Einleitung.

1. Begriff des Kreisbogenvierecks. Stellung der Aufgabe.

Unter einem Kreisbogenviereck verstehen wir eine in einer Ebene ausgebreitete, einfach zusammenhängende, von vier Kreisbogen begrenzte Fläche. Wird die Begrenzung so durchlaufen, dafs das Innere der Fläche zur Linken liegt, so folgen die vier begrenzenden Kreise in einer bestimmten Reihenfolge aufeinander. Je zwei aufeinanderfolgende Kreisbogen mögen sich unter reellen Winkeln schneiden, so dafs die Fläche vier Ecken erhält. Wir bezeichnen diese Ecken dem Umlaufssinn entsprechend mit a, b, c, d und die Winkel bezüglich mit α, β, γ, δ. In den Ecken lassen wir Windungspunkte beliebig hoher Ordnung zu, im Innern der Fläche dagegen keine Windungspunkte.

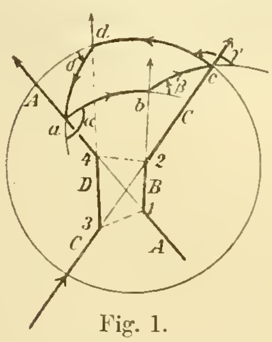

Fig. 1.

Werfen wir das Kreisbogenviereck durch stereographische Projektion auf eine Kugel, so liegen die vier Begrenzungskreise in vier Ebenen ab, bc, cd, da, deren Inbegriff wir als „Kern" (K) des Kreisbogenvierecks bezeichnen. Wir stellen ihn wohl mit Hülfe des von den Ebenen ein geschlossenen Tetraëders am anschaulichsten vor. Das Kreisbogenviereck selbst erscheint als „Membran" in diesen Kern eingehängt (Fig. 1).

Wir definieren zwölf „Maafszahlen" des Kreisbogenvierecks (K). Zur Bestimmung derselben wenden wir diejenige projektive Maafsbestimmung[1]) an, deren Fundamentalfläche unsere Kugel ist. Wir bestimmen den Winkel

[1]) Cayley, sixth memoir upon Quantics, Phil. Transactions, t. 149, (1859); Collected math. Papers II, p. 561. Klein, Math. Ann. 4, S. 573 ff. (1871).

zweier Ebenen, den Winkel zweier Geraden in einer Ebene und die Entfernung zweier Punkte durch den Ausdruck $\frac{i}{2}\log D$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist und D das Doppelverhältnis bedeutet, das im betreffenden Grundgebilde erster Stufe zwischen den beiden Elementen desselben, die zum Fundamentalgebilde gehören, und den beiden andern Elementen gebildet wird, deren Winkel oder Entfernung gemessen werden soll.

Der Winkel zweier aufeinanderfolgender Ebenen unseres Kernes wird infolge dieser Maſsbestimmung der elementar gemessene Winkel der Kugeltangenten in diesen Ebenen, die von einem Durchstoſspunkte der Schnittgeraden der Ebenen ausgehen.

Zwei aufeinanderfolgende Ebenen, z. B. ab und bc, schneiden sich in einer Geraden durch b, die Ebenen bc und cd in einer Geraden durch c. Beide Geraden bilden in der Ebene bc einen Winkel miteinander, den wir als „Seite" unseres Kreisbogenvierecks bezeichnen. Die Seiten nennen wir $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$, $\widehat{da}$. Liegt der Scheitel der Seite innerhalb des dazu gehörigen Begrenzungskreises, so ist sie reell, liegt er auſserhalb, so enthält sie einen imaginären Teil.

Die Scheitel zweier aufeinanderfolgender Seiten sind zwei Eckpunkte des Tetraëders. Ihre Entfernung nennen wir eine „Kante" des Vierecks. Wir bezeichnen die Kanten mit A, B, C, D.

α, β, γ, δ; $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$, $\widehat{da}$; A, B, C, D sind die zwölf Maſszahlen des Kerns oder des Kreisbogenvierecks.

Sie bleiben bei jeder projektiven Transformation des Raumes ungeändert, welche die Kugel in sich selbst überführt. Jede solche Transformation bezeichnen wir als „Bewegung". Da im Sinne der Maſsgeometrie die zwölf Maſszahlen einen Kern bestimmen, haben wir alle solche Kerne als äquivalent zu betrachten, welche durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können. Deuten wir die Ebene, in der die Membran zuerst gegeben war, als Ebene einer komplexen Variabeln η, so entspricht jede Bewegung einer linearen Transformation $\eta_1 = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ in dieser Ebene.[1]) Diese Transformation ist eine Kreisverwandtschaft und führt demnach Kreisbogenvierecke wieder in Kreis-

[1]) Klein, Math. Ann. 9, Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst (1875); Erlanger Programm 1872.

bogenvierecke über. Membrane, die sich durch eine derartige lineare Transformation ineinander überführen lassen, werden wir als identisch betrachten. —

Von den sechs Kanten des Tetraëders haben wir die vier Kanten A, B, C, D herausgegriffen, welche zusammengenommen ein räumliches Vierseit bilden. Zwei aufeinanderfolgende Kanten liegen in einer Ebene. Die Winkel unserer Membran sind die Winkel je zweier aufeinanderfolgender Ebenen des Vierseits, die Seiten der Membran sind die Winkel je zweier aufeinanderfolgender Kanten des Vierseits, die Kantenlängen der Membran sind auch die des Vierseits. Die Maſszahlen des Kreisbogenvierecks sind demnach auch am Vierseit repräsentiert.

Das Vierseit besitzt vier Ecken. Wir bezeichnen diejenige, welche den Scheitel von $\widehat{ab}$ bildet, mit 1, die andern entsprechend mit 2, 3, 4.

Durch Anrechnung ganzer und halber Perioden des log, die in $\frac{i}{2}\log D$ enthalten sein können, treten nun zu den Maſszahlen Multipla von π und $\frac{\pi}{2}$ hinzu. Bei Abzählung dieser Zahlen benutzen wir ähnliche Festsetzungen wie Study bei seiner Behandlung der sphärischen Trigonometrie.[1])

Auf jeder Kante des Vierseits und auf jedem Schnittkreise der vier Ebenen des Vierseits mit der Kugel setzen wir eine Durchlaufungsrichtung als positiv fest. Von den beiden Schnittpunkten jeder Kante mit der Kugel markieren wir den, an welchem man bei positiver Durchlaufung der Kante an der Kugel von innen nach auſsen gelangt, und nennen diese Punkte der Reihenfolge der Kanten entsprechend a, b, c, d. An jedem dieser Punkte setzen wir als positiven Drehungssinn für die Ebenenwinkel den fest, der dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt ist, wenn wir von auſsen auf die Kugel sehen. Die vier Geraden des Vierseits denken wir uns im Sinne der projektiven Geometrie im Unendlichen geschlossen.

Ordnen wir einem Punkt einer Kante einen Drehungssinn zu, so kehrt sich, wenn wir den Punkt mitsamt dem Drehungssinn einmal durch das Unendliche hindurchführen, der Drehungssinn gerade um. Also gelangen

---

[1]) Study, „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen". Abh. der sächs. Gesellsch. d. Wiss., Bd. XX, 1893.

wir erst nach zweimaligem Durchgang zu dem ursprünglichen Punkte zurück. Dann erst ist die Gerade ein volles Mal durchlaufen.

Wir bewegen uns nun von Punkt 1 auf der Kante B in positiver Richtung nach 2 (Fig. 1). Dabei können wir die Kante beliebig oft voll durchlaufen. Um nach 3 weiter gelangen zu können, müssen wir uns erst in der Ebene bc auf dem Schnittpunkte der Kanten B und C herumdrehen. Wir führen hierzu auf dem Schnittkreise den Punkt b in positiver Richtung herum bis c. Die volle Peripherie kann dabei beliebig oft durchlaufen werden. Dabei führen wir die durch b gehende Kante beständig mit, indem wir sie um den Scheitel der Seite drehen. Liegt dieser aufserhalb des Schnittkreises, so kehrt sich, wenn wir über die vom Scheitel an den Schnittkreis gezogene Tangente hinweggehen, die positive Richtung der Kante jedesmal um, da dieselbe an dem herumwandernden Punkte b immer vom Innern zum Äufsern der Kugel gehen soll. Gelangen wir nach c, so fällt deshalb stets die positive Richtung der bewegten Kante B in die von C.

Wir schreiten jetzt auf C von 2 nach 3 in positiver Richtung weiter. Wollen wir nun nach 4 gelangen, so müssen wir, da wir uns bis jetzt in der Ebene bc bewegt haben, erst die Ebene bc um die Kante C in positiver Richtung in die Ebene cd hineindrehen, so dafs die positive Richtung des Schnittkreises bc in die positive Richtung des Kreises cd fällt. Dabei können wir beliebig viele volle Umdrehungen ausführen. Wir schreiten dann auf dem Vierseit von 3 nach 4 in positiver Richtung weiter, nachdem wir die Seite $\widehat{cd}$ in positiver Richtung durchmessen haben. Schliefslich gelangen wir, in dieser Weise fortfahrend, nach 1, in die Ebene bc und in die Richtung der Kante B zurück.

Hierbei wird längs der vier Geraden des Vierseits eine geschlossene Kontur durchlaufen. Auf der Kugel entsteht ferner ein geschlossener, von vier Kreisbogen gebildeter Linienzug.

Die Begrenzung eines Kreisbogenvierecks ist auch ein Linienzug dieser Art. Bei der Membran werden wir als positiven Durchlaufungssinn auf jedem Kreise den festsetzen, der durch den Umlaufssinn der Membran angegeben wird.

Jede Kante möge geometrisch durch die auf der entsprechenden Geraden des Vierseits durchlaufene Strecke, jede Seite durch den durchlaufenen Bogen des entsprechenden Schnittkreises, jeder Winkel durch die um die entsprechende Kante herum ausgeführte Drehung der Ebenen des Vierseits repräsentiert werden.

Die Perioden des log zählen wir nun in folgender Weise:

Bei den Winkeln und bei den Seiten, deren Scheitel innerhalb des Schnittkreises liegt, messen wir die Multipla von π in elementarer Weise.

Liegt aber der Scheitel der Seite ausserhalb oder handelt es sich um eine Kantenlänge, so deuten wir D in der komplexen Ebene und definieren die Maſszahl durch $\frac{i}{2}\int \frac{dD}{D}$, wobei der Integrationsweg in folgender Weise zu bestimmen ist (Fig. 2).

Während wir den Endpunkt einer Seite auf dem Schnittkreis zum andern Endpunkt führen, oder während wir eine Kantenlänge durchlaufen, durchläuft D in seiner Ebene den Integrationsweg. Sobald aber bei der Seite der Schenkel zur Tangente wird oder bei der Kante die Kugel durchstoſsen wird, kommt man an einen singulären Punkt des Integrals. Dieser Punkt möge dann bei Bewegung in positiver Richtung entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, sonst umgekehrt umkreist werden. Dadurch wird also für die Seite (Fig. 2) der Bogen $ab' = \pi + \widehat{ab}$, $aa' = \pi$, die volle Peripherie wird gleich 2π. Kehrt man auf dem Kreise die positive Richtung um, so wird die Seitenlänge zwischen a und b gleich $2\pi - \widehat{ab}$.

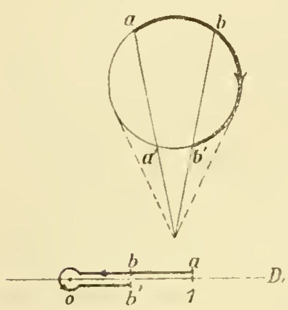

Fig. 2.

Bei der Kantenlänge geht das Doppelverhältnis, wenn der laufende Punkt die Kugel durchstöſst, zu Werten mit entgegengesetztem Vorzeichen über. Daher wird der Integrationsweg um den singulären Punkt herum ein Halbkreis, und die Kantenlänge wächst bei jedem Durchgang durch die Kugel um $\frac{\pi}{2}$, bei einer vollen Durchlaufung der betreffenden Geraden des Vierseits also um 2π, da der laufende Punkt dann viermal durch die Kugel geht.

