Periodical volume

Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse ...

in: Periodical

383 page(s)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie sind nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.
Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:
Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.
Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.
Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:
You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.
By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.
Papendiek 14
37073 Goettingen
Email: info@digizeitschriften.de

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Kreisbogenvierecke.

Von

W. Ihlenburg.

(Aus einem Schreiben an Herrn F. Klein).

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 16. Mai 1908.

Im Nachfolgenden erlaube ich mir, Ihnen eine kurze Mitteilung über meine Untersuchungen betreffend Kreisbogenvierecke zu machen.

Unter einem Kreisbogenviereck verstehe ich allgemein eine in der Ebene ausgebreitete, einfach zusammenhängende, von vier Kreisbogen begrenzte Fläche. Wird die Begrenzung so durchlaufen, daß das Innere der Fläche beständig zur Linken liegt, so folgen dabei die begrenzenden Kreise in einer bestimmten Reihenfolge aufeinander. Je zwei aufeinanderfolgende Kreise werden sich unter reellen Winkeln schneiden, so daß die Fläche vier Ecken erhält. Die Ecken bezeichnen wir dem Umlaufssinn entsprechend mit a, b, c, d, die Winkel mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Die Maßeinheit für die Winkel legen wir so fest, daß eine halbe Umdrehung gleich 1, eine volle Umdrehung gleich 2 wird und so fort. Im Innern soll die Fläche von Windungspunkten frei sein.

Nach bekannten Grundsätzen betrachte ich alle solche Kreisbogenvierecke als identisch, die sich durch eine lineare Transformation $\eta' = \dfrac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ in einander überführen lassen, wenn η eine in der Ebene des Kreisbogenvierecks gedeutete komplexe Variable ist.

Wirft man das Viereck durch stereographische Projektion auf eine Kugel, so liegen die Begrenzungskreise in vier die Kugen schneidenden Ebenen, deren Inbegriff nach Ihrer Terminologie der

„Kern" des Kreisbogenvierecks ist. Jedes Kreisbogenviereck besitzt einen Kern, in den es selbst als Membran eingehängt erscheint.

Meine Untersuchungen schließen sich übrigens in erster Linie an die Arbeit von Herrn A. Schönfließ in Bd. 44 der Math. Ann. an (Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke), wo mit der gestaltlichen Untersuchung der Kreisbogenvierecke der Anfang gemacht ist.

Ich habe mir insbesondere folgende Fragen gestellt und erledigt:

1) Wie können bei Vorgabe der Winkel sämtliche Kreisbogenvierecke mit diesen Winkeln konstruiert und in eine kontinuierliche Folge gebracht werden?

2) Wie oft ist bei Vorgabe der Winkel die volle Peripherie eines der Begrenzungskreise in der Begrenzung der Membran enthalten? Diese „Umlaufszahlen" der Seiten, welche mit u_{ab}, u_{bc}, u_{cd}, u_{da} bezeichnet werden mögen, sind mit den Winkeln durch Relationen verknüpft, welche der Ergänzungsrelation der Kreisbogendreiecke entsprechen, die Sie selbst in Bd. 37 der Math. Ann. in der Arbeit über die Anzahl der Nullstellen der hypergeometrischen Reihe aufgestellt haben. Diese für das Viereck geltenden Relationen sollen auch hier als „Ergänzungsrelationen" bezeichnet werden.

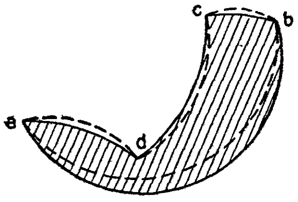
3) Drittens kann noch die Frage gestellt werden: Wenn zwei Kreisbogenvierecke dieselben Winkel und dieselben Umlaufszahlen der Seiten besitzen (welche dann den Ergänzungsrelationen genügen müssen) und wenn sich durch eine Bewegung des Raumes, welche der linearen Transformation der η-Ebene entspricht, ihre Kerne zur Deckung bringen lassen, sind dann die Membrane selbst identisch?

Die zur Erledigung dieser Fragen von mir angewandte Methode will ich hier an einem einfachen Beispiel erläutern.

Die vier Winkel mögen den Ungleichheitsbedingungen genügen:

$$1+\alpha<\delta<1+\gamma<2;\ \beta<1.$$

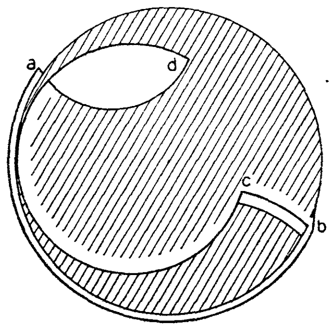
Ein Kreisbogenviereck besitzt nun, wenn seine Winkel festgehalten werden, noch zwei Parameter, die in folgender Weise gedeutet werden können.



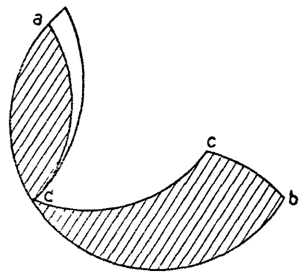
Figur 1.

