

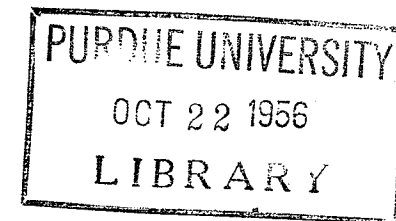
MITTEILUNGEN
aus dem
MATHEM. SEMINAR GIESSEN

Herausgeber: H. Boerner, E. Ullrich

Heft 42

Hans Habsch
(Brand, Kr. Görlitz, »D 26«)

Die Theorie der Grundkurven und das Äquivalenzproblem
bei der Darstellung Riemannscher Flächen



GIESSEN 1952
SELBSTVERLAG DES MATHEMATISCHEN SEMINARS

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	1
§ 1 Die Gruppe der Kurvenänderungen	3
§ 2 Einfache Kurvenänderungen	8
§ 3 Die Hauptsätze	15
§ 4 Darstellung Riemannscher Flächen	22
§ 5 Änderung des Streckenkomplexes beim Wechsel der Grundkurve	25
§ 6 Das Äquivalenzproblem	29
§ 7 Terminologie bei der Darstellung der \mathcal{V} -Flächen	31
§ 8 Äquivalenzfamilien	35
§ 9 Beispiele von Familien aus der Art $A\binom{6}{4}$, welche keine Äquivalenzfamilien sind	43
Literaturverzeichnis	50
Figuren-Anhang	

Einleitung.

Die Struktur einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen, welche nur über endlich vielen Grundpunkten verzweigt sind, lässt sich nach Wahl einer Zerschneidungskurve (von uns Grundkurve genannt) am besten durch das Netz oder den Streckenkomplex beschreiben. Diese Flächendarstellungen sind von den Herren Speiser, Nevanlinna, Elfving und Ullrich (s. Literaturverzeichnis S. 50) eingehend behandelt worden.

In dieser Arbeit wird vor allem die Abhängigkeit des Netzes (Streckenkomplexes) von der gewählten Grundkurve untersucht¹⁾. Die Gesamtheit der Grundkurven lässt sich durch \mathcal{L} , die Gruppe der Kurvenänderungen völlig beschreiben. Man geht von den topologischen Abbildungen der Gaußschen Zahlenebene auf sich aus, bei denen die Grundpunkte permutiert werden. Diese bilden eine kontinuierliche Gruppe \mathcal{V} . Jedes der Elemente von \mathcal{V} lässt sich auf mehrfache Weise durch eine topologische Deformation erzeugen. Eine topologische Abbildung, welche durch eine Deformation erzeugt werden kann, bei der in jeder Phase die Grundpunkte festbleiben, nennen wir simpel. Die simplen Abbildungen bilden einen Normalteiler \mathcal{S} von \mathcal{V} . \mathcal{L} wird nun als die Faktorgruppe \mathcal{V}/\mathcal{S} definiert. Hieraus folgt, dass ein geordnetes Grundkurvenpaar Γ_1, Γ_2 eine Kurvenänderung eindeutig bestimmt. Die Grundkurven, bei denen die Grundpunkte in sich übergehen, bilden einen Normalteiler \mathcal{N} von \mathcal{L} . Die Faktorgruppe \mathcal{L}/\mathcal{N} erweist sich als isomorph zur symmetrischen Gruppe. Für \mathcal{L} bilden die Tausche, für \mathcal{N} die Schnitte ein vollständiges System von Erzeugenden; dabei sind die Tausche und Schnitte besonders einfache Kurvenänderungen.

Es werden jetzt die Streckenkomplexänderungen hergeleitet, welche einem Tausch (einem Schnitt) entsprechen. Damit beherrscht man die Komplexänderung bei einem beliebigen Grund-

1) Die Arbeiten von R. Nevanlinna (2) und E. Drape (1) bildeten die Hauptausgangspunkte dieser Untersuchung.

kurvenwechsel. Man kann nun prüfen, ob zwei Systeme aus Grundkurve und Streckenkomplex Γ_1, K_1 und Γ_2, K_2 dieselbe Riemannsche Fläche darstellen. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die durch Γ_1, Γ_2 bestimmte Kurvenänderung den Komplex K_1 in den Komplex K_2 überführt.

Im weiteren Teil der Arbeit werden Äquivalenzfragen behandelt. Streckenkomplexe heissen äquivalent, wenn sie derselben Riemannschen Fläche entsprechen. Riemannsche Flächen heissen äquivalent, wenn sie bei geeigneter Grundkurvenwahl auf denselben Streckenkomplex führen. Das Problem, wann sind Riemannsche Flächen äquivalent, lässt sich auf das Problem der Äquivalenz von Streckenkomplexen zurückführen. Letzteres wird bei Riemannschen Flächen mit nur logarithmischen Windungspunkten in endlicher Anzahl (wie sie von den ν -Funktionen erzeugt werden) behandelt. Die von ihnen erzeugten Streckenkomplexe bilden eine Familie, wenn sich ihre Windungssorten so zuordnen lassen, dass entsprechende logarithmische Elementargebiete bezüglich der Nachbarschaftslage¹⁾ die gleiche zyklische Anordnung aufweisen. Die Zugehörigkeit zur gleichen Familie ist eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz von Streckenkomplexen. Im allgemeinen ist sie nicht hinreichend, sonst liegt eine Äquivalenzfamilie vor. Fräulein Drape hatte schon gezeigt, dass Komplexe, die in der Anzahl der logarithmischen Windungspunkte übereinstimmen und bei denen überdies in jeder Windungssorte nur ein einziger Windungspunkt liegt, eine Äquivalenzfamilie bilden. Es werden weitere Beispiele für Äquivalenzfamilien angegeben. Das angewandte Beweisverfahren ist elementar und gestattet nicht, Nichtäquivalenz innerhalb der Familie zu entscheiden. An Streckenkomplexen 4. Grades wird schliesslich eine weiterreichende und verallgemeinerungsfähige Methode der Äquivalenzuntersuchung demonstriert.

1) zwei logarithmische Elementargebiete heissen benachbart, wenn sie von demselben logarithmischen Ende begrenzt werden.

§ 1 Die Gruppe der Kurvenänderungen.

Unter einer Grundkurve verstehen wir eine Jordankurve durch die q Grundpunkte $a, \nu=1, 2, \dots, q$. Wir orientieren sie und nennen das links der Kurve liegende Gebiet Innengebiet \mathcal{I} , das rechts liegende Aussengebiet \mathcal{A} . Gemäss der Reihenfolge, in welcher die Grundpunkte von der orientierten Grundkurve durchlaufen werden, ordnen wir diesen die Punktnummern $0, 1, \dots, q-2, q-1$ zu. Dabei verstehen wir unter der Punktnummer $\bar{\nu}$ den Repräsentanten r $0 \leq r \leq q-1$ der Restklasse ν modulo q . Tragen zwei benachbarte Grundpunkte die Punktnummern $\bar{\nu}, \overline{\nu+1}$, so soll der von ihnen begrenzten Seite die Seitennummer ν erteilt werden. Unter ν verstehen wir die gleiche Zahl wie $\bar{\nu}$. Eine orientierte Grundkurve, die mit Punkt- und Seitennummern versehen ist, heisst normiert. Figur 1 stellt eine normierte Grundkurve dar. Der unnormierten Grundkurve werden mithin $2q$ normierte Grundkurven zugeordnet.

Wir betrachten nun die Gesamtheit aller möglichen Grundkurven, die man durch q feste Grundpunkte legen kann. Jede topologische Abbildung der Grundebene auf sich, bei welcher die Grundpunkte permutiert werden, führt diese Gesamtheit in sich über. Wir bezeichnen die Gruppe dieser topologischen Abbildungen mit \mathcal{V} . Jedes Element von \mathcal{V} kann auf mehrfache Weise durch eine topologische Deformation erzeugt werden. Ein Gruppenelement von \mathcal{V} heisst ferner simpel, wenn es eine topologische Deformation gibt, bei welcher in jeder Phase die Grundpunkte festbleiben. Wird eine Grundkurve Γ mit den Seiten s_{1i} ($i=1, 2, \dots, q$) durch die simple Abbildung S in die Grundkurve Γ' mit den Seiten s'_{1i} ($s_{1i} \rightarrow s'_{1i}$) transformiert, so enthält das von den Seiten s_{1i}, s'_{1i} gebildete Zweieck im Inneren keinen Grundpunkt. Dabei kann s'_{1i} s_{1i} mehrfach durchsetzen (überschlagenes Zweieck). Haben umgekehrt zwei Grundkurven Γ, Γ' die Eigenschaft, dass sämtliche Zweiecke s_{1i}, s'_{1i}

keine Grundpunkte im Inneren enthalten, so geht Γ' aus Γ durch eine simple Abbildung hervor. Wir beweisen nun den Satz:

Die simplen Abbildungen bilden einen Normalteiler \mathcal{S} von \mathcal{K} . Zum Beweise zeigen wir, dass für zwei beliebige Elemente $S \in \mathcal{S}$ und $D \in \mathcal{K}$ stets $D^{-1}SD \in \mathcal{S}$ erfüllt ist. Es gehe Γ_1 durch D in Γ_2 über.

$$\Gamma_2 = D(\Gamma_1)$$

Ferner gelte

$$\Gamma_2' = S(\Gamma_2) \quad \Gamma_1' = D^{-1}(\Gamma_2')$$

Bezeichnen wir die Seiten der betrachteten Grundkurven mit

$$\Gamma_1: \alpha_i \quad \Gamma_1': \alpha_i' \quad \Gamma_2: \alpha_{2i} \quad \Gamma_2': \alpha_{2i}'$$

so geht jedes Zweieck s_{21}, s'_{21} durch D^{-1} in ein Zweieck s_{11}, s'_{11} über und da es sich um eine topologische Abbildung handelt, können auch in den Zweiecken s_{11}, s'_{11} keine Grundpunkte liegen. Damit ist $D^{-1}SD$ als simple Abbildung erkannt und unser Satz bewiesen. Wir definieren jetzt die Faktorgruppe

$$\mathcal{K}/\mathcal{S} = \mathcal{L}$$

als die Gruppe der Kurvenänderungen. Eine Kurvenänderung bedeutet so formal eine Nebenklasse $D\mathcal{S}$. Um den Begriff weiter zu präzisieren, führen wir das geordnete Kurvenpaar Γ_1, Γ_2 ein. Γ_1 heisst Bezugskurve, Γ_2 Neukurve. Ein solches bestimmt sicher eindeutig eine Nebenklasse $D\mathcal{S}$ und damit eine Kurvenänderung. Wir schreiben daher für eine Kurvenänderung a , die durch das geordnete Kurvenpaar Γ_1, Γ_2 festgelegt wird, auch $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

$$a = D\mathcal{S} = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$$

Für das inverse Element gilt dann $a^{-1} = \{\Gamma_2, \Gamma_1\} \cdot \{S(\Gamma_2), S(\Gamma_1)\}$ ist eine Darstellung des Einselementes von \mathcal{L} , auch fernerhin triviale Kurvenänderung genannt. Man verifiziert leicht die beiden Relationen

$$(1/1) \{\Gamma_1, \Gamma_2\} = \{S_i(\Gamma_1), S_k(\Gamma_2)\}$$

$$(1/2) \{\Gamma_1, \Gamma_2\} = \{D_i(\Gamma_1), D_k(\Gamma_2)\}$$

(D_i beliebig, D_k hängt von D_i ab)

(1/1) folgt aus der Definition der Kurvenänderung unmittelbar, (1/2) erweist sich als richtig, wenn man

$$\Gamma_2 = D(\Gamma_1) \quad D_k = D D_i D^{-1}$$

setzt. Wir können mithin als Bezugskurve eine beliebige Grundkurve wählen, die Neukurve ist dann bis auf eine simple Abbildung festgelegt. Bezüglich der Normierung der Neukurve verfügen wir, dass Grundpunkte, die in sich übergehen, die Punktnummer beibehalten.

Nach dem Gesagten, kommt es bei der Kurvenänderung nur auf die relative Lage des Kurvenpaares an. Metrische Einzelheiten sind ohne Belang. Wir können daher eine Kurvenänderung durch eine Lageangabe für die Neukurve definieren, welche für jede Seite drei Aussagen macht:

- 1) Angabe der Endpunkte
- 2) Angabe, ob sie erst in \mathcal{F} oder \mathcal{O} verläuft
- 3) Angabe der Reihenfolge, in welcher sie die Seiten der Bezugskurve schneidet.

Geht die neue Seite μ' vom Grundpunkt \bar{k} aus, verläuft erst im Innengebiet (Aussengebiet), durchsetzt der Reihe nach die Seiten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ der Bezugskurve und endet im Grundpunkt \bar{l} , so wollen wir dies ausdrücken durch

$$(1/3) \mu' : \bar{k}, \mathcal{F}(\mathcal{O}), \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, \bar{l}$$

Die Endpunktsangabe kann entfallen, wenn die Permutation der Punktnummern gegeben ist. Wir erläutern nun die Lageangabe an Beispielen und führen gleichzeitig die wichtigsten Kurvenänderungen ein.

Der einfachste Fall liegt bei den "scheinbaren Kurvenänderungen" vor. Bei ihnen bleibt die Grundkurve bis auf die Normierung erhalten. In Fig. 2a ist die Drehung d dargestellt. Hier bleibt auch die Kurvenorientierung erhalten.

Die Lageangabe lautet:

$$\text{Punktnummer-Permutation } \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & q-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Es werden keine Seiten der Bezugskurve geschnitten¹⁾.

In Fig. 2b ist die Klappung κ dargestellt. Hier wechselt die Orientierung. Die Lageangabe lautet:

$$\pi = (0 \ 1)(2 \ q-1)(3 \ q-2) \dots$$

Drehung und Klappung erzeugen die Untergruppe der scheinbaren Kurvenänderungen, welche zur Diedergruppe der Ordnung $2q$ isomorph ist. Bei 3 Grundpunkten entartet \mathcal{L} in die Gruppe der scheinbaren Kurvenänderungen.

Mit Tausch $t(\underline{\nu})$ bezeichnen wir die in Fig. 3 dargestellte Kurvenänderung. Bei ihr durchläuft die Neukurve 2 benachbarte Grundpunkte in umgekehrter Reihenfolge.

Lageangabe:

$$\pi = (\nu, \nu+1) \quad \underline{\nu-1}': \mathcal{F} \quad \underline{\nu+1}': \mathcal{G}$$

Neben dem Tausch ist der in Fig. 4 dargestellte Schnitt $s(\underline{\mu}, \underline{\nu})$ für die Gruppe \mathcal{L} von fundamentaler Bedeutung. Unter ihm verstehen wir eine Kurvenänderung, bei welcher die Punktnummern erhalten bleiben, dagegen zwei nicht benachbarte Seiten je einmal geschnitten werden. Seine Vorschrift lautet somit:

$$\pi = 1 \quad \underline{\mu}': \mathcal{F}, \underline{\nu} \quad \underline{\nu}': \mathcal{F}, \underline{\mu}$$

1) Fernerhin wird vereinbart, dass nur die in der Lageangabe aufgeführten Durchsetzungen der Bezugskurve vorkommen.

Schnitt und Tausch wurden schon von Fräulein Drape () eingeführt, ohne dass gruppentheoretische Überlegungen daran angeknüpft wurden. Im nächsten Paragraphen werden die bisher eingeführten Kurvenänderungen eingehend behandelt, einsteilen haben wir sie als Beispiele nicht trivialer Kurvenänderungen erkannt.

Wir befassen uns nun mit den Normalteilern von \mathcal{L} . Bleiben bei einer Kurvenänderung die Punktnummern fest ($\pi=1$), so sprechen wir von einer Schnittänderung. Der Schnitt war eine spezielle Schnittänderung. Man erkennt leicht, dass die Schnittänderungen einen Normalteiler \mathcal{N} von \mathcal{L} bilden. Aus

$$a \in \mathcal{L} \quad \pi(a) \neq 1 \quad m, \nu \in \mathcal{N} \quad \text{folgt} \\ a m, \bar{a}^{-1} \in \mathcal{N}, \text{ da } \pi(a m, \bar{a}^{-1}) = 1$$

Da wir jeder Kurvenänderung ihre Punktnummern-Permutation zuordnen können, besteht ein Homomorphismus zwischen \mathcal{L} und der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_q der Ordnung $q!$, bei welchem \mathcal{N} auf das Einselement von \mathcal{L} abgebildet wird. Damit ergibt sich der Isomorphismus

$$(1/4) \quad \mathcal{L}/\mathcal{N} \cong \mathcal{S}_q$$

Es sei nun $q \geq 5$ und

$$\mathcal{S}_q \supset \mathcal{A}_q \supset \mathcal{F}$$

die Kompositionsreihe der symmetrischen Gruppe. Ihr entspricht nach dem zweiten Isomorphiesatz die Kompositionsgruppe von \mathcal{L} nach \mathcal{N}

$$\mathcal{L} \supset \bar{\mathcal{L}} \supset \mathcal{N}$$

wobei $\bar{\mathcal{L}}$ durch $\bar{\mathcal{L}}/\mathcal{N} \cong \mathcal{A}_q$ gegeben ist.

Benutzen wir vorweggreifend den 1. Hauptsatz der Theorie der Grundkurven, welcher besagt: die Tausche $t(\underline{\nu})$ ($\nu = 1, 2, \dots, q-1$)

bilden ein vollständiges Erzeugendensystem von \mathcal{L} . Ferner ist $\pi(t(\underline{v})) = (v, v+1)$ und $(v, v+1)$ gehört zur ungeraden Permutationsklasse. Hieraus folgt aber, dass der Normalteiler \mathcal{N} aus den Elementen von \mathcal{L} besteht, die sich aus einer geraden Anzahl von Tauschen aufbauen. Im Falle $q \neq 4$ kann man analog zur Kompositionsreihe

$$\mathcal{N}_4 \supset \mathcal{N}_4 \supset \mathcal{N}_4 \supset \{1, (1,2), (3,4)\} \subset \mathcal{S}$$

eine Kompositionsreihe von \mathcal{N}_4 nach \mathcal{N}_4 aufstellen.

§ 2 Einfache Kurvenänderungen.

In diesem Abschnitt sollen die schon bekannten und noch einige weitere Kurvenänderungen diskutiert werden. Einfach soll dabei eine Änderung heißen, wenn die Mehrzahl der Seiten der Bezugskurve in sich übergehen. Es wird unser Ziel sein, diese Änderungen auf ein Gruppenprodukt zurückzuführen, dessen Faktoren Tausche sind. Wir begnügen uns ein solches Produkt anzugeben und sehen von seiner Reduzierung ab. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden uns in die Lage setzen, im nächsten Paragraphen die Erzeugenden von \mathcal{L} und \mathcal{N} zu bestimmen.

