pareille conclusion est inacceptable. Or un soleil fictif ainsi constitué aurait une densité centrale égale à 700 fois environ la densité moyenne, ce qui représente déjà une condensation excessive. On voit par là la difficulté qu'il y a à concilier la théorie de Jeans avec nos connaissances du mouvement des planètes ; mais comme le schéma admis plus haut pour représenter la constitution interne du soleil est vraiment trop simplifié, il y a lieu de revenir sur l'étude de la répartition des densités à l'intérieur du soleil, sur la valeur du potentiel de gravitation de ce corps pour un point extérieur et sur le calcul des orbites qui en résultent ; j'ai commencé l'étude de ces questions.

Pour en revenir à l'étude des trajectoires d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe, j'ai aussi obtenu quelques résultats généraux dans le cas où le champ, tout en conservant un plan de symétrie, n'est plus de révolution, en particulier dans le cas où les masses attirantes se composent d'un anneau elliptique de Gauss avec une masse principale placée en son foyer. Lorsque le point matériel est extérieur à l'anneau, le développement du potentiel commence par un terme en $\frac{1}{r}$, suivi d'un terme qui contient en facteur l'excentricité de l'anneau et peut devenir prépondérant quand celle-ci est considérable. Lorsqu'on se borne à ces deux termes, on trouve que les équations du mouvement s'intègrent par quadratures, le rayon vecteur variant en fonction du temps comme dans un mouvement képlérien et la ligne des nœuds étant animée d'un mouvement oscillatoire entre deux positions extrêmes distantes de moins de 180°; mais lorsqu'on tient compte des termes suivants dans l'expression du potentiel, on retrouve un déplacement séculaire des nœuds dans le sens rétrograde.

Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant (23, 24, 47, 56).

Ce problème a été fréquemment étudié par les astronomes, particulièrement dans les recherches cosmogoniques. Il est à la base de l'hypothèse cosmogonique, qui paraît d'ailleurs un peu artificielle, de M. See ; sans attribuer aux résistances de milieu la même importance que ce dernier auteur, on doit penser que les atmosphères des astres ont dû s'étendre autrefois bien au delà de leurs limites actuelles et être traversées par des corps en mouvement, ce qui a pu donner lieu à des phénomènes de capture que l'on est souvent obligé d'invoquer pour expliquer la formation de certaines étoiles doubles ou l'origine de certains satellites. D'ailleurs, il existe encore dans le système solaire, tout au moins dans le voisinage du soleil, des espaces remplis par des particules ou des corps très disséminés et qui peuvent être traversés par des comètes et modifier les éléments de leurs orbites ; c'est la seule explication que l'on possède de l'accélération du moyen mouvement et de la diminution d'excentricité de la planète d'Encke. Il m'a donc paru intéressant de reprendre les théories, peu satisfaisantes au point de vue analytique, que divers géomètres avaient développées pour expliquer les perturbations du mouvement des corps célestes ayant cette origine. L'emploi de la méthode de la variation des constantes arbitraires m'a permis de montrer que les résistances de milieu ont une influence, qui peut ne pas être négligeable, sur la longitude du périhélie ; cet effet, jusqu'alors négligé, a un certain intérêt dans les recherches cosmogoniques, comme l'a montré M. Véronnet. Mais je me suis surtout préoccupé de trouver la forme générale des orbites et les lois asymptotiques du mouvement, ce qui m'a obligé à abandonner la méthode de variation des constantes et à employer les méthodes de l'analyse moderne. J'ai démontré que, moyennant des hypothèses très générales sur la loi de résistance, le corps attiré tombe sur le centre attractif au bout d'un temps fini ou infini. Suivant la forme de la loi de résistance, l'orbite peut tourner en spirale autour de ce centre ou y aboutir suivant un chemin direct. C'est la première circonstance qui se présente dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse ; j'ai étudié ce cas avec quelque détail et montré que la rencontre ne se produit qu'au bout d'un temps infini ; le rayon vecteur reste d'ailleurs compris entre des limites aisées à obtenir qui contiennent le temps sous forme exponentielle. C'est également la première circonstance qui se présente dans le cas d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. J'ai indiqué d'autres lois de résistance donnant lieu à une chute directe sur le centre attractif et démontré d'autre part qeulques propriétés géométriques des trajectoires dans le cas général.

Etudes d'optique géométrique (45, 46).

L'emploi journalier des instruments d'optique m'ayant conduit à m'informer de la théorie géométrique des aberrations, j'ai résolu à cette occasion quelques problèmes qui s'y rapportent. J'ai donné une démonstration tout à fait élémentaire et intuitive de propositions dues à Thiesen et à Bruns qui généralisent la condition d'aplanétisme d'Abbe. J'ai fait d'autre part une petite recherche pour démontrer ce fait, d'ailleurs bien connu des opticiens, que l'aberration sphérique proprement dite des lentilles est dans une large mesure indépendante de l'épaisseur, cet élément intervenant au contraire dans la valeur de la courbure de champ et du coma. J'ai montré notamment que dans tous les cas où une lentille simple d'épaisseur arbitraire fonctionne comme objectif, l'aberration sphérique du 1er ordre ne peut s'annuler et reste toujours négative.

Séries trigonométriques, séries de Taylor, fonctions analytiques (8, 9, 10, 11, 12, 35, 36, 50).