Diesem Vierseit kann noch das Polarvierseit zugeordnet werden, unter welchem die zum ursprünglichem Vierseit hinsichtlich der Kugel polare Figur zu verstehen ist. In genau entsprechender Weise sind auch am Polarvierseit Richtungs- und Drehungssinn zu definieren und die Perioden abzuzählen.

Die zwölf Maſszahlen eines Kreisbogenvierecks sind nicht voneinander unabhängig.

Wir müssen zunächst die Gesamtheit der algebraisch unabhängigen algebraischen Relationen aufsuchen, welche zwischen den Sinus und Kosinus der Maſszahlen bestehen.

In diesen Sinus und Kosinus kommen aber die Multipla von 2π, welche in den Maſszahlen enthalten sein können, nicht zur Wirkung.

Wenn wir bei dem zuletzt entwickelten Begriff des Vierseits bleiben, so können wir jeden Winkel, jede Seite und jede Kantenlänge um beliebig viele Multipla von 2π vermehren. Dann besteht also keine Abhängigkeit dieser Multipla voneinander.

Jeder von diesen Linienzügen kann jedoch nicht die Begrenzung einer Membran bilden. Bei der Membran geraten deshalb die Umlaufszahlen der Seiten in Abhängigkeit von den Winkeln, während die Kantenlängen noch beliebig viele Multipla von 2π enthalten können. Die Anzahl von Malen, welche die volle Peripherie eines Begrenzungskreises der Membran in der Begrenzung enthalten ist, wollen wir als Umlaufszahl einer Seite bezeichnen. Die Relationen, welche die Abhängigkeit zwischen den Winkeln und den Umlaufszahlen der Seiten angeben, wollen wir „Ergänzungsrelationen“ (K) nennen, da sie die algebraischen Relationen ergänzen.

Nun sind die Sinus und Kosinus der Maſszahlen algebraische Funktionen der Raumkoordinaten, die Maſszahlen selbst aber transzendente Funktionen derselben. Wir werden also, wenn wir die Beziehungen zwischen den Sinus und Kosinus behandeln, dies als „Algebraische Untersuchung“, wenn wir von den Membranen und den Ergänzungsrelationen sprechen, dies als „Transzendente Untersuchung“ bezeichnen. Die algebraische Untersuchung soll im ersten Teil, die transzendente im zweiten Teil der Arbeit geführt werden. Ferner sollen im zweiten Teil alle für uns in Betracht kommenden Vierecke tatsächlich konstruiert werden.

2. Zusammenhang mit der Funktionentheorie.

Für die transzendente Untersuchung der mit Membran versehenen Kreisbogenpolygone gibt uns die Funktionentheorie grundlegende Tatsachen.

Es können nicht nur Kreisbogenvierecke, sondern überhaupt Kreisbogenpolygone mit beliebig vielen Ecken betrachtet werden. Die Anzahl der Ecken sei n, η eine in der Ebene des Polygons zu deutende komplexe Variable. Geben wir irgend ein Kreisbogenpolygon mit Membran vor, so wird die konforme Abbildung desselben (d. h. seiner Membran) auf die oberhalb der reellen Achse liegende Hälfte der Ebene einer komplexen Variabeln z durch ein Integral der Differentialgleichung vermittelt:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{1}{(z-a_1)\dots(z-a_n)} \left\{ \frac{\frac{1-\lambda_1^2}{2}(a_1-a_2)\dots(a_1-a_n)}{z-a_1} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{\frac{1-\lambda_n^2}{2}(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})}{z-a_n} + 2A_{n-4}z^{n-4} + 2A_{n-5}\cdot z^{n-5}\dots + 2A_0 \right\} \quad (K)$$

wobei η''', η'', η' Ableitungen von η nach z sind.

Hierin werden, wenn je zwei aufeinanderfolgende Kreise des Polygons reelle Winkel miteinander bilden

$$a_1, \dots, a_n; \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n; \quad A_{n-4} \dots A_0$$

sämtlich reelle Gröfsen, die durch die gestaltlichen Verhältnisse des Polygons bestimmt werden. Es sei:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Jedem Intervalle $a_\nu a_{\nu+1}$ der reellen z-Achse entspricht ein Bogen eines Begrenzungskreises. In den Punkten $a_1 \dots a_n$, den singulären Punkten der Differentialgleichung, aber nur in diesen, wird die Konformität der Abbildung unterbrochen. Sie entsprechen den n Ecken des Kreisbogenpolygons. Die Fläche eines hinreichend kleinen um a_ν in der z-Ebene beschriebenen Halbkreises wird auf die Fläche eines kleinen Kreissektors in der η-Ebene mit der Winkelöffnung $\lambda_\nu \pi$ abgebildet.

Die Differentialgleichung bleibt bei Anwendung einer linearen Transformation

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \gtreqless 0$$

ungeändert. Ist also η ein partikuläres Integral, so ist $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ das allgemeine Integral. In Bezug auf die Differentialgleichung sind deshalb Polygone, die sich durch eine lineare Transformation ineinander überführen lassen, als identisch zu betrachten.

Zu jedem vorgegebenen Kreisbogenpolygon gehört also eine Differentialgleichung dritter Ordnung.

Geben wir umgekehrt eine Differentialgleichung obiger Art vor, so existieren bei beliebigen Werten der Parameter der Differentialgleichung Lösungen derselben. Dabei wird die obere Hälfte der z-Ebene immer auf einen einfach zusammenhängenden Bereich abgebildet, die Begrenzung der Halbebene auf die Begrenzung dieses Bereichs. Wählen wir sämtliche Parameter, auch η' und η'' reell und machen wir mit Hilfe der Taylorschen Reihe einen Ansatz für η, so finden wir aus der Differentialgleichung für reelle Werte von z auch reelle Werte von η. Ein innerhalb des Konvergenzbereichs liegendes Stück der reellen z-Achse wird also durch ein geeignet gewähltes partikuläres Integral auf ein Stück der reellen η-Achse, durch ein allgemeines Integral auf einen Kreisbogen abgebildet.[1]) An den singulären Punkten a_ν wird die Konformität der Abbildung wieder derart unterbrochen, dafs in der Begrenzung des Abbildes der halben z-Ebene ein Winkel von der Gröfse $\lambda_\nu \cdot \pi$ entsteht.

Wir erhalten also durch Vorgabe eines Polygons nicht nur eine dazu gehörige Differentialgleichung, sondern auch bei Vorgabe einer Differentialgleichung ein dazu gehöriges Polygon. So ergibt sich der Satz:

„Jedes Kreisbogenpolygon kann durch ein Integral einer Differentialgleichung dritter Ordnung auf eine Halbebene abgebildet werden. Umgekehrt existieren für beliebige reelle Werte der Parameter der Differentialgleichung immer Kreisbogenpolygone. Im besondern existieren Kreisbogenpolygone zu beliebig vorgeschriebenen Winkeln.“

---

[1]) Riemann, Werke, 2. Aufl., S. 312 ff.; Schwarz, Crelles Journal, Bd. 75 (1872); ges. Abh., S. 226.

Durch reelle lineare Transformation von z können wir in der Differentialgleichung drei singuläre Punkte an beliebige Stellen der reellen z-Achse verlegen. Die übrigen singulären Punkte kommen dann unter Aufrechterhaltung der Reihenfolge auch wieder auf die reelle z-Achse zu liegen. Die entstehende Differentialgleichung vermittelt die Abbildung desselben Polygons wie die vorige auf eine Halbene. Alle Differentialgleichungen, die durch reelle lineare Transformation der unabhängigen Variabeln in einander übergeführt werden können, sehen wir deshalb als äquivalent an. Unter den n singulären Punkten sind also nur $n-3$ wesentliche Parameter, dazu kommen die n Gröfsen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ und die $n-3$ Gröfsen $A_{n-4} \dots A_0$, die wir als akzessorische Parameter bezeichnen (K), sodafs unsere Differentialgleichung $3n-6$ wesentliche Parameter enthält.

Bei drei singulären Punkten sind also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die einzigen wesentlichen Parameter. Es folgt:

„Ein Kreisbogendreieck ist durch seine drei Winkel bestimmt" (K).

Bei vier singulären Punkten erhalten wir einen akzessorischen Parameter. Ein Kreisbogenviereck besitzt also sechs Parameter, was wir später auf elementarem Wege bestätigen werden.

Werden in unserer Differentialgleichung die Parameter kontinuierlich verändert, so verändern sich auch die Lösungen η kontinuierlich, wenn nur immer die singulären Punkte von einander getrennt bleiben. Demnach bekommen wir das wichtige Resultat:

„Sämtliche möglichen Kreisbogenvierecke bilden ein Kontinuum (ebenso wie alle Dreiecke)."

Dieses Kontinuum der Vierecke soll im zweiten Teil der Arbeit auf seine Eigenschaften hin untersucht werden. Vor allen Dingen wollen wirdas Kontinuum untersuchen, das unter Festhaltung der Winkel durchlaufen wird, wenn sich der akzessorische Parameter von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegt.

3. Historisches.

Zuerst ist Riemann zu der Differentialgleichung dritter Ordnung gelangt und hat auch die konforme Abbildung, die durch dieselbe vermittelt wird, zuerst untersucht. Er hat in einer Vorlesung über die hypergeometrische

Reihe im W.-S. 1858/59[1]) ausführlich über die Differentialinvariante und die Kreisbogendreiecke gesprochen. Ferner wird in der posthumen Abhandlung „Über die Flächen vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung" und in der Abhandlung „Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung"[2]) der Gedanke der konformen Abbildung des Kreisbogenpolygons auf die Halbebene vollständig entwickelt.

Im Anschlufs an die Untersuchungen von Weierstrafs und auf Anregung desselben hat auch H. A. Schwarz die konforme Abbildung der Kreisbogenpolygone behandelt. In dieser Hinsicht ist vor allen Dingen die Arbeit grundlegend geworden: „Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt."[3])

Von den rein geometrischen Untersuchungen über Kreisbogenpolygone sind bis jetzt nur diejenigen über Kreisbogendreiecke zu einem gewissen Abschlufs gekommen (K).[4]) Die vollständigsten Untersuchungen finden wir bei F. Schilling in seiner Dissertation[5]): „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion."

Über Polygone mit mehr als drei Ecken sind zunächst die genannten Vorlesungen von F. Klein zu erwähnen, ferner Arbeiten von A. Schönfliefs und von Van Vleck. Aus den Vorlesungen ist die Behandlung der Laméschen Polynome und der anschliefsenden Hermiteschen Untersuchungen mit Hilfe von Vierecken zu nennen, welche für das letzte Kapitel dieser Arbeit als grundlegend anzusehen ist.[5]) Von A. Schönfliefs besitzen wir die beiden Arbeiten: „Über Kreisbogenpolygone (erste Abhandlung)" und „Über Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke."[6])

In der ersten Abhandlung behandelt er die geradlinigen Polygone. Die geradlinigen Polygone mit Membran werden konstruiert und es wird

[1]) Nachträge zu Riemanns Werken III, S. 79. (Leipzig, Teubner. 1902.)

[2]) Riemanns Werke, 2. Aufl., XVII, XXVII.

[3]) Schwarz, Preisschrift 1867 u. Crelles Journal Bd. 70 S. 105—120 (1869), Bd. 75 S. 292—335 (1872); ges. Abh. I, S. 6 u. II, S. 65—83, 211—259.

[4]) F. Klein, Math. Ann. 37, S. 573 (1890); Schilling, Math. Ann. 44, S. 161 (1893).

[5]) Vgl. auch F. Klein, Math. Ann. 40 (1891): „Über den Hermiteschen Fall der Laméschen Differentialgleichung"; Bôcher, Math. Encykl. II, A 7 a (1900).

[6]) Math. Ann. 42, S. 377 (1892) u. 44, S. 105 (1893).

eine Relation abgeleitet zwischen den Winkeln des Polygons und der Anzahl von Malen, die sich das Innere und die Begrenzung durch das Unendliche ziehen.

In der zweiten Arbeit werden die allgemeinen von Kreisen begrenzten Kreisbogenvierecke untersucht. Die vorliegende Arbeit soll zum Teil diese Arbeit ergänzen.

Spezielle Fälle von Kreisbogenvierecken hat Van Vleck in seiner Dissertation[1]) behandelt und in der Abhandlung:[2]) „On certain differential equations of the second order allied to Hermite's equation." In der Dissertation werden geradlinige Vierecke mit rechten Winkeln behandelt. In der zweiten Arbeit werden diejenigen Kreisbogenvierecke erschöpfend behandelt, deren Winkel $\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ sind.

