XXXV.

Über die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie.

(Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 49, 1904, S. 242–253.)

Der Satz von E. Picard[1]), nach welchem eine beständig konvergierende Reihe sich notwendig auf ihr konstantes Glied reduziert, wenn sie zwei endliche Werte nicht annimmt, hat durch Herrn E. Landau[2]) neuerdings eine sehr bemerkenswerte Verallgemeinerung erfahren. Herr Landau beweist nämlich folgenden Satz:

„Wenn die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_1 \neq 0)$$

in dem Kreise $|x| < r$ konvergiert und in diesem Kreise weder den Wert 0 noch den Wert 1 annimmt, so liegt r unterhalb einer gewissen endlichen positiven Grösse λ, die in eindeutiger Weise von den beiden ersten Koeffizienten a_0 und a_1 der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ abhängt."

Diese Grösse λ wird bei Herrn Landau durch fünf Ungleichungen definiert. Man kann aber, wie ich durch eine weitere Ausführung des zweiten von Herrn Landau für seinen Satz gegebenen Beweises fand, wesentlich einfachere Bestimmungen für die Grösse λ angeben. Den hierdurch gewonnenen Satz möchte ich in den folgenden Zeilen begründen und daran den Beweis einiger weiterer Sätze von ähnlichem Charakter anknüpfen.

1.

Zunächst muss ich an einige Sätze aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen erinnern[3]).

---

[1]) Mémoire sur les fonctions entières, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, série 2, t. 9 (1880), p. 145–166.

[2]) Über eine Verallgemeinerung des Picard'schen Satzes, Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften 1904, S. 1118—1133.

[3]) Einfache Beweise dieser Sätze finden sich in meiner Arbeit: „Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen", Mathem. Annalen, Bd. 58 (1904), S. 343–360 [Diese Werke, Bd. I, S. 577–595].

Es seien ω_1 und ω_2 zwei komplexe Variable, welche nur der einen Einschränkung unterworfen sind, dass die zweite Komponente v des Quotienten

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = u + iv \tag{1}$$

positiv und folglich der absolute Betrag von

$$h = e^{2i\pi\omega} = e^{-2\pi v} e^{2i\pi u} \tag{2}$$

kleiner als 1 ist. In der Ebene der komplexen Variabeln ω sei G dasjenige Gebiet, welches durch die Ungleichungen

$$v > 0, \quad u^2 + v^2 \geqq 1, \quad -\frac{1}{2} \leqq u \leqq +\frac{1}{2} \tag{G}$$

bestimmt ist. Dabei sollen von den Randpunkten diejenigen, die eine positive erste Komponente u besitzen, nicht zu dem Gebiete G gerechnet werden.

Setzt man nun

$$\left\{\begin{aligned} \varDelta &= \varDelta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} h \prod_{r=1}^{\infty} (1 - h^r)^{24}, \\ g_2 &= g_2(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{4} \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_{r=1}^{\infty} r^3 \frac{h^r}{1 - h^r}\right], \\ g_3 &= g_3(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{6} \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum_{r=1}^{\infty} r^5 \frac{h^r}{1 - h^r}\right], \end{aligned}\right. \tag{3}$$

so besitzt

$$J = \frac{g_2^3}{\varDelta} = 27\,\frac{g_3^2}{\varDelta} + 1, \tag{4}$$

angesehen als Funktion von ω, folgende Eigenschaften:

1. J ist in dem Gebiete $v > 0$ eine eindeutige, reguläre analytische Funktion, welche die Achse der reellen Zahlen $v = 0$ zur natürlichen Grenze besitzt.

2. J nimmt jeden Wert ein und nur einmal an, wenn ω jede Lage in dem Gebiete G erhält. Den speziellen Argumenten $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\omega = i$, $\omega = \infty$ entsprechen die Funktionswerte $J = 0, 1, \infty$ bezüglich.

3. Die Gleichung $J(\omega') = J(\omega)$ ist dann und nur dann erfüllt, wenn es vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gibt, welche der Gleichung

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

genügen.