Lorsqu'on fait l'étude d'une série de Taylor sur son cercle de convergence, on peut se placer à différents points de vue : 1° on peut rechercher des critères de convergence ou de divergence de la série elle-même sur la circonférence ; 2° on peut considérer simplement les valeurs limites aux points de la circonférence de l'élément de fonction analytique représenté par la série et rechercher dans quels cas ces valeurs limites sont déterminées ou indéterminées, finies ou infinies, et quelles sont les propriétés des fonctions de l'argument que représentent la partie réelle et la partie imaginaire de la série sur cette circonférence, lorsque ces fonctions sont bien définies ; 3° on peut enfin considérer plus spécialement les points de la circonférence qui sont singuliers au sens de Weierstrass et dont la détermination doit précéder l'opération du prolongement analytique de la série. Les liens de ces différents problèmes entre eux et avec ceux qui se rapportent à l'intégrale de Poisson et à la série de Fourier ont été remarqués depuis longtemps et ont fait l'objet de nombreux et importants travaux parmi lesquels il convient de citer le mémoire de Darboux sur l'approximation des fonctions de grands nombres et la thèse de M. Hadamard. J'ai remarqué que les progrès réalisés dans l'étude de l'intégration et de la dérivation des fonctions de variables réelles par les importants travaux de M. Lebesgue permettaient de répondre à certaines de ces questions (celles du moins des deux premières catégories) avec plus de précision et de généralité qu'on n'avait pu le faire précédemment. Je suis parvenu ainsi, notamment, au résultat très général qui suit : « Soit $f(z)$ *une fonction analytique et bornée à l'intérieur d'un domaine limité par un contour* C *formé d'arcs réguliers de courbes analytiques*; *en tous les points de* C, *sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle,* $f(z)$ *tend vers une valeur limite bien déterminée suivant les chemins faisant un angle fini avec* C. » Le même énoncé subsiste pour les fonctions harmoniques et bornées à l'intérieur de C′ ; si C est une circonférence, la fonction harmonique considérée est représentable par une intégrale de Poisson, l'intégrale étant prise au sens de Lebesgue. J'ai étendu également ce théorème aux fonctions analytiques $f(z)$ non bornées dans le domaine considéré, mais qui n'y prennent jamais les valeurs appartenant à un continu linéaire quelconque (35). Ces propriétés, les plus générales que l'on connaisse au sujet des valeurs limites d'une fonction analytique sur une ligne singulière, sont souvent utiles dans l'étude de ces fonctions. M. Carathéodory a pu en déduire très simplement cet important résultat que, dans la représentation conforme l'une sur l'autre de deux aires planes limitées par des courbes de Jordan sans point double, il y a correspondance continue des points du contour. Mes recherches sur ce sujet ont suscité également d'autres travaux, notamment de MM. F. et M. Riesz qui ont étendu le théorème rappelé plus haut au cas où la courbe limite du domaine est une courbe rectifiable quelconque (1), et ceux de MM. Evans (2), Lichtenstein, Szego, Lusin, etc.

Mes recherches sur la convergence d'une série trigonométrique donnée à priori par la loi de ses coefficients se rattachent aux mêmes principes. Lorsque les coefficients a_n et b_n d'une série trigonométrique $\Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx$ pris en valeur absolue, sont assujettis à décroître suivant une certaine loi, mais de manière que la série $\Sigma \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ soit divergente, on ne peut jamais conclure de là à la convergence en tout point de la série trigonométrique ; on peut toujours en effet multiplier les coefficients a_n et b_n par $\varepsilon_n = \pm 1$ de manière que cette série ait une infinité de points de divergence dans tout intervalle. Mais j'ai fait voir qu'une loi de cette nature peut entraîner la convergence, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle. J'ai obtenu en effet une condition suffisante de convergence à ce point de vue, qui est la suivante : *il suffit que* $\mathrm{na_n}$ *et* $\mathrm{nb_n}$ *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{n}$. Si cette condition est remplie, j'ai montré en outre qu'en tout point de convergence la série a pour valeur la dérivée de la fonction obtenue par intégration terme à terme de la série proposée ; inversement la série proposée est convergente en tous les points où cette dérivée existe. Des résultats analogues, mais plus généraux, ont été obtenus ensuite par MM. Jerosch et H. Weyl, puis par M. Young qui a pour ainsi dire épuisé la question.

J'ai démontré d'autre part le théorème suivant : *une série de Taylor dont le rayon de convergence est égal à* 1 *et dont les coefficients finissent par devenir infiniment petits est convergente en tous les points réguliers de son cercle de convergence.* Cette proposition est remarquable en ce sens qu'elle donne une condition nécessaire et suffisante de convergence en tous les points réguliers. J'ai déduit ce résultat d'un théorème de Riemann qui donne une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série trigonométrique. M. M. Riesz en a obtenu une démonstration plus directe (3).

---

(1) C. R. du 4e Congrès des Mathématiciens scandinaves, Stockholm, 1927.
(2) L'important ouvrage *The logarithmic Potential* (Publ. de la Société moth. américaine, 1927) de cet auteur se rattache en grande partie à mes méthodes.
(3) Ueber einem Satz des Herrn Fatou (*S. F. M.*, 1911) — Neuer Beweis des Fatouschen Satzes (*Gött. Nachr.*, 1916) — Ein Konvergenzsatr für Dirichletsche Reihen (*Acta Matematica*, t. 40).

Les recherches précédentes m'ont conduit à énoncer le théorème suivant : une série de Taylor étant donnée, on peut toujours en multipliant ses coefficients par des nombres égaux à $+1$ ou à -1, obtenir une nouvelle série qui admette son cercle de convergence comme coupure. Je n'ai démontré ce théorème que pour les séries qui sont d'ordre fini sur leur cercle de convergence. La démonstration complète a été donnée ensuite par M. Polya.

Je signale enfin diverses recherches sur l'extension de la formule de Parseval concernant la multiplication des séries de Fourier, sur l'évanouissement d'une série de Taylor sur son cercle de convergence, sur la nature analytique des séries de Taylor à coefficients entiers, etc., recherches qui ont été continuées dans ces dernières années par divers géomètres.

Recherches sur l'itération des fonctions rationnelles d'une variable complexe et les équations fonctionnelles qui s'y rapportent (15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 52, 53, 54).