[1]) Zur Kettenbruchentwicklung Laméscher und ähnlicher Integrale, Inaugural-Diss. Göttingen, Baltimore 1893.

[2]) American Journal of Math. XXI, p. 126 (1898).

Erster Hauptteil:

Algebraische Untersuchung.

Wir fragen, welches ist die Gesamtheit der algebraisch unabhängigen algebraischen Relationen zwischen den Sinus und Kosinus der Maſszahlen eines Kreisbogenvierecks und welches ist ihr Geltungsbereich?

§ 1.

Die Kosinus und Sinus der Maſszahlen.

Wenn wir Relationen zwischen den Maſszahlen eines Kreisbogenvierecks aufstellen wollen, müssen wir zunächst wissen, wie viele von ihnen ein Kreisbogenviereck bestimmen. Ein Kreis in der Ebene besitzt drei Parameter, die vier Kreise des Kreisbogenvierecks demnach zwölf Parameter. Nun sollen aber alle Kreisbogenvierecke als gleichberechtigt angesehen werden, die bei jeder projektiven Transformation des Raumes ineinander übergehen, welche die η-Kugel in sich überführt. Da aber eine allgemeine projektive Transformation 15 Parameter enthält, eine Fläche zweiten Grades neun, so kommen auf die projektive Transformation der verlangten Art sechs Parameter, so daſs wir von den zwölf Viereckparametern sechs in Abzug zu bringen haben. Wir erhalten das Resultat:

„Ein Kreisbogenviereck besitzt sechs Parameter“.

Den bei Ableitung der algebraischen Relationen angewandten Gedanken hat Herr Professor F. Klein in dem erwähnten Seminar mitgeteilt.[1])

[1]) Vgl. auch Stephanos, Bull. de la Société Mathém. de France, 1882, X, 134—137.

Wir benutzen das Tetraëder des Viereckskernes als Koordinatentetraëder eines projektivischen Koordinatensystems, dessen Koordinaten wir mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen. Auf der Ebene ab sei $x_1 = 0$, auf der Ebene bc $x_2 = 0$, auf der Ebene cd $x_3 = 0$, auf der Ebene da $x_4 = 0$. Die Gleichung unserer Kugel kann dann in der Form geschrieben werden:

$$\Omega_{xx} \equiv \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_i a_{ik} x_i x_k = 0,$$

wobei wir festsetzen, daſs

$$a_{ik} = a_{ki}$$

sein soll.

Die Determinante der quaternären Form Ω_{xx} ist dann symmetrisch und möge mit R bezeichnet werden, so daſs:

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Weil es sich um die Darstellung einer reellen nicht geradlinigen Fläche handelt, ist $R < 0$.

Da ferner die vier Geraden des Vierseits die Kugel reell schneiden sollen, sind die vier Determinanten: $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$, $a_{23}^2 - a_{22} a_{33}$, $a_{34}^2 - a_{33} a_{44}$, $a_{41}^2 - a_{44} a_{11}$ positiv.

Bezeichnen wir mit R_{ik} die zum Element a_{ik} gehörige Unterdeterminante dritten Grades, so ist bekanntlich

$$\Phi_{uu} \equiv \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_i R_{ik} u_i u_k = 0$$

die Gleichung unserer Kugel in Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4.

Wählt man nun die Kugel als Fundamentalfläche unserer projektiven Maſsbestimmung, so läſst sich der Kosinus der Entfernung zweier Punkte mit den Koordinaten x_i, y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bekanntlich aus der Formel berechnen:[1])

$$\cos(x_i, y_i) = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \cdot \sqrt{\Omega_{yy}}}.$$

[1]) Cayley, sixth memoir upon Quantics, Phil. Transactions, t. 149 (1859); coll. mathem. Papers II, p. 584.

Hierin bedeutet Ω_{xy} die Bilinearform:

$$\Omega_{xy} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_i \, a_{ik} \, x_i \, y_k.$$

Der Kosinus des Winkels zweier Ebenen drückt sich durch die duale Formel aus, wenn u_i, v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Koordinaten der beiden Ebenen sind:

$$\cos(u_i, v_i) = \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu}} \cdot \sqrt{\Phi_{vv}}},$$

worin

$$\Phi_{uv} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_i \, R_{ik} \, u_i \, v_k \quad \text{ist.}$$

Schneiden wir ferner die Kugel mit einer Koordinatenebene, setzen wir also z. B. $x_4 = 0$, so ist der Kosinus des Winkels zweier Geraden dieser Ebene mit den Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3 mit Hilfe der Form:

$$\Phi_{uu}{}^{(4)} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_i \, R_{44,\,ik} \, u_i \, u_k$$

zu berechnen, wo $R_{44,\,ik}$ die zu den Elementen a_{44}, a_{ik} gehörende Unterdeterminante zweiten Grades von R bedeutet. Es ist:

$$\cos(u_i v_i)_{x_4 = 0} = \frac{\Phi_{uv}{}^{(4)}}{\sqrt{\Phi_{uu}{}^{(4)}} \cdot \sqrt{\Phi_{vv}{}^{(4)}}}$$

worin

$$\Phi_{uv}{}^{(4)} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_i \, R_{44,\,ik} \, u_i \, v_k \quad \text{ist,}$$

der Kosinus des Winkels der beiden bezeichneten Geraden.

Aus diesen Formeln ergibt sich:

$$\cos A = \frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}} \cdot \sqrt{a_{33}}}; \quad \cos \widehat{ab} = \frac{R_{12,\,11}}{\sqrt{R_{44,\,11}} \cdot \sqrt{R_{22,\,11}}}; \quad \cos \alpha = \frac{R_{41}}{\sqrt{R_{44}} \cdot \sqrt{R_{11}}}$$

$$\cos B = \frac{a_{34}}{\sqrt{a_{33}} \cdot \sqrt{a_{44}}}; \quad \cos \widehat{bc} = \frac{R_{13,\,22}}{\sqrt{R_{11,\,22}} \cdot \sqrt{R_{33,\,22}}}; \quad \cos \beta = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}} \cdot \sqrt{R_{22}}}$$

$$\cos C = \frac{a_{41}}{\sqrt{a_{44}} \cdot \sqrt{a_{11}}}; \quad \cos \widehat{cd} = \frac{R_{24,\,33}}{\sqrt{R_{22,\,33}} \cdot \sqrt{R_{44,\,33}}}; \quad \cos \gamma = \frac{R_{23}}{\sqrt{R_{22}} \cdot \sqrt{R_{33}}}$$

$$\cos D = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}}; \quad \cos \widehat{da} = \frac{R_{31,\,44}}{\sqrt{R_{33,\,44}} \cdot \sqrt{R_{11,\,44}}}; \quad \cos \delta = \frac{R_{34}}{\sqrt{R_{33}} \cdot \sqrt{R_{44}}}$$

wo die auftretenden zwölf Quadratwurzeln im Vorzeichen ganz beliebig angenommen werden können.

Aus den Kosinus berechnen wir die Sinus. Bekanntlich gelten die Relationen:

$$P = |R_{ik}| = R^3$$

wo P die Determinante der R_{ik} bedeutet;

$$P_{ik} = R^2 \cdot a_{ik}$$

wo P_{ik} die zu R_{ik} gehörende Unterdeterminante von P bedeutet;

$$P_{ik,\,lm} = R \cdot R_{pq,\,rs}$$

wo $P_{ik,\,lm}$ die zu den Elementen R_{ik}, R_{lm} gehörende Unterdeterminante zweiten Grades von P bedeutet und $R_{pq,\,rs}$ die zu $R_{ik,\,lm}$ komplementäre Unterdeterminante von R. Mit Hilfe dieser Relationen erhalten wir dann:

$$\sin A = \pm \frac{\sqrt{R_{44,\,11}}}{\sqrt{a_{22}}\cdot\sqrt{a_{33}}}; \quad \sin \widehat{ab} = \pm \frac{\sqrt{R_{11}}\cdot\sqrt{a_{33}}}{\sqrt{R_{44,\,11}}\cdot\sqrt{R_{11,\,22}}}; \quad \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{R}\cdot\sqrt{R_{44,\,11}}}{\sqrt{R_{44}}\cdot\sqrt{R_{11}}}$$

$$\sin B = \pm \frac{\sqrt{R_{11,\,22}}}{\sqrt{a_{33}}\cdot\sqrt{a_{44}}}; \quad \sin \widehat{bc} = \pm \frac{\sqrt{R_{22}}\cdot\sqrt{a_{44}}}{\sqrt{R_{11,\,22}}\cdot\sqrt{R_{22,\,33}}}; \quad \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{R}\cdot\sqrt{R_{11,\,22}}}{\sqrt{R_{11}}\cdot\sqrt{R_{22}}}$$

$$\sin C = \pm \frac{\sqrt{R_{22,\,33}}}{\sqrt{a_{44}}\cdot\sqrt{a_{11}}}; \quad \sin \widehat{cd} = \pm \frac{\sqrt{R_{33}}\cdot\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{R_{22,\,33}}\cdot\sqrt{R_{33,\,44}}}; \quad \sin \gamma = \pm \frac{\sqrt{R}\cdot\sqrt{R_{22,\,33}}}{\sqrt{R_{22}}\cdot\sqrt{R_{33}}}$$

$$\sin D = \pm \frac{\sqrt{R_{33,\,44}}}{\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}}; \quad \sin \widehat{da} = \pm \frac{\sqrt{R_{44}}\cdot\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{R_{33,\,44}}\cdot\sqrt{R_{44,\,11}}}; \quad \sin \delta = \pm \frac{\sqrt{R}\cdot\sqrt{R_{33,\,44}}}{\sqrt{R_{33}}\cdot\sqrt{R_{44}}}$$

Wir setzen fest, dafs bei den Sinus die zwölf schon bei den Kosinus auftretenden Quadratwurzeln mit denselben Vorzeichen genommen werden sollen wie bei den Kosinus. Dann treten hier noch neue zwölf Vorzeichen hinzu, über die wir erst im Verlaufe der Untersuchung eine Festsetzung erhalten. $\sqrt{R}$ ist im Vorzeichen auch noch willkürlich.

Da die Kosinus der Kanten A, B, C, D sämtlich reell sind, so folgt, dafs a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} dieselben Vorzeichen haben müssen. Wir wählen die a_{ii} positiv, nehmen sie sonst aber beliebig fest an. Dann bleiben in der Gleichung der Kugel noch die sechs Koëffizienten a_{41}, a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{42}, a_{13} unbestimmt und können als Parameter des Viereckskernes aufgefafst werden. Da nun aber die algebraischen Relationen für die Gesamtheit der Viereckskerne gelten sollen, müssen sie von diesen Parametern unabhängig sein, also

Identitäten in den a_{ik} werden. Wollen wir demnach die algebraischen Relationen zwischen den Maßzahlen aufstellen, so haben wir aus den Gleichungen, welche die Kosinus und Sinus der Maßzahlen durch die a_{ik} darstellen, die a_{ik} nur zu eliminieren.

§ 2.

Die algebraischen Relationen und ihr Geltungsbereich.

Wir eliminieren nun die a_{ik}, indem wir alle bei den Sinus neu hinzugetretenen Vorzeichen positiv nehmen und uns hinterher überzeugen, daß diese Annahme bei den von uns betrachteten Vierseiten zulässig ist.