4. Betrachtet man umgekehrt ω als Funktion von J, so wird die Verzweigung von ω durch eine die J-Ebene mit unendlich vielen Blättern bedeckende Riemann'sche Fläche dargestellt, deren Blätter bei $J = 0$ zu je dreien, bei $J = 1$ zu je zweien, bei $J = \infty$ zu je unendlich vielen zusammenhängen.

Derjenige einem gegebenen Werte von J entsprechende Wert von ω, welcher durch einen Punkt des Gebietes G dargestellt wird, möge als „Hauptwert" bezeichnet werden.

5. Für den Differentialquotienten $\frac{dJ}{d\omega}$ gilt die Darstellung[1])

$$(5)\qquad \frac{dJ}{d\omega} = \frac{9\,\omega_2^2 g_2^2 g_3}{i\pi\Delta} = 4\sqrt{3}\,i\pi\sqrt[3]{J^2}\sqrt{J-1}\cdot h^{\frac{1}{6}}\prod_{r=1}^{\infty}(1-h^r)^4.$$

Hiervon lässt sich eine Anwendung auf die Taylor'schen Entwicklungen der Funktion $\omega(J)$ machen. Sei nämlich a_0 ein von $0, 1, \infty$ verschiedener, übrigens beliebig fixierter Wert von J und ω_0 der $J = a_0$ entsprechende Hauptwert von ω. In der Entwicklung

$$(6)\qquad \omega = \omega_0 + c_1(J - a_0) + c_2(J - a_0)^2 + \cdots$$

ist dann nach (5)

$$(7)\qquad c_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}\cdot i\pi}\cdot a_0^{-\frac{2}{3}}(a_0-1)^{-\frac{1}{2}}h_0^{-\frac{1}{6}}\prod_{r=1}^{\infty}(1-h_0^r)^{-4},\quad (h_0 = e^{2i\pi\omega_0}).$$

2.

Die Potenzreihe

$$(8)\qquad \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

konvergiere in dem Kreise $|x| < r$ und nehme in diesem Kreise weder den Wert 0 noch den Wert 1 an. Da $\mathfrak{P}(0) = a_0$ ist, so besitzt a_0 jedenfalls einen von 0 und 1 verschiedenen Wert. Zunächst werde nun weiter angenommen, dass a_1 nicht Null ist. Durch den Ansatz

$$(9)\qquad J = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

wird nun jedem x im Innern des Kreises $|x| < r$ ein bestimmter endlicher Wert J zugeordnet, der sich stetig mit x ändert. Beschreibt x einen geschlossenen Weg, im Innern des Kreises $|x| < r$, so beschreibt J einen geschlossenen Weg, der sich — infolge der Voraussetzung, dass $\mathfrak{P}(x)$ beständig von 0 und 1 verschieden bleibt — ohne Überschreitung der Punkte $J = 0$ und $J = 1$ auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

[1]) Siehe des Verfassers „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen erster Stufe", Mathem. Annalen, Bd. 18 (1881), S. 560 [Diese Werke, Bd. I, S. 34].

Da nun ω als Funktion von J im Endlichen nur bei $J=0$ und $J=1$ verzweigt ist, so folgt, dass ω eine eindeutige reguläre Funktion von x im Kreise $|x|<r$ ist, wenn der Wert von ω an irgend einer Stelle fixiert wird[1]). In dieser Hinsicht setze ich fest, dass für $x=0$, also $J=a_0$, der Grösse ω ihr Hauptwert ω_0 beigelegt werden soll. Für kleine Werte von $|x|$ wird dann nach (6)

$$\omega = \omega_0 + c_1 a_1 x + \cdots \tag{10}$$

und diese Entwicklung muss für den ganzen Kreis $|x| < r$ gelten, da ω in diesem Kreise regulär ist. Aus (10) folgt weiter:

$$h^{\frac{1}{6}} = e^{\frac{2i\pi\omega}{6}} = e^{\frac{2i\pi\omega_0}{6}} \cdot e^{\frac{2i\pi c_1 a_1 x + \cdots}{6}} = h_0^{\frac{1}{6}} + h_0^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{i\pi c_1 a_1}{3} \cdot x + \cdots, \tag{11}$$

wobei die auf der rechten Seite stehende Potenzreihe für $|x| < r$ konvergiert.