Dans une série de mémoires remarquables publiés de 1883 à 1885, M. Kœnigs a fait l'étude de l'itération d'une fonction uniforme d'une variable complexe dans le domaine d'un point double attractif et des équations fonctionnelles qui s'y rapportent ; l'étude de ces équations considérées depuis longtemps par divers géomètres, notamment par Abel, est ainsi rattachée à la théorie générale des fonctions analytiques ; M. Kœnigs, étudiant les valeurs asymptotiques des fonctions itérées, en déduit l'existence d'une solution holomorphe de l'équation de Schröder, ce qui lui permet de résoudre le problème de l'itération analytique et de prouver l'existence de solutions analytiques de divers types d'équations fonctionnelles. Mais ces solutions ne sont définies que dans un cercle et l'auteur, tout en indiquant le moyen d'en faire le prolongement, ne parvient pas à définir leur domaine d'existence et leurs singularités. J'ai abordé ce dernier problème en 1906 et en ai donné la solution pour certaines substitutions rationnelles ; j'ai fait connaître alors une condition suffisante pour que les itérées d'une fraction rationnelle convergent vers un point double attractif dans tout le plan, sauf aux points d'un ensemble parfait discontinu qui forme la frontière du domaine de convergence ; ce domaine n'est autre que le domaine d'existence des fonctions uniformes qui vérifient l'équation de

Schröder ou d'autres analogues. J'ai également indiqué des cas où la substitution présente deux points doubles attractifs dont les domaines respectifs sont d'un seul tenant, simplement connexes et séparés par une courbe non analytique. J'ai d'ailleurs montré le rôle essentiel que jouent dans cette étude les points critiques des substitutions inverses. Plus tard (mai 1917) j'ai indiqué que le problème de l'itération pouvait être complètement résolu pour les substitutions à cercle fondamental dont j'ai fait, à ce point de vue, la classification. J'ai ensuite traité ces questions d'une manière plus générale en faisant usage des propriétés des fonctions analytiques qui se rattachent au théorème de M. Picard sur les fonctions entières, et je suis parvenu ainsi à des théorèmes généraux que j'ai communiqués à l'Académie des Sciences en décembre 1917, théorèmes que Lattès et surtout M. Julia avaient établis de leur côté par des méthodes analogues à peu près en même temps. J'ai fait connaître ensuite des propriétés nouvelles concernant notamment la non-existence des tangentes aux courbes limites et les propriétés très dignes d'intérêt des solutions uniformes de quelques équations fonctionnelles.

Voici les principaux résultats auxquels je suis parvenu.

Lorsqu'on étudie la suite des fonctions itérées d'une fonction rationnelle, on est conduit à considérer un ensemble particulier : l'ensemble des points *irréguliers*, où ces itérées cessent de former une suite normale au sens de M. Montel, c'est-à-dire ne peuvent se répartir en suites partielles uniformément convergentes. Cet ensemble F jouit des propriétés suivantes : 1° il est parfait ; 2° il est invariant par la substitution rationnelle considérée ; 3° tout point de F est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, sauf au plus de deux points exceptionnels, et d'une manière plus précise les conséquents d'un domaine initial arbitrairement petit entourant un point de F finissent par recouvrir tout le plan (sauf l'entourage des points exceptionnels s'ils existent) ; 4° F a même structure dans toutes ses parties ; il peut être continu et constitué par exemple par une circonférence ou un arc de circonférence ; il peut être partout discontinu et même de longueur nulle ; il peut aussi renfermer une infinité

(1) Ces résultats sont, sur des points essentiels, plus complets que ceux communiqués à l'Académie, tant par moi-même que par MM. Julia et Lattès.

de continus distincts ; il peut enfin (comme l'a montré Lattès) comprendre tout le plan ; 5° si F ne comprend pas tout le plan, il divise le plan en régions dont le nombre est 1 ou 2, s'il n'est pas infini ; dans le premier cas, il existe un seul point double de multiplicateur < 1 en module (ou exceptionnellement égal à $+1$), la réciproque n'étant d'ailleurs pas vraie ; dans le second cas, il existe deux points doubles attractifs ou un cycle attractif d'ordre deux, les deux points ainsi définis peuvent d'ailleurs se confondre en un seul point double de multiplicateur $+1$; dans le dernier cas, il peut se produire des circonstances variées dont la classification à l'heure actuelle ne peut encore être faite complètement

D'une manière générale, soit D un domaine contigu à F ; dans D les fonctions itérées forment une suite normale dont les fonctions limites sont en général des constantes ; si ces constantes sont en nombre fini, elles forment un cycle (ou période) dont le multiplicateur peut être un nombre plus petit que 1 en module (cycle attractif), ou égal à 1 en module, c'est-à-dire de la forme $e^{ia\pi}$; dans ce dernier cas, a est commensurable lorsque le nombre des domaines distincts, conséquents de D, est fini, et la réciproque a lieu. *Dans tous les cas, le nombre de cycles de multiplicateur au plus égal à* 1 *en module est fini et même borné en fonction du degré* m *de la fonction rationnelle* (l'ordre de ces cycles pouvant d'ailleurs être aussi élevé qu'on le veut pour m donné > 1) ; les autres cycles de multiplicateur > 1 en module (répulsifs) sont en nombre infini et appartiennent à l'ensemble F sur lequel ils sont denses.

On peut admettre à priori que dans un domaine tel que D, il existe des fonctions limites non constantes ; il existe alors un domaine conséquent de D qui est invariant par une puissance de la substitution rationnelle donnée, et dans lequel certaines des substitutions itérées tendent vers la substitution identique. On obtient assez aisément une condition suffisante pour qu'une telle circonstance ne se présente pas ; cette condition est remplie dans tous les exemples que j'ai pu étudier. Notons également que la possibilité d'existence d'une infinité de fonctions limites constantes, dans un domaine D contigu à F, reste toujours douteuse.