Mit Vorteil bedienen wir uns der Begriffe "Spiegeländerung" und "konjugierte Änderung". Zwei Änderungen a, \tilde{a} heißen dabei Spiegeländerungen, wenn sie in der Permutation der Punktnummern übereinstimmen und die entsprechenden Seitenvorschriften sich lediglich in der Gebietsangabe unterscheiden. Schreibt a für die Seite \underline{v}'

$$\underline{v}' : \mathcal{F}(\mathcal{O}_2), v_1, v_2 \dots v_r$$

vor, so soll bei \tilde{a} die Vorschrift für \underline{v}' lauten

$$\underline{v}' : \mathcal{O}(\mathcal{F}), v_1, v_2 \dots v_r$$

Ist die Bezugskurve eine Gerade, so kann man bei Spiegeländerungen die Neukurven so wählen, dass sie spiegelbildlich zur Bezugskurve liegen. Für Spiegeländerungen gilt

$$(2/1) \text{ Aus } a = a_1 a_2 \dots a_r \text{ folgt } \tilde{a} = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_r$$

Bilden wir zu den schon bekannten Änderungen die Spiegeländerungen, so ergibt sich zunächst trivial

$$\tilde{d} = d \quad \tilde{k} = k$$

Für den Tausch und den Schnitt folgt

$$(2/2) \quad \tilde{t}(\underline{v}) = t^{-1}(\underline{v}) \quad ; \quad \tilde{s}(\underline{v}, \underline{v}) = s^{-1}(\underline{v}, \underline{v})$$

Wir können das leicht durch Ausführen der Produkte $t(\underline{v}) \cdot \tilde{t}(\underline{v}), s(\underline{v}, \underline{v}) \cdot \tilde{s}(\underline{v}, \underline{v})$ beweisen.¹⁾ Besitzt a die Rückführung

$$a = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_r^{\alpha_r} \quad (t_i \text{ beliebiger Tausch})$$

so lautet die Rückführung von \tilde{a}

$$\tilde{a} = t_1^{-\alpha_1} t_2^{-\alpha_2} \dots t_r^{-\alpha_r}$$

Ferner gilt

$$(\tilde{a})^{-1} = (\tilde{a}^{-1}) = a^*$$

a, a^* heißen konjugierte Änderungen. Schnitt und Tausch sind mit ihrer konjugierten Änderung identisch.

Zunächst wollen wir den Verlauf der Neukurve bei einer Schnittpotenz $s(\underline{v}, \underline{v})^\alpha \quad \alpha > 0$ untersuchen. Wir behaupten, für die Neukurve gilt folgende Vorschrift:

1) dabei wird die Neukurve von $t(\underline{v})$ als Bezugskurve für $\tilde{t}(\underline{v})$ gewählt.

$$\pi = 1$$

$$\underline{\mu}' : \mathcal{F}, \underline{\nu}, \underline{\mu}, \underline{\nu}, \dots \quad (\underline{\nu} \ \alpha\text{-mal}, \underline{\mu} \ (\alpha-1)\text{-mal})^1$$

$$\underline{\nu}' : \mathcal{F}, \underline{\mu}, \underline{\nu}, \underline{\mu}, \dots \quad (\underline{\mu} \ \alpha\text{-mal}, \underline{\nu} \ (\alpha-1)\text{-mal})$$

Wir beweisen die Aussage induktiv. Sie ist richtig für $\alpha = 1$. Gilt sie für $\alpha - 1$, so verifizieren wir sie für α , indem wir die Operationen $s^{\alpha-1}(\underline{\mu}, \underline{\nu})$, $s(\underline{\mu}, \underline{\nu})$ sukzessive ausführen (Fig. 5). Durch unsere Aussagen über Spiegeländerungen (2/1), (2/2) beherrschen wir auch $s^{-\alpha}(\underline{\mu}, \underline{\nu})$, wobei sich

$$s^{-\alpha}(\underline{\mu}, \underline{\nu}) = \tilde{s}^{\alpha}(\underline{\mu}, \underline{\nu})$$

ergibt. Wir diskutieren nun die Änderung, die einer Tauschpotenz $t^{2\alpha}(\underline{\nu})$ entspricht. Zunächst bilden wir $t^2(\underline{\nu})$ (Fig. 6).

Wir erhalten eine Neukurve mit der Vorschrift

$$\pi = 1 \quad \underline{\nu-1}' : \mathcal{F}, \underline{\nu+1} \quad \underline{\nu+1}' : \mathcal{F}, \underline{\nu-1}$$

Dieser Bedingung genügt aber auch der Schnitt $s(\underline{\nu-1}, \underline{\nu+1})$.

$$(2/3) \quad t^2(\underline{\nu}) = s(\underline{\nu-1}, \underline{\nu+1})$$

Die geraden Tauschpotenzen sind also Spezialfälle der Schnittpotenz. Wir haben ferner $t^{2\alpha+2}(\underline{\nu})$ zu untersuchen, wozu wir sukzessive die Operationen $s^{\alpha}(\underline{\nu-1}, \underline{\nu+1})$, $t(\underline{\nu})$ ausführen. (Fig. 7). Damit erhalten wir für $t^{2\alpha+2}(\underline{\nu})$ die Vorschrift

$$\pi = (\underline{\nu}, \underline{\nu+1})$$

$$\underline{\nu-1}' : \mathcal{F}, \underline{\nu+1}, \underline{\nu-1}, \dots \quad (\underline{\nu+1} \ \alpha\text{-mal}, \underline{\nu-1} \ \alpha\text{-mal})$$

$$\underline{\nu+1}' : \mathcal{O}, \underline{\nu-1}, \underline{\nu+1}, \dots \quad (\underline{\nu-1} \ \alpha\text{-mal}, \underline{\nu+1} \ \alpha\text{-mal})$$

1) die Seite $\underline{\mu}'$ schneidet $\underline{\nu}$ α -mal, $\underline{\mu}$ $(\alpha-1)$ -mal

Als nächstes prüfen wir, wenn 2 Tauschpotenzen kommutativ sind. Es genügt, das Produkt $t(\underline{\mu}) \cdot t^{\epsilon}(\underline{\nu})$, $\epsilon = \pm 1$ zu untersuchen. Liegen zwischen $\underline{\mu}$ und $\underline{\nu}$ beide Mal mindestens 2 Seiten, so ist das Produkt kommutativ, weil die Vorschriften für $t(\underline{\mu})$, $t(\underline{\nu})$ verschiedene Seiten betreffen. Wir betrachten nun $t(\underline{\mu})$, $t(\underline{\mu+2})$. Die Ausführung der Operationen ergibt auch hier die Vertauschbarkeit; sie besteht dagegen für $t(\underline{\mu})$, $t(\underline{\mu+1})$ nicht, da die zugeordneten Transpositionen $(\underline{\mu}, \underline{\mu+1})$, $(\underline{\mu+1}, \underline{\mu+2})$ nicht vertauschbar sind. Wir haben das Ergebnis: Zwei Tauschpotenzen $t^{\alpha}(\underline{\mu})$, $t^{\beta}(\underline{\nu})$ sind vertauschbar, wenn $\underline{\mu}$, $\underline{\nu}$ nicht benachbart sind.

Als Tauschprodukt $\tau(\underline{\mu}, \underline{\nu})$ führen wir die Änderung ein mit der Rückführung

$$(2/4) \quad \tau(\underline{\mu}, \underline{\nu}) = t(\underline{\mu+1})t(\underline{\mu+2}) \dots t(\underline{\nu-1}) \quad \bar{\nu} \text{ auf } \underline{\mu+2} \ \underline{\mu-1}^1$$

Wir behaupten, $\tau(\underline{\mu}, \underline{\nu})$ entspricht der Vorschrift

$$(2/5) \quad \pi = (\bar{\nu}, \underline{\mu+1}, \dots, \bar{\nu-1}, \underline{\nu-1}) \quad \underline{\mu}' : \mathcal{F} \quad \underline{\nu}' : \mathcal{O} \quad \underline{\nu-1}' : \mathcal{O}$$

Dies ist richtig für $\bar{\nu} = \underline{\mu+2}$. Wir verifizieren die Aussage induktiv, indem wir sukzessive die Operationen $\tau(\underline{\mu}, \underline{\nu-1})$, $t(\underline{\nu-1})$ ausführen. (Fig. 8). Das Tauschprodukt ist eine Kurvenänderung, bei der keine Seiten geschnitten und nur 3 Seiten, darunter 2 benachbarte, wesentlich²⁾ geändert werden. Natürlich beherrschen wir auch Rückführung und Vorschrift von $\tilde{\tau}(\underline{\mu}, \underline{\nu})$. Aus der Neukurve von $\tau(\underline{\mu}, \underline{\nu})$ lesen wir ferner die Vorschrift für $\tau^{-1}(\underline{\mu}, \underline{\nu})$ ab. Sie lautet:

$$(2/6) \quad \pi = (\bar{\nu}, \underline{\mu+1}, \dots, \bar{\nu-2}, \underline{\nu-1}) \quad \underline{\nu}' : \mathcal{F} \quad \underline{\mu}' : \mathcal{O} \quad \underline{\mu+1}' : \mathcal{O}$$

Es ist also

$$\tau(\underline{\nu-1}, \underline{\mu}) = \tau^{-1}(\underline{\mu}, \underline{\nu}).d$$

$$(2/7) \quad d = t(\underline{\mu+1}) \cdot t(\underline{\mu+2}) \dots t(\underline{\mu-1})$$

Diese Formel gestattet $t(\underline{\mu})$ durch die übrigen Tausche auszudrücken, indem man von der aus (2/7) sich ergebenden

- 1) auf $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ liegen die Grundpunkte $\bar{\alpha}, \bar{\alpha+1}, \dots, \bar{\beta-1}, \bar{\beta}$
- 2) eine Seite der Neukurve heisst wesentlich geändert, wenn sie mit keiner Seite der Bezugskurve zusammenfällt

Identität ausgeht

$$t(\underline{\mu})t(\underline{\mu+1})\dots t(\underline{\mu-2}) = t(\underline{\mu+1})t(\underline{\mu+2})\dots t(\underline{\mu-1})$$

$$(2/8) \quad t(\underline{\mu}) = t(\underline{\mu+1})t(\underline{\mu+2})\dots t(\underline{\mu-1})t(\underline{\mu-2})\dots t(\underline{\mu+1})$$

Evident ist die Beziehung

$$(2/9) \quad t(\underline{\mu+1}) = d \cdot t(\underline{\mu}) \cdot d^{-1},$$

welche gestattet mittels der Drehung alle Tausche auf einen zurückzuführen.

Als Wechsel $w(\underline{\mu}, \bar{v})$ (Fig.9) führen wir eine Änderung ein mit der Vorschrift:

$$(2/10) \quad \pi = (\underline{\mu}, \bar{v}) \quad \underline{\mu-1}', \underline{\mu}' \text{ im } \mathcal{F} \quad \underline{v-1}', \underline{v}' \text{ im } \mathcal{O}$$

Ohne weiteres ergibt sich

$$w^{-1}(\underline{\mu}, \bar{v}) = \tilde{w}(\underline{\mu}, \bar{v}) = w(\bar{v}, \underline{\mu})$$

Um die Rückführung des Wechsels durchzuführen, gehen wir von den Identitäten aus

$$(\underline{\mu}, \bar{v}) = (\underline{\mu}, \underline{\mu+1})(\underline{\mu+1}, \bar{v})(\underline{\mu}, \underline{\mu+1})$$

$$(\underline{\mu}, \bar{v}) = (\underline{v-1}, \bar{v})(\underline{\mu}, \underline{v-1})(\underline{v-1}, \bar{v})$$

Ihnen entsprechen die Rekursionsformeln für den Wechsel

$$w(\underline{\mu}, \bar{v}) = t(\underline{\mu})w(\underline{\mu+1}, \bar{v})t(\underline{\mu})$$

$$= t(\underline{v-1})w(\underline{\mu}, \underline{v-1})t(\underline{v-1})$$

Den Beweis führen wir in üblicher Weise. Fig.10 stellt die sukzessive Ausführung der Operationen $t(\underline{\mu}) \cdot w(\underline{\mu+1}, \bar{v})$, $t(\underline{\mu})$ dar. Die Rekursionsformeln ergeben für den Wechsel die Rückführungen

$$(2/11) \quad w(\underline{\mu}, \bar{v}) = t(\underline{\mu})t(\underline{\mu+1})\dots t(\underline{v-1})t(\underline{v-2})\dots t(\underline{\mu})$$

$$= t(\underline{v-1})t(\underline{v-2})\dots t(\underline{\mu})t(\underline{\mu+1})\dots t(\underline{v-2})$$

Als nächste Kurvenänderung diskutieren wir die Kehre $k(\underline{\mu}, \underline{v})$ (Fig.11) mit der Vorschrift:

$$(2/12) \quad \pi = \left(\begin{array}{cccc} \underline{\mu+1} & \underline{\mu+2} & \dots & \bar{v} \\ \bar{v} & \bar{v-1} & \dots & \underline{\mu+1} \end{array} \right) \quad \underline{\mu}': \mathcal{F} \quad \underline{v}': \mathcal{O}$$

Zunächst bestätigt man leicht

$$k^*(\underline{\mu}, \underline{v}) = k(\underline{\mu}, \underline{v})$$

Auch sie enthält als Spezialfall den Tausch, für welchen somit gilt

$$t(\underline{v}) = \mathcal{C}(\underline{v-1}, \underline{v+1}) = w(\bar{v}, \underline{v+1}) = k(\underline{v-1}, \underline{v+1})$$

Für die Kehre gilt die Rekursionsformel

$$k(\underline{\mu}, \underline{v}) = k(\underline{\mu+1}, \underline{v-1}) \cdot w(\underline{\mu+1}, \bar{v})$$

Sie gestattet mit Formel (2/11) die Kehre auf Tausche zurückzuführen. Der Beweis erfolgt wieder durch sukzessive Ausführung der Operationen (Fig.12). Die Kehre ist für die Grundkurventheorie deswegen bedeutungsvoll, weil zwischen ihr und dem Schnitt ein einfacher Zusammenhang besteht.

$$(2/13) \quad s(\underline{\mu}, \underline{v}) = k^2(\underline{\mu}, \underline{v})$$

Die zweimalige Ausführung von $k(\underline{\mu}, \underline{v})$ ist in Fig.13 wieder gegeben. Die in Fig.6 bewiesene Formel (2/3) ist ein Spezialfall von (2/13).

Bei der Bedeutung des Schnittes für die Theorie wollen wir uns mit der prinzipiell bewiesenen Rückführbarkeit des Schnittes noch nicht begnügen. Wir schlagen einen zweiten Weg ein, der uns bequeme Formeln für den Schnitt liefern wird und gehen von den Potenzen des Tauschproduktes aus. Wie der wird induktiv gezeigt, dass $\mathcal{C}^{\alpha}(\underline{\mu}, \underline{v})$ der Vorschrift

$$\pi = (\bar{v}, \bar{v-1}, \dots, \underline{\mu+2}, \underline{\mu+1})^{\alpha}$$

$$\underline{\mu}': \bar{\mu}, \mathcal{F}, \underline{\mu+1} \quad \underline{v-1}': \bar{v}, \mathcal{O}, \underline{\mu+1} \quad \underline{v}': \underline{\mu+1}, \mathcal{F}, \underline{\mu}, \underline{v+1}$$

genügt, wenn für α selbst die Ungleichung $1 \leq \alpha \leq \sqrt{\mu-1}$ gilt (Fig.14a). Bilden wir nun das Produkt

$$\left(\tau(\mu, \nu) \right)^{\sqrt{\mu-1}} \cdot \tau(\mu, \nu)$$

(Fig.14b), so erhalten wir die Formel

$$(2/14) \quad s(\mu, \nu) = \left(\tau(\mu, \nu) \right)^{\sqrt{\mu-1}}$$

und da ferner $s(\mu, \nu) = s(\nu, \mu)$,

$$s(\mu, \nu) = \left(\tau(\nu, \mu) \right)^{\sqrt{\mu-1}}.$$

Mit der Kehre beherrschen wir auch die Rückführung der Klappung

$$(2/15) \quad K = k(\underline{0}, \underline{q-1}) .$$

Wir beenden diesen Abschnitt, indem wir noch einige wichtige Relationen von \mathcal{K} herleiten. Setzen wir abkürzend $t = t(\underline{0})$, so folgt nach leichter Rechnung aus (2/7), (2/9)

$$(td)^{q-1} = (dt)^{q-1} = 1$$

und aus $(\tilde{t}d)^{q-1} = 1$

$$(t^{-1}d)^{q-1} = 1 .$$

Setzen wir nun $td = h$, so gelten bezüglich d, h die Relationen

$$(2/16) \quad d^q = 1 \quad h^{q-1} = 1 \quad (hd^{-2})^{q-1} = 1 .$$

§ 3 Die Hauptsätze.

Alle bisher behandelten Kurvenänderungen konnten auf Tausche zurückgeführt werden. Der erste Hauptsatz der Theorie der Grundkurven besagt, dass dies allgemein möglich ist.

1. Hauptsatz: Die Tausche bilden in der Gruppe \mathcal{K} der Kurvenänderungen ein vollständiges System von Erzeugenden.