Es ist:

$$R_{11,42} = a_{23}a_{34} - a_{24}a_{33} = \cos A \cos B \; a_{33}\sqrt{a_{22}a_{44}} - a_{24}a_{33}$$
$$R_{11,42} = \cos \widehat{ab}\sqrt{R_{44,11}\cdot R_{11,22}} = \cos \widehat{ab} \sin A \sin B \; a_{33}\sqrt{a_{22}a_{44}}$$
$$\frac{a_{24}}{\sqrt{a_{22}a_{44}}} = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos \widehat{ab}.$$

Durch zweimalige zyklische Vertauschung findet man:

$$\frac{a_{42}}{\sqrt{a_{44}a_{22}}} = \cos C \cos D - \sin C \sin D \cos \widehat{cd}.$$

Also ist:

$$\text{a)} \quad \underline{\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos \widehat{ab} = \cos C \cos D - \sin C \sin D \cos \widehat{cd}}$$

und nach einmaliger zyklischer Vertauschung:

$$\text{b)} \quad \underline{\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos \widehat{bc} = \cos D \cos A - \sin D \sin A \cos \widehat{da}.}$$

Die Ebenenwinkel des Kernes entsprechen dual den Kantenlängen, die Seitenlängen entsprechen dual sich selbst, wie man aus den Formeln für die Sinus und Kosinus der Maßzahlen erkennt. Man wird also zwei Relationen aufstellen können, die zu den Relationen a) und b) dual sind. Es ist:

$$P_{11,42} = R_{23}R_{34} - R_{24}R_{33} = \cos\gamma \cos\delta \; R_{33}\sqrt{R_{22}R_{44}} - R_{24}R_{33}$$
$$P_{11,42} = R\cdot R_{33,24} = \cos \widehat{cd} \; R\cdot\sqrt{R_{22,33}\cdot R_{33,44}} = \cos \widehat{cd} \sin\gamma \cdot \sin\delta \; R_{33}\sqrt{R_{22}R_{44}}$$

Also ist:

$$\cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta\cos\widehat{cd} = \frac{R_{24}}{\sqrt{R_{22}R_{44}}}.$$

Vertauscht man zweimal zyklisch, so ergibt sich:

c) $$\underline{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{ab} = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta\cos\widehat{cd}}$$

und daraus durch zyklische Vertauschung:

d) $$\underline{\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\widehat{bc} = \cos\delta\cos\alpha - \sin\delta\sin\alpha\cos\widehat{da}.}$$

Wir wollen jetzt nur aus den Ausdrücken für die Sinus der Mafszahlen eliminieren. Es ist:

$$\sqrt{R} = \sin\alpha\sqrt{\frac{R_{44}\cdot R_{11}}{R_{14,11}}} = \sin\alpha\cdot\sin\widehat{da}\cdot\sin\widehat{ab}\cdot\sqrt{\frac{R_{33,44}\cdot R_{44,11}\cdot R_{11,22}}{a_{22}\,a_{33}}}$$
$$= \sin\alpha\,\sin\widehat{da}\,\sin\widehat{ab}\,\sin D\,\sin A\,\sin B\cdot\sqrt{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}}.$$

Nach einmaliger zyklischer Vertauschung ergibt sich:

$$\sqrt{\frac{R}{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44}}} = \sin\alpha\,\sin\widehat{da}\,\sin\widehat{ab}\,\sin D\,\sin A\,\sin B$$
$$= \sin\beta\,\sin\widehat{ab}\,\sin\widehat{bc}\,\sin A\,\sin B\,\sin C.$$

e) $$\underline{\sin D\,\sin\widehat{da}\,\sin\alpha = \sin\beta\,\sin\widehat{bc}\,\sin C}$$

und hieraus durch zyklische Vertauschung:

f) $$\underline{\sin A\,\sin\widehat{ab}\,\sin\beta = \sin\gamma\,\sin\widehat{cd}\,\sin D.}$$

g) $$\underline{\sin B\,\sin\widehat{bc}\,\sin\gamma = \sin\delta\,\sin\widehat{da}\,\sin A.}$$

h) $$\underline{\sin C\,\sin\widehat{cd}\,\sin\delta = \sin\alpha\,\sin\widehat{ab}\,\sin B.}$$

Da die Relationen e) und g), f) und h) jedesmal zueinander dual sind, erhält man durch den dualen Eliminationsprozefs keine neuen Formeln.

Wir können noch weitere Relationen zwischen sechs Mafszahlen ableiten. Es ist:

$$a_{14}\,R_{11,22} + a_{34}\,R_{13,22} + a_{44}\,R_{14,22} = 0.$$

Also ist:

$$\cot C\,\sin B\sqrt{a_{44}\,a_{33}}\cdot\sqrt{R_{22,33}\,R_{11,22}} + \cos B\sqrt{a_{33}\,a_{44}}\cdot\cos\widehat{bc}\sqrt{R_{11,22}\cdot R_{33,22}} + a_{44}\,R_{14,22} = 0$$

oder:

$$\cot C \sin B + \cos B \cos \widehat{bc} + \frac{R_{14,22} \cdot \sqrt{a_{44}}}{\sqrt{R_{22,33} \cdot R_{11,22}} \cdot \sqrt{a_{33}}} = 0.$$

Ferner besteht die Gleichung:

$$R_{11} P_{41,33} + R_{12} P_{42,33} + R_{14} P_{44,33} = 0$$

oder:

$$R_{11} R_{14,22} + R_{12} R_{42,11} + R_{14} R_{44,22} = 0.$$

Demnach ist:

$$R_{11} R_{14,22} + \cos\beta \sqrt{R_{11} R_{22}} \cos \widehat{ab} \sqrt{R_{44,11} \cdot R_{22,11}} + \cot\alpha \sin\beta \sqrt{R_{11} \cdot R_{22}} \cdot \sqrt{R_{44,11} R_{11,22}} = 0$$

oder:

$$\cot \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \widehat{ab} + \frac{R_{14,22} \cdot \sqrt{R_{11}}}{\sqrt{R_{44,11} \cdot R_{22,11}} \cdot \sqrt{R_{22}}} = 0.$$

Also besteht die Gleichung:

$$\frac{\cot C \sin B + \cos B \cos \widehat{bc}}{\cot \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \widehat{bc}} = \frac{\sqrt{a_{44}} \sqrt{R_{44,11}} \sqrt{R_{22}}}{\sqrt{a_{33}} \sqrt{R_{22,33}} \sqrt{R_{11}}} = \frac{\sin \widehat{bc}}{\sin \widehat{ab}}.$$

Wir erhalten die Relation:

i) $(\cot C \sin B + \cos B \cos \widehat{bc}) \sin \widehat{ab} = (\cot \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \widehat{ab}) \sin \widehat{bc}$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich hieraus noch drei weitere Relationen k), l) und m).

Wir haben jetzt zwischen den Kosinus und Sinus der Maſszahlen zwölf Gleichungen aufgestellt, zu denen noch zwölf weitere Gleichungen zwischen den Kosinus und Sinus jeder einzelnen Maſszahl treten: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ usw.

Wenn diese 24 Relationen dazu ausreichen sollen, in der 24 fachen Mannigfaltigkeit der Kosinus und Sinus aller zwölf Maſszahlen diejenige zwölf-dimensionale Mannigfaltigkeit zu bestimmen, welche von den Kosinus und Sinus der Maaſszahlen der Vierseite gebildet wird, so müssen sich, wenn wir die Kosinus und Sinus von sechs geeignet gewählten Maſszahlen geben, die Kosinus und Sinus der übrigen sechs Maſszahlen aus den 24 Relationen berechnen lassen und zwar eindeutig bis auf die notwendig unbestimmten Vorzeichen.

Wir geben, um dies zu zeigen, die Kosinus und Sinus der Winkel α, β, γ, δ und der Seiten $\widehat{da}$ und $\widehat{ab}$.

Aus den Relationen c) und d) lassen sich $\cos \widehat{bc}$ und $\cos \widehat{cd}$ eindeutig berechnen. $\sin \widehat{bc}$ und $\sin \widehat{cd}$ sind dann auch bestimmt bis auf ihre Vorzeichen.

Zur Berechnung der Kosinus der Kantenlängen benutzen wir die Relationen i), k), l), m), welche wir mit Hilfe der Relationen e), f), g), h) in folgender Weise umwandeln:

Aus h) ergibt sich:

$$\sin B = \sin C \frac{\sin \widehat{cd} \sin \delta}{\sin \widehat{ab} \sin \alpha}.$$

Setzen wir diesen Wert in i) ein, so erhalten wir:

$$\cos C \sin \widehat{cd} \sin \delta + \cos B \cos \widehat{bc} \sin \widehat{ab} \sin \alpha = (\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha \cos \widehat{ab}) \sin \widehat{bc}.$$

Wandeln wir die Relationen k), l), m) in entsprechender Weise um, so erhalten wir vier Gleichungen, aus denen wir die Kosinus der Kantenlängen eindeutig berechnen können, wenn wir die Vorzeichen von $\sin \widehat{bc}$ und $\sin \widehat{cd}$ festsetzen.

Die Sinus der Kantenlängen sind damit auch bis auf ihre Vorzeichen bestimmt. Diese sind jedoch nicht ganz willkürlich, sondern müssen so gewählt werden, daſs die Relationen a) und b) erfüllt werden. Demnach sind die Vorzeichen der vier Produkte $\sin A \sin B \sin \widehat{ab}$, $\sin B \sin C \sin \widehat{bc}$, $\sin C \sin D \sin \widehat{cd}$, $\sin D \sin A \sin \widehat{da}$ bestimmt. Ändern wir also das Vorzeichen eines Sinus einer Kante, so müssen auch die Vorzeichen der Sinus der andern drei Kanten geändert werden, so daſs nur das Vorzeichen einer einzigen Kantenlänge willkürlich bleibt.

Unbestimmt bleiben also, wenn wir die obigen Kosinus und Sinus geben, die Vorzeichen von $\sin \widehat{bc}$, $\sin \widehat{cd}$ und vom Sinus einer beliebigen Kantenlänge.

Wir untersuchen nun die Geltung unserer Relationen für die in der Einleitung definierten Vierseite.

Wir haben festzustellen, ob die willkürliche Festsetzung, die wir am Anfang von § 2 über die Vorzeichen der Sinus getroffen haben, für unsere Vierseite zulässig ist.

Wir gehen von einem Vierseit einfachster Art aus, das wir als Elementarvierseit bezeichnen. Dasselbe soll durch die verstärkten Linien in Fig. 1 dargestellt sein.

Wir drehen zunächst die Ebene $x_2 = 0$ um die Kante $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ des Tetraëders so weit, bis sie mit der Ebene $x_4 = 0$ zusammenfällt (Fig. 3). Der Punkt 2 möge dabei in der Ebene $x_3 = 0$ etwa einen Kreis beschreiben und nach 2' gelangen. Die Ebene $x_1 = 0$ denken wir uns dabei um die Kante A drehbar. Sie fällt schliefslich auch mit der Ebene $x_4 = 0$ zusammen. In der Grenze entsteht ein geradliniges Dreieck 1 2' 4. Bezeichnen wir die Werte, welche die Kanten und die Seiten $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ in dieser in der Figur erkennbaren Grenzlage annehmen, mit A', B', C', D', $\widehat{ab}'$, $\widehat{cd}'$, so sind die Längen der ganz sich im Endlichen erstreckenden Seiten dieses Dreiecks: $\pi - A'$, B', $\pi + D' - C'$. Ferner besitzt das Dreieck den Winkel $\widehat{ab}'$. Es gilt die Relation der sphärischen Trigonometrie:

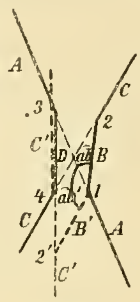

Fig. 3.

$$\cos(\pi + D' - C') = \cos(\pi - A') \cos B' + \sin(\pi - A') \sin B' \cos \widehat{ab}'$$

oder:

$$\cos(D' - C') = \cos A' \cos B' - \sin A' \sin B' \cos \widehat{ab}'.$$

Nun ist $\widehat{cd} = \pi$.

Da die Relation a), wenn wir in ihr $\widehat{cd}' = \pi$ setzen, in die Relation der Grenzlage übergeht, gilt die Relation a) für die Mafszahlen des Elementarvierseits.

In entsprechender Weise beweist man die Gültigkeit der Relation b).