Si l'on se borne à considérer les points doubles ou périodiques dont le multiplicateur est plus petit en module que l'unité, ou de la forme $e^{2i\pi \frac{p}{q}}$, on obtient assez facilement quelques indications sur la structure des domaines d'attraction correspondants. Si par exemple on considère les points doubles de la première catégorie on trouve que le domaine d'attraction d'un tel point z_0 est ou bien d'un seul tenant, ou bien formé d'une infinité de régions distinctes. La partie qui contient le point z_0 est un domaine invariant que j'appelle avec M. Julia le domaine immédiat de z_0. Ce domaine, s'il n'est pas simplement connexe, est d'ordre de connexion infini. Si le domaine de z_0 est d'un seul tenant et se réduit par conséquent au domaine immédiat, les domaines des autres points attractifs qui peuvent exister sont formés de parties simplement connexes, etc. Quand ce domaine est simplement connexe M. Julia a montré que, moyennant certaines hypothèses assez générales, sa frontière est une courbe de Jordan sans point double. J'ai précisé ce résultat en montrant que cette courbe peut être représentée par une équation de la forme :

$$z = f(t) = x(t) + iy(t)$$

où $f(t)$ désigne une fonction continue du paramètre réel t et qui vérifie les conditions :

$$f(t+1) = f(t) \quad , \quad f(mt) = \mathrm{R}[f(t)]$$

m étant le degré de la fraction rationnelle $\mathrm{R}(z)$; l'étude de la distribution des conséquents d'un point de cette courbe limite est ainsi ramenée à un problème de numération dans le système à base m ; ces points correspondent en effet aux valeurs de t obtenues en déplaçant la virgule vers la droite dans l'expression de la valeur initiale t_0 écrite dans ce système. On voit ainsi que l'ensemble dérivé des conséquents d'un point z^0 de la courbe limite coïncide *presque toujours* avec cette courbe tout entière. Pour les exceptionnelles de t_0, cet ensemble dérivé est partout discontinu ; il peut être parfait ou réductible.

J'ai obtenu d'autre part, au moyen de la représentation conforme, de nouvelles propriétés de cette courbe limite et suis parvenu à mettre en évidence son caractère non analytique, comme dans le cas des fonctions kleinéennes. Cette recherche repose sur le théorème suivant : Si $t_1 = \varphi(t)$ désigne une substitution rationnelle admettant le cercle fondamental Δ et de première espèce, et $\mathrm{R}(z)$ une fonction rationnelle quelconque, toute solution de l'équation fonctionnelle

$$h[\varphi(t)] = \mathrm{R}[h(t)]$$

méramorphe à l'intérieur de Δ et qui n'est pas une fraction rationnelle admet la circonférence de Δ comme coupure.

Ce théorème s'étend au cas où $t_1 = \varphi(t)$ est une substitution singulière, avec un point double de multiplicateur $+1$.

J'ai déduit de là la propriété suivante des courbes limites : Soit α un point double de la substitution rationnelle $z_1 = R(z)$ avec la condition $[R'(\alpha)] < 1$ ou $R'(\alpha) = +1$. *Si le domaine immédiat* D *de* α *est simplement connexe et si sa frontière présente un arc analytique isolé, cette frontière est tout entière constituée par une circonférence ou une droite, ou bien par un arc de circonférence ou un segment de droite.*

Les deux cas d'exception nous ramènent aux substitutions à cercle fondamental et à celles qui s'en déduisent par une transformation du second degré. Je les appelle substitutions C ; elles sont étudiées en détail dans mes mémoires.

Le théorème qui précède est général ; il subsiste si dans l'énoncé on considère un *arc convexe* au lieu d'un arc analytique.

En faisant certaines hypothèses, on peut démontrer — et c'est là un fait beaucoup plus caché — la non-existence des tangentes en chaque point de la courbe limite. Citons par exemple l'énoncé suivant :

Soient α *un point double attractif de la substitution* $z_1 = R(z)$ *et* D *son domaine immédiat supposé simplement connexe ; si la frontière* f *de* D *ne contient aucun point qui soit un conséquent ou un point limite de conséquents de la fraction inverse* $R_{-1}(z)$, *cette frontière n'a de tangente en aucun point, le cas des substitutions* C *étant seul excepté.*

Par exemple la substitution $z_1 = \dfrac{z + z^2}{2}$ donne lieu à une division du plan en deux régions qui sont les domaines des points o et ∞ ; ces deux régions sont séparées par une courbe de Jordan simple qui n'a de tangente en aucun point. Dans d'autres cas analogues on obtient une courbe ayant des tangentes en une infinité dénombrable de points seulement (exemple : $z_1 = z - z^2$).

Les propriétés précédentes se rapportent à l'ensemble f des points frontières du domaine immédiat d'un point double attractif ; f est un sous-ensemble de l'ensemble F des points irréguliers. On peut obtenir des propriétés analogues concernant l'ensemble F lorsqu'on le suppose continu. Ainsi F ne peut présenter aucun arc analytique isolé, sauf dans le cas simple des substitutions C, etc.

J'ai obtenu également d'autres propriétés des ensembles f et

F, même dans le cas où ces ensembles sont discontinus, et signalé divers problèmes fort intéressants, du domaine de la topologie et de la théorie des ensembles, qu'on peut se proposer à leur sujet.