Zum Beweis¹⁾ greifen wir eine beliebige Kurvenänderung a heraus. Sie möge für die wesentlich abgeänderte Seite λ' der Neukurve die Vorschrift enthalten:

$$\lambda': \bar{\nu}, \mathcal{F}(\underline{0}), \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r, \bar{\mu}$$

Es sei $a = \{ \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \}$ und S eine spezielle simple Abbildung, welche \mathcal{F}_0 in \mathcal{F}_1 überführe. Ein zu S gehörender Deformationsprozess werde durch den Parameter σ , $0 \leq \sigma \leq 1$ beschrieben, sodass in der Phase σ \mathcal{F}_0 mit den Seiten μ die Grundkurve $\mathcal{F}(\sigma)$ mit den Seiten $\mu(\sigma)$ entspreche. Von der Seite ν (σ) fordern wir, dass sie mit der Seite λ' ein Kurvenstück

$\bar{\nu} P(\sigma)$ gemeinsam habe, dessen Länge mit σ monoton wachse. In der Endphase soll das Kurvenstück $P(1) \bar{\mu}$ auf λ' keine Seite mehr von \mathcal{F}_0 durchsetzen. Eine solche topologische Deformation ist gewiss für jedes λ' angebar. In Figur 15 sind für eine einfache Lage von λ' einige Phasen einer solchen Deformation gezeichnet. Das orientierte Kurvenstück $P(1) \bar{\mu}$ auf λ' schneidet die Seiten von \mathcal{F}_0 in derselben Reihenfolge, wie λ' die Seiten von \mathcal{F}_0 (s. Fig. 15d)²⁾. Wir nehmen jetzt eine Reihe nicht trivialer Änderungen vor, die das Ziel haben,

1) siehe Fricke-Klein, Automorphe Funktionen, Bd.1, S.301
2) natürlich kann $P(1) \bar{\mu}$ die Seiten $\nu_1(1), \nu_2(1)$ mehrfach schneiden, sodass genau genommen die Reihenfolge lautet:
 $\nu_1(1), \nu_1(1), \dots, \nu_1(1), \nu_2(1), \dots, \nu_2(1), \nu_2(1), \dots, \nu_2(1)$

sage über die Erzeugenden von \mathcal{N} .

2.Hauptsatz: Die Schnitte bilden in der Gruppe \mathcal{N} der Schnittänderungen ein vollständiges System von Erzeugenden.

Der nun angeführte Beweis beruht nicht auf dem ersten Hauptsatz, sondern gestattet vielmehr jenen noch einmal auf anderem Weg herzuleiten. Wir greifen eine beliebige Schnittänderung $b = \{\Gamma_0, \Gamma_2\}$ heraus, welche für die Seite μ' vorschreiben mag:

$$\mu' : \mathcal{F}(0), \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$$

Wieder führen wir eine Hilfsänderung $G_\mu = \{\Gamma_0, \Gamma_1'\}$ ein, welche für μ' die gleiche Vorschrift wie b enthält. Durch G_μ sollen ausser μ nur die Seiten von Γ_0 abgeändert werden, welche μ' durchsetzt, also die Seiten ν_i . Wir nennen μ' Primärseite, ν_i' Folgeseiten von G_μ . $\{\nu_i'\}$ sei nun die Teilmenge von $\{\nu_i\}$, die jede verschiedene Seite nur einmal enthält. Wir ordnen diese Seiten in der Weise, wie sie in der Folge $\mu_{i+1}', \mu_{i+2}', \dots$ auftreten. Ist μ_1', μ_2', \dots diese Anordnung der Folgeseiten, so legen wir nach dieser sukzessive ihre Lage fest. Es sei dies durchgeführt bis zur Seite μ_{i-1}' . Die Seiten $\mu', \mu_{i+1}', \dots, \mu_{i-1}'$ bilden dann ein von $\bar{\mu}$ nach $\bar{\mu}_i$ orientiertes Kurvenstück \mathcal{K} . Wir sagen, der Grundpunkt $\bar{\mu}_{i+1}$ liegt auf dem rechten (linken) Ufer von \mathcal{K} , wenn man von einem rechtsufrigen (linksufrigen) Punkt von \mathcal{K} aus nach $\bar{\mu}_{i+1}$ gelangen kann durch einen Kurvenzug, der weder \mathcal{K} noch Γ_0 schneidet. μ_i' verläuft nun von $\bar{\mu}_i$ aus auf demselben Ufer wie $\bar{\mu}_{i+1}$ in unmittelbarer Nachbarschaft von \mathcal{K} (Der Abstand $a(Q)$ eines auf μ_i' laufen-

den Punktes Q von \mathcal{K} sei so klein gewählt, dass im Inneren jedes von \mathcal{K} , μ_i' und $a(Q)$ begrenzten Gebietes kein Grundpunkt enthalten ist) bis zu einem Punkt Q_0 , von dem aus ein Kurvenzug nach $\bar{\mu}_{i+1}$ existiert, der Γ_0 nicht schneidet. Eine solche Hilfsänderung ist sicher für jede Seite von Γ_2 angebar. In Figur 17 ist sie für ein einfaches Beispiel angegeben. Entweder stimmt G_μ mit b überein, oder unter den Seiten $\mu_{i+1}', \mu_{i+2}', \dots$ von Γ_1' gibt es eine erste λ' , die der Vorschrift von b nicht entspricht. Wir können nun eine Hilfsänderung $G_\lambda = \{\Gamma_1', \Gamma_2\}$ so vornehmen, dass λ' von Γ_2' der Vorschrift von b genügt. Hier übersieht man sofort, dass durch G_λ die Seiten $\mu, \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \dots, \mu_{i-1}$ von Γ_1' nicht geändert werden. Durch Fortsetzen dieses Verfahrens müssen wir in höchstens $q-1$ Schritten zu der von b vorgeschriebene Grundkurve gelangen. Wir haben jetzt die Rückführung von G_μ vorzunehmen. Dazu untersuchen wir das Verhalten von Primärseite und erster Folgeseite genauer. z_1 sei die Anzahl der verschiedenen Seiten von Γ_0 , welche von der Primärseite μ' durchsetzt werden (abgesehen von μ , falls es durchsetzt wird). z_1 heiße auch Kennzahl μ_μ von G_μ . Unter z_2 verstehen wir entsprechend die Anzahl der verschiedenen Seiten von Γ_0 , welche die erste Folgeseite μ_1' von G_μ durchsetzt (auch hier mit Ausnahme von μ_1 , falls es auftritt). Es liegt nun folgender Sachverhalt vor. Die Primärseite schneidet die zu zählenden Seiten

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$$

die erste Folgeseite schneidet höchstens die zu zählenden Seiten

$$\mu, \mu_2, \dots, \mu_s$$

Damit haben wir als erstes Ergebnis $z_2 \leq z_1$. Ferner muss $z_2 \neq 0$ sein, sonst bestünde für die 1. Folgeseite keine Abänderungsvorschrift. Im Fall $z_1 = 1$ erhalten wir damit sofort $z_1 = z_2 = 1$. Man überzeugt sich leicht, dass dies der Fall der Schnittpotenz ist. Bei der Diskussion des Falles $z_1 > 1$

unterscheiden wir 3 Unterfälle:

- a) Die Primärseite μ' schneidet nach μ_1 noch eine Seite $\lambda \neq \mu$. Dann schneidet die erste Folgeseite λ nicht, da schon vorher μ_1 zugänglich wird.
- b) Die Primärseite schneidet nach μ_1 Seite μ . Dann kann nach μ die Primärseite keine von μ und μ_1 verschiedene Seite mehr schneiden, sonst wäre μ_1 nicht die 1. Folgeseite von G_μ . Die Primärseite muss also vor μ_1 eine Seite $\lambda \neq \mu_1, \mu$ schneiden. Auch hier ist der Vorschrift über die Bildung der Folgeseiten zu entnehmen, dass μ_1 Seite λ nicht schneidet, weil μ_1 von μ_2 aus K entgegenläuft.
- c) Die Primärseite schneidet nach μ_1 keine Seite mehr. Entspricht Fall b).

Damit haben wir das Ergebnis, aus $z_1 > 1$ folgt stets $z_1 > z_2$. Wir können nun G_μ auf Schnitte zurückführen. Für $\mu = 1$ ist dies schon erledigt. Es sei $\mu > 1$. Wir wenden die Darstellung einer Schnittänderung durch ein Produkt der Hilfsänderungen G_λ jetzt auf die Hilfsänderung G_μ selbst an. Dabei beginnen wir mit der 1. Folgeseite von G_μ und erhalten

$$G_\mu = G_{\lambda_1} \cdot G_{\lambda_2} \cdot \dots$$

Da λ_1 die 1. Folgeseite von G_μ ist, folgt $\mu_1 < \mu = s$. Aber auch λ_1 ist kleiner als s , denn die Primärseite von G_{λ_1} kann höchstens die Seiten μ, μ_2, \dots, μ_s schneiden und sie muss die Seitennummer einer dieser Seiten tragen. Ebenso findet man, dass $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ kleiner als die Kennziffer von G_μ sind. Man kann also eine Hilfsänderung G_μ als ein Produkt solcher Hilfsänderungen G_λ schreiben und es die Kennziffer von G_μ grösser als jede Kennziffer von G_λ ist. Die Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt die Rückführung von G_μ auf Schnittpotenzen. Damit ist der 2. Hauptsatz bewiesen.

Mittels des 2. Hauptsatzes lässt sich leicht der erste beweisen. Ist a eine beliebige Kurvenänderung, so schreiben wir $\tilde{w}(a)$ als Produkt von Transpositionen $(v, v+1)$. Entsprechend

diesem Produkt bilden wir ein korrespondierendes, in welchem anstelle der Transposition $(v, v+1)$ der Tausch $t(v)$ auftritt. Bezeichnen wir diese Kurvenänderung mit $a' = \{v, v'\}$ und war $a = \{v, v''\}$, so haben wir nur noch die Rückführung von $\{v', v''\}$ vorzunehmen. Diese Änderung ist aber eine Schnittänderung. Aus dem 2. Hauptsatz und der Rückführbarkeit des Schnittes, welche im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, folgt damit der erste Hauptsatz.

§ 4 Darstellung Riemannscher Flächen.

Wir gehen von einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche aus und projizieren ihre Windungspunkte auf die Grundebene, eine unter der Fläche ausgebreiteten Gaußschen Zahlenebene. Die Spurpunkte a_ν der Windungspunkte heissen Grundpunkte, ihre Anzahl bestimmt den Grad der Fläche. Wir beschränken unsere Betrachtung auf Flächen endlichen Grades. Die Gesamtheit der Flächenpunkte, welche denselben Grundpunkt a_ν als Spurpunkt besitzt, bildet eine Windungssorte a_ν . Eine Windungssorte kann somit auch schlichte Punkte enthalten, in denen die Fläche nicht verzweigt ist. Flächenpunkte, die zu Windungssorten gehören, heissen Sortenpunkte. Durch die q Grundpunkte der Fläche q . Grades legen wir eine normierte Grundkurve. Diese projizieren wir auf sämtliche Blätter der Riemannschen Fläche. Es entstehen lauter kongruente Innen- und Aussengebiete (Halbblätter), die paarweise über eine Suite (Kurvenstück aus einer oder mehreren Seiten) zusammenhängen. Da die Fläche einfach zusammenhängend ist, lässt sie sich topologisch auf die Gaußsche Zahlenebene abbilden; das so entstehende Bild der Fläche heisst ihr Netz. Dabei entsprechen den Sortenpunkten Ecken, den Gebieten Maschen (Kurvenpolygone mit q Ecken). Ein spezielles Netz liefert die konforme Abbildung der Fläche auf die Ebene. Machen wir uns den Zusammenhang von Fläche und Netz genau klar. Einem Innengebiet (Aussengebiet) entspricht eine Innenmasche (Aussenmasche) mit gleicher Orientierung des Randes. Beim positiven (negativen) Umlauf um eine Innenmasche (Aussenmasche) treten die Punktnummern in Nummernfolge auf. An einer Innenmasche (Aussenmasche) hängen nur Aussenmaschen (Innenmaschen). Einem n -fachen Windungspunkt der Sorte $\sqrt{\nu}$ entspricht eine Ecke, in der $2n$ Maschen verknüpft sind. Wir nennen sie algebraische Windungsecke. Ein Umlauf um sie ergibt, dass von ihr abwechselnd die Seiten $\nu-1, \nu$ ausgehen. Analog entspricht einem logarithmischen Windungspunkt der Sorte $\sqrt{\nu}$

eine logarithmische Windungsecke, von der abwechselnd unendlich viele Seiten $\nu-1, \nu$ ausgehen. Schliesslich geht ein schlichter Sortenpunkt in eine schlichte Ecke über, von welcher nur zwei Seiten ausgehen.

Der Streckenkomplex ist eine homomorphe Darstellung des Netzes. Wir erhalten ihn, indem wir von dem Grundstern ausgehen, einer der Grundkurve dual entsprechenden Figur (Fig. 18). Er besteht aus q jordanischen Kurvenstücken, den Gliedern, welche 2 Punkte, den Innenknoten in \mathcal{F} und den Aussenknoten in \mathcal{A} verbinden und zwar so, dass jedes Glied die Grundkurve nur einmal schneidet - das Glied ν die Seite ν in einem inneren Punkt. Projiziert man anstelle der Grundkurve den Grundstern auf alle Blätter der Fläche und bildet sie dann topologisch auf die Ebene ab, so erhält man den Streckenkomplex. Bei ihm entspricht dem n -fachen algebraischen Windungspunkt ein algebraisches Elementargebiet, das von $2n$ Gliedern begrenzt wird; dem logarithmischen Windungspunkt ein logarithmisches Elementargebiet, dessen Rand unendlich viele Glieder aufweist; dem schlichten Sortenpunkt ein schlichtes Elementargebiet, das von 2 Gliedern begrenzt wird. Liegt der Sortenpunkt in der Sorte $\sqrt{\nu}$, so wechseln auf dem Rand die Glieder $\nu, \nu-1$ sich ab. Sieht man bei dem Streckenkomplex von der Markierung der Knoten und der Bezeichnung der Glieder ab, so erhält man das Gerüst des Komplexes.

Netz und Streckenkomplex bilden so zwei adäquate Formen derselben Flächendarstellung. Wir verwenden beide, weil in manchen Fällen das Netz, in anderen der Streckenkomplex eine bequemere Ausdrucksweise gestattet.²⁾

Wir leiten nun weitere Begriffe des Streckenkomplexes her. Glieder, welche dieselben Knoten verbinden, bilden ein Bündel.

1) Zur bequemeren Unterscheidung werden wir den Innenknoten durch einen Ring, den Aussenknoten durch ein Kreuz markieren.

2) Wir werden im allgemeinen darauf verzichten, für jede in der einen Form gemachten Aussage die adäquate zu formulieren.

Wir bezeichnen es mit (\bar{a}, \bar{b}) , wenn es zwischen den Elementargebieten a, b liegt und die Glieder $a, a+1, \dots, b-1$ enthält. Gehen von einem Knoten nur 2 Bündel aus, so liegt ein Zweierknoten vor und die Bündel bilden ein Doppelbündel. Liegt dieses zwischen den Elementargebieten \bar{a}, \bar{b} , so bezeichnen wir es mit $((\bar{a}, \bar{b}))$; es enthält die Bündel (\bar{a}, \bar{b}) und (\bar{b}, \bar{a}) . Ein Knoten, von dem $n \geq 3$ Bündel ausgehen, heisst n -facher Verzweigungsknoten. Logarithmische Elementargebiete, die unendlich viele Knoten, darunter nur einen Verzweigungsknoten gemeinsam haben, nennen wir benachbart. Die Elementargebiete entsprechen verschiedenen Windungssorten und haben eine unendliche Bündelfolge gemeinsam, welche, von dem gemeinsamen Verzweigungsknoten ausgehend, durch periodische Wiederholung desselben Doppelbündels entsteht. Eine solche Bündelfolge bezeichnet man als logarithmisches Ende. Von den benachbarten logarithmischen Elementargebieten \bar{a}, \bar{b} ist \bar{a} (\bar{b}) das rechte (linke) Nachbargebiet von \bar{b} (\bar{a}), wenn bei positivem Umlauf um den Verzweigungsknoten man vom Elementargebiet \bar{a} über das logarithmische Ende zu dem Elementargebiet \bar{b} gelangt. Streicht man im Streckenkomplex sämtliche Bündel der logarithmischen Enden bis auf die Anfangsbündel (welche von nun an Randbündel heissen sollen), so erhalten wir den Kern. Das Teilnetz, welches in der Netz-Darstellung der Fläche dem Kern entspricht, bezeichnet man als Kernpolygon. Figur 19 zeigt den Streckenkomplex (Fig. 19a) und den Kern (Fig. 19b) einer Fläche 4. Grades; Figur 20 zeigt für dieselbe Fläche das entsprechende Netz (Fig. 20a) und das entsprechende Kernpolygon (20b). Den Randbündeln des Kerns entsprechen die Randsuiten des Kernpolygons. Sie begrenzen dasselbe und bilden seinen Rand. Der Rand enthält ausser schlichten Ecken sämtliche logarithmische Windungsecken. Alle algebraischen Windungsecken liegen dagegen im Inneren des Kernpolygons. Schliesslich bezeichnet man alle Suiten des Kernpolygons, welche keine Randsuiten sind, als Diagonalen (einem Kerndoppelbündel entspricht eine Doppeldiagonale). Zum Schluss des Paragraphen stellen wir die adäquaten Begriffe bei Fläche, Netz und Streckenkomplex in einer Tabelle zusammen.

<u>Fläche</u>	<u>Netz</u>	<u>Streckenkomplex</u>
Gebiet	Masche	Knoten
Seite	Seite	Glied
Sortenpunkt	Ecke	Elementargebiet
Suite	Suite	Bündel
log. Ende	log. Ende	log. Ende
Flächenkern	Kernpolygon	Kern
	Randsuite	Randbündel
	Diagonale	sonstiges Kernbündel
	Doppeldiagonale	Doppelbündel des Kerns

§ 5 Änderung des Streckenkomplexes
beim Wechsel der Grundkurve.

Im vorigen Paragraphen haben wir zwei homomorphe Formen der Flächendarstellung in dem Netz und dem Streckenkomplex kennen gelernt, wobei eine bestimmte Grundkurve zugrunde gelegt wurde. Wir fragen nun, wie ändert sich diese Darstellung bei Verwendung einer anderen Grundkurve? Gehen die beiden Grundkurven durch simple Abbildung aus einander hervor, so bleibt offensichtlich der Streckenkomplex erhalten. Bestimmen die betrachteten Grundkurven aber eine nicht triviale Kurvenänderung, so müssen wir im allgemeinen mit einer Änderung des Streckenkomplexes rechnen. Die einfachsten und sofort übersehbaren Änderungen der Komplexe treten bei den scheinbaren Kurvenänderungen auf. In diesem Falle ist die Kurvenänderung eindeutig durch die Permutation der Seiten bestimmt und wir haben eine entsprechende Umnummerierung der Glieder des Streckenkomplexes durchzuführen, eventuell, wenn eine verallgemeinerte Klappung vorliegt, haben wir ausserdem die Markierung zu wechseln. Damit haben wir das Ergebnis, dass bei scheinbaren Kurvenänderungen das Gerüst des Streckenkomplexes erhalten

bleibt.