Da nun die Summe dieser Potenzreihe, nämlich $h^{\frac{1}{6}}$, beständig dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 bleibt, so ist nach einem bekannten Satze

$$\left| \frac{1}{3} h_0^{\frac{1}{6}} \cdot i\pi c_1 a_1 \right| \cdot r \leqq 1$$

oder, in Rücksicht auf (7),

$$r \leqq 12\sqrt{3} \cdot \left| \prod_{r=1}^{\infty} (1-h_0^r)^4 \right| \cdot \frac{1}{|a_1|} \cdot \sqrt[3]{|a_0|^2} \sqrt{|a_0-1|}. \tag{12}$$

Der absolute Betrag von

$$h_0 = e^{2i\pi\omega_0}$$

ist kleiner als $e^{-\pi\sqrt{3}}$, weil ω_0 dem Gebiete G angehört und nicht mit $\varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ zusammenfallen kann. Man hat daher[2])

$$12\sqrt{3} \cdot \left| \prod_{r=1}^{\infty} (1-h_0^r)^4 \right| < 12\sqrt{3} \prod_{r=1}^{\infty} (1+e^{-r\pi\sqrt{3}})^4 < \tag{13}$$
$$< 1{,}0176 \cdot 12 \cdot \sqrt{3} < 21{,}148$$

und also a fortiori

$$r < 22 \cdot \frac{1}{|a_1|} \sqrt[3]{|a_0|^2} \cdot \sqrt{|a_0-1|}\,. \tag{14}$$

---

[1]) Picard, loc. cit.

[2]) Beiläufig bemerke ich, dass aus der Theorie der komplexen Multiplikation die Gleichung

$$\prod_{r=1}^{\infty} (1+e^{-r\pi\sqrt{3}})^4 = e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}} \frac{\sqrt[6]{2}}{1+\sqrt{3}} \text{ folgt.}$$

Hiermit ist nun folgender Satz bewiesen:

Satz I: Wenn die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_1 \neq 0)$$

in dem Kreise $|x| < r$ konvergiert und in diesem Kreise weder den Wert 0 *noch den Wert* 1 *annimmt, so ist der Radius r kleiner als die Grösse*

$$\frac{22}{|a_1|} \cdot \sqrt[3]{|a_0|^2} \sqrt{|a_0 - 1|}.$$

Die obige Herleitung erfährt nur eine geringe Veränderung, wenn man die Voraussetzung, dass $a_1 \neq 0$ sei, fallen lässt. Es ergibt sich dann der

Satz II: Wenn die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{n+1} + \cdots \qquad (a_1 \neq 0)$$

in dem Kreise $|x| < r$ konvergiert und in diesem Kreise weder den Wert 0 *noch den Wert* 1 *annimmt, so ist r^n kleiner als die Grösse*

$$\frac{22}{|a_1|} \cdot \sqrt[3]{|a_0^2|} \sqrt{|a_0 - 1|}.$$

Wendet man den Satz I nicht direkt auf die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, sondern auf die Reihe

$$\frac{1}{b-a}\mathfrak{P}(x) - \frac{a}{b-a} = \frac{a_0 - a}{b-a} + \frac{a_1}{b-a} x + \cdots$$

an, so findet man den allgemeinern

Satz III: Wenn die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_1 \neq 0)$$

in dem Kreise $|x| < r$ konvergiert und in diesem Kreise weder den Wert a noch den Wert b annimmt, so gilt die Ungleichung

$$(15) \qquad r < \frac{22}{\sqrt[6]{|b-a|}} \cdot \frac{1}{|a_1|} \cdot \sqrt[3]{|a_0 - a|^2} \sqrt{|a_0 - b|}.$$

Eine ähnliche Verallgemeinerung gestattet natürlich auch der Satz II.

Da die beiden Werte a und b in völlig gleichberechtigter Weise auftreten, so bleibt die Ungleichung (15) gültig, wenn man a mit b vertauscht. Wendet man ferner den Satz III auf die Potenzentwicklungen von $\frac{1}{\mathfrak{P}(x-a)}$ und $\log(\mathfrak{P}(x) - a)$ an, so ergeben sich weitere Ungleichungen für den Radius r, auf die ich indessen hier nicht näher eingehen will[1]).