La construction de courbes ou d'ensembles de points ayant des propriétés analogues à celles que j'ai démontrées pour les ensembles limites du problème d'itération des fonctions rationnelles est un jeu facile pour un analyste, d'un intérêt limité et d'ailleurs aujourd'hui démodé. Mais il est beaucoup moins intéressant de construire à priori de tels ensembles que de montrer comment ils s'introduisent d'eux-mêmes dans des questions où toutes les données sont analytiques. C'est d'ailleurs la découverte faite par Poincaré de l'existence de tels ensembles comme points limites des régions de discontinuité des groupes kleinéens qui a appelé l'attention des géomètres sur l'intérêt que présente l'étude générale de ces ensembles. L'analogie remarquée entre les ensembles de points limites des groupes kleinéens et ceux qui sont constitués par les frontières des régions de convergence des itérées d'une fonction rationnelle ne paraît d'ailleurs pas fortuite et il serait probablement possible d'en faire la synthèse dans une théorie générale des groupes discontinus de substitutions algébriques. On doit remarquer en effet que les problèmes d'itération étudiés par nous reviennent en somme à l'étude des régions de discontinuité propre du groupe G des substitutions algébriques défini par les équations :

$$R_n(z) = R_p(z')$$

où n et p sont deux entiers quelconques, $R_n(z)$ la n^e itérée de $R(z)$. Ce groupe G admet un sous-groupe invariant Γ qui est constitué par les substitutions pour lesquelles $n = p$. Soit α un point double attractif de multiplicateur s non nul de la substitution $z_1 = R(z)$, D son domaine immédiat. Les groupes G et Γ sont proprement discontinus dans D sauf, en ce qui concerne G, aux points antécédents de α, La solution holomorphe de l'équation de Schrôder nulle pour $z=a$ et de dérivée égale à 1 en ce point est un invariant caractéristique du groupe Γ. L'étude de cette fonction, que nous appelons *fonction de Kœnigs*, conduit d'ailleurs à des particularités fort intéressantes au point de vue de la théorie générale des fonctions analytiques uniformes ; nous lui avons consacré des recherches assez étendues. D'autre part, nous avons formé des fonctions uniformes dans D, invariantes par les substitutions de G et prenant p fois la même valeur dans un domaine fondamental de G ; ces fonctions s'obtiennent toutes en remplaçant, dans la fonction elliptique $\varphi(w)$ de périodes $2\,i\pi$ et $\log s$ et d'ordre $p > 1$, l'argument w par $\log F(z)$, $F(z)$ étant la fonction de Kœnigs holomorphe en α. Ces fonctions $I(z)$, qui sont liées deux à deux par des relations algébriques, admettent comme points singuliers essentiels les points frontières de D, et à l'intérieur de D le point a et ses antécédents. La fonction inverse de $I(z)$ n'admet comme singularités qu'un nombre fini de points critiques algébriques, nombre qui peut se réduire à 3 pour des valeurs singulières du multiplicateur s. Cette dernière fonction est analogue aux fonctions dites polymorphes, inverses des fonctions automorphes. Ces diverses fonctions appartiennent d'ailleurs à une classe générale de fonctions multiformes dont nous avons découvert, ainsi qu'on le verra plus loin, une propriété remarquable.

On trouvera dans nos mémoires diverses propriétés concernant la structure de ces groupes discontinus G et Γ.

Signalons également que l'équation fonctionnelle de Schröder conduit à étudier certaines fonctions méromorphes, déjà rencontrées par Poincaré, et qui permettent de faire simplement la représentation paramétrique de l'itération d'une fonction rationnelle ; l'étude des fonctions inverses de ces fonctions résulte aisément de l'étude des régions de discontinuité de G et conduit à de curieux exemples.

Lorsqu'on se trouve au voisinage d'un point double de multiplicateur $+1$, l'étude des fonctions itérées et des équations fonctionnelles correspondantes est beaucoup plus délicate que dans le cas d'un point double attractif ordinaire. J'ai dû reprendre, au point de vue local, cette étude esquissée par M. Leau dans sa thèse. Ce point double étant à l'origine, soit :
$$z_1 = z - az_2 + bz^3 + \dots$$
si a n'est pas nul, j'obtiens pour les fonctions itérées l'expression asymptotique :

$$z_n = \frac{1}{na + \dfrac{a^2 - b}{a}\log n + F(z) + \varepsilon_n} \qquad (\lim \varepsilon_n = o)$$

quand z reste à l'intérieur d'un certain domaine ayant la forme d'une cardioïde avec un point de rebroussement à l'origine ; $F(z)$ est holomorphe dans ce domaine et vérifie l'équation fonctionnelle d'Abel.

$$F[R(z)] = F(z) + a.$$

On a de plus : $F(z) = \frac{1}{z} + O\left(\log \frac{1}{|z|}\right)$

dans la notation de M. Landau. Le cas de $a=o$ se ramène au précédent par une transformation algébrique. Il existe alors plusieurs domaines de convergence entièrement distincts assemblés autour de l'origine et formant une *étoile*. Dans chaque branche de cette étoile, il y a une solution uniforme de l'équation d'Abel jouissant de la propriété asymptotique précédente.

En appliquant ces résultats au cas d'une substitution rationnelle, on parvient à une fonction uniforme ayant pour domaine d'existence le domaine immédiat D d'un point double de multiplicateur $+1$ et qui est encore l'invariant caractéristique du groupe Γ de substitutions algébriques défini plus haut. Dans le cas particulier d'une substitution singulière à cercle fondamental, on obtient, en appelant $F(z)$ la fonction précédente et $\Phi(z)$ la fonction $e^{F(z)}$, l'exemple curieux d'une fonction $\Phi(z)$ holomorphe et non nulle à l'intérieur d'un cercle et prenant en tout point de la circonférence la valeur limite zéro, suivant un chemin simple convenablement choisi.

L'équation fonctionnelle d'Abel conduit d'autre part dans ce cas à des fonctions méromorphes ou entières vérifiant une relation de la forme

$$\varphi(z + \omega) = R[(\varphi z)]$$

où ω désigne une constante et $R(z)$ une fonction rationnelle telle que $R(z)-z$ ait un zéro double. Ces fonctions méromorphes jouissent de la propriété de n'être indéterminées à l'infini qu'à l'intérieur d'une demi-bande limitée par deux demi-droites parallèles et une perpendiculaire commune. Parmi ces fonctions il y en a qui sont entières et se comportent donc comme les fonctions étudiées par MM. Mittag-Leffler et Phragmen et obtenues par un procédé essentiellement différent. Parmi celles qui sont méromorphes et non entières, il y en a pour lesquelles la demi-bande considérée peut être prise de largeur arbitrairement petite, de sorte qu'une telle fonction prend la valeur limite zéro à l'infini sur toutes les droites du plan, à l'exception d'une seule demi-droite.