Um die Komplexänderung bei einer allgemeinen Kurvenänderung herzuleiten, würde es genügen die Komplexänderung bei einem Tausch anzugeben, da nach dem ersten Hauptsatz die Tausche die Erzeugenden von \mathcal{L} sind. Wir werden jedoch ein wenig anders verfahren, um gleich weiter reichende Ergebnisse zu erzielen. Wir gehen deshalb von der Kehre $k(\mu, \nu) = \{\Gamma, \Gamma'\}$ aus. Der Grundkurve Γ mögen die Gebiete \mathcal{F}, \mathcal{A} und der Komplex K , der Grundkurve Γ' die Gebiete $\mathcal{F}', \mathcal{A}'$ und der Komplex K' entsprechen. Durch Γ, Γ' zerfällt die Grundebene und jedes Blatt der Riemannschen Fläche in 4 Teilgebiete $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4$ (siehe Fig. 21), für welche ersichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 \\ \mathcal{A} &= \mathcal{G}_3 + \mathcal{G}_4 \\ \mathcal{F}' &= \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_3 \\ \mathcal{A}' &= \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_4 \end{aligned}$$

Bei der Kehre $k(\mu, \nu)$ bleiben die Seiten α (α auf $\overrightarrow{\mu\nu}$) fest. Damit auch auf der Fläche die Seiten α festbleiben, ordnen wir die Innengebiete $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ (Aussengebiete $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$) einander zu, die ein gemeinsames Innenteilgebiet \mathcal{G}_1 (Aussenteilgebiet \mathcal{G}_4) aufweisen. Bei den Komplexen K, K' legen wir die Knoten in die Teilgebiete $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_4$, dann stimmen K, K' in den Knoten und Gliedern α überein.

Können wir nun bezüglich der Grundkurve Γ (Γ') von dem Teilgebiet \mathcal{G}_i zum Teilgebiet \mathcal{G}_k gelangen, ohne eine Seite von Γ (Γ') zu überschreiten, so wollen wir unter Verwendung des Symbols \curvearrowright schreiben

$$\Gamma (\Gamma') : \mathcal{G}_i \curvearrowright \mathcal{G}_k$$

Können wir bezüglich Γ (Γ') von \mathcal{G}_i zu \mathcal{G}_k gelangen, indem wir die Seite α (α') überschreiten, dann schreiben wir

$$\Gamma : \mathcal{G}_i \alpha \mathcal{G}_k \text{ resp. } \Gamma' : \mathcal{G}_i \alpha' \mathcal{G}_k$$

Hängen nun bei K zwei Knoten über das Glied μ zusammen, so gilt nach Fig. 21

$$\Gamma : \mathcal{G}_1 \curvearrowright \mathcal{G}_2 \mu \mathcal{G}_4$$

Wir untersuchen jetzt, wie dieselben Teilgebiete $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_4$ bezüglich Γ' zusammenhängen, wobei wir den Zusammenhang von $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_4$ über μ berücksichtigen. Wir erhalten

$$\Gamma' : \mathcal{G}_1 \mu' \mathcal{G}_2 \curvearrowright \mathcal{G}_4$$

Damit haben wir das Ergebnis, hängen zwei Gebiete \mathcal{F}, \mathcal{A} über μ zusammen, so hängen die zugeordneten Gebiete $\mathcal{F}', \mathcal{A}'$ über μ' zusammen. Für die Komplexänderung bedeutet dies, dass das Glied μ festbleibt. In gleicher Weise ergibt sich, dass das Glied ν festbleibt.

$$\Gamma : \mathcal{G}_1 \nu \mathcal{G}_3 \curvearrowright \mathcal{G}_4$$

$$\Gamma' : \mathcal{G}_1 \curvearrowright \mathcal{G}_3 \nu' \mathcal{G}_4$$

Wir haben schliesslich noch die Glieder β (β auf $\overrightarrow{\nu\mu}$) zu untersuchen. Abkürzend wollen wir setzen $\mu = \mu + \nu - \beta$. Hängen zwei Gebiete bezüglich Γ' über die Seite β' zusammen, so finden wir

$$\Gamma' : \mathcal{G}_1 \curvearrowright \mathcal{G}_3 \beta' \mathcal{G}_2 \curvearrowright \mathcal{G}_4$$

Bezüglich Γ hängen dann dieselben Teilgebiete in folgender Weise zusammen

$$\Gamma : \mathcal{G}_1 \nu \mathcal{G}_3 \beta \mathcal{G}_2 \mu \mathcal{G}_4$$

Damit haben wir eine Vorschrift erhalten, wie wir einem Glied β von K ein korrespondierendes Glied β' von K' zuordnen können. Sie lautet:

Hängen bei K zwei Knoten über das Glied β zusammen, so gehe man vom Innenknoten über das Glied μ , vom Aussenknoten über das Glied ν zu den benachbarten Knoten; diese hängen dann bezüglich K' über das korrespondierende Glied μ' zusammen.

Aus der Abänderungsvorschrift für Komplexe bei der Kehre können wir leicht die Änderungsvorschriften bei dem Tausch und dem Schnitt herleiten. Für den Tausch $t(\underline{v})$ erhalten wir, wenn wir $t(\underline{v}) = k(\underline{v-1}, \underline{v+1})$ beachten, die Regel:

Bei dem Tausch $t(\underline{v})$ werden nur die Glieder v abgeändert. Hängen bei K zwei Knoten über das Glied v zusammen, so erhält man das korrespondierende Glied v' , indem man vom Innenknoten über das Glied $v-1$, vom Aussenknoten über das Glied $v+1$ zu den benachbarten Knoten geht und diese verbindet.

Ebenso einfach ergibt sich die Änderungsvorschrift bei dem Schnitt $s(\underline{\mu}, \underline{v})$, wenn wir die Relation $s(\underline{\mu}, \underline{v}) = k^2(\underline{\mu}, \underline{v})$ beachten. Wir erhalten hier die Regel:

Beim Schnitt $s(\underline{\mu}, \underline{v})$ werden nur die Glieder α (α auf $\overrightarrow{\mu, v}$) abgeändert. Hängen bei K zwei Knoten über α zusammen, so schreite man vom Innenknoten erst über μ , dann über v um zwei Knoten weiter und entsprechend vom Aussenknoten erst über v , dann über μ um zwei Knoten weiter; die erreichten Knoten hängen dann über das korrespondierende Glied α' zusammen.

Der Änderungsvorschrift beim Schnitt können wir hinsichtlich der Anwendung eine besonders einfache Form geben, wenn wir den Begriff des Zuges einführen.

Ein Zug $\langle \mu, v \rangle$ besteht aus endlich oder unendlich vielen Gliedern μ, v . Mit jedem Glied μ (v) gehören auch die angrenzenden Glieder v (μ) zu $\langle \mu, v \rangle$. Man kann von jedem Knoten des Zuges zu jedem anderen gelangen, indem man längs der aneinandergrenzenden Glieder μ, v fortschreitet.

Ein Komplex kann mehrere gliederfremde Züge $\langle \mu, v \rangle$ aufweisen. Die beiden Seiten eines Zuges heissen seine Ufer. Auf dem einen Ufer von $\langle \mu, v \rangle$ liegen die Elementargebiete $\overrightarrow{\mu+1}, \overrightarrow{\mu+2}, \dots, \overrightarrow{v}$, auf dem anderen die Elementargebiete $\overrightarrow{v+1}, \dots, \overrightarrow{\mu}$. Wir bezeichnen das Ufer, auf dem das Elementargebiet $\overrightarrow{0}$ liegt als U-Ufer, das andere als V-Ufer. Auf dem Ufer eines Zuges können auftreten: 1) Glieder, welche mit Gliedern des Zuges in einem Bündel liegen, 2) Komplexteile, die keinen

Zug $\langle \mu, v \rangle$ enthalten (dazu gehören auch die vom Zug ausgehenden logarithmischen Enden), 3) Verbindungsstücke, die ebenfalls keinen Zug $\langle \mu, v \rangle$ enthalten, aber mit einem 2. Verzweigungsknoten an einem weiteren Zug $\langle \mu, v \rangle$ hängen. Aus der vorhin abgeleiteten Regel für die Komplexänderung beim Schnitt folgt jetzt ohne weiteres die bequemere:

Bei dem Schnitt $s(\underline{\mu}, \underline{v})$ werden sämtliche Komplexteile auf den U-Ufern (oder V-Ufern) längs der Züge $\langle \mu, v \rangle$ um zwei Knoten in negativer Richtung (im Sinne negativen Umlaufs um den Zug) starr verschoben.

Die Komplexe K, K' von Fig. 22 gehen durch $t(\underline{1})$ in die Komplexe K', K'' über; K geht ferner durch $s(\underline{0}, \underline{2})$ in K'' über.

Züge, welche auf einem Ufer nur ein einziges logarithmisches (algebraisches) Elementargebiet aufweisen, heissen kahl. Sind sämtliche Züge $\langle \mu, v \rangle$ eines Komplexes kahl, so bleibt der Komplex beim Schnitt $s(\underline{\mu}, \underline{v})$ ungeändert.

Allgemein können wir jedem Komplex eine Untergruppe von \mathcal{A} zuordnen, die Komplexgruppe $\mathcal{A}(K)$, bei deren Elementen der Streckenkomplex ungeändert bleibt.

§ 6 Das Äquivalenzproblem.

Aufgrund des vorigen Paragraphen beherrschen wir die Änderung eines Komplexes beim Wechsel der Grundkurve.

Wir können nun entscheiden, wenn zwei Flächendarstellungen durch Streckenkomplex und Grundkurve \mathcal{C}, K_1 und \mathcal{C}', K_2 identisch sind oder nicht. Sie sind dann und nur dann identisch, wenn die Kurvenänderung $\{ \mathcal{C}, \mathcal{C}' \} K_1$ in K_2 überführt.

Als äquivalent bezeichnet man Komplexe, wenn sie sich von derselben Riemannschen Fläche herleiten lassen bei Wechsel der Grundkurve. Riemannsche Flächen heissen äquivalent, wenn sie bei geeigneter Grundkurvenwahl auf denselben Streckenkomplex führen.

Wann sind Streckenkomplexe, wann sind Riemannsche Flächen äquivalent? Es lässt sich zeigen, dass das eine Problem auf das andere zurückgeführt werden kann.

Wir fassen äquivalente Streckenkomplexe in einer Komplexklasse $[K_m]$ und äquivalente Riemannsche Flächen in einer Flächenklasse $[F_n]$ zusammen. Ein paar Klassen $[K_m], [F_n]$ heisst konjugiert, wenn sich zwei Elemente aus je einer Klasse bezüglich einer Grundkurve zuordnen lassen. Die Elemente konjugierter Klassen entsprechen sich eineindeutig. Die Zuordnung wird dabei durch jede Grundkurve vermittelt. Zum Beweis gehen wir von der Komplexklasse $[K_m]$ aus. Jeder Streckenkomplex K_m aus ihr erzeuge mittels der Grundkurve Γ die Fläche F_m . Dann entsprechen verschiedenen Komplexen K_m, K_n immer verschiedene Flächen F_m, F_n (Eineindeutigkeit der Flächendarstellung durch Streckenkomplex und Grundkurve). Alle so mittels $[K_m]$ erzeugten Flächen bilden aber eine Flächenklasse, die durch den Streckenkomplex K_0 allein erzeugt werden kann. Geht nämlich K_m aus K_0 durch die Kurvenänderung a hervor, so entsteht F_m aus K_0 durch die Grundkurve $\Gamma \cdot a^{-1}$ (dabei soll aus $a = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cdot a$ folgen). Schliesslich erkennt man leicht, dass alle Flächen der Flächenklasse durch den oben beschriebenen Erzeugungsprozess aus $[K_m]$ erfasst werden. Damit ist die eineindeutige Zuordnung der Elemente konjugierter Klassen bewiesen.

Es seien nun die Flächen F_1, F_2 auf Äquivalenz zu untersuchen. Dann betrachten wir die zugehörigen Flächendarstellungen Γ, K_1 und Γ', K_2 mit beliebiger Grundkurve Γ . F_1, F_2 sind dann und nur dann äquivalent, wenn K_1, K_2 äquivalent sind.

In unseren weiteren Untersuchungen zur Äquivalenzfrage beschränken wir uns auf Flächen mit nur logarithmischen Windungspunkten in endlicher Anzahl. Solche werden bekanntlich von den ν -Funktionen erzeugt, welche Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{w''''}{w'} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''}{w'} \right)^2 = \sum_{\nu=0}^{p-2} a_\nu z^\nu$$

sind. Wir nennen die von ihnen erzeugten Flächen ν -Flächen.

§ 7 Terminologie bei der Darstellung der ν -Flächen.

Besitzt eine ν -Fläche p logarithmische Windungspunkte und q Windungssorten, so ist p die Ordnung und q der Grad der ν -Fläche. Flächen (Netze, Komplexe)¹⁾ von gleicher Ordnung p und gleichem Grad q bilden eine Art $A\left(\frac{p}{q}\right)$. Die Anzahl der Windungspunkte in der Sorte $\bar{\alpha}$ bezeichnen wir in üblicher Weise mit $\mu_{\bar{\alpha}}$ und nennen sie Belegungszahl.

Zwei Flächen F, F' (entsprechend Netze, Komplexe) gehören zum gleichen Stamm $S(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$, falls ihre Belegungszahlen μ_k, μ'_k $k = 1, 2, \dots, q$ durch eine Permutation auseinander hervorgehen.

Zwei Komplexe gehören zu derselben Familie, wenn sich ihre Windungssorten so zuordnen lassen, dass die entsprechenden logarithmischen Elementargebiete die gleiche zyklische Anordnung hinsichtlich der Nachbarschaftslage aufweisen.²⁾

Für die Äquivalenz von Streckenkomplexen ist die Zugehörigkeit zu derselben Familie eine notwendige Bedingung. Zum Beweis gehen wir von einer Fläche aus, welche bezüglich der Grundkurve Γ_0 und der Windungspunkte w_1, w_k ein logarithmisches Ende aufweist. Es gehört dann zur Fläche eine Folge von Halbblättern $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, bei der zwei aufeinander folgende Halbblätter über eine Suite verknüpft sind. Ab γ_2 hängen die Halbblätter nur an den Windungspunkten w_1, w_k , während γ_1 mindestens noch an einem dritten Windungspunkt w_1 hängt. Geht man zu einer anderen Grundkurve Γ_1 über, so erkennt man sofort, dass die Halbblattfolge $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ zu einer

1) Komplexe (Netze) gehören zur Art $A\left(\frac{p}{q}\right)$, wenn sie zu Darstellungen von Flächen der Art $A\left(\frac{p}{q}\right)$ gehören.

2) Es soll jedes Paar von benachbarten Elementargebieten wieder in ein solches übergehen und zwar das rechte in das rechte, das linke in das linke Nachbargebiet. Flächen (Netze) gehören zu derselben Familie, wenn sie sich aus Streckenkomplexen derselben Familie herleiten lassen.

neuen Halbblattfolge $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ führt, bei welcher ebenfalls aufeinander folgende Halbblätter über eine Suite zusammenhängen und ausser γ'_1 sämtliche γ'_i nur an w_i, w_k geknüpft sind¹⁾. Damit ist aber die Existenz eines logarithmischen Endes bezüglich zweier Windungspunkte w_i, w_k als innere Eigenschaft der V -Fläche unabhängig von der Darstellung (Grundkurve) erwiesen.

Betrachten wir jetzt die zu einer V -Fläche gehörenden Netze, so gehen benachbarte Windungsecken (durch eine Randsuite verbunden) wieder in solche über. Kann sich ihre zyklische Reihenfolge etwa umkehren? Das ist sicher unmöglich. Die Bildpunkte der Sortenpunkte liegen durch die gewählte topologische Abbildung der Fläche auf die Ebene ein für alle Mal fest. Ändern kann sich beim Wechsel der Grundkurve die einzelne Masche, ferner auch die Randkurve des Kernpolygons. Da nun die Nachbarschaft der Windungsecken erhalten bleibt, muss auch ihre zyklische Reihenfolge auf dem Rand erhalten bleiben.²⁾ Damit ist die Zugehörigkeit von Netzen (Komplexen) zur gleichen Familie als notwendige Bedingung für die Äquivalenz erwiesen.

Bei Komplexen dritten Grades lässt sich die Äquivalenzfrage sofort entscheiden. Bei 3 Grundpunkten entartet \mathcal{L} in die Gruppe der scheinbaren Kurvenänderungen. Jede solche bewirkt lediglich eine Ummummerierung des Komplexes und eventuell einen Markierungswechsel der Knoten. Komplexe 3. Grades sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie das gleiche Gerüst aufweisen. Da man leicht Komplexe 3. Grades und gleicher Familie angeben kann, die ein verschiedenes Gerüst besitzen, so sieht man schon hieran, dass die Zugehörigkeit zu derselben Familie im allgemeinen nicht hinreichend für die Äquivalenz von

1) denn die Halbblattfolge $\gamma_2, \gamma_3, \dots$ kann bei Übergang zu γ'_1 nur zerfallen in eine Halbblattfolge $\gamma'_i, \gamma'_{i+1}, \dots$ und eine endliche Anzahl von Halbblattreststücken.

2) Die zyklische Reihenfolge der Windungsecken kann man umkehren, wenn man eine andere geeignete topologische Abbildung der Fläche auf die Ebene verwendet.

von Streckenkomplexen. (Siehe Fig. 23)

Wir befassen uns jetzt mit dem Aufbau des Kernpolygons. Alle Diagonalen, welche dieselben Windungsecken \bar{a}, \bar{b} verbinden, bilden eine Mehrfachdiagonale $D_n(\bar{a}, \bar{b})$, wobei n die Anzahl der Diagonalen ist. Sie heisst gerade (ungerade), je nachdem n gerade (ungerade) ist. Die n Diagonalen beranden $n-1$ Maschen mit nur 2 Windungsecken, welche wir Zweierzellen nennen. Sehen wir von ihnen ab, so zerfällt das Kernpolygon in $N \leq p-2$ Teilpolygone (jedes mit mindestens 3 Windungsecken), welche Zellen heissen. Beim Netz sind 2 Maschen, die über eine Suite zusammenhängen, verschieden orientiert. Zwei Zellen sind daher gleich (verschieden) orientiert, wenn sie durch eine gerade (ungerade) Mehrfachdiagonale getrennt werden.