Wir wählen weiter die Gröfsen a_{ik} zunächst so, dafs alle vier Ecken des Vierseits im Innern der Kugel liegen und verschieben dann (Fig. 4) die Ebene ab des Tetraëders, bis sie durch die Schnittgerade der Ebenen bc und da geht. Bezeichnen wir die Werte, welche die Winkel des Elementarvierseits und die Seiten $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ in der Grenzlage annehmen, mit α', β', γ', δ', $\widehat{ab}'$, $\widehat{cd}'$, so sind die Innenwinkel des entstehenden sphärischen Dreiecks $\pi - \gamma'$, $\pi - \delta'$, $\pi - \alpha' - \beta'$ und ferner besitzt das Dreieck die Seite $\widehat{cd}'$. Es gilt die Relation der sphärischen Trigonometrie:

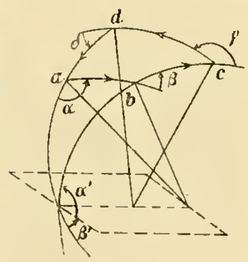

Fig. 4.

$$\cos(\pi - \alpha' - \beta') = -\cos(\pi - \gamma') \cos(\pi - \delta') + \sin(\pi - \gamma') \sin(\pi - \delta') \cos \widehat{cd}'$$

oder:

$$\cos(\alpha' + \beta') = \cos \gamma' \cos \delta' - \sin \gamma' \sin \delta' \cos \widehat{cd}'.$$

Nun ist in der Grenzlage $\widehat{ab'} = 0$ und da, wenn wir in der Relation c) $\widehat{ab} = 0$ setzen, dieselbe in die obige Beziehung übergeht, gilt die Relation c) für die Maſszahlen des Elementarvierseits zunächst unter der besonderen Voraussetzung, daſs dessen vier Ecken im Innern der Kugel liegen. Da diese Elementarvierseite aber kontinuierlich in solche übergeführt werden können, deren Ecken beliebig zur Kugel liegen, gilt die Relation c) für jedes Elementarvierseit.

Entsprechend beweist man die Gültigkeit der Relation d).

Sollte die Relation e) nicht gelten, so müſste für die Maſszahlen des Elementarvierseits statt ihrer die Relation bestehen:

$$\sin D \sin \widehat{da} \sin \alpha = -\sin \beta \sin \widehat{bc} \sin C.$$

Da aber für ein Elementarvierseit, dessen vier Ecken im Innern der Kugel liegen, die Sinus der Winkel und Seiten reell und positiv, die Sinus der Kanten rein imaginäre positive Gröſsen sind, ist das Bestehen obiger Relation ausgeschlossen.

Also gelten auch die Relationen e) und f) für das Elementarvierseit.

Wir dehnen die Geltung der Relationen weiter aus.

Vermehren oder vermindern wir die Maſszahlen um das Vielfache von 2π, so bleiben die Relationen ungeändert, weil die Sinus und Kosinus ungeändert bleiben.

Wenn wir in den 13 Wurzeln

$$\sqrt{a_{11}},\ \sqrt{a_{22}},\ \sqrt{a_{33}},\ \sqrt{a_{14}},\ \sqrt{R_{11,22}},\ \sqrt{R_{22,33}},\ \sqrt{R_{33,44}},\ \sqrt{R_{44,11}},\ \sqrt{R_{11}},\ \sqrt{R_{22}},\ \sqrt{R_{33}},\ \sqrt{R_{41}},\ \sqrt{R},$$

welche in den Ausdrücken für die Sinus und Kosinus der Maſszahlen vorkommen, sämtliche möglichen Vorzeichenkombinationen bilden, so entsteht dadurch eine G r u p p e v o n 2^{13} S u b s t i t u t i o n e n der Maſszahlen. Wir zeigen, daſs unsere Relationen sich ihr gegenüber invariant verhalten.

Die Relationen verhalten sich der ganzen Gruppe gegenüber invariant, wenn sie den Erzeugenden der Gruppe gegenüber invariant bleiben. Wir betrachten also die einzelnen erzeugenden Operationen. Diese entstehen durch jedesmalige Änderung des Vorzeichens einer der 13 Wurzeln.

Es handelt sich um die Änderungen, welche die Maſszahlen bei der Vorzeichenänderung der Sinus und Kosinus erleiden.

Kehren wir das Vorzeichen von $\sqrt{R_{11}}$ um, so erleiden die Maſszahlen die Substitution:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} A & A & \widehat{ab} & 2\pi-\widehat{ab} & \alpha & \pi+\alpha \\ B & B & \widehat{bc} & \widehat{bc} & \beta & \pi+\beta \\ C & C & \widehat{cd} & \widehat{cd} & \gamma & \gamma \\ D & D & \widehat{da} & \widehat{da} & \delta & \delta \end{array}$$

Geometrisch entspricht dieser Substitution die Umkehr des Durchlaufungssinnes des Kreises $\widehat{ab}$.

Kehren wir das Vorzeichen von $\sqrt{R_{11,22}}$ um, so erleiden die Maſszahlen die Substitution:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} A & A & \widehat{ab} & \pi+\widehat{ab} & \alpha & \alpha \\ B & 2\pi-B & \widehat{bc} & \pi+\widehat{bc} & \beta & 2\pi-\beta \\ C & C & \widehat{cd} & \widehat{cd} & \gamma & \gamma \\ D & D & \widehat{da} & \widehat{da} & \delta & \delta \end{array}$$

Geometrisch entspricht dieser Substitution die Umkehr der Richtung der Kante B, wobei sich auch gleichzeitig der Drehungssinn für den Ebenenwinkel β umkehrt.

Kehren wir das Vorzeichen von $\sqrt{a_{33}}$ um, so erleiden die Maſszahlen die Substitution:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} A & \pi+A & \widehat{ab} & 2\pi-\widehat{ab} & \alpha & \alpha \\ B & \pi+B & \widehat{bc} & \widehat{bc} & \beta & \beta \\ C & C & \widehat{cd} & \widehat{cd} & \gamma & \gamma \\ D & D & \widehat{da} & \widehat{da} & \delta & \delta \end{array}$$

Geometrisch entspricht dieser Substitution die Umkehr des Durchlaufungssinnes einer Seite am polaren Vierseit.

Kehren wir das Vorzeichen von $\sqrt{R}$ um, so erleiden nur die Winkel eine Substitution und zwar folgende:

$$\begin{array}{c|c} \alpha & 2\pi-\alpha \\ \beta & 2\pi-\beta \\ \gamma & 2\pi-\gamma \\ \delta & 2\pi-\delta \end{array}$$

Geometrisch entspricht dieser Substitution die Umkehr des gemeinsamen Drehungssinnes der Ebenenwinkel.

Unsere Relationen verhalten sich allen diesen Substitutionen gegenüber invariant, folglich auch den durch zyklische Vertauschung aus diesen zu bildenden Substitutionen und der ganzen Gruppe gegenüber.

Diesen Vorzeichenwechseln entspricht gerade der Übergang vom Elementarvierseit zu dem allgemeinsten Vierseit der Einleitung, wie folgende Überlegung zeigt:

Aus dem Elementarvierseit erhalten wir sämtliche allgemeinen Vierseite, indem wir erstens jeder Seite jeden der beiden möglichen Durchlaufungssinne, zweitens jeder Kante jeden der beiden möglichen Richtungssinne, drittens jeder Seite des zugeordneten polaren Vierseits jeden der beiden möglichen Durchlaufungssinne zuordnen. Endlich können wir zu jedem Winkel, jeder Seite und jeder Kante beliebig viele Multipla von 2π hinzufügen. Da die Relationen auch bei der Vorzeichenänderung von $\sqrt{R}$ invariant bleiben, ist es zur Geltung der Relationen zwar erforderlich, dafs für alle Winkel derselbe Drehungssinn genommen wird; aber der Sinn der Drehung ist dabei ganz beliebig.

Damit ist gezeigt:

Die Formelgruppe der algebraischen Relationen gilt für sämtliche Vierseite, welche den in der Einleitung gegebenen Festsetzungen Genüge leisten. —

Diese Untersuchungen gehen parallel mit den Studyschen Untersuchungen über Dreiecke.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie lassen sich in ganz analoger Weise wie unsere sechs algebraischen Relationen ableiten, wenn man in der Ebene einen Kegelschnitt einer projektiven Mafsbestimmung als Fundamentalgebilde zu Grunde legt und die Relationen aufsucht, welche zwischen Winkeln und Seiten eines Koordinatendreiecks bestehen, auf das die Gleichung des Kegelschnitts bezogen wird. Da bei der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie, die sich auf gröfste Kugelkreise bezieht, Winkel und Seiten immer reell sind, so ist bei der Ableitung ihrer Relationen ein imaginärer Kegelschnitt der Mafsbestimmung zu Grunde zu legen. Der Studysche Dreiecksbegriff mufs sich auf ein solches Koordinatendreieck unmittelber übertragen lassen, wenn man für jede Seite des Dreiecks einen Richtungssinn und für jeden Winkel einen Drehungssinn vorschreibt.

Wenn wir nun gezeigt haben, dafs der Geltungsbereich unserer sechs fundamentalen Relationen alle unsere Vierseite umfafst, so ist hiermit eine Ausdehnung der Studyschen Entwicklungen nach zwei Richtungen hin vorgenommen.

Da bei der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie ein imaginärer Kegelschnitt zu Grunde gelegt werden mufs, so würde die unmittelbare Erweiterung der Studyschen Entwicklungen darin bestehen, dafs man bei der Theorie des Koordinatentetraëders nicht eine reelle Kugel, sondern eine imaginäre Fläche zweiten Grades zu Grunde legt. Nur dann werden immer sämtliche zwölf Mafszahlen reell. Der Studysche Dreiecksbegriff ist dann auf das Koordinatentetraëder zu übertragen, indem man für jeden Ebenenwinkel und jeden Seitenwinkel einen Drehungssinn und für jede Kante einen Richtungssinn in geeigneter Weise vorsehreibt.

Die Erweiterung der Studyschen Entwicklungen nach der andern Richtung hin besteht in der Übertragung dieser Theorie auf Koordinatendreiecke und Koordinatentetraëder, bei denen ein reeller Kegelschnitt und eine reelle Fläehe zweiten Grades der Mafsbestimmung zu Grunde gelegt werden. Im Raume mufs dann noch die Mafsbestimmung auf geradlinigen Flächen von der auf nicht geradlinigen unterschieden werden. Bei kontinuierlicher Fortsetzung der imaginären Fundamentalgebilde in reelle bleiben allerdings die algebraischen Relationen ungeändert bestehen, aber doch ist dann noch zu untersuchen, was hierbei aus der Studyschen Gruppe und unserer Gruppe wird, welche die Erweiterung der Studyschen Gruppe darstellen würde; jetzt liegen die Realitätsverhältnisse komplizierter als bei durchweg reellen Mafszahlen.

An eine ähnliche Erweiterung hat offenbar auch Study gedacht, wie man aus den Worten im Schlufs seiner Arbeit sieht: „Wird es möglich sein (wie es durch verschiedene Umstände wahrscheinlich gemacht wird), die Theorie des Tetraëders, zunächst im nichteuklidischen Raume, in ähnlicher Weise zu behandeln, wie die des Dreiecks?“

Zweiter Hauptteil.

Transzendente Untersuchung.

§ 1.

Fragestellungen.

Wir wenden uns zu dem zweiten Teil, der transzendenten Untersuchung, und behandeln ausschliefslich die in den Kern eingehängten Membrane. Wir stellen folgende Fragen:

1. Wie können bei Vorgabe der Winkel sämtliche Kreisbogenvierecke mit diesen Winkeln konstruiert und übersichtlich in eine kontinuierliche Folge gebracht werden?

2. Welches sind die Ergänzungsrelationen?

3. Wenn zwei Kreisbogenvierecke dieselben Winkel, dieselben Umlaufszahlen der Seiten besitzen und wenn ihre Kerne sich durch eine Bewegung zur Deckung bringen lassen, sind dann die Membrane selbst identisch?

Wir denken uns, wie verabredet, das Viereck immer auf der Kugel. Wir zeichnen es aber aus praktischen Gründen in der Ebene. Dabei kann allerdings das Unendliche stören.

Die Winkel des Kreisbogenvierecks messen wir jetzt, um den Faktor π nicht immer schreiben zu müssen, direkt durch die Exponentendifferenzen der Differentialgleichung, welche wir nun mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnen wollen. Ein Winkel von 180° erhält also jetzt den Wert 1, ein Winkel von 360° den Wert 2 usw.

§ 2.

Reduktions- und Erweiterungsprozesse.

Wir werden im folgenden von den „Reduktions- und Erweiterungsprozessen" der Kreisbogenpolygone Gebrauch machen (K).