J'ai étudié également les solutions uniformes de diverses équations fonctionnelles du type

$$F\,[R\,(z)] = A\,[z, F\,(z)]$$

où F est la fonction inconnue, et spécialement de l'équation de permutabilité $F\,[R\,(z)] = R\,[F\,(z)]$.

Si les fonctions R et F sont holomorphes dans un domaine D, et si, z décrivant D, les points F (z) et R (z) décrivant respectivement des domaines intérieurs à D, il existe alors dans D un point double attractif z_0 commun aux deux substitutions $[z, R\,(z)]$ et $[z, F\,(z)]$ et la recherche des substitutions $[z, F\,(z)]$ permutables à la substitution donnée $[z, R\,(z)]$ se ramène, comme l'a montré M. Kœnigs, au problème de l'itération analytique qui se résoud en construisant un groupe continu à un paramètre λ de substitutions régulières à l'origine, permutables entre elles et avec la substitution donnée, et se réduisant à la substitution identique pour $\lambda = o$, à la substitution donnée pour $\lambda = 1$; la solution est d'ailleurs très simple, lorsqu'on suppose conne la solution holomorphe de l'équation de Schrôder. J'ai étudié en détail ce problème lorsque R (z) est une fonction rationnelle ; les fonctions F(z) ainsi obtenues ont en général une infinité de points critiques algébriques mobiles, c'est-à-dire dépendant du paramètre λ, et en outre une infinité de points critiques fixes transcendants. On ne parvient donc pas de cette manière à des solutions uniformes, sauf peut-être pour des valeurs particulières de λ ; en général, les seules solutions uniformes que l'on obtient sont des fonctions rationnelles, à savoir les itérées d'indice entier de R(z) ; j'ai pu indiquer certains cas où il en est sûrement ainsi. J'ai étudié de même l'itération analytique dans le domaine d'un point double répulsif de la substitution rationnelle donnée ; on obtient alors des fonctions F (z) possédant des points critiques fixes, c'est-à-dire indépendants de la constante arbitraire λ, les pôles seuls pouvant être mobiles, et le domaine d'existence des fonctions F (z) comprenant tout le plan sauf quelquefois un point, ou même deux points. Le cas un peu plus compliqué de l'itération analytique dans le domaine d'un point double singulier de multiplicateur $+ 1$ conduit à deux sortes de solutions possédant respectivement les caractères qui correspondent aux deux premiers cas examinés.

Enfin, un dernier cas singulier, celui d'un point double attractif mais de multiplicateur nul peut conduire à des solutions F (z) uniformes, du moins pour une infinité dénombrable de valeurs de la constante arbitraire ; il suffit pour cela que le domaine d'attraction de ce point double soit d'un seul tenant, ainsi qu'il arrive pour le point à l'infini dans le cas d'une substitution polynômiale, et que ce point soit le seul point critique de la fonction inverse de $R(z)$ dans le domaine en question ; les solutions uniformes que l'on obtient admettent alors ce domaine, qui d'ailleurs est simplement connexe, comme domaine d'existence, et ne peuvent pas être prolongées au delà.

Dans tous les cas, les solutions uniformes qui ne possèdent que des points singuliers essentiels isolés n'en ont en réalité aucun et sont par conséquent rationnelles.

Les méthodes employées conduisent d'autre part à la solution, du moins partielle, du problème suivant : trouver les fonctions uniformes qui vérifient deux identités de la forme

$$\varphi\,(s\,u) = R\,[\varphi\,(u)]$$
$$\varphi\,(s'u) = S\,[\varphi\,(u)]$$

où R et S sont deux fonctions rationnelles de degré > 1 s et s' des constantes. Nous exprimons ceci en disant avec Poincaré que la fonction φ possède deux théorèmes de multiplication ; nous dirons que ces deux théorèmes sont essentiellement distincts si s et s' ne sont liés par aucune relation de la forme $s^n = s'^p$, avec n et p entiers. Ceci étant :

1° Toute fonction admettant un théorème de multiplication ne peut être uniforme et à domaine d'existence illimité que si elle est méromorphe ou entière ;

2° Toute fonction admettant deux théorèmes de multiplication est méromorphe ou entière ; les fonctions transcendantes entières de cette espèce se ramènent aux fonctions

$$e^n,\ \cos\sqrt{u},\ \cos\left(u + \frac{\pi\,p}{q}\right)$$

par des substitutions de la forme

$$\varphi' = a\varphi + b$$

effectuées sur la fonction et $u' = cu^m$ (m entier) effectuées sur la variable.

Mais la détermination des fonctions méromorphes, non entières, qui possèdent deux théorèmes de multiplication ne paraît pas facile à obtenir par ces méthodes ; la question a été résolue d'une tout autre manière par M. F. Ritt ; elle revient d'ailleurs, comme on le voit aisément, à la détermination des substitutions rationnelles permutables ; notre méthode conduit seulement à la détermination des substitutions entières et rationnelles permutables.

Itération des fonctions transcendantes entières (20, 51).