Ein Kernpolygonteil, der von keiner geraden Mehrfachdiagonalen begrenzt wird, im Inneren keine ungeraden Mehrfachdiagonalen aufweist, bezeichnen wir als Normalteil. Dabei sollen zum Normalteil keine Zweierzellen der begrenzenden ungeraden Mehrfachdiagonalen gehören. Die Zellen eines Normalteils sind alle gleich orientiert. Einen Normalteil mit q Windungsecken, bezeichnen wir als Hauptteil. Ein Normalteil heisst Randteil, wenn in seiner Begrenzung nur eine Mehrfachdiagonale vorkommt. Schliesslich nennen wir einen Randteil mit nur 3 Windungsecken Randdreieck. Eine Zelle heisst Randzelle, wenn sie nur von einer geraden Mehrfachdiagonalen begrenzt wird.

Lassen wir bei einer Mehrfachdiagonalen eine Doppel diagonale (Zweierzelle) weg, so entsteht wieder ein Kernpolygon. Streichen wir in dem Kernpolygon sämtliche geraden Mehrfachdiagonalen und ersetzen die ungeraden durch einfache Diagonalen, so entsteht das zum Kernpolygon gehörende Primärpolygon. Sämtliche Zellen des Primärpolygons sind Normalteile. Kernpolygone mit gleichem Primärpolygon bilden eine Primärschar.

Nun zur Eckenbezeichnung des Kernpolygons. Bei einem positiven Umlauf um das Kernpolygon mögen die Sortenbezeichnungen der Windungsecken in dem Zyklus

$$: \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_p :$$

auftreten. Dieser Zyklus heisst die Nummerierung des Kernpolygons. Die $\bar{\alpha}_i$ sind für $p > q$ nicht alle verschieden. Windungsecken der gleichen Sorte, Sortenteiler genannt, tragen dieselbe Punktnummer. (Manchmal werden wir die Sortenteiler durch Indizes unterscheiden.) Nehmen wir eine Kurvenänderung a vor, wobei zu a die Permutation

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & q-1 \\ \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_{q-1} \end{pmatrix}$$

gehört, dann erhalten wir die Nummerierung

$$: \bar{\alpha}_{\nu_1}, \bar{\alpha}_{\nu_2}, \dots, \bar{\alpha}_{\nu_p} :$$

Im allgemeinen gibt es zu einer Nummerierung verschiedene Primärpolygone. Wir bezeichnen eine spezielle Nummerierung als Normalnummerierung und eins der zu dieser gehörenden Primärpolygone als Normalpolygon¹⁾. Die von letzterem abgeleitete Primärschar heisst Normalschar. Jedes Kernpolygon einer Familie das die Normalnummerierung aufweist, heisst normiert.

Bei gegebener Nummerierung liefert jedes System einfacher Diagonalen ein zugehöriges Primärpolygon, wenn für jede Diagonale die beiden angrenzenden Zellen - die eine bei positivem, die andere bei negativem Umlauf - die Punktnummern zyklisch²⁾ geordnet aufweisen. Wir haben lediglich bei jeder Zelle die Eckenzahl durch eingefügte schlichte Ecken auf q zu ergänzen.

Ein beliebiges Kernpolygon kann man immer durch Kurvenänderung in ein normiertes überführen, denn Ausgangsnummerierung, Normalnummerierung bestimmen mindestens eine Permutation der Punktnummern und zu dieser gibt es immer eine ganze Nebenklasse $\pi \mathcal{H}$ von Kurvenänderungen.

1) Wir treffen die spezielle Auswahl von Normalnummerierung, Normalpolygon so, dass letzteres einen möglichst einfachen Aufbau von wenigen Zellen besitzt.

2) Punktnummern $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_q$ heissen zyklisch geordnet, wenn sie in einer Reihenfolge stehen, in der sie im Zyklus

: $0, 1, \dots, q-1$: vorkommen.

Auch beim Kern führen wir weitere Begriffe ein. Die Anzahl der Bündel, welche 2 Knoten A, B verbinden, nennen wir den Abstand $d(A, B)$ der Knoten. Den Verzweigungsknoten, in welchem ein logarithmisches Ende beginnt, heissen wir Randknoten. Jedes Elementargebiet weist im allgemeinen 2 Randknoten auf; ihr Abstand ist die Breite des Elementargebietes. Ein Randknoten heisst Endknoten, wenn bis auf ein Bündel nur Randbündel von ihm ausgehen. Dem Randdreieck entspricht beim Kern eine Gabel. Dem Primärpolygon P_0 ein Primärkern K_0 ; der Primärschar von Kernpolygonen $\langle P_0 \rangle$ eine Primärschar von Kernen $\langle K_0 \rangle$.

Die Kerne einer Primärschar weisen alle dieselben Randbündel auf. Da jeder Zug in 2 Randbündel ausläuft, treten die gleichen Züge in gleicher Anzahl auf. Man kann eine eindeutige Zuordnung der Züge und ihrer Ufer vornehmen, so dass entsprechende Züge auf dem gleichen Ufer gleichbenannte Elementargebiete in derselben Reihenfolge aufweisen. (Diese Reihenfolge und Benennung der Elementargebiete ändert sich ja nicht, wenn man Doppelbündel aus dem Kern entfernt.) Wir meinen diesen Sachverhalt, wenn wir sagen, Komplexe gleicher Primärschar zeigen gleiches Zugverhalten.

§ 8 Äquivalenzfamilien.

Eine Familie, welche nur äquivalente Komplexe (Netze) aufweist, heisst Äquivalenzfamilie. Als erstes Beispiel betrachten wir die Art $A(\frac{q}{q})$, bei welcher in jeder Sorte nur ein Windungspunkt liegt. Man stellt leicht fest, dass hier die Begriffe Art, Stamm, Familie zusammenfallen. Fräulein Drape hatte schon gezeigt, dass Komplexe mit gleichem $p = q$ äquivalent sind. Als Normalnummerierung wählen wir

$$: 0, 1, \dots, q-1 :$$

Es gibt zu ihr nur ein Primärpolygon; dieses Normalpolygon P_0 weist keine Diagonalen auf. Wir haben lediglich zu zeigen,

dass es immer eine Kurvenänderung gibt, die ein beliebiges normiertes Kernpolygon P in das Normalpolygon P_0 transformiert. Wir gehen dazu von einer Randzelle A aus, welche durch die Mehrfachdiagonale $D_{2n}(\bar{a}, \bar{b})$ abgeschlossen werde. Die angrenzende Zelle heiße B ; letztere möge mit den Zellen L_1, L_2, \dots, L_k die Windungsecke \bar{b} und mit den Zellen R_1, R_2, \dots, R_s die Windungsecke \bar{a} aufweisen. (Fig. 24a). Wir betrachten den zugehörigen Kernteil (Fig. 24b). Der Randzelle A entspricht der Endknoten A (allgemein der Zelle X der Verzweigungsknoten X), dieser hängt mit dem Verzweigungsknoten B über eine Gliederkette von n Doppelbündeln $((\bar{a}, \bar{b}))$ zusammen (eine solche Gliederkette stellen wir durch eine Verbindungslinie der Knoten A, B dar mit der Nummer $2n$). Die Verzweigungsknoten L_1, L_2, \dots, L_k gehören zur Berandung des Elementargebietes \bar{b} ; R_1, R_2, \dots, R_s zur Berandung des Elementargebietes \bar{a} . Welche Bündel im einzelnen von den Verzweigungsknoten L_1, R_1 ausgehen, ist für uns unwichtig. Führen wir nun die Schnittpotenz $s^{-n}(\bar{a}, \bar{b})$ aus, so werden die Randglieder $a+1, a+2, \dots, b-1$ um $2n$ Knoten längs des (stark gezeichneten) Gliederzuges $\langle a, b \rangle$ in positiver Richtung verschoben und gelangen so an den Verzweigungsknoten B . Den gleichen Endzustand erreichen wir durch Ausführung der Schnittpotenz $s^n(\bar{a}-1, \bar{b}-1)$, wie man sich entsprechend klar macht.

Durch jede dieser beiden Schnittpotenzen geht also P in ein Kernpolygon P' über, wobei sich P' nur durch das Fehlen der Mehrfachdiagonale $D_{2n}(a, b)$ von P unterscheidet. Ist P' noch nicht das Normalpolygon, so setzen wir das Verfahren fort und entfernen eine dann existierende Mehrfachdiagonale $D_{2m}(c, d)$, welche eine Randzelle begrenzt. In endlich vielen Schritten erhalten wir das Normalpolygon P_0 , womit die Äquivalenz der Komplexe der Art $A(\frac{q}{d})$ bewiesen ist.

Als nächstes beweisen wir den Satz:

Alle Familien des Stammes $S(\mu_0, 1, 1, \dots, 1)$ $\mu_0 < \frac{p}{2}$ sind Äquivalenzfamilien.

1) sonst ändert sich nichts am Kern, denn es gibt nur einen Zug $\langle a, b \rangle$.

Wir greifen eine beliebige Familie des Stammes heraus und erklären zunächst ihre Normalnummerierung. Da $\mu_0 < q-1$, gibt es mindestens eine Windungsecke, die nur recht \bar{s} von einem Sortenteiler $\bar{0}$ benachbart ist. Einer solchen Windungsecke erteilen wir die Punktnummer $\bar{1}$, ihrer links benachbarten die Nummer $\bar{2}$ und - indem wir den Rand des Kernpolygons im positiven Sinn umlaufen - allen noch nicht benannten Windungsecken fortlaufend die Nummern $\bar{3}, \bar{4}, \dots, \bar{q-1}$. Damit ergibt sich die Normalnummerierung

$$:\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{r}, \bar{0}, \bar{r+1}, \bar{r+2}, \dots, \bar{s}, \bar{0}, \bar{s+1}, \dots, \bar{q-1} :$$

Zu dieser Normalnummerierung gehört ein Primärpolygon, das aus einem positiv orientierten Hauptteil und $p-q$ negativ orientierten Randdreiecken besteht. Wir erklären es zum Normalpolygon P_0 der Familie. Wie sieht nun ein beliebiges normiertes Primärpolygon aus? Zunächst setzen wir $\mu_0 = 2$, der 2. Sortenteiler $\bar{0}$ liege zwischen $\bar{r}, \bar{r+1}$. Wir bezeichnen ihn (und in der Folge jeden Sortenteiler $\bar{0}$, der nicht zwischen $\bar{1}, \bar{q-1}$ liegt) als Zusatzzecke. Das allgemeine Primärpolygon weist dann ein Diagonaldreieck $\bar{0}, \bar{m}, \bar{n}$ auf (Fig. 25), bei dem die Zusatzzecke als Dreiecksecke auftritt. Natürlich kann das Diagonaldreieck entarten und etwa eine Randseite und 2 Diagonalen besitzen, oder gar in ein Randdreieck (dann liegt das Normalpolygon für $\mu_0 = 2$ vor) ausarten. Der Fall $\mu_0 = 3$ ergibt sich aus dem hervorgehenden, indem wir zwischen die bisher benachbarten Windungsecken $\bar{s}, \bar{s+1}$ eine weitere Zusatzzecke $\bar{0}$ einschoben. Es ist dabei gleichgültig in welchem Polygonteil die 2. Zusatzzecke zu liegen kommt. Wir errichten nun in diesem Polygonteil ein entsprechendes Diagonaldreieck. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir das allgemeine Primärpolygon bei beliebigen μ_0 .

Fügen wir in seine Normalteile eine beliebige Anzahl gerader Mehrfachdiagonalen ein, so erhalten wir ein beliebiges normiertes Kernpolygon der Familie. Wir wollen dieses, P , durch eine Schnittänderung in das Normalpolygon P_0 überführen.

Zunächst zeigen wir, dass durch Ausführen von zwei Schnittpotenzen immer ein Diagonaldreieck in ein Randdreieck übergeführt werden kann. Gehen wir von Fig. 25 aus. In den Polygonteilen L, M, N mögen noch beliebig viele Diagonaldreiecke und Mehrfachdiagonalen vorkommen. Figur 26a zeigt den entsprechenden Komplexteil, der vor allem das der Zusatzcke \bar{O} entsprechende Elementargebiet aufweist. Von D gehen 3 Bündelketten aus, deren Anfangsbündel (\bar{O}, \bar{m}) , (\bar{m}, \bar{n}) , (\bar{n}, \bar{O}) sind. Am Randknoten L_1 von Elementargebiet \bar{O} hängt das Randbündel $(\bar{O}, \bar{r}+1)$; an Randknoten R_k das Randbündel (\bar{r}, \bar{O}) . Das von D nach E führende Bündel (\bar{m}, \bar{n}) enthält das Glied r. Mithin läuft ein Zug $\langle r, q-1 \rangle$ über die Knoten L_1, \dots, L_1, D, E (stark ausgezogen) und ein Zug $\langle r, 0 \rangle$ über die Knoten R_k, \dots, R_1, D, E . Es sei $d(E, L_1) = 2\lambda - 1$, $d(E, R_k) = 2\ell - 1$. Wir führen nun die Schnittpotenz $s^{-\lambda}(\underline{r}, \underline{q-1})$ aus. Durch sie werden alle Komplexteile auf dem V-Ufer des Zuges $\langle r, q-1 \rangle$ um 2λ Knoten in positiver Richtung verschoben. Das bedeutet aber, dass die Knoten L_1, L_2, \dots, L_1 nun Zweierknoten eines logarithmischen Endes geworden sind. Entsprechend werden R_1, R_2, \dots, R_k durch Ausführen der Schnittpotenz $s^{\ell}(\underline{r}, \underline{0})$ zu Zweierknoten eines logarithmischen Endes. Insgesamt erhalten wir nach Ausführung beider Schnittpotenzen einen Kernteil, wie er in Fig. 26b dargestellt ist. Von E geht eine Gabel, die wir $G(\bar{O}, \underline{r})$ bezeichnen und welche einem Randdreieck $\bar{O}, \bar{r}, \bar{r}+1$ entspricht, aus.

Durch die eben ausgeführten Kurvenänderungen sei P in P' übergegangen. Weist P' noch ein Diagonaldreieck auf, so verfahren wir in gleicher Weise. Die dabei auftretende Zusatzcke möge zwischen $\bar{s}, \bar{s}+1$ liegen. Durch eine Schnittänderung

$$s^{\lambda_1}(\underline{s}, \underline{0}) \cdot s^{\lambda_2}(\underline{s}, \underline{q-1})$$

mit genügend grossem λ_1, λ_2 wird das Diagonaldreieck in ein Randdreieck übergeführt. Dabei bleibt sicher das Randdreieck $\bar{O}, \bar{r}, \bar{r}+1$ erhalten, denn letzteres könnte höchstens durch Schnitte verändert werden, welche die Seite \underline{r} enthalten. Daher können wir P in endlich vielen Schritten in ein Kernpolygon P_N verwandeln, welches nur Randdreiecke enthält, und somit zur Normalschar $\langle P_0 \rangle$ gehört.

Der nächste Schritt, den wir ausführen, besteht darin, dass wir das normierte Kernpolygon P_N von den geraden Mehrfachdiagonalen im Hauptteil befreien. Wir verfahren analog dem behandelten Fall $p=q$, als wenn an den Hauptteil keine Randdreiecke angrenzen würden. Die Randzelle A werde wieder durch die Mehrfachdiagonale $D_{2n}(\bar{a}, \bar{b})$ abgeschlossen. In Fig. 26c ist der entsprechende Kernteil mit den uns interessierenden Verhältnissen am Verzweigungsknoten A wiedergegeben. Gegenüber Fig. 24b können von A anstelle einfacher Randglieder Bündelketten von k Doppelbündeln ausgehen, an die sich eine Gabel anschliesst (dies entspricht einem Randdreieck, welches durch eine $(2k+1)$ -fache Mehrfachdiagonale abgeschlossen wird. Wir bezeichnen einen solchen Kernteil als verlängerte Gabel $G_k(\bar{O}, \underline{a})$. Führen wir nun die Schnittpotenz $s^{-n}(\underline{a}, \underline{b})$ aus, so unterscheiden wir 3 Unterfälle:

I) an A hängt das Randglied a. Durch $s^{-n}(\underline{a}, \underline{b})$ werden sämtliche Randglieder und verlängerten Gabeln auf dem $(b-1)$ -Ufer¹⁾ des Zuges $\langle a, b \rangle$ von A nach B verschoben.

II) an A hängt eine verlängerte Gabel $G_k(\bar{O}, \underline{a})$; Glied b liegt im Randbündel $(\bar{a}+1, \bar{O})$ der Gabel. Wieder werden auf dem $(b-1)$ -Ufer alle Randglieder und verlängerten Gabeln von A nach B verschoben; die verlängerte Gabel $G_k(\bar{O}, \underline{a})$ an A geht über in eine verlängerte Gabel $G_{k+n}(\bar{O}, \underline{a})$, die an B hängt.

III) an A hängt die verlängerte Gabel $G_k(\bar{O}, \underline{a})$; Glied b liegt in Randbündel (\bar{O}, \bar{a}) . Bei Ausführen der Schnittpotenz entsteht an B die verlängerte Gabel $G_k(\bar{O}, \underline{a})$ neu, sonst verläuft alles wie bei I). Damit ist gezeigt, wie aus dem Hauptteil von P_N eine gerade Mehrfachdiagonale entfernt werden kann (man hätte in gleicher Weise die Schnittpotenz $s^n(\underline{a-1}, \underline{b-1})$ verwenden können). Durch Wiederholung des Verfahrens erhalten wir schliesslich einen von Mehrfachdiagonalen befreiten Hauptteil.

Im letzten Teil des Beweises haben wir die verlängerten Ga-

1) auf dem Ufer liegt das Glied b-1

bein auf gewöhnliche zu reduzieren. Zunächst gibt es aufgrund der Normalnummerierung keine verlängerten Gabeln $G_n(\bar{0}, \underline{x})$ mit $r=1$ und $r=2$. Wir reduzieren zuerst $G_n(0, \underline{x})$ $2 \leq r \leq q-3$ (Fig. 27) durch sukzessive Ausführung der 3 Schnittpotenzen

- 1) $s^n(\underline{x}, \underline{q-1})$
- 2) $s^{-n}(\underline{x}, 0)$
- 3) $s^{-n}(\underline{1}, \underline{q-1})$.