1. Wir erweitern ein Kreisbogenpolygon durch „polare Einhängung" einer Kreisscheibe in folgender Weise: Wir führen von einer Ecke aus nach einer gegenüberliegenden Seite einen Schnitt p (z. B. von d nach $\widehat{ab}$, Fig. 5) und in einer Kreisscheibe, welche denselben Radius wie der Begrenzungskreis $\widehat{ab}$ besitzt, einen zu p kongruenten Schnitt p'. Dann vereinigen wir Polygon und Kreisscheibe, indem wir beide Flächenstücke aufeinanderlegen und die Ränder von p und p' über Kreuz zusammenheften. Jetzt ist ein neues Kreisbogenpolygon entstanden, in welchem ein Winkel um die Zahl zwei gewachsen ist, und eine Seite um einen Umlauf zugenommen hat.

Umgekehrt kann es auch möglich sein, eine Kreisscheibe polar auszuhängen, worunter wir dann den entgegengesetzten Prozess verstehen.

Damit von einer Ecke d einer Membran bezüglich der Seite $\widehat{ab}$ der Begrenzung eine polare Einhängung möglich ist, ist notwendig und hinreichend, dafs sich von d nach $\widehat{ab}$ innerhalb der Membran ein Schnitt p ziehen lasse, der ganz auf derselben Seite des Kreises $\widehat{ab}$ verläuft wie die Membran und keine in demselben Blatt oder verschiedenen Blättern sich kreuzenden Zweige besitzt.

2. Wir erweitern ein Polygon durch Einhängung einer Vollkugel oder durch „diagonale Einhängung", indem wir zwischen zwei nicht aufeinanderfolgenden Ecken einen Schnitt d ziehen, zwischen zwei Punkten einer Vollkugel einen zu d kongruenten Schnitt d', alsdann Polygon und Vollkugel so aufeinanderlegen, dafs die Schnitte aufeinanderfallen und dann die Ränder der Schnitte kreuzweise vereinigen (Fig. 6). Die Umlaufszahlen der Seiten bleiben ungeändert, zwei Winkel werden um die Zahl 2 vergröfsert.

Umgekehrt kann es auch möglich sein, diagonal auszuhängen.

Damit eine diagonale Einhängung möglich sei, mufs sich innerhalb der Membran von einer Ecke nach einer nicht auf sie folgenden Ecke ein Schnitt führen lassen, der keine in demselben Blatt oder verschiedenen Blättern sich kreuzenden Zweige besitzt.

3. Wir erweitern ein Polygon durch Einhängung eines Kreisringes oder durch „transversale Einhängung“, indem wir zwischen Polygonseiten, die sich imaginär schneiden, einen Schnitt t führen, in einem von zwei Kreisen begrenzten Ringstück einen zu t kongruenten Schnitt t', und wie bei 1. und 2. die Flächenstücke längs der Schnitte zusammenheften (Fig. 7). Dabei mufs der Ring dem von den Kreisen der betreffenden beiden Seiten begrenzten Ring kongruent sein. Die Winkel bleiben ungeändert, aber die Umlaufszahlen von zwei Seiten werden um je 1 erhöht.

Eventuell kann auch transversal ausgehängt werden.

Damit eine transversale Einhängung möglich sei, dürfen die Kreise der beiden Polygonseiten, zwischen denen eingehängt werden soll, sich nicht reell schneiden und es mufs sich von einer Seite nach der anderen innerhalb der Membran ein Schnitt ziehen lassen, der ganz innerhalb des von beiden Kreisen begrenzten Ringes verläuft und keine in demselben Blatt oder verschiedenen Blättern sich kreuzenden Zweige besitzt.

4. Wir erweitern ein Polygon durch „laterale Anhängung“ einer Kreisscheibe, indem wir längs einer nicht umlaufenden Polygonseite diejenige Kreisscheibe, welche die auf dem Innern der Seite liegende Kreisscheibe zu einer Vollkugel ergänzt, einfach anheften (Fig. 8). Die Membran liegt nach Anhängung der Kreisscheibe auf der anderen Seite des begrenzenden Kreises, die anliegenden Winkel werden beide um 1 vermehrt, der begrenzende Kreisbogen wird durch denjenigen Kreisbogen ersetzt, der ihn zu einer vollen Peripherie ergänzt. Eventuell kann auch eine Kreisscheibe lateral abgetrennt werden. Damit lateral angehängt werden kann, ist notwendig und hinreichend, dafs die betreffende Seite nicht umlaufend ist.

Ein zur Ausführung eines Erweiterungsprozesses zu ziehender Schnitt darf auch andere Schnitte durchsetzen, wenn er nur die oben angegebenen Bedingungen erfüllt. Hierzu ist folgendes Beispiel bemerkenswert. In das Viereck der Fig. 9 sei diagonal eingehängt, was durch die Linie d angedeutet ist. Jetzt scheint keine transversale Anhängung mehr möglich zu sein. Da die Membran aber nach Einhängung der Vollkugel auch noch aufserhalb des schattierten Gebietes verläuft, so ist t ein Schnitt, an dem entlang eine transversale Einhängung möglich ist. Das Viereck hat dann zwei Windungspunkte und zwei einfach umlaufende Seiten. Man erhält dasselbe Viereck durch zwei polare Anhängungen, die in Fig. 10 durch die Linien p_1, p_2 angedeutet sind.

Ein Polygon, das keine Aushängungs- (Reduktions-)prozesse der bezeichneten Art mehr zuläfst, nennen wir „reduziert" (K). Sobald wir alle reduzierten Kreisbogenviereeke kennen, die möglich sind, ist es durch Anwendung der obigen Erweiterungsprozesse möglich, aus ihnen alle Kreisbogenviereeke zu konstruieren, die es überhaupt gibt.

Kapitel I.

Konstruktion der Kreisbogenvierecke.

A. Konstruktion der reduzierten Vierecke.

Zur Konstruktion der reduzierten Vierecke werden wir mit einigen Erweiterungen dieselben Methoden benutzen, die Schönfliefs in Math. Ann. 44 angewandt hat.

Wir bilden wie Schönfliefs eine Reihe von Klassen reduzierter Viereeke und suchen Ungleichheitsbedingungen auf, die von den Winkeln erfüllt werden müssen, damit die Vierecke reduziert sind. Einmal werden wir jedoch, indem wir die Methoden von Schönfliefs in etwas anderer Weise verwerten, eine andere Einteilung der reduzierten Vierecke erhalten, ferner werden wir engere Ungleichheitsbedingungen ableiten, endlich auch für jede Klasse reduzierter Vierecke ein Beispiel zeichnen, damit wir im wesentlichen von den reduzierten Vierecken eine Vorstellung erhalten.

§ 3.

Sätze über Kreisbogendreiecke.

Wir stellen im folgenden alle Typen reduzierter Kreisbogendreiecke zusammen, welche es gibt. Wir unterscheiden nach Schwarz[1]) dabei

[1]) Schwarz, ges. Abh. II, S. 234.

Dreiecke erster Art, bei denen der Scheitel des Kerns, der hier von drei Ebenen gebildet wird, im Innern der Kugel liegt, Dreiecke zweiter Art, bei denen er auf der Kugel, Dreiecke dritter Art, bei denen er aufserhalb der Kugel liegt.

Die Dreiecke erster Art werden begrenzt von drei Kreisen ohne reellen Orthogonalkreis, die Dreiecke zweiter Art von Kreisen, die sich in einem Punkte schneiden. Wirft man diesen nach Unendlich, so werden die Dreiecke durch drei Gerade begrenzt. Die Begrenzungskreise der Dreiecke dritter Art besitzen einen reellen Orthogonalkreis.

Alle Dreiecksmembranen, welche in denselben Kern eingehängt sind, nennen wir „verwandte" Dreiecke. Unter allen verwandten Dreiecken hat jedesmal eines, das „Minimaldreieck", die kleinste Winkelsumme.

Sind λ, μ, ν die Winkel des Minimaldreiecks, so ist bei den Dreiecken erster Art: $\lambda+\mu+\nu>1$, zweiter Art: $\lambda+\mu+\nu=1$, dritter Art: $\lambda+\mu+\nu<1$, sodafs die Dreiecke der drei Arten durch das Minimaldreieck charakterisiert werden.

Wir wollen nun alle Typen reduzierter Dreiecke zeichnen. Im Kern erster Art sind 16 reduzierte Dreiecke, im Kern zweiter Art, wenn wir nichts über den Umlaufssinn bestimmen, 19 reduzierte Dreiecke, im Kern dritter Art ebenfalls 19 reduzierte Dreiecke enthalten. Die Winkel der reduzierten Dreiecke im Kern erster, zweiter und dritter Art sind:

	1	2	3	4
I	$\lambda,\ \mu,\ \nu$	$1-\lambda,\ 1-\mu,\ \nu$	$1-\lambda,\ \mu,\ 1-\nu$	$\lambda,\ 1-\mu,\ 1-\nu$
II	$2-\lambda,\ 1-\mu,\ 1-\nu$	$1+\lambda,\ \mu,\ 1-\nu$	$\lambda,\ 1-\nu,\ 1+\nu$	$1-\lambda,\ 1+\mu,\ \nu$
III	$1-\lambda,\ 2-\mu,\ 1-\nu$	$\lambda,\ 1+\mu,\ 1-\nu$	$1+\lambda,\ 1-\mu,\ \nu$	$1-\lambda,\ \mu,\ 1+\nu$
IV	$1-\lambda,\ 1-\mu,\ 2-\nu$	$\lambda,\ \mu,\ 2-\nu$	$\lambda,\ 2-\mu,\ \nu$	$2-\lambda,\ \mu,\ \nu$

wozu bei den Kernen zweiter und dritter Art noch die Dreiecke kommen:

	1	2	3	4
V	$2+\lambda,\ 1-\mu,\ 1-\nu$	$1-\lambda,\ 2+\mu,\ 2-\nu$	$1-\lambda,\ 1-\mu,\ 2+\nu$	

Auf der beigegebenen letzten Figurentafel ist ein Dreieck eines jeden Typus gezeichnet (K).

Vor allen Dingen beachten wir hier, dafs in dem Kern dritter Art die Dreiecke des Typus $2-\lambda$, μ, ν eine sich überschlagende Seite haben.

Ferner brauchen wir folgende Sätze, welche wir der Arbeit von Schönfliefs[1]) entnehmen:

„Jedes Dreieck, das zwei konvexe Winkel enthält, ist reduzierbar.“

„In einem Dreieck kann nur eine Seite umlaufend sein.“

„Reduzierte Dreiecke ohne umlaufende Seiten und mit Winkeln:

$$0 \leq \alpha \leq 1 \qquad 0 \leq \beta \leq 1$$

existieren für jeden Wert:

$$0 \leq \gamma \leq 1 + \alpha + \beta < 3.\text{“}$$

„Reduzierte Dreiecke mit umlaufender Seite existieren für jeden Wert:

$$1 + \alpha + \beta < \gamma < 2.\text{“}$$

§ 4.

Geometrische Hülfsmittel.

Wir werden im folgenden mit geringer Modifikation die geometrischen Hülfsmittel von Schönfliefs anwenden und uns auch dessen Nomenklatur anschliefsen.[2])

1. Ist die Seite $\widehat{ab}$ eine nicht umlaufende Seite eines Kreisbogenvierecks, so drehen wir den begrenzenden Bogen $\widehat{ab}$ um seine Endpunkte allmählich in die Membran hinein (Fig. 11), bis derselbe an der Begrenzung des Vierecks anstöfst. Wir wollen sagen, dafs er dann in den „Grenzkreis“ übergegangen ist.

Der Grenzkreis kann eine der benachbarten Seiten $\widehat{bc}$ oder $\widehat{da}$ in den Ecken b oder a berühren.

Ferner kann er $\widehat{cd}$ berühren. Dann nennen wir ihn „Tangentialkreis“.

Geht er durch einen der Eckpunkte d oder c, so soll er „Diagonalkreis“ heifsen. Der Winkel an der vom Diagonalkreis getroffenen Ecke ist gröfser als 1 und das Viereck ist in diesem Falle von a oder von c aus

[1]) Math. Ann. 44, S. 112, 114.

[2]) l. c. S. 109.

längs des Grenzkreises in zwei Dreiecke zerlegt. Eine Kreisscheibe ist lateral abtrennbar, sobald der Bogen $\widehat{ab}$ eine ganze Kreisscheibe durchlaufen kann, ehe er den Grenzkreis erreicht.