Lorsqu'on cherche à étendre aux fonctions transcendantes entières les résultats obtenus pour l'itération des polynômes et des fractions rationnelles, on rencontre de nouvelles difficultés, provenant notamment de l'existence possible de valeurs exceptionnelles ou d'équations exceptionnelles ; l'équation $f(z)=z$ qui définit les points doubles peut, par exemple, n'admettre aucune racine. J'ai surmonté en partie ces difficultés en démontrant le théorème suivant : Si E (z) est une fonction transcendante entière, l'équation

$$E(z) = Z$$

admet en général au moins une racine de module inférieur à $|Z|^{\frac{1}{p}}$, p désignant un nombre positif arbitraire ; les valeurs exceptionnelles de Z, si elles existent, pour lesquelles cette propriété n'est pas vérifiée, peuvent être renfermées dans des cercles dont les centres sont à des distances $R, R_1, R_2 \ldots$ de l'origine qui croissent plus vite que les termes d'une progression géométrique divergente, tandis que leurs rayons sont au plus égaux à $\varepsilon R, \varepsilon R_1, \varepsilon R_2 \ldots$, où ε désigne un nombre arbitraire inférieur à 1. Dans certains cas, on peut démontrer que les valeurs exceptionnelles de Z ont des modules bornés ; M. Valiron, à qui j'ai signalé cette question, est parvenu à démontrer qu'il en est bien ainsi pour toutes les fonctions entières de genre fini.

De ce théorème, je déduis le suivant : Si $f(z)$ et $g(z)$ désignent deux fonctions transcendantes entières, M (r) le module maximum de E (z) pour $|z| = r$, $M_1(r)$ celui de $f[g(z)]$, on aura pour certaines valeurs infiniment grandes de r :

$$M_1(r) > r^p M(r)$$

p étant un nombre positif quelconque.

D'autre part, si l'équation $f(z) = z$ n'a aucune racine, je démontre que l'équation $f_p(z) = z$, où $f_p(z)$ désigne la p^ième itérée de $f(z)$ $(p > 1)$, en a une infinité.

De ces lemmes, j'ai pu conclure à l'existence d'un ensemble parfait F, qui est l'ensemble des points irréguliers, et possède à peu près les mémes propriétés que l'ensemble déjà rencontré dans l'itération des fonctions rationnelles, tout point de F étant notamment limite de points périodiques, c'est-à-dire de points doubles des puissances de la substitution donnée.

L'étude détaillée d'un exemple m'a conduit au résultat qui suit : il peut arriver que les conséquents d'un point convergent uniformément à l'intérieur d'un domaine D vers un point fixe, indépendant de la position du point initial, le domaine D offrant cette particularité que tous ses points frontières sont *inaccessibles.* De tels domaines ont été depuis longtemps envisagés par les géomètres dans des études abstraites de topologie et l'on en donne aisément des exemples construits à priori ; mais il est remarquable qu'ils s'introduisent d'eux-mêmes comme domaines d'existence des fonctions uniformes les plus simples assujetties à vérifier certaines équations fonctionnelles elles-mêmes très simples, par exemple la suivante :

$$A\,[E\,(z)] = 1 + A\,(z)$$

où $A(z)$ est la fonction inconnue et

$$E\,(z) = z + 1 + e^{-z}.$$

Autres recherches relatives à l'itération (25, 26, 43, 48, 49, 55).

En ce qui concerne les fonctions d'une seule variable, j'ai étudié l'itération de certaines substitutions algébriques non rationnelles et montré qu'il s'introduit dans cette étude des circonstances nouvelles qui ne se présentent pas dans l'itération des fonctions rationnelles ni de leurs inverses.

J'ai étudié d'autre part l'itération d'une classe très particulière de fonctions transcendantes ainsi définies : ce sont des fonctions holamorphes à l'extérieur d'un cercle C, et faisant la représentation conforme de C sur une surface de Riemann à une infinité de feuillets étendue sur C et n'ayant pas d'autre bord que celui de C ; d'autre part, les points de ramification intérieurs à C sont tous algébriques. On voit que la substitution correspondante généralise les substitutions rationnelles à cercle fondamental ; elles jouissent de propriétés analogues au point de vue de l'itération.

Dans un ordre d'idées un peu différent, j'ai étudié les séries de Taylor $u_o + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$ dont les coefficients s'obtiennent par itération :

$$u_n = f\,(u_{n-1})$$

f étant une fonction analytique et u étant situé dans le domaine d'un point double attractif. J'ai démontré que cette série représente alors une fonction méromorphe, quotient de deux fonctions entières de genre zéro, dont le module maximum ne croît pas plus vite que $e^{C(\log r)^2}$. La fonction du dénominateur est le produit

$$(1 - z)(1 - sz) \ldots (1 - s^n z) \ldots$$

s étant le multiplicateur du point double. Cette proposition a été généralisée par Lattès qui a considéré le cas où les coefficients s'obtiennent par itération de fonctions de plusieurs variables. (Sur les suites récurrentes non linéaires, *Annales de Toulouse*, 3e série, t. XXX.)

En ce qui concerne les fonctions de deux variables complexes, j'ai étudié l'itération des substitutions analytiques correspondantes, qui avait déjà fait l'objet de travaux importants de Poincaré, Picard, Hadamard, Lattès. Je suis revenu sur cette question en examinant certains cas singuliers dont l'étude est assez difficile, notamment en supposant l'un des multiplicateurs égal à l'unité pour le point double au voisinage duquel on étudie l'itération. J'ai montré que la méthode employée par moi pour étudier la même question dans le cas d'une seule variable pouvait être étendue au cas actuel et permettait de faire l'étude analytique de la solution de l'équation fonctionnelle d'Abel.

J'ai étudié d'autre part certaines substitutions birationnelles à deux variables et montré qu'il est possible de former des substitutions de cette sorte qui soient exemptes de singularités à distance finie, autrement dit entières, et dont on se donne à l'avance un certain nombre de points doubles avec les valeurs des multiplicateurs en ces points. Soit

$$x_1 = R(x,y)$$
$$y_1 = S(x,y)$$

une substitution birationnelle ou crémonienne de cette sorte ayant à distance finie deux points doubles distincts A et B avec des multiplicateurs tous supérieurs à l'unité. Les fractions méromorphes, étudiées d'abord par M. Picard et qui vérifient les équations fonctionnelles

$$f(su, s'v) = R[f(u, v), g(u, v)]$$
$$g(su, s'v) = S[f(u, v), g(u, v)]$$

deviennent ici des fonctions entières qui sont d'ailleurs fonctionnellement indépendantes. Moyennant nos hypothèses, on démontre aisément que si s et s' sont les multiplicateurs relatifs au point double A, les fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$ ne peuvent s'approcher simultanément des valeurs des coordonnées du point double B ; autrement dit, le domaine des valeurs du système des fonctions f et g comporte des espaces lacunaires. Il s'ensuit que les théorèmes de Weierstrass et de M. Picard concernant l'indétermination à l'infini d'une fonction transcendante entière n'ont pas d'équivalent concernant les systèmes de deux fonctions entières et indépendantes de deux variables complexes.