Der Knoten B von Fig. 27a entspricht dem Hauptteil des Kernpolygons. Durch 1) werden alle Glieder und Gabeln von K, die auf dem linken Ufer von $\langle r, q-1 \rangle$ liegen, von B nach A verschoben. Damit erhalten wir den Kern K' von Fig. 27b. Durch 2) werden alle Randglieder und verlängerten Gabeln auf dem rechten Ufer von $\langle r, 0 \rangle$ ebenfalls von B nach A verschoben. Bei dem nun entstandenen Komplex K'' (Fig. 27c) wird durch 3) das Glied 0 an A geknüpft. Damit ist A Hauptknoten (entspricht einem Hauptteil) geworden und die verlängerte Gabel $G_n(\bar{0}, \underline{x})$ ist auf die Gabel $G(\bar{0}, \underline{x})$ reduziert. Entsprechend können wir jede verlängerte Gabel $G_m(\bar{0}, \underline{x}_i)$ reduzieren mit $2 \leq r_i \leq q-3$. Man überzeugt sich leicht, dass eine solche Reduktion schon vorhandene einfache Gabeln nicht verändert. Es bleibt noch übrig, eine etwa vorhandene verlängerte Gabel $G_n(\bar{0}, \underline{q-2})$ zu reduzieren. Dies geschieht durch die Schnittänderung

$$s^{-n}(0, \underline{q-2}) \cdot s^{-n}(\underline{1}, \underline{q-1}) ,$$

wie man aus Fig. 28 leicht entnimmt. Damit ist aber der Satz bewiesen, dass bei dem Stamm $S(\mu_0, 1, 1, \dots, 1)$ $\mu_0 \leq q-1$ alle Familien Äquivalenzfamilien sind. Im nächsten Paragraphen werden wir den Fall $q=4, \mu_0=3$ behandeln und daran zeigen, dass der Satz nicht auf $\mu_0 = q-1$ ausgedehnt werden darf.

Wir behandeln nun ein Unterfall von Familien des Stammes $S(\mu_0, \mu_1, 1, \dots, 1)$. Es sollen im Zyklus der Windungsecken die Sortenteiler $\bar{0}, \bar{1}$ alle unmittelbar hintereinander vorkommen. Eine solche Anordnung von zwei Windungssorten nennen wir ein Rudel. Wir behaupten folgenden Satz:

Alle Familien, die ein Rudel aufweisen und deren übrige Windungssorten nur je einen Windungspunkt enthalten, sind Äquivalenzfamilien.

Wir legen zunächst wieder die Normalnummerierung für eine solche Familie fest. Die Sorten des Rudels bezeichnen wir mit $\bar{0}, \bar{1}$. Im Fall $\mu_0 + \mu_1$ ungerade (gerade) erhält der letzte Sortenteiler des Rudels im Zyklus der Windungsecken die Punktnummer $\bar{1}$ ($\bar{0}$), die im Zyklus folgende die Punktnummer $\bar{2}$, alle übrigen Windungsecken werden fortlaufend nummeriert. Das zugehörige Normalpolygon erklären wir durch Figur 29a¹⁾. Figur 29b stellt den entsprechenden Normalkomplex K_0 dar. Durch Induktionsschluss, ausgehend von $\mu_0 + \mu_1 = 3$, bestätigt man ferner leicht, dass das allgemeine Primärpolygon die Gestalt von Fig. 29c besitzt. Ein beliebiger normierter Kern K weist folglich nur einen Gliederzug $\langle 1, q-1 \rangle$ auf. Der Abstand seiner Endknoten sei $2n$. Durch die Schnittpotenz

$$s^n(\underline{1}, \underline{q-1})$$

geht dann K in einen Kern K_N über, der zur Normalschar $\langle K_0 \rangle$ gehört. K_N enthält nur einen Normalteil (bei $\mu_0 + \mu_1$ ungerade handelt es sich um einen Hauptteil), welcher noch gerade Mehrfachdiagonalen aufweisen kann. Wir entfernen sie analog dem Verfahren bei $p = q$, wobei die übrigen Normalteile nicht verändert werden (es gibt nämlich bei diesem Kern keine 2 Züge $\langle a, b \rangle$, die beide nicht kahl sind).

Der nun erhaltene Kern entspricht weitgehend dem Normalkern K_0 , es sind lediglich die Normalteile durch ungerade Mehrfachdiagonalen noch getrennt. Wir reduzieren sie auf einfache Diagonalen durch abwechselnde Ausführung der Schnittpotenzen

$$s^{\pm \mu_0}(\underline{q-1}, \underline{q-1}) , \quad s^{\pm \mu_1}(\underline{0}, \underline{q-2}) .$$

Wir gehen dabei von Fig. 30a aus. Im Kern treten auf die Verzweigungs-Innenknoten I_μ , die Verzweigungs-Außenknoten A_ν ; es ist ferner bezeichnet der rechts benachbarte Zweierknoten von A_ν mit R_ν , der links benachbarte mit L_ν .

1) in den Figuren ist nur der Fall $\mu_0 + \mu_1$ ungerade dargestellt

Durch $s^{-\alpha_0}(q-1, q-3)$ verschieben wir das Randglied $q-2$ von Knoten H nach Knoten L_1 ; durch $s^{-\beta_0}(q-2, 0)$ wird die Gabel $G(\bar{1}, q-1)$ von L_1 nach I_1 verschoben. Durch $s^{\alpha_1}(q-1, q-3)$ wandert das Randglied $q-2$ von I_1 nach R_2 ; durch $s^{\beta_1}(q-2, 0)$ wird $G(\bar{1}, q-1)$ von I_1 nach R_2 geschoben. Durch $s(q-1, q-3)$ wandert das Randglied $q-2$ von R_2 nach L_2 ; durch $s^{-\beta_2}(q-2, 0)$ wird der Komplexteil auf dem U-Ufer von $\langle q-2, 0 \rangle$ von L_2 nach I_2 verschoben (zu den letzten beiden Operationen siehe Fig. 3Ob und Fig. 3Oc). Durch Fortsetzen dieser Kettenoperation erhalten wir in endlich vielen Schritten den Normalkomplex K_0 , womit der Satz bewiesen ist.

Die Anzahl der Beispiele für Äquivalenzfamilien lässt sich in dieser Weise leicht vermehren. Herr Lotz hat in seiner Dissertation nachgewiesen, dass sämtliche Familien der Art $A(q+2, q) \quad q > 4$ Äquivalenzfamilien sind. Das angewandte Verfahren ist elementar, weil es keinen Weg aufzeigt, der bei jeder Äquivalenzfamilie von einem beliebigen Komplex zu einem Normalkomplex führt. Nichtäquivalenz von Komplexen kann man erst recht nicht in dieser Weise nachweisen. Führt das Verfahren jedoch zum Erfolg, so kann man ihm die Kurvenänderung entnehmen, welche zwei äquivalente Komplexe verknüpft.

§ 9 Beispiele von Familien aus der Art $A(6, 4)$, welche keine Äquivalenzfamilien sind.

Im Schlussparagrafen behandeln wir einfache Beispiele für Familien, die keine Äquivalenzfamilien sind und entnehmen diese der Art $A(6, 4)$.¹⁾

Zunächst zwei Vorbemerkungen. Bei einem Komplex K seien alle Züge $\langle a, b \rangle$ kahl ausser einem. Wir betrachten die Elementargebiete, die mit dem nicht kahlen Zug mindestens einen Knoten gemeinsam haben. Ihre Breiten bezeichnen wir mit U_i auf dem U-Ufer mit V_k auf dem V-Ufer; dabei sollen die Indizes einem positiven Umlauf um den Zug entsprechen (Fig. 3l).

Führen wir die Schnittpotenz $s^n(a, b)$ aus, so bleiben die Breiten U_i ($i = 2, 3, \dots, r-1$), V_k ($k = 2, 3, \dots, s-1$) erhalten. Es können sich nur die Breiten U_1, U_r, V_1, V_s ändern, die zu Elementargebieten gehören, welche einen Endknoten von $\langle a, b \rangle$ aufweisen, von nun an Endbreiten genannt. Wir zerlegen ferner $U_i = U_i' + U_i''$, wobei U_i' die Bündel zählt, die Glieder des Zuges $\langle a, b \rangle$ enthalten und an welche das zu U_i gehörende Elementargebiet stösst; eine entsprechende Zerlegung nehmen wir bei V_k vor, $V_k = V_k' + V_k''$. Für jeden Komplex K' der durch $s^n(a, b)$ aus K hervorgeht, gilt sodann:

$$(1) \sum_{i=1}^r U_i' = \sum_{k=1}^s V_k'$$

$$(2) U_i' \quad (i = 2, 3, \dots, r-1) \quad V_k' \quad (k = 2, 3, \dots, s-1)$$

bleiben ungeändert

(1) gilt, da jede der Summen gleich dem Abstand der Endknoten des nicht kahlen Zuges $\langle a, b \rangle$ ist. Aus (1) und (2) folgt,

$$U_1' + U_r' = (V_1' + V_s')$$

bleibt ungeändert. Hieraus folgt schliesslich, alle aus K

1) Wir hatten schon auf Seite 32 bemerkt, dass im trivialen Fall $q=3$ sich leicht solche Beispiele finden lassen.

durch die Schnittpotenzen $s^n(\underline{a}, \underline{b})$ hervorgehende Komplexe K' mit K in

$$(1) \quad U_i \quad (i = 2, 3, \dots, r-1) \quad ; \quad V_k \quad (k = 2, 3, \dots, s-1)$$

$$(2) \quad U_1 + U_r - (V_1 + V_s)$$

übereinstimmen.¹⁾

Zweite Vorbemerkung. K_1, K_2 seien normierte Komplexe einer Familie. Welche Elemente von \mathcal{K} muss man mindestens berücksichtigen, um sagen zu können, dass K_1, K_2 nicht äquivalent sind? Bei der Beantwortung dieser Frage unterscheiden wir 2 Fälle. Entweder bleibt die Nummerierung der Familie nur bei Schnittänderungen erhalten (asymmetrische Familie) oder es gibt Elemente ausserhalb \mathcal{N} , welche die Nummerierung reproduzieren (symmetrische Familie). Es ist zum Beispiel die Familie mit der Nummerierung $:\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{3}, \bar{4}$: symmetrisch, denn die Permutation $\mathcal{N} = (1, 3)(2, 4)$ führt die Nummerierung in sich über; dagegen überzeugt man sich leicht, dass die Familie mit der Nummerierung $:\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{3}$: asymmetrisch ist. Bei den symmetrischen Familien besitzt die zyklische Folge der Elementargebiete bezüglich der Anordnung der Sortenteiler Symmetrieeigenschaften. Bei Äquivalenzuntersuchungen normierter Komplexe brauchen wir bei asymmetrischen Familien nur die Schnittänderungen zu berücksichtigen. Bei symmetrischen Familien suchen wir zunächst die Untergruppe der \mathcal{N}_i auf, welche die Nummerierung festlässt. Zu jedem Element $\mathcal{N}_i \neq 1$ dieser Untergruppe wählen wir eine Kurvenänderung a_i aus mit $\mathcal{N}(a_i) = \mathcal{N}_i$. Bei der Äquivalenzuntersuchung haben wir dann ausser \mathcal{N} sämtliche Nebenklassen $a_i \cdot \mathcal{N}$ zu berücksichtigen.

Bei der Art $A_4^{(6)}$ treten die beiden Stämme $S(2, 2, 1, 1)$ und $S(3, 1, 1, 1)$ auf. Beginnen wir mit dem letzteren. Dieser enthält nur eine einzige Familie, für welche wir die Normalnummerierung

$$:\bar{0}_1, \bar{1}, \bar{0}_2, \bar{2}, \bar{0}_3, \bar{3} :$$

1) diese Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf Komplexe mit beliebigen Zügen $\langle a, b \rangle$ ausdehnen.

wählen. Fig. 32 stellt die 3 möglichen Primärpolygone P_1, P_2, P_3 dieser Familie dar (P_i möge der Primärkern K_i entsprechen). Die Breiten der Elementargebiete \bar{a}, \bar{b}_j werden wir mit $B(\bar{a}), B_j(\bar{b})$ bezeichnen. Unterwerfen wir den beliebigen Kern K'_i (siehe Fig. 33a) der Primärschar $\langle K_1 \rangle$ der Schnittpotenz $s^n(\underline{0}, \underline{2})$, dann bleiben infolge der ersten Vorbemerkung die Grössen

$$B_2(\bar{0}), B(\bar{3}), B(\bar{1}) + B(\bar{2}) - B_1(\bar{0}) - B_3(\bar{0})$$

ungeändert und haben die Werte

$$B_2(\bar{0}) = 0 \quad B(\bar{3}) = 2i + 2\ell + 1$$

$$B(\bar{1}) + B(\bar{2}) - B_1(\bar{0}) - B_3(\bar{0}) = 2i + 4k + 2\ell + 3$$

Üben wir auf K'_i die Schnittpotenz $s^m(\underline{1}, \underline{3})$ aus, so bleiben

$$B_3(\bar{0}), B(\bar{1}), B(\bar{2}) + B(\bar{3}) - B_1(\bar{0}) - B_2(\bar{0})$$

ungeändert mit den Werten

$$B_3(\bar{0}) = 0 \quad B(\bar{1}) = 2i + 2k + 1$$

$$B(\bar{2}) + B(\bar{3}) - B_1(\bar{0}) - B_2(\bar{0}) = 2i + 2k + 4\ell + 3$$

Mithin gilt für K'_i und jeden Komplex, der durch eine der Schnittpotenzen $s^n(\underline{0}, \underline{2}), s^m(\underline{1}, \underline{3})$ (n, m ganze Zahlen) entsteht,

$$\Phi = B(\bar{1}) + B(\bar{2}) + B(\bar{3}) - \sum_{i=1}^3 B_i(\bar{0}) = 4(i+k+\ell+1)$$

Wir behaupten Φ besitzt für jeden normierten Komplex der Äquivalenzklasse $[K_1]$ denselben Wert $4(i+k+\ell+1)$.

Um dies zu beweisen, stellen wir zunächst fest, dass unsere Familie symmetrisch ist. Ihre Nummerierung $:\bar{0}_1, \bar{1}, \bar{0}_2, \bar{2}, \bar{0}_3, \bar{3}$: bleibt erhalten bei den Permutationen

$$\mathcal{N}_1 = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{3})(\bar{1}, \bar{2})$$

$$\mathcal{N}_2 = (\bar{1} \bar{2} \bar{3})^2 = (\bar{1} \bar{2})(\bar{2} \bar{3})$$

Setzen wir $a_0 = t(\underline{2}) \cdot t(\underline{1})$, so erhalten wir durch Ausübung sämtlicher Kurvenänderungen aus den Nebenklassen $\mathcal{N}, a_0 \mathcal{N}, a_0^2 \mathcal{N}$ alle normierten Komplexe von $[K_1]$.

1) alle zu K'_i äquivalenten Komplexe bilden die Äquivalenzklasse $[K_1]$; auf S. 30 Komplexklasse genannt.

Wir greifen jetzt aus jeder Primärschar einen Kern mit beliebigen Parameterwerten heraus: $K_1^i, K_1^j, K_2^i, K_3^i$ (siehe Fig.33 $K_1^i, K_1^j \in \langle K_1 \rangle$). Auf jeden dieser Kerne üben wir die 3 Kurvenänderungen

$$a_0 = t(2).t(1) \quad , \quad s^n(0,2) \quad , \quad s^m(1,3)$$

aus. Bleibt in allen Fällen Φ invariant, so ist gezeigt, dass alle normierten Komplexe von $[K_1^i]$ dasselbe Φ besitzen. Die Durchführung dieses Beweisverfahrens ist etwas langwierig, bietet aber sonst keine Schwierigkeiten. Wir begnügen uns hier es für K_2^i durchzuführen. Durch $t(2).t(1)$ geht K_2^i in K_1^* über, der offensichtlich zu $\langle K_1 \rangle$ gehört. Für beide Komplexe gilt

$$\Phi = 4(1+k+1)$$

Da $s^m(1,3)$ zur Komplexgruppe $\mathcal{K}(K_2^i)$ gehört, bleibt bei dieser Änderung K_2^i und Φ konstant. Schliesslich gilt für $s^n(0,2)$

$$B_2(0) = 0 \quad ; \quad B(3) = 2k+1 \quad ; \quad B(1)+B(2)-B_1(0)-B_3(0) = 4i+2k+3 \quad ,$$

woraus sich $\Phi = 4(1+k+1)$ ergibt. Nachdem man dies Verfahren bei den 4 Komplexen durchgeführt hat, ergibt sich, dass die Übereinstimmung in Φ eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz von normierten Komplexen der betrachteten Familie ist.

Wir zeigen jetzt, dass diese Übereinstimmung in Φ auch hinreichend für die Äquivalenz normierter Komplexe ist. Zunächst lassen sich durch Schnittänderungen normierte Komplexe in dieselbe Primärschar $\langle K_1 \rangle$ überführen, K_2^i geht durch $s^{k+l+1}(0,2)$, K_3^i geht durch $s^{-(k+l+1)}(1,3)$ in einen Komplex der Primärschar $\langle K_1 \rangle$ über. Wir betrachten also nur Komplexe aus $\langle K_1 \rangle$. Die Entfernung gerader Mehrfachdiagonalen gelingt in der schon öfters durchgeführten Weise. Es möge nun ein Komplex vorliegen, der aus K_1^i, K_1^j hervorgeht, wenn man $i = 0$ setzt (K_1^0). Durch die beiden Schnittpotenzen $s^{-l}(0,2)$, $s^{-l}(1,3)$ geht dieser in einen Kern über, bei dem am Hauptknoten nur eine einfache Gabel $G(0_3, 2)$ auftritt. Auf diesen Komplex können wir mithin alle normierten Komplexe mit konstantem Φ reduzieren. Wir haben das Ergebnis:

Die durch die Nummerierung $:\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{3}$: ausgezeichnete Familie zerfällt in abzählbar viele Äquivalenzklassen. Notwendig und hinreichend für die Äquivalenz zweier normierter Komplexe ist ihre Übereinstimmung in Φ .

Wir haben damit das erste Beispiel $q > 3$ gefunden, bei dem das Diagonalsystem des Kernpolygons wesentlich für die Äquivalenz ist. Ferner bildet dieser Satz ein Korollar zu dem früher bewiesenen Satz: Alle Familien des Stammes $S(\mu, 1, \dots, 1)$ $\mu_0 < q-1$ sind Äquivalenzfamilien.

Wir behandeln jetzt den anderen Stamm $S(2, 2, 1, 1)$ der Art $A_4^{(6)}$. Die in Fig.34 wiedergegebenen Ränder stellen die möglichen Anordnungen der Windungsecken dar. Es existieren mithin 4 Familien. Wir zeigen zunächst, dass die durch Fig.34a, 34b, 34c festgelegten Familien, Äquivalenzfamilien sind. Dies folgt bei Fig.34a, weil die Windungssorten $\bar{0}, \bar{1}$ ein Rudel bilden. Bei der Familie von Fig.34b existieren 4 Primärpolygone (Fig.35). Wir wählen P_1 als Normalpolygon. Es bereitet keine Mühe, die Komplexe der Primärscharen $\langle K_2 \rangle$, $\langle K_3 \rangle$, $\langle K_4 \rangle$ durch Kurvenänderungen in Komplexe von $\langle K_1 \rangle$ überzuführen; ebenso einfach ist die Entfernung gerader Mehrfachdiagonalen bei einem Netz von $\langle P_1 \rangle$. Der nun auftretende Kern wird durch die Kurvenänderung

$$s^{-k}(1,3).s^{-k}(0,2).s^{-1}(1,3).s^{-l}(0,2).s(1,3)$$

in den Normalkomplex übergeführt.