[1]) Durch eine nähere Untersuchung des imaginären Teiles der Reihe (10) lassen sich noch Verschärfungen der Ungleichungen (14) und (15) erzielen. So ergibt sich z. B., dass der in diesen Ungleichungen auftretende Zahlenfaktor 22 auch durch den kleinern Faktor 16 ersetzt werden darf.

3.

Die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_1 \neq 0) \tag{16}$$

möge im Kreise $|x| < r$ konvergieren und in demselben — abgesehen vom Mittelpunkte $x = 0$, wo $\mathfrak{P}(0) = 1$ ist — weder den Wert 0 noch den Wert 1 annehmen.

Setzt man nun wieder

$$J = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{17}$$

und ordnet dem Argumente $x = 0$ den Hauptwert $\omega = i$ zu, so wird dadurch ω im Kreise $|x| < r$ als zweiwertige, nur bei $x = 0$ verzweigte Funktion von x definiert. Es gilt daher für $|x| < r$ eine Entwicklung der Gestalt

$$\omega = i + c_1 \sqrt{x} + c_2 (\sqrt{x})^2 + \cdots. \tag{18}$$

Der Koeffizient c_1 ergibt sich auf folgendem Wege. Zunächst hat man

$$c_1 = \left(2\sqrt{x}\,\frac{d\omega}{dx}\right)_{x=0} = 2\left(\sqrt{x}\cdot\frac{d\omega}{dJ}\cdot\frac{dJ}{dx}\right)_{x=0} = 2\sqrt{a_1}\left(\sqrt{J-1}\,\frac{d\omega}{dJ}\right)_{\omega=i,\,J=1}.$$

Nach (4) und (5) ist nun

$$\sqrt{J-1}\,\frac{d\omega}{dJ} = \frac{i\pi\sqrt{\Delta}}{\sqrt{3}\cdot\omega_2^2 g_2^2},$$

und ferner[1]) für $\omega = i$, $J = 1$

$$\omega_2^4 \sqrt[3]{\Delta} = \omega_2^4 g_2 = 60\,\Sigma' \frac{1}{(r+is)^4} = 64\left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\right)^4 = \frac{1}{16\pi^2}\,\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right). \tag{19}$$

Demnach kommt schliesslich

$$c_1 = \sqrt{a_1}\cdot i\cdot\frac{8\pi^2}{\sqrt{3}\cdot\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{a_1}\cdot i\cdot 0{,}26381\cdots. \tag{20}$$

Aus (18) folgt die für $|x| < r$ gültige Entwicklung

$$\frac{\omega - i}{\omega + i} = \frac{c_1}{2i}\sqrt{x} + \cdots,$$

---

[1]) Vgl. meine Abhandlung: „Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen", Mathem. Annalen, Bd. 51 (1899), S. 196—226. [Diese Werke, Bd. II, LXVII.]

Die Gleichung (19) enthält die merkwürdige Zahlengleichung

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt[4]{\pi^3}\,e^{-\frac{\pi}{12}}(1-e^{-2\pi})(1-e^{-4\pi})(1-e^{-6\pi})\cdots$$

und da nun der absolute Betrag von $\frac{\omega - i}{\omega + i}$ beständig kleiner als 1 bleibt, so folgt

$$(21) \qquad \tfrac{1}{2}|c_1|\sqrt{r} \leqq 1, \quad \text{oder} \quad r \leqq \frac{4}{|c_1|^2} = \frac{1}{|a_1|} \cdot \frac{3\,\Gamma^8\left(\frac{1}{4}\right)}{16\,\pi^4} < \frac{58}{|a_1|}.$$

Demnach gilt der

Satz IV: Wenn die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_1 \neq 0)$$

im Kreise $|x| < r$ *konvergiert und in diesem Kreise — abgesehen vom Punkte* $x = 0$ *— weder den Wert* 0 *noch den Wert* 1 *annimmt, so ist der Radius* r *kleiner als*

$$\frac{58}{|a_1|}.$$

In derselben Weise, wie Satz III aus Satz II, folgt aus Satz IV der

Satz V: Wenn die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_1 \neq 0)$$

im Kreise $|x| < r$ *konvergiert und in diesem Kreise — abgesehen vom Punkte* $x = 0$ *— weder den Wert* a *noch den Wert* b *annimmt, so gilt die Ungleichung*

$$r < \frac{58\,|b-a|}{|a_1|}.$$

4.