Fonctions automorphes (29, 42, 57).

Ayant revisé l'ouvrage de MM. Appell et Gaursat : *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Paris, G. V.), en vue d'une deuxième édition, j'ai fait suivre ce volume d'un deuxième volume (57) où j'expose la théorie des groupes et des fonctions automorphes qui en forme le complément naturel. Dans cet ouvrage, actuellement en cours d'impression, j'ai apporté divers compléments à ces théories aujourd'hui classiques qui toutefois n'ont jamais été exposées d'une manière didactique et complète, du moins en langue française. J'ai exposé notamment les notions relatives aux groupes discontinus de substitutions de telle manière qu'elles ne s'appliquent pas seulement aux groupes de substitutions linéaires, mais plus généralement à tous les groupes discontinus analytiques ; la théorie des familles normales de fonctions analytiques due à M. Montel m'a été précieuse pour cet objet ; j'obtiens notamment la condition de discontinuité propre d'un groupe de substitutions analytiques : $z' = f_n(z)$, sous la forme suivante : pour que ce groupe soit proprement discontinu dans un domaine D où les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes, il faut et il suffit que les fonctions $f_n(z)$ forment une famille normale à fonctions limites constantes. La proposition s'étend facilement à certains cas où les fonctions $fn(z)$ présentent des points de ramification algébriques à l'intérieur du domaine, de sorte qu'elle trouve son application à l'étude générale des groupes discontinus de substitutions algébriques dont l'étude offre un grand intérêt, ainsi que je l'ai montré dans mes recherches sur l'itération des fonctions rationnelles J'ai donné d'autre part d'une manière plus rigoureuse qu'on ne l'avait fait jusqu'à présent la classification des groupes kleinéens.

J'ai montré que, parmi les conditions de discontinuité d'un tel groupe envisagées par M. Fricke dans son ouvrage « Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Funktionen », il y en a qui sont superflues. J'ai donné d'autre part une démonstration rigoureuse du fait suivant : le nombre des régions de discontinuité d'un groupe kleinéen ne peut être que 1 ou 2 s'il n'est pas infini ; les démonstrations données dans les travaux antérieurs reposaient sur un postulat inexact. J'ai donné également divers compléments originaux à l'étude du groupe d'une équation différentielle linéaire du second ordre d'après Poincaré.

Dans le même ordre d'idées, j'ai donné (42) une démonstration d'un théorème de M. Picard concernant les fonctions linéairement polymorphes sur une surface de Reimann et dont le groupe de monodromie ne renferme que des substitutions entières, en rattachant ce théorème plus étroitement aux travaux de Poincaré et Klein sur les groupes des équations différentielles linéaires du second ordre. J'ai été conduit à cette occasion à faire l'étude d'un certain groupe de substitutions birationnelles de deux variables, définies par les équations

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X} &= x^p y^q \\
\mathrm{Y} &= x^r y^s
\end{aligned}
$$

les nombres p, q, r, s, étant des entiers de déterminant ± 1. Ce groupe, qui ne renferme pas de substitution infinitésimale, n'est cependant pas proprement discontinu ; mais les sous-groupes cycliques hyperboliques qu'il contient possèdent la discontinuité propre, sauf sur certaines variétés à trois dimensions de l'hyperspace complexe. On obtient ainsi l'un des cas très rares où l'itération d'une substitution birationnelle conduit à une division de l'espace en deux régions, déterminées par des équations algébriques ou transcendantes simples, dans chacune desquelles les conséquents d'un point tendent vers un point limite unique.

J'ai donné enfin (29) une application digne d'intérêt de la méthode d'uniformisation des fonctions analytiques au moyen des fonctions fuchsiennes d'après Poincaré, àla démonstration d'une propriété générale des fonctions multiformes. Considérons les fonctions multiformes qui : 1° n'ont qu'un nombre fini de points singuliers non polaires ; 2° ne prennent que des valeurs bornées ou plus généralement ne prennent pas les valeurs appartenant à un certain continu linéaire. Je démontre qu'une telle fonction admet toujours des fonctions limites constantes, les valeurs distinctes de ces constantes étant en infinité non dénombrable. J'en déduis certaines propriétés que doivent posséder les équations différentielles auxquelles peuvent satisfaire les fonctions de cette classe qu'on rencontre souvent dans les applications.

Théorie des nombres (13, 14).

J'ai remarqué que la méthode de Dirichlet pour le calcul du nombre de classes de formes quadratiques binaires de déterminant donné conduit, lorsqu'on l'applique aux formes d'Hermite définies, à une expression simple du nombre des classes qui ne dépend que de la décomposition en facteurs premiers du déterminant. G. Humbert a donné ensuite des extensions importantes de ce résultat.

Dans un travail sur l'approximation des incommensurables, j'ai étudié la répartition des fractions $\frac{x}{y}$ qui approchent d'un nombre incommensurable a de manière que

$$| y\,(x - ay) | < 1$$

La croissance du nombre $N(h)$ des solutions de cette inégalité pour lesquelles $| y < h |$ est liée à celle des entiers (quotients incomplets) qui figurent dans le développement de a en fraction continue. On a toujours

$$N\,(h) > C \log h$$

ce mode de croissance n'étant pas dépassé quand a est, par exemple, un nombre quadratique.

Imp. Téqui, 3 *bis*, rue de la Sablière, Paris — 960-5-29.