Wir können einmal die vier Ecken der Membran festhalten und eine Seite (z. B. ab) um ihre Endpunkte drehen (Fig. 1). Sollen dann die Viereckswinkel ungeändert bleiben, so müssen wir die drei andern Seiten um denselben Winkel wie $a\,b$ in geeignetem Sinn drehen unter Festhaltung der Eckpunkte. Da diese festliegen, bleiben die Umlaufszahlen der Seiten ungeändert. Durch diese Drehung mag der eine Vierecksparameter gedeutet werden.

Drehen wir nun beständig in demselben Sinne weiter, so müssen schließlich die Teile der Begrenzung zusammenstoßen. Es können sich hierbei entweder zwei gegenüberliegende Seiten berühren, oder es kann ein Eckpunkt auf eine gegenüberliegende Seite fallen (Fig. 2—4). Wenn die Drehung so weit fortgeschritten



Figur 2.

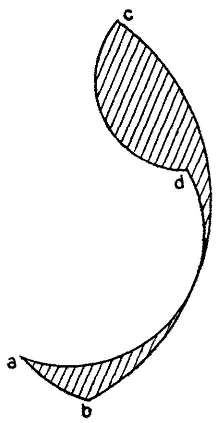


Figur 3.

ist, gebrauche ich den Ausdruck: „Das Viereck befindet sich in der Grenzlage“.

In jeder der beiden Arten von Grenzlagen ist noch ein Parameter enthalten. In den Figuren 2 und 3 ist angedeutet, wie sich die Begrenzung bei Variation desselben verändert. Auf diese Weise mag der zweite noch übrige Parameter gedeutet werden.

In der Grenzlage der ersten Art zerlegt sich nun die Membran ev. unter Abschnürung einer Anzahl von Kreisringen in zwei Dreiecke, in der Grenzlage der zweiten Art in ein Dreieck und ein Zweieck ev. unter Abtrennung polar eingehängter Kreisscheiben. Da aber die Konstruktion der Kreisbogendreiecke bekannt ist, so können die Grenzlagen ohne weiteres konstruiert werden. Indem man aus der Grenzlage heraus in umgekehrter Richtung dreht, kann man die Vierecke selbst erhalten, zu denen die konstruierten Grenzlagen gehören.



Figur 4.

Um nun sämtliche Vierecke zu konstruieren, die es zu den gegebenen Winkeln gibt, hat man nur sämtliche für diese Winkel vorhandenen Grenzlagen zu konstruieren. Will man alle verlangten Vierecke genau einmal erhalten, so braucht man jedoch nur diejenigen Grenzlagen zu benutzen, aus denen man durch eine Drehung heraus gelangt, bei der sich die Schenkel des Winkels α in der Richtung des Uhrzeigers bewegen.

Für das betrachtete Beispiel gibt es zwei Grenzlagen der ersten Art (Fig. 2 und 4). Aber es gibt nur eine Grenzlage der zweiten Art, diejenige, bei der d auf ab fällt (Fig. 3). Es ist nämlich $1 + \alpha < \delta$ die zum Bestehen dieser Grenzlage notwendige Bedingung.

Indem man dann weiter den Parameter der Grenzlagen verändert, erhält man sämtliche verlangten Vierecke durch Herausdrehen aus den Grenzlagen. Bei den Vierecken, die aus den Grenzlagen erster Art hervorgehen, sind nachträglich noch $1, 2, 3 \ldots$ Kreisringe einzuhängen.

Für die in der Grenzlage vorhandenen Dreiecke kennt man nun die Ergänzungsrelation. Sobald das Viereck sich in der Grenzlage befindet, lassen sich deshalb leicht die Beziehungen zwischen den Umlaufszahlen der Seiten und den Winkeln aufstellen. Da nun beim Uebergang aus der Grenzlage zum Viereck aber sowohl die Winkel, wie auch die Umlaufszahlen erhalten bleiben, gelten die erhaltenen Relationen ohne weiteres für das Viereck selbst.

Man kommt solcherweise für die allgemeinen Vierecke zu folgendem Resultat:

Soll die zweidimensionale Schar der Vierecke mit denselben gegebenen Winkeln in eine kontinuierliche Folge gebracht werden, so ist dabei in folgender Weise zu verfahren:

Die Bezeichnung der Winkel werde so gewählt, daß

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta \geqq 0 \quad \text{und gleichzeitig:}$$
$$\delta + \alpha - \beta - \gamma \geqq 0 \quad \text{ist.}$$

Dann hat man zunächst Vierecke mit den Relationen:

$$\text{I.} \qquad u_{ab} = u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon; \; u_{bc} = u_{da} = 0.$$

Hierin hat u_{cd} die positiven ganzen Zahlen von $+\infty$ bis 0 (einschließlich) zu durchlaufen. Unter E verstehen wir die größte ganze in dem beigesetzten Argument enthaltene positive Zahl. Für jeden Wert ist zuerst $\varepsilon = 1$, dann $\varepsilon = 0$ (im allgemeinen) vorzuschreiben.