Den Grenzkreis, der durch a und b geht, wollen wir mit k_{ab} bezeichnen.

2. Ist die Seite $\widehat{ab}$ umlaufend, so läfst sich jedenfalls dicht an der Begrenzung entlang innerhalb der Membran ein Kreis ziehen, der den Kreis $\widehat{ab}$ im Punkte a berührt. Er beginnt im Eckpunkt a und endet in dem Punkte a', der in dem nächsten Blatte über a liegt (Fig. 12). Wir ziehen nun den Kreis, während er beständig $\widehat{ab}$ in a berührt, in die Membran hinein. Dann kann sich der Kreis nicht auf einen Punkt zusammenziehen, da seine Eckpunkte in verschiedenen Blättern liegen. Er mufs also irgendwo an der Begrenzung anstofsen, in einen „Grenzkreis" übergehen.

Berührt er $\widehat{cd}$, was auch in c oder d geschehen kann, so nennen wir ihn „Tangentialkreis" (Fig. 12). Dann schneiden sich die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ imaginär und man kann einen zu einer transversalen Einhängung geeigneten Schnitt führen.

Stöfst der Grenzkreis an die Ecke c, so mufs $\gamma > 1$ sein, und das Viereck läfst sich längs des Grenzkreises in zwei Dreiecke zerlegen. Dann nennen wir den Grenzkreis „eigentlichen Diagonalkreis". Stöfst der Grenzkreis an die Ecke d, so mufs $\delta > 1$ sein und wir nennen ihn „uneigentlichen Diagonalkreis".

Den Grenzkreis, der $\widehat{ab}$ in a berührt, bezeichnen wir mit $k_{ab(a)}$.

Im besonderen Fall kann der Grenzkreis k_{ab} oder $k_{ab(a)}$ eine ganze Polygonseite enthalten. Enthält er $\widehat{cd}$, so kann $\widehat{cd}$ nicht umlaufend sein, der Kreis ist dann als uneigentlicher Diagonalkreis anzusehen. Enthält der Grenzkreis $k_{ab(a)}$ die Seite $\widehat{da}$, so ist $\alpha = 0$, und der Kreis ist als uneigentlicher Diagonalkreis anzusehen. Enthält der Grenzkreis $k_{ab(a)}$ die Seite $\widehat{bc}$, so ist $\beta = 0$, die Seite $\widehat{ab}$ umspannt die Peripherie gerade einmal und der Kreis ist als eigentlicher Diagonalkreis anzusehen.

§ 5.
Konstruktion sämtlicher Vierecke, bei denen transversale Einhängungen möglich sind.

Ehe wir die reduzierten Vierecke selbst behandeln, wollen wir alle Vierecke konstruieren, bei denen transversale Einhängungen zwischen zwei Seiten möglich sind. Denn die Beherrschung dieser Vierecke wird uns beim Studieren der andern Vierecke gute Dienste leisten.

Kann in ein Viereck von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ hinüber transversal eingehängt werden, so transformieren wir das Viereck durch eine lineare Substitution so, daſs die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ konzentrisch werden. Hängen wir dann eine Anzahl von Kreisringen ein, so wird ein Stück der Membran selbst von einem Kreisring gebildet, den wir zeichnen (Fig. 13). Auf der Seite $\widehat{ab}$ können wir dann in zwei aufeinanderfolgenden Blättern zwei Punkte a' und a'' so auswählen, daſs der Grenzkreis, der $\widehat{ab}$ in a' und a'' berührt, ein Tangentialkreis wird, der $\widehat{cd}$ in E berühren möge.

Das Halbkreisstück Ea' wollen wir in der Membran in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung immer weiter verschieben, so daſs $\widehat{cd}$ und $\widehat{ab}$ beständig berührt werden. Die Endpunkte des Halbkreises bezeichnen wir während der Bewegung immer mit E und a'. Schlieſslich muſs bei dieser Verschiebung entweder a' auf die Ecke a der Vierecke stoſsen, oder E auf die Ecke d. Daſs die Seite $\widehat{da}$ von innen vom Halbkreis berührt wird, ist nur im Punkte a möglich, wobei dann $\alpha = 0$ sein muſs. Eine Berührung in einem andern Punkte kann nicht stattfinden, denn dann läge der Kreis $\widehat{da}$ ganz innerhalb des Kreises Ea' und könnte mit dem Kreise $\widehat{ab}$ keinen reellen Winkel bilden. Stöſst der Halbkreis auf a, so läſst sich in dieser Grenzlage des Halbkreises an ihm entlang ein Dreieck mit den Winkeln α, 0, δ vom Viereck abtrennen.

Stöſst der Halbkreis auf d, so bewegen wir statt seiner den Halbkreis Ea'' auf d und a zu. Dieser wird dann mit seinem Endpunkt E auf den Punkt d stoſsen und es läſst sich jetzt wieder an ihm entlang ein Dreieck mit den Winkeln α, 0, δ abtrennen.

Wir können nun ebenso die Halbkreise nach der entgegengesetzten

Richtung, nach b und c hin, verschieben, stofsen auf die Ecke b oder c und können ein Dreieck mit den Winkeln β, 0, γ abtrennen.

Man kann also sämtliche Vierecke mit den Winkeln α, β, γ, δ, in die von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ transversal eingehängt werden kann, auf folgende Weise konstruieren:

„Man konstruiere das Dreieck A (Fig. 14) mit den Winkeln α, 0, δ, setze ein Ringstück B längs einer vom Winkel 0 ausgehenden Seite an, welche nicht umlaufend ist, konstruiere weiter das Dreieck C mit den Winkeln β, 0, γ und füge es an das Ringstück längs einer vom Winkel 0 ausgehenden Seite an, die nicht umlaufend ist. Ein Beispiel gibt Fig. 14.

Sämtliche sonst noch existierenden Vierecke dieser Art mit den Winkeln α, β, γ, δ erhält man aus den so konstruierten, indem man die Bögen von $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ noch verlängert oder verkürzt. Dies geschieht unter Festhaltung der Winkel durch Verschiebung der Kreise bc und $\widehat{da}$ längs der Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$, die dabei festgehalten werden.“ (Fig. 15 u. § 9.)

Wir bemerken noch, dafs die Seiten $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$ nicht umlaufend sein können, weil sie in den beiden Dreiecken einem Winkel 0 gegenüberliegen.

Da bei beliebigen Werten von α, β, γ, δ auch immer Dreiecke mit den Winkeln α, β, 0 und γ, δ, 0 existieren, erhalten wir den Satz:

„Für beliebig vorgeschriebene Werte von α, β, γ, δ gibt es stets sowohl Kreisbogenvierecke, bei denen sich von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$, als auch Kreisbogenvierecke, bei denen sich von $\widehat{bc}$ nach $\widehat{da}$ hinüber transversale Einhängungen machen lassen.“

Es ist nun nicht schwer, die Typen aller reduzierten Vierecke anzugeben, bei denen sich von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ hinüber transversale Einhängungen machen lassen. Wenn wir zunächst die Vierecke bei Seite lassen, die durch Verkürzung der Bögen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ aus den zunächst auf die angegebene Weise konstruierten Vierecken entstehen, so ist klar, dafs die Dreiecke mit den Winkeln α, 0, δ und γ, 0, β selbst reduziert sein müssen, wenn das Viereck reduziert sein soll. Aus den Ungleichheitsbedingungen am Schlufs des § 3 ergeben sich, wenn wir sie auf die Dreiecke A und B anwenden, und die verschiedenen Dreieckstypen auf alle möglichen Arten nach der beschriebenen Konstruktionsmethode zusammensetzen, folgende Viereckstypen

1. Keine Dreiecksseite ist umlaufend:

a) $0 \leq \alpha < 1;\quad 0 < \beta \leq 1;\quad 0 \leq \gamma \leq 1 + \beta;\quad 0 \leq \delta \leq 1 + \alpha$ (Fig. 14).
b) $0 < \alpha \leq 1 + \delta;\quad 0 \leq \beta < 1;\quad 0 \leq \gamma \leq 1 + \beta;\quad 0 \leq \delta \leq 1$ (Fig. 16).

2. Die Seite eines der beiden Dreiecke ist umlaufend:

a) $0 < \beta \leq 1;\quad 0 \leq \gamma < 1 + \beta;\quad 1 + \alpha < \delta < 2$ (Fig. 17).
b) $0 < \beta \leq 1 + \gamma;\quad 0 \leq \gamma \leq 1;\quad 1 + \alpha < \delta < 2$ (Fig. 18).

3. Jedes der beiden Dreiecke hat längs $\widehat{ab}$ eine umlaufende Seite:

$$1 + \beta < \gamma < 2;\quad 1 + \alpha < \delta < 2 \quad \text{(Fig. 19)}.$$

4. Die Seiten der Dreiecke längs $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ sind umlaufend:

$$1 + \beta < \gamma < 2;\quad 1 + \delta < \alpha < 2 \quad \text{(Fig. 20)}.$$

Im Typus 1 a) oder 1 b) sind noch Vierecke enthalten, bei denen zwei gegenüberliegende Seiten umlaufend sind, ohne dafs sich ein Kreisring aushängen läfst (§ 6, Fig. 25). Dann mufs sein:

$$0 < \alpha + \beta < 1;\quad 0 \leq \gamma + \delta < 1.$$

Sie sind die einzigen Vierecke dieser Art (vgl. § 14).

Im Typus 2 a) und 3) können reduzierte Vierecke mit einer zweifach umlaufenden Seite vorkommen (Fig. 19).

Die Vierecke des Typus 4. sind nicht reduziert, sondern es läfst sich stets noch ein Kreisring abtrennen. Den Typus der dann erhaltenen reduzierten Vierecke gibt Fig. 21.

Erweitern wir diese Viereckstypen durch polare Anhängungen an die Seiten $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ und laterale Anhängungen an die Seiten $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$, so ist es möglich, dafs nach genügender Verkürzung der Bogen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ (im Sinne von Fig. 15) Kreisscheiben sich nicht mehr abtrennen lassen, die vorher eingehängt waren. Man erkennt aber, wenn man bei allen bisher betrachteten Typen der reduzierten Vierecke die angegebenen Prozesse ausführt, dafs dies nur bei dem Typus von Fig. 25 vorkommen kann.

Hängen wir hier von a nach $\widehat{cd}$ polar ein und verkürzen die Bogen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ so weit, bis sich diese Kreisscheibe nicht mehr abtrennen läfst, so entsteht der Typus von Fig. 22 und es ist:

$$2 \leq \alpha;\quad \alpha + \beta < 3;\quad 0 \leq \gamma + \delta < 1.$$

Hängen wir an $\widehat{da}$ eine Kreisscheibe lateral an und verkürzen die Bogen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ so lange, bis sie sich nicht mehr abtrennen läfst, so erhalten wir den Typus Fig. 23 und es ist:

$$1 \leq \alpha; \quad \alpha + \beta < 2; \quad 1 < \delta.$$

Wir wollen nun systematisch alle reduzierten Vierecke konstruieren und möglichst für jeden Typus ein Beispiel zeichnen. Die Vierecke, die wir nach Erfüllung der Ungleichheitsbedingungen für die Winkel erhalten, werden zwar nicht unter allen Umständen reduziert sein, aber doch sind sie immer als Ausgangsvierecke zu brauchen, durch deren Erweiterung wir alle Vierecke erhalten können.

§ 6.

Konstruktion sämtlicher reduzierten Vierecke mit mehr als einer umlaufenden Seite.

1. Wir suchen zunächst die reduzierten Vierecke auf, bei denen zwei benachbarte Seiten umlaufend sind.

Ist ein solches reduziertes Viereck vorgelegt und sind $\widehat{da}$ und $\widehat{ab}$ umlaufend, so mufs der Grenzkreis $k_{ab(a)}$ eigentlicher Diagonalkreis sein. Denn wäre er uneigentlicher Diagonalkreis, so lägen die Ecken d und a in demselben Blatte und $\widehat{da}$ könnte nicht umlaufend sein. Und wäre er Tangentialkreis, so liefse sich ein Kreisring einhängen und wir hätten ein Viereck von der schon in § 5 behandelten Art vor uns, und bei diesem kann auch $\widehat{da}$ nicht umlaufend sein. Diese Vierecke, bei denen $\widehat{da}$ und $\widehat{ab}$ umlaufend sind, entstehen also durch Zusammensetzung zweier reduzierter Dreiecke mit umlaufenden Seiten, von denen das Dreieck abc bei a den Winkel 0 hat. Es folgt dafs $\widehat{bc}$ und $\widehat{cd}$ nicht umlaufend sind. Fig. 24 gibt den Typus eines solchen reduzierten Vierecks, und zwar in grofser Allgemeinheit, denn von den zu benutzenden reduzierten Dreiecken mit einer umlaufenden Seite gibt es nur den Typus § 3, IV, 2, 3, 4.