In gleicher Weise verfahren wir bei der Familie von Fig.34c. Hier gibt es zwei Primärpolygone (Fig.37). P_1 sei das Normalpolygon. Wir begnügen uns wiederzugeben, durch welche Kurvenänderung der Komplex von Fig.38 in den Normalkomplex übergeführt werden kann. Dies geschieht durch

$$s^{-(1+l)}(0,2).s^{k+l+1}(1,3).K_0.s(1,3).s^{-(1+l+1)}(0,2).K_0 \quad ,$$

wobei K_0 eine Klappung mit $\mathcal{N}(K_0) = (\bar{1}, \bar{3})$ ist.

Es bleibt noch übrig, die Familie von Fig.34d zu diskutieren. Wir behaupten folgenden Satz:

1) siehe Fig.36

Bei der durch die Normalnummerierung $:\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{3}$: ausgedehnten Familie sind normierte Komplexe dann und nur dann äquivalent, wenn sie in $\Psi = |B(\bar{2})-B(\bar{3})|$ übereinstimmen.
 Beweis: Da die Nummerierung durch $\bar{\pi} = (\bar{0} \bar{1})(\bar{2} \bar{3})$ reproduziert wird, liegt eine symmetrische Familie vor. Wir haben ausser \mathcal{K} die Nebenklasse $K \cdot \mathcal{K}'$ zu berücksichtigen. Fig. 39 zeigt die 3 möglichen Primärpolygone der Familie. Greifen wir einen Kern K_1' der ersten Primärschar heraus.²⁾ Er weist einen Zug $\langle 0, 2 \rangle$ und 2 Züge $\langle 1, 3 \rangle$ auf, dabei ist keiner von diesen kahl. Gemäss der Vorbemerkung von S.43 gilt für die aus K_1' durch $s^n(Q, 2)$ entstehenden Komplexe

$$B(\bar{2}) \quad , \quad B(\bar{3}) \quad , \quad B_1(\bar{0})+B_2(\bar{0})-B_1(\bar{1})-B_2(\bar{1})$$

bleiben konstant. Für die Komplexe, welche aus K_1' durch $s^m(\underline{1}, \underline{3})$ hervorgehen, verifiziert man leicht (in Verallgemeinerung der 1. Vorbemerkung)

$$B(\bar{3})-\sum_1^2 B_1(\bar{0}) \quad , \quad B(\bar{2})-\sum_1^2 B_1(\bar{1}) \quad , \quad B(\bar{2})-B(\bar{3})$$

bleiben invariant. Also bleibt bei beiden Schnittänderungen $B(2)-B(3)$ ungeändert. Üben wir aber auf K_1' K aus, so erkennt man sofort, dass $B(\bar{2})-B(\bar{3})$ das Vorzeichen wechselt (das gilt für jeden normierten Komplex).

Betrachten wir nun einen Komplex K_2' (Fig. 40) der Primärschar $\langle K_2 \rangle$. Dann gehört $s^m(\underline{1}, \underline{3})$ zu $\mathcal{K}(K_2')$. Auch für $s^n(Q, 2)$ folgt sofort, $B(\bar{2})-B(\bar{3})$ bleibt fest. Die Komplexe von $\langle K_3 \rangle$ zeigen schliesslich analoges Verhalten. Wir haben damit das Ergebnis erhalten, $\Psi = |B(\bar{2})-B(\bar{3})|$ ist bei allen Primärscharen bei den 3 zur Diskussion gestellten Änderungen konstant geblieben. Übereinstimmung in Ψ ist damit eine notwendige Bedingung für äquivalente normierte Komplexe dieser Familie. Der Beweis, dass diese Bedingung auch hinreichend für die Äquivalenz

-
- 1) K ist die auf S.6 als Klappung eingeführte scheinbare Kurvenänderung, bei welcher das Glied 0 fest bleibt.
 - 2) es gibt 4 verschiedene Systeme von geraden Mehrfachdiagonalen bei $\langle P_1 \rangle$ (Sekundärscharen); da sie alle das gleiche Zugverhalten aufweisen, gilt unsere Überlegung für alle vier.

normierter Komplexe ist, verläuft analog dem behandelten Fall der Familie des Stammes $S(3, 1, 1, 1)$.
 Damit ist die Art $A(\frac{6}{4})$ vollständig diskutiert. Es kam uns dabei weniger auf die Einzelergebnisse an, als an einem einfachen Fall eine verallgemeinerungsfähige Methode der Äquivalenzuntersuchung aufzuzeigen und zu erläutern.

Literaturverzeichnis.

- Blanc, Charles
(1) Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes. Comment.math.helv. 9 (1936) S.193
- Drape, Elisabeth
(1) Über die Darstellung Riemannscher Flächen durch Streckenkomplexe. Dtsch.Math. 1 (1936) S.805
- Elfving, Gustav
(1) Über Riemannsche Flächen und Annäherung von meromorphen Funktionen. 8. Congr. des Math. scand. Stockholm 1934, S.96
(2) Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta. Soc. Sci. Fennicae N.S. 2, No. 3 (1934)
- Fricke, Robert und
Klein, Felix
(1) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Teubner, Leipzig 1897
- König, Dénes
(1) Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Akadm.Verlagsges., Leipzig 1936
- Nevanlinna, Rolf
(1) Über die Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen. Acta math. 55 (1930) S.259
(2) Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. 58 (1932) S.295
(3) Eindeutige analytische Funktionen. Springer, Berlin, 1936
- Reidemeister, Kurt
(1) Kombinatorische Topologie. F.Vieweg & Sohn, Braunschweig 1932
- Speiser, Andréas
(1) Über Riemannsche Flächen. Comment. math. helv. 2 (1930) S. 284
- Ullrich, Egon
(1) Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 46 (1936) S.232
(2) Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N.F. 1 (1936) S.135

- Ullrich, Egon
(3) Flächenbau und Wertverteilung. 9.Congr. Math.scand. Helsingfors 1938, S.179
- Wagner, Helmut
(1) Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten. Journal f. reine angew. Math. 175 (1936) S.6

Fig. 1

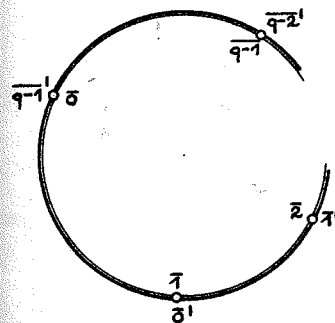
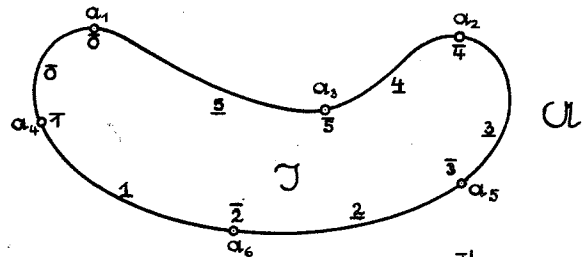
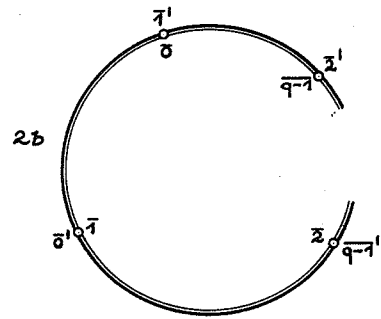


Fig.

2a



2b

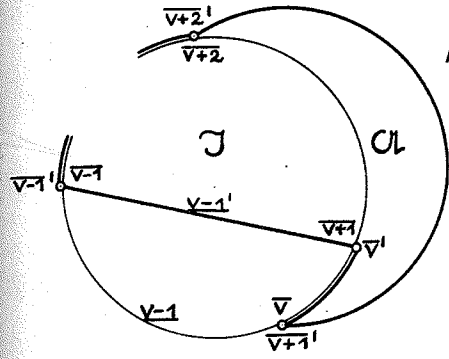


Fig. 3

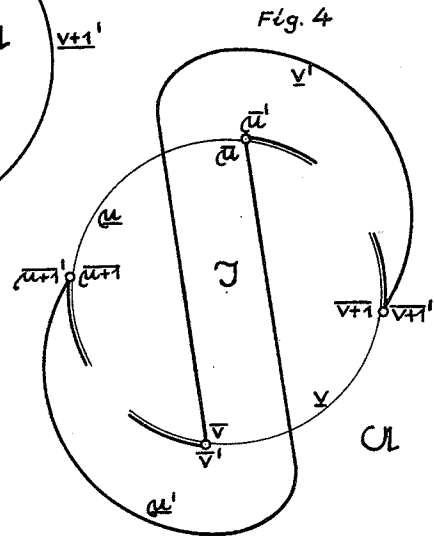


Fig. 4

- Ausgangskurve
- 1. Deukurve
- 2. Deukurve

Fig. 5

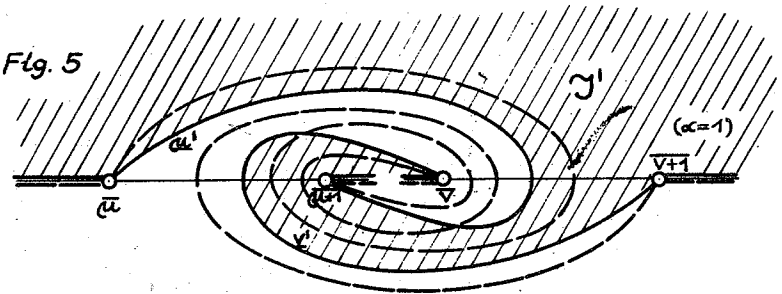


Fig. 6

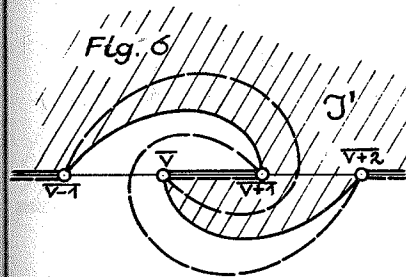


Fig. 7

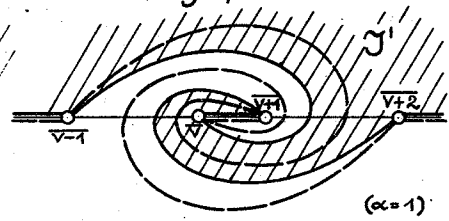


Fig. 8a

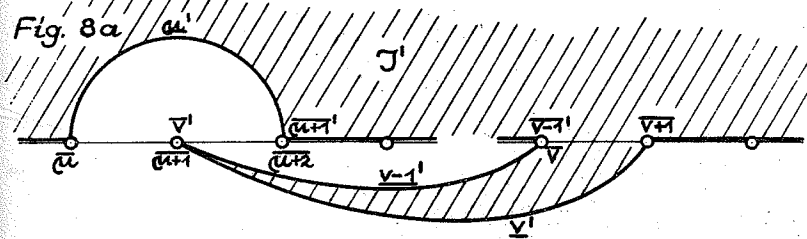


Fig. 8b

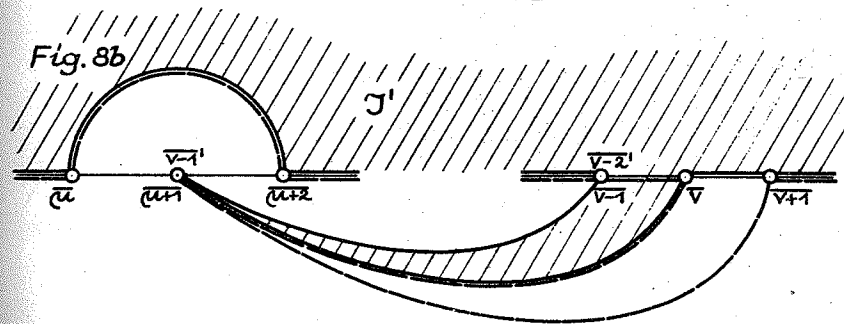


Fig. 13

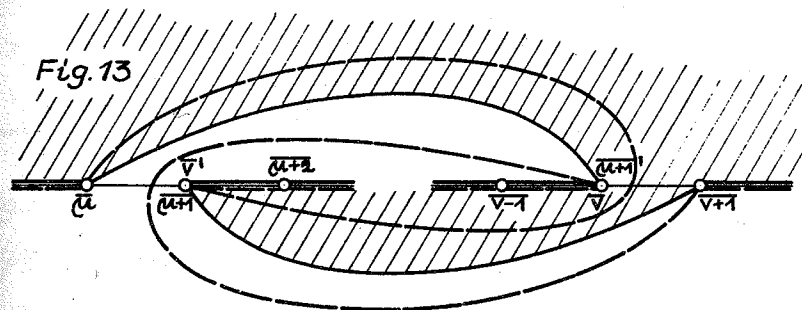


Fig. 14a

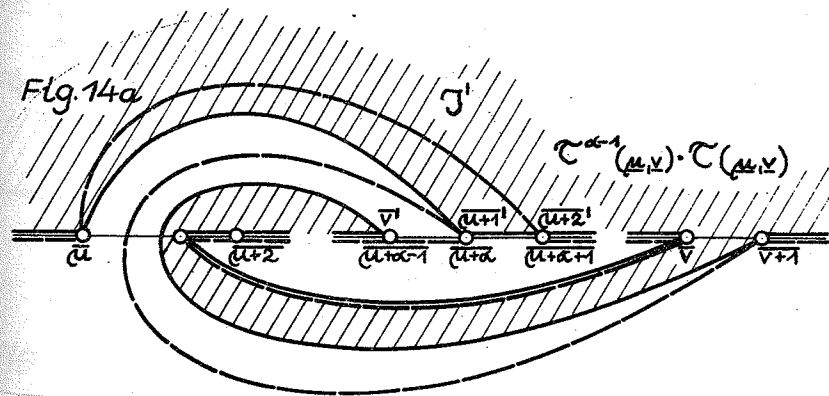
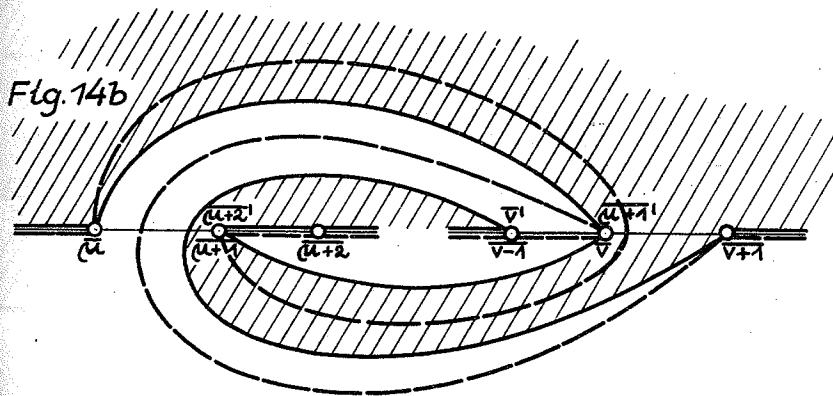


Fig. 14b



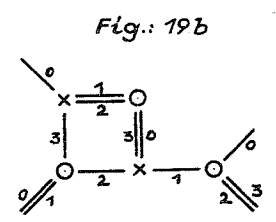
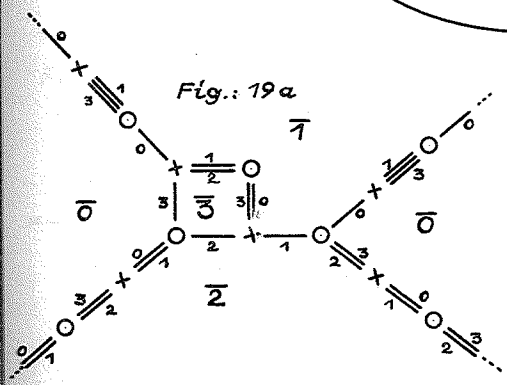
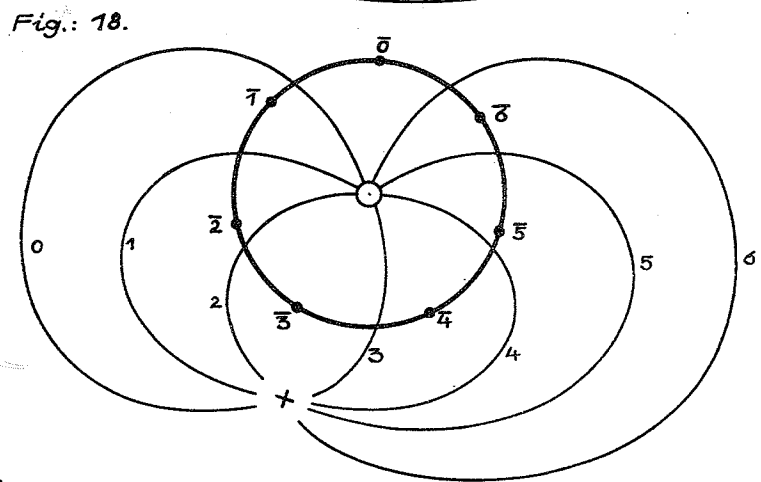
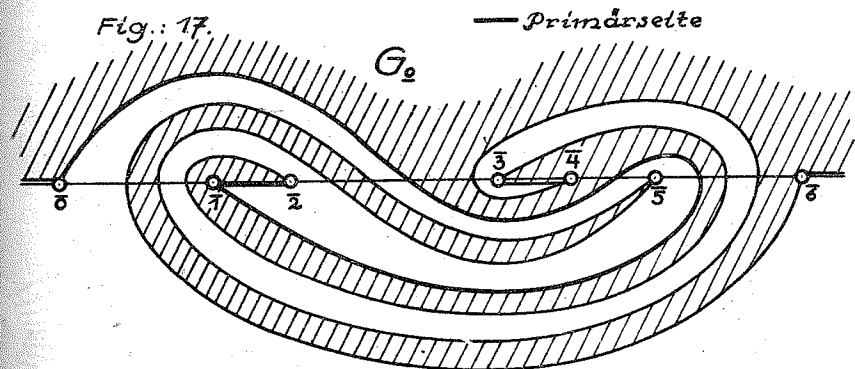