Ferner hat man Vierecke mit den Relationen:

$$\text{II.}\qquad u_{ab}+u_{bc}=E\left(\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)+\varepsilon;\ u_{ca}=u_{da}=0$$

worin für u_{bc} die Werte 0 bis $E\left(\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)$ zu setzen sind und für jeden Wert von u_{bc} zuerst $\varepsilon=1$, dann $\varepsilon=0$ vorzuschreiben ist.

Sollte die aus ganzen Zahlen bestehende Wertereihe für u_{ab}, die aus II erhalten wird, sich nicht an die aus I erhaltene Wertereihe anschließen, so gibt es für die dazwischen fehlenden Werte von u_{ab} auch noch Vierecke, für welche dann außerdem immer $u_{bc}=u_{cd}=u_{da}=0$ ist.

Endlich hat man Vierecke mit den Relationen:

$$\text{III.}\qquad u_{bc}=u_{da}+E\left(\frac{\delta+\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)+\varepsilon;\ u_{ab}=u_{cd}=0.$$

Hier hat u_{da} mit 0 beginnend die Werte der positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen und für jeden Wert ist zuerst $\varepsilon=0$, dann $\varepsilon=1$ (im allgemeinen) vorzuschreiben.

Die aus II und III erhaltene Wertereihe für u_{bc} ist, wenn notwendig, in entsprechender Weise zu vervollständigen wie die Wertereihe für u_{ab}.

Hat man unter Benutzung dieser Regel sämtliche zusammengehörigen Werte der Zahlen u_{ab}, u_{bc}, u_{cd}, u_{da} ermittelt, so existieren für jedes dieser Wertequadrupel auch Vierecke, welche die gegebenen Winkel und die gefundenen Umlaufszahlen besitzen. Zugleich sind diese Vierecke sämtliche, die zu den gegebenen Winkeln existieren. Sie bilden in der bei den Relationen angegebenen Reihenfolge ein zweidimensionales Kontinuum.

Herr E. Hilb hat mir mitgeteilt, daß sich dies Ergebnis durch geeignete Schreibweise der Relationen noch vereinfachen läßt. Es läßt sich dann folgende Regel aufstellen:

Man wähle die Bezeichnung wieder so, daß

$$\gamma+\delta-\alpha-\beta\geqq 0 \quad \text{und gleichzeitig}$$
$$\delta+\alpha-\beta-\gamma\geqq 0 \quad \text{ist.}$$

Dann hat man zunächst Vierecke mit den drei Relationen

$$u_{bc} = E\left(\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2} - u_{ab} + \varepsilon\right)$$

$$u_{cd} = E\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2} + u_{ab} + 1 - \varepsilon\right)$$

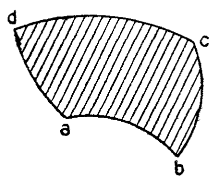
$$u_{da} = E\left(\frac{\gamma-\delta-\alpha-\beta}{2} - u_{ab} + \varepsilon\right).$$

Hierin hat u_{ab} die positiven Zahlen von $+\infty$ bis 0 (einschließlich) zu durchlaufen und für jeden Wert von u_{ab} ist für ε zunächst der Wert 1, dann der Wert 0 (im allgemeinen) vorzuschreiben.

Vertauscht man in den Relationen a, b, c, d bezw. mit b, c, d, a und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezw. mit $\beta, \gamma, \delta, \alpha$, so erhält man drei Relationen, in denen die in den ersten drei Relationen für u_{bc} erhaltene Wertereihe bis $+\infty$ fortzusetzen ist. Dabei ist für jeden Wert von u_{bc} für ε zunächst der Wert 0, dann der Wert 1 (im allgemeinen) vorzuschreiben.

Aus diesen beiden Tripeln von Relationen erhält man so zwei Viereckssreihen, welche zusammen wieder sämtliche zu den gegebenen Winkeln existierende Vierecke enthalten.

Schließlich ist noch die Eindeutigkeitsfrage zu erledigen.



Figur 5.

Wir betrachten das in Fig. 5 gezeichnete Viereck, aus dem wir auf zwei Arten zwei neue Vierecke konstruieren. Das erste erhalten wir, indem wir an die Seiten ab und cd je zwei Kreisscheiben lateral anhängen, das zweite, indem wir an die Seiten bc und da je zwei Kreisscheiben lateral anhängen. Alle vier Winkel erhalten dann in beiden Vierecken einen einfachen Windungspunkt. Beide Vierecke stimmen nun in den Winkeln und den Begrenzungslinien, also auch im Kern überein, aber sind gestaltlich doch vollkommen von einander verschieden. Die Eindeutigkeitsfrage ist also in negativem Sinne zu beantworten.

Quedlinburg a. H., den 12. Mai 1908.