Für diejenigen Werte von J, deren absoluter Betrag grösser als 1 ist, gilt eine Entwicklung der Gestalt

$$(22) \qquad h = e^{2i\pi\omega} = \frac{k_1}{J} + \frac{k_2}{J^2} + \frac{k_3}{J^3} + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten

$$(23) \qquad k_1 = \frac{1}{12^3}, \quad k_2 = \frac{1}{12^3} \cdot \frac{31}{72}, \quad k_3 = \frac{1}{12^8} \cdot 62535, \ldots$$

positive rationale Zahlen sind.

Es werde nun die Voraussetzung gemacht, dass die ganze rationale Funktion n^{ten} Grades

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \cdots + \alpha_n$$

ausserhalb des Kreises $|x| = r$ weder den Wert 0 noch den Wert 1 annimmt.

Die nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ angeordnete Entwicklung von

$$(24)\qquad h = \frac{1}{12^3}\cdot\frac{1}{f(x)}\left(1 + \frac{31}{72}\cdot\frac{1}{f(x)} + 12^3 k_3\cdot\frac{1}{f^2(x)} + \cdots\right)$$

konvergiert dann für $|x| > r$, und das Gleiche gilt von der Entwicklung der Grösse

$$(25)\qquad h^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{12^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}}\cdot\left(1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{31}{72}\cdot\frac{1}{f(x)} + \cdots\right).$$

Sei nun

$$(26)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n}} \\ &= \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \cdots, \end{aligned}$$

so wird

$$(27)\quad c_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha_0}},\quad c_2 = -\frac{1}{n}\frac{\alpha_1}{\alpha_0\sqrt[n]{\alpha_0}},\quad c_3 = \frac{1}{2n^2}\frac{(n+1)\alpha_1^2 - 2n\alpha_0\alpha_2}{\alpha_0^2\sqrt[n]{\alpha_0}},\ldots$$

und die ersten $n+1$ Glieder der Entwicklung (25) lauten:

$$(28)\quad h^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{12^3}}\left[\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \left(c_{n+1} + \frac{31}{72n}c_1\right)\frac{1}{x^{n+1}} + \cdots\right].$$

Berücksichtigt man nun, dass der absolute Betrag von $h^{\frac{1}{n}}$ beständig kleiner als 1 ist, so ergibt sich der

Satz VI: Die ganze Funktion n^{ten} Grades

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

nehme ausserhalb des Kreises $|x| = r$ weder den Wert 0 noch den Wert 1 an. Ferner sei

$$\frac{1}{\sqrt[n]{f(x)}} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \cdots + \frac{c_m}{x^m} + \cdots.$$

Dann gelten die Ungleichungen

$$r^m \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{12^3}}|c_m|,\quad r^{n+1} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{12^3}}\left|c_{n+1} + \frac{31}{72n}c_1\right|;\quad (m = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Insbesondere ist

$$r \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{12^3|\alpha_0|}},\quad r^2 \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{12^3|\alpha_0|}}\frac{|\alpha_1|}{n|\alpha_0|},\quad r^3 \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{12^3|\alpha_0|}}\cdot\frac{|(n+1)\alpha_1^2 - 2n\alpha_0\alpha_2|}{2n^2|\alpha_0|^2},\ldots.$$

Von diesen Ungleichungen lässt sich die erste leicht auf folgende Weise verifizieren.

Die Wurzeln der Gleichungen $f(x)=0$ und $f(x)=1$ seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezüglich $x_1', x_2', \ldots, x_n'$.

Liegt nun keine dieser Wurzeln ausserhalb des Kreises $|x|=r$, so ist

$$r^n \geqq |x_1 x_2 \cdots x_n| = \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_0|}, \quad r^n \geqq |x_1' x_2' \cdots x_n'| = \frac{|\alpha_n - 1|}{|\alpha_0|},$$

und folglich, da von den beiden Grössen $|\alpha_n|$ und $|\alpha_n - 1|$ mindestens eine $\geqq \frac{1}{2}$ ist,

$$r \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{2\,|\alpha_0|}},$$

um so mehr also

$$r \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{12^3\,|\alpha_0|}}.$$

5.