Fig.: 20a

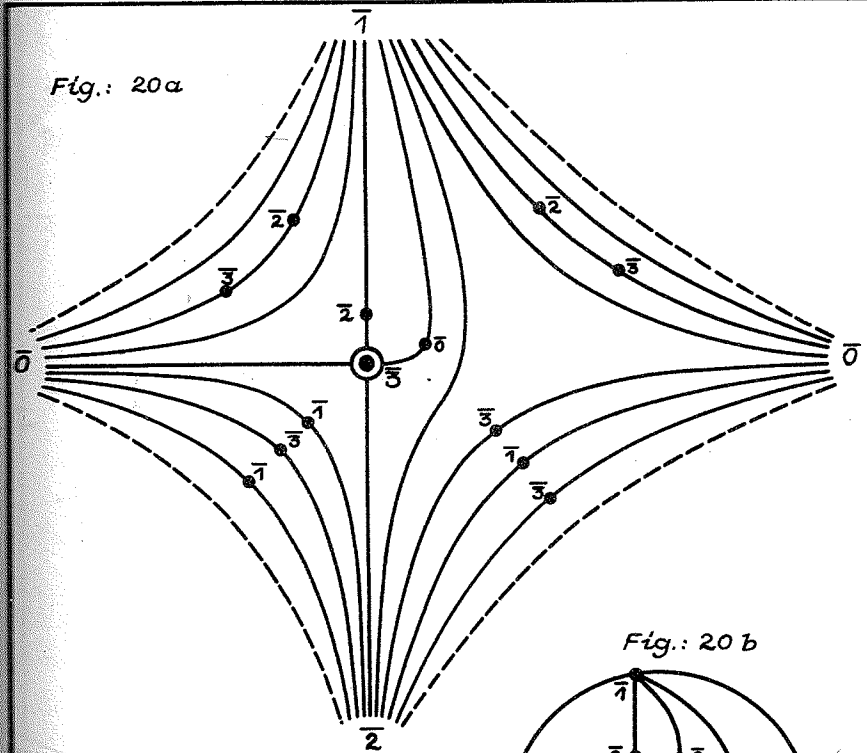
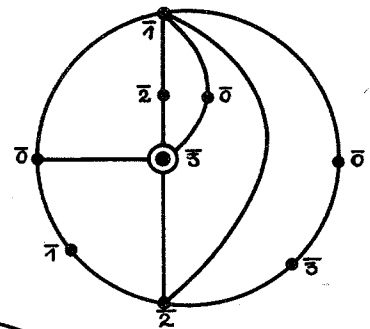
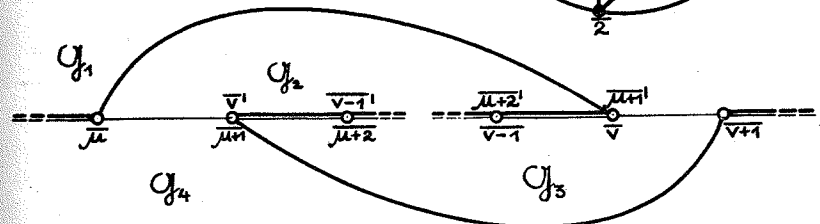


Fig.: 20 b



● algebraische Windungsecke

Fig.: 21.



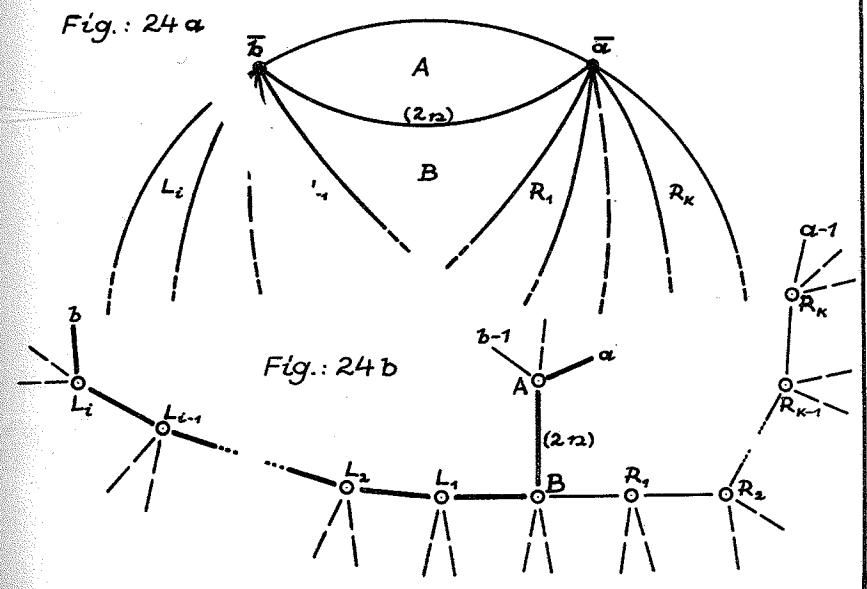
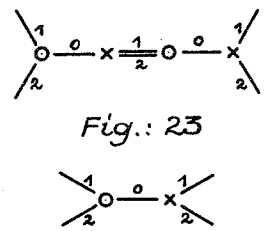
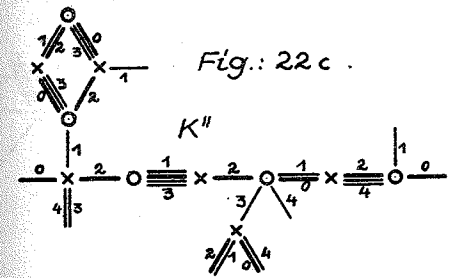
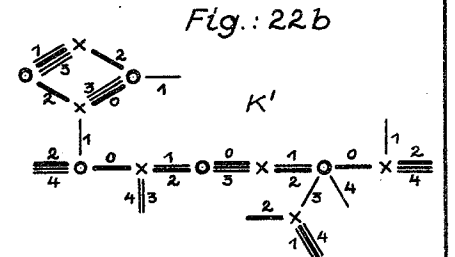
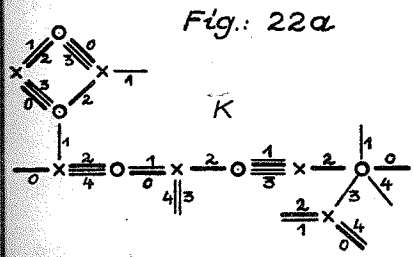


Fig.: 25.

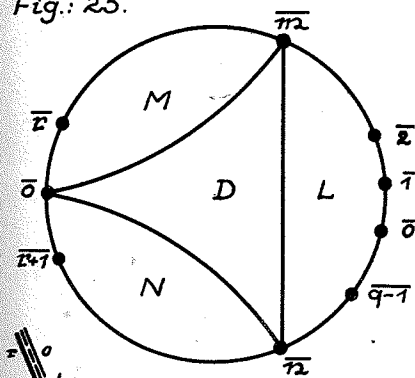


Fig.: 26 b

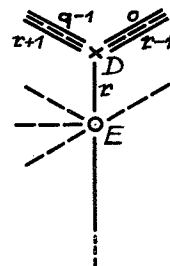


Fig.: 26 a

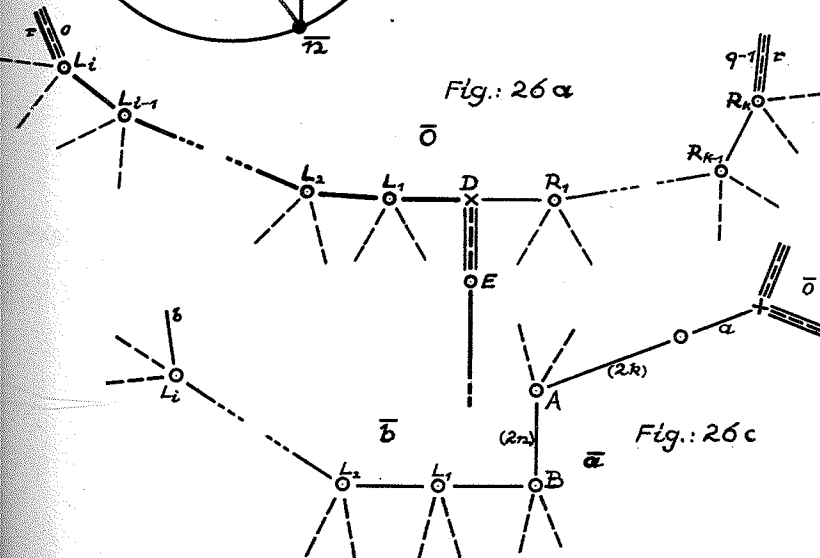


Fig.: 26 c

Fig.: 27 a

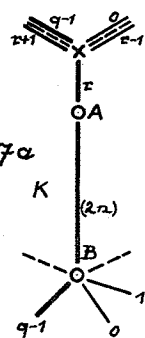


Fig.: 27 b

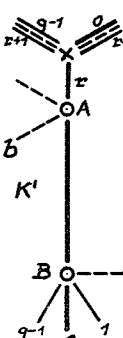


Fig.: 27 c

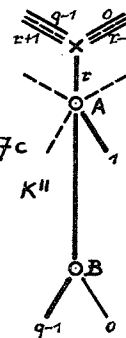


Fig.: 28a

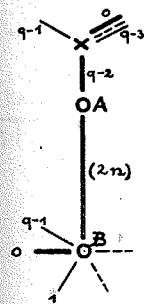


Fig.: 28b

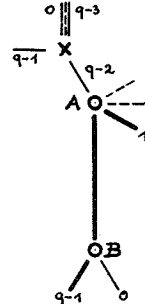


Fig.: 29a

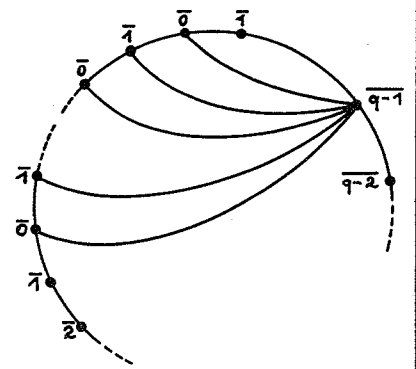


Fig.: 29b

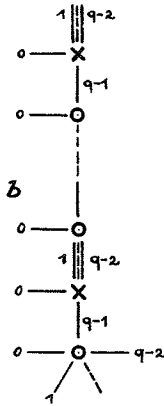


Fig.: 29c

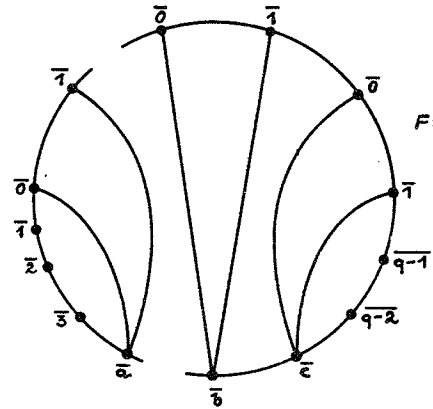


Fig.: 30a

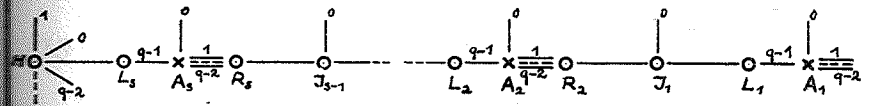


Fig.: 30b

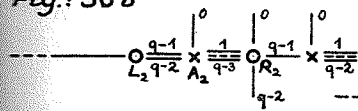
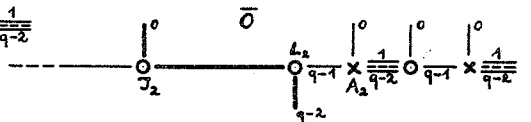
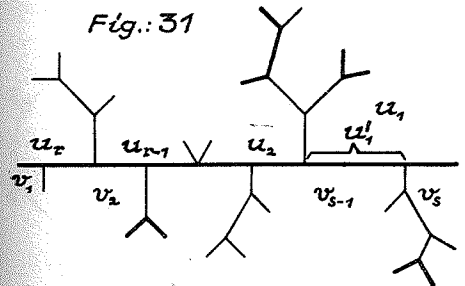


Fig.: 30c





Schem. Figur.
 In die Elem. Gebiete sind
 die Breiten eingetragen,
 u_i zählt die Bündel
 der markierten Bündel-
 ketten.
 $\langle a, b \rangle$ stark ausgezogen.

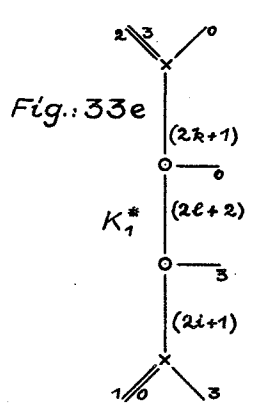
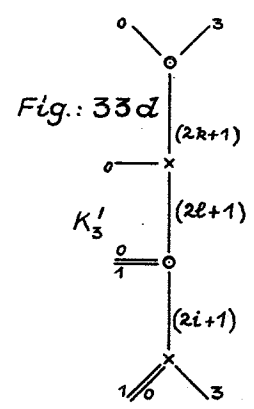
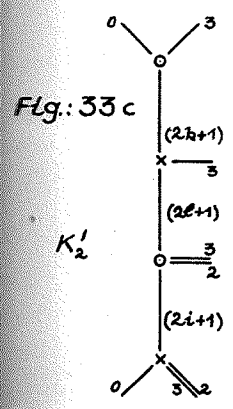
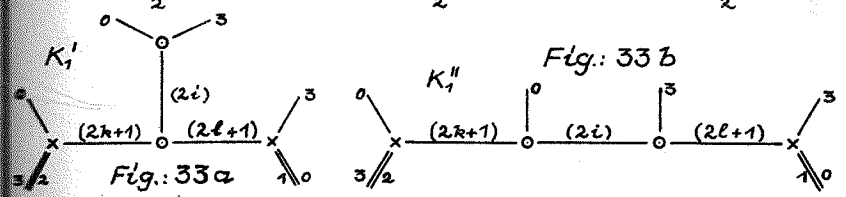
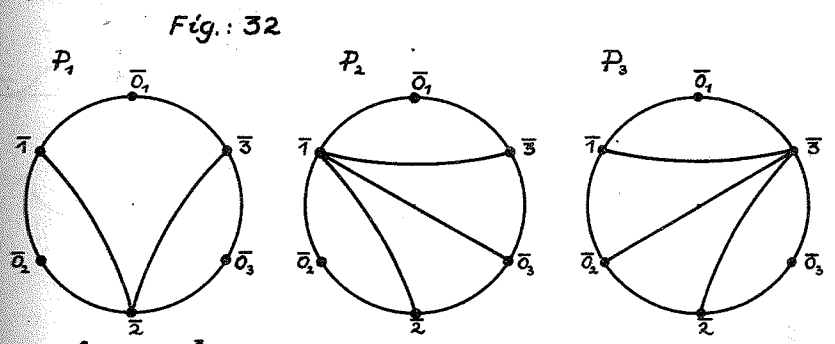


Fig.: 34

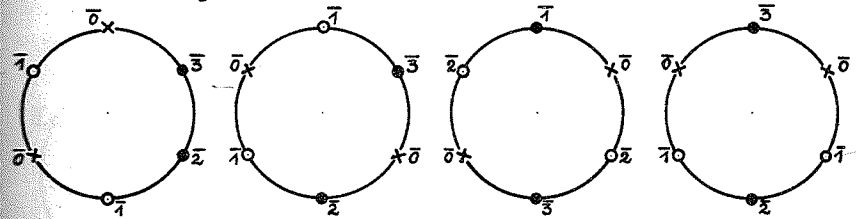


Fig.: 35

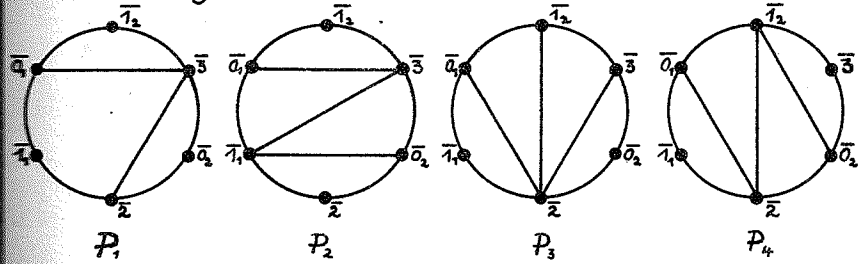


Fig.: 36

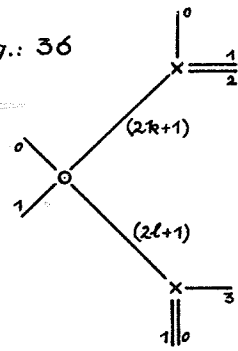


Fig.: 37

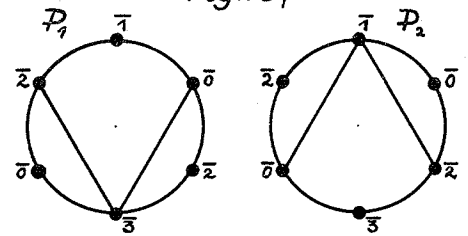


Fig.: 38

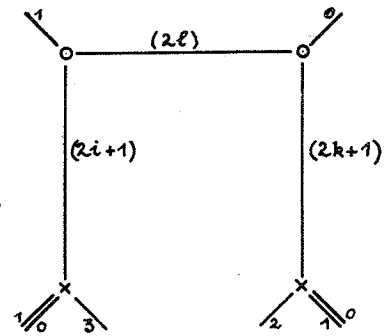


Fig.: 39

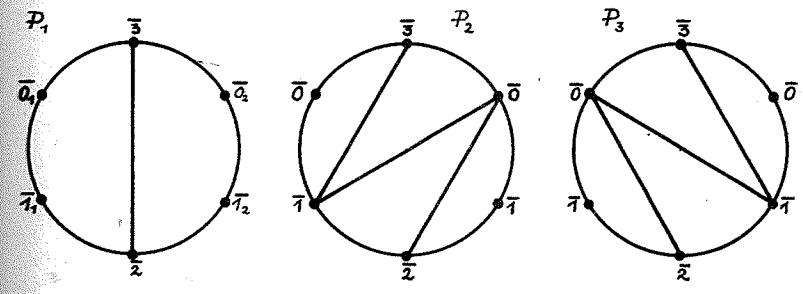


Fig.: 40