Es sei $x = x_0$ ein Punkt regulären Verhaltens der analytischen Funktion $f(x)$ und $f'(x_0)$ von Null verschieden.

Wendet man nun den Satz III auf die Entwicklung

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(x_0)\, x^2 + \cdots$$

an, so erhält man

Satz VII: Beschreibt man um den Punkt x_0 als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius

$$\frac{22}{\sqrt[6]{|b-a|}} \cdot \sqrt[6]{\left|\frac{(f(x_0)-a)^4 (f(x_0)-b)^3}{f'(x_0)^6}\right|},$$

so befindet sich im Innern dieses Kreises entweder eine singuläre Stelle von $f(x)$ oder eine Stelle, an welcher $f(x)$ den Wert a annimmt oder eine Stelle, an welcher $f(x)$ den Wert b annimmt. Vorausgesetzt ist dabei nur, dass sich $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ regulär verhält und $f'(x_0)$ nicht Null ist.

Ebenso folgt aus Satz V der

Satz VIII: Beschreibt man um den Punkt x_0 als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius

$$58 \cdot \left|\frac{f(x_0) - a}{f'(x_0)}\right|,$$

so befindet sich im Innern dieses Kreises entweder eine singuläre Stelle von $f(x)$ oder eine Stelle, an welcher $f(x)$ den Wert a annimmt, oder eine vom Mittelpunkt des Kreises verschiedene Stelle, an welcher $f(x)$ den Wert $f(x_0)$ annimmt. Dabei ist vorausgesetzt, dass a von $f(x_0)$ verschieden, $f'(x_0)$ nicht Null und $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ von regulärem Verhalten ist.

Mit Hülfe des Satzes VII ist es möglich, die von Herrn Picard am Schlusse seiner oben zitierten Abhandlung bewiesenen Sätze in sehr einfacher Weise zu begründen. Es möge genügen, dies für den folgenden Satz näher darzulegen:

„Wenn $g(x)$ eine ganze transzendente Funktion, a und b zwei verschiedene endliche Werte bezeichnen, so hat sicher eine der beiden Gleichungen

$$g(x) = a, \qquad g(x) = b$$

unendlich viele Wurzeln."

Um den Satz zu beweisen, bemerke ich zunächst, dass mindestens eine der beiden meromorphen Funktionen

$$F_1(x) = \frac{2^{2 6}}{b-a} \cdot \frac{(g(x)-a)^4 (g(x)-b)^3}{[g'(x)]^6},$$

$$F_2(x) = \frac{2^{2 6}}{b-a} \cdot \frac{(g(x)-b)^4 (g(x)-a)^3}{[g'(x)]^6}$$

transzendent ist. Denn wären beide rational, so würde auch

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{g(x)-a}{g(x)-b}$$

rational, also $g(x)$ eine ganze rationale Funktion sein.

Sei nun etwa $F_1(x)$ transzendent. Um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis mit dem beliebig gewählten Radius R, sowie einen zweiten Kreis mit dem Radius $R + \varepsilon$, wo ε eine nach Willkür gewählte positive Grösse bezeichnet. Ausserhalb dieses zweiten Kreises wähle man den Punkt x_0 so, dass $g'(x_0)$ von Null verschieden und $|F_1(x_0)| < \varepsilon^6$ ist. Beschreibt man dann um x_0 als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius ε, so liegt dieser ganz ausserhalb des Kreises mit dem Radius R und enthält nach Satz VII in seinem Innern eine Lösung einer der beiden Gleichungen $g(x) = a, g(x) = b$. Ausserhalb jedes noch so grossen Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt findet sich also stets eine Lösung einer der beiden Gleichungen $g(x) = a$, $g(x) = b$, woraus unmittelbar folgt, dass mindestens eine dieser Gleichungen eine unendliche Zahl von Lösungen besitzt.

Zürich, den 20. September 1904.