Nun wollen wir noch die Ungleichheitsbedingungen für die Winkel ableiten, die für diesen Viereckstypus bestehen müssen. Zunächst müssen beide Dreiecke für sich reduziert sein. Sind also γ' und γ'' ihre Winkel bei c, so ist (§ 3):

$$\begin{array}{r} 1+\beta<\gamma'<2 \\ 1+\alpha+\delta<\gamma''<2 \\ \hline 2+\delta+\alpha+\beta<\gamma\ <4. \end{array}$$

Damit sich nun nicht noch polar eingehängte Kreisscheiben abtrennen lassen, dürfen die beiden in der Figur mit einem Minuszeichen versehenen Zweiecke nicht von der Membran bedeckt werden. Dazu ist notwendig, dafs die Kreise $\widehat{cd}$, $\widehat{da}$, $\widehat{ab}$ und ebenso die Kreise $\widehat{da}$, $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ jedesmal für sich einen Dreieckskern dritter Art bilden, es mufs also $\delta+\alpha<1$, $\alpha+\beta<1$ sein. Wir erhalten also als notwendig die Winkelbedingungen:

$$\alpha+\beta<1;\quad 2+\delta+\alpha+\beta<\gamma<4;\quad \delta+\alpha<1$$

2. Wir suchen nun die reduzierten Vierecke auf, bei denen zwei gegenüberliegende Seiten umlaufend sind. Ist ein solches reduziertes Viereck vorgelegt und sind $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ umlaufend, so ziehen wir den Grenzkreis $k_{ab(a)}$.

Ist dieser Tangentialkreis, so haben wir den Typus des § 5:

$$0\leq\alpha+\beta<1;\quad 0\leq\gamma+\delta<1 \text{ (Fig. 25).}$$

Sind $k_{ab(a)}$ und $k_{ab(b)}$ beide uneigentliche Diagonalkreise, so ist $\delta>1+\alpha$ und $\gamma>1+\beta$. Wir können dann an den Grenzkreisen entlang von d nach a und von b nach c hinüber Zweiecke abtrennen, so dafs die Winkel α und β zu Null werden. Tun wir dies, so mufs der Grenzkreis $k_{cd(c)}$ Tangentialkreis werden, weil jetzt die der Seite $\widehat{cd}$ gegenüberliegenden Winkel <1 sind; wir haben also wieder ein Viereck des § 5 vor uns, das wir bereits kennen.

Auf einen neuen Typus von Vierecken kommen wir also nur dann, wenn $k_{ab(a)}$ oder $k_{ab(b)}$ eigentlicher Diagonalkreis ist. Ist $k_{ab(a)}$ eigentlicher Diagonalkreis, so läfst sich das Viereck in die zwei Dreiecke mit den Ecken a, b, c und d, a, c zerlegen, die beide reduziert sein müssen und beide eine umlaufende Seite haben. Setzt man sie so zusammen, dafs die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ sich imaginär schneiden, so sieht man aus der Zeichnung, dafs eine transversale Einhängung möglich ist und man also wieder ein Viereck des § 5 vor sich hat (Fig. 20). Wollen wir also einen neuen Viereckstypus erhalten, so müssen sich $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ reell schneiden (Fig. 26). Es folgt, da Dreieck abc bei a den Winkel 0 hat:

$$1+\delta+\gamma'' < \alpha < 2; \quad 1+\beta < \gamma' < 2,$$

wo γ' und γ'' die Winkel der Dreiecke bei c sind.

Ziehen wir nun noch den Grenzkreis $k_{cd(c)}$ so mufs dieser, weil $\beta < 1$ ist, eigentlicher Diagonalkreis sein. Es ergibt sich durch die analoge Betrachtung wie vorher für α jetzt für γ die obere Grenze 2. Wir haben also:

$$1+\delta < \alpha < 2; \quad 1+\beta < \gamma < 2$$

als notwendige Bedingung für die Winkel.

§ 7.

Reduzierte Vierecke mit nur einer umlaufenden Seite.

Wir kommen zu den reduzierten Vierecken, bei denen nur eine Seite umlaufend ist. Ein solches reduziertes Viereck sei vorgelegt und $\widehat{ab}$ sei umlaufend.

Ist der Grenzkreis $k_{ab(a)}$ Tangentialkreis, so haben wir schon behandelte Vierecke vor uns.

Ist $k_{ab(a)}$ eigentlicher Diagonalkreis, so geht er durch c, und das Viereck läfst sich zusammensetzen aus zwei reduzierten Dreiecken abc und dac, von denen das Dreieck abc eine umlaufende Seite hat. Beim Dreieck dac darf nur ein einziger Winkel > 1 sein, weil sich sonst eine Kreisscheibe lateral abtrennen läfst. γ' und γ'' seien die Winkel der beiden Dreiecke bei c.

Wir drehen das Stück des Diagonalkreises zwischen a und c unter Vergrösserung von γ' um seine Endpunkte a und c (Fig. 27—30.) Damit von c aus sich keine Kreisscheibe polar abtrennen läfst, darf dies Stück sich nur soweit drehen lassen, dafs $\gamma' < 2$ bleibt. Ehe also $\gamma' = 2$ geworden ist, mufs das bewegliche Stück des Diagonalkreises entweder

1. die Seite $\widehat{cd}$ in c berühren, oder
2. auf die Ecke d stofsen oder
3. $\widehat{da}$ in a berühren.

Bei jedem Typus entstehen noch Unterfälle, je nachdem wir den einen Winkel des Dreiecks acd, welcher > 1 sein kann, an die Ecke a, c oder d verlegen.

Im letzteren Falle ist $0 \leq \alpha + \beta < 1$, denn die Kreise $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ und das Stück des Diagonalkreises, das $\widehat{da}$ berührt, müssen für sich einen Dreieckskern dritter Art einschliefsen.

Wir erhalten die Viereckstypen:

1) $0 \leq \alpha < 2 + \delta$; $1 + \beta < \gamma < 2$; $0 \leq \delta \leq 1$ (Fig. 27)
$0 \leq \alpha < 1$; $1 + \beta < \gamma < 2$; $0 \leq \delta < 1 + \alpha$ (Fig. 28)

2) $0 \leq \alpha < 1$; $0 \leq \beta < 1$, $1 + \beta < \gamma < 3$; $1 \leq \delta < 2 + \alpha$ (Fig. 29)

3) $0 \leq \alpha + \beta < 1$; $1 + \alpha + \beta < \gamma < 3$; $0 \leq \delta < 2$ (Fig. 30)
$0 \leq \alpha + \beta < 1$; $1 + \alpha + \beta < \gamma < 3 + \delta$; $0 \leq \delta \leq 1$ (Fig. 31).

Wir erhalten noch neue Viereckstypen, wenn $k_{ab(a)}$ und $k_{ab(b)}$ beide uneigentliche Diagonalkreise sind. Dann sind γ und δ beide > 1. Wir suchen, nachdem wir längs der Grenzkreise Zweiecke mit den Winkelöffnungen α und β abgetrennt haben, sodaſs jetzt α und β zu null geworden sind, für die Seite $\widehat{cd}$ den Grenzkreis auf. Dieser kann $\widehat{bc}$ oder $\widehat{da}$ nicht berühren, da die Winkel bei c und d noch ≥ 1 sind und sich dann von $\widehat{cd}$ eine Kreisscheibe lateral abtrennen lieſse. Also berührt er $\widehat{ab}$. Schneiden wir längs eines nahe am Grenzkreise verlaufenden und durch c und d gehenden Kreisbogens ein Zweieck mit den Ecken c und d ab, so haben wir ein Viereck des § 5 vor uns.

Diese reduzierten Vierecke entstehen also aus reduzierten Vierecken des § 5, bei denen $\widehat{ab}$ umlaufend und $\widehat{cd}$ nicht umlaufend ist, indem man den Bogen $\widehat{cd}$ unter Festhaltung von c und d solange nach auswärts dreht, als sich längs $\widehat{cd}$ keine Kreisscheibe lateral abtrennen läſst.

Es bestehen die Bedingungen:

$0 \leq \alpha < 1$; $0 \leq \beta < 1$; $1 + \beta < \gamma < 2 + \beta$; $1 + \alpha < \delta < 2 + \alpha$ (Fig. 32).

Im besonderen kann die Seite $\widehat{ab}$ auch zweimal umlaufend sein (Fig. 33).

§ 8.

Reduzierte Vierecke ohne umlaufende Seiten.

Wir suchen nun die reduzierten Vierecke ohne umlaufende Seiten auf. Für die Seite $\widehat{ab}$ konstruieren wir den Grenzkreis.

1. Ist dieser Diagonalkreis und geht er etwa durch c, so ist $\gamma > 1$ und das Viereck läſst sich längs $\widehat{ac}$ in zwei Dreiecke abc und dac zerlegen. Im Dreieck abc muſs nun $\beta < 1$ sein, denn sonst wären in dem

Dreieck abc zwei Winkel $\geqq 1$ und es wäre reduzierbar. Im Dreieck acd kann längs der Seite $\widehat{ac}$ noch eine Kreisscheibe lateral angehängt sein, ohne daſs das Viereck reduzierbar zu werden braucht. Wir können einen ersten Viereckstypus herstellen, bei dem $\delta < 1$ und $\beta < 1$ ist, einen zweiten, wo $\beta < 1$, $\delta \geqq 1$ (und $\gamma \geqq 1$) ist. Den ersten Viereckstypus werden wir unter 4. behandeln.

Beim zweiten Typus muſs, damit das Viereck nicht reduziert werden kann, der Grenzkreis k_{cd} Tangentialkreis sein. (Wäre er Diagonalkreis durch a, so wäre das Viereck wieder reduzierbar. denn längs $\widehat{da}$ lieſse sich, da dann $\delta \geqq 1$ und $\alpha > 1$ ist, eine Kreisscheibe abtrennen.) Der zweite Typus ist also derselbe, bei dem der Grenzkreis k_{ab} Tangentialkreis ist und $\widehat{cd}$ berührt. Diesen Typus behandeln wir nun jetzt unter 2.

2. Der Grenzkreis k_{ab} kann zweitens Tangentialkreis sein und $\widehat{cd}$ berühren. Sind hier z. B. β und γ beide $\geqq 1$, so läſst sich längs $\widehat{bc}$ eine Kreisscheibe abtrennen, wie man leicht sieht, wenn man für $\widehat{bc}$ den Grenzkreis zu konstruieren sucht.

Wir folgern analog, daſs auch wenigstens einer der Winkel α oder δ kleiner als 1 ist.

Wir nehmen zuerst $\alpha < 1$, $\beta < 1$ an. Zerschneiden wir längs des Grenzkreises, so zerfällt das Viereck in ein Zweieck mit einem Winkel < 1 und in zwei Dreiecke, von denen an einer Ecke jedes den Winkel null hat. Wir erhalten die Bedingungen:

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 \leqq \gamma < 1 + \beta, \quad 0 < \delta < 1 + \alpha \text{ (Fig. 34).}$$

Den Fall $\delta < 1$, $\beta < 1$ behandeln wir unter 4.

Setzen wir $\gamma < 1$ voraus, so müssen wir weiter $1 \leqq \beta < 2 + \gamma$ voraussetzen, wenn wir einen neuen Typus erhalten wollen. Ferner muſs noch $\alpha < 1$ oder $\delta < 1$ sein. Den Fall $\alpha < 1$, $\gamma < 1$ behandeln wir unter 4., für den hiervon verschiedenen Typus $\gamma < 1$, $\delta < 1$ bestehen die Bedingungen:

$$1 \leqq \alpha < 2 + \delta, \quad 1 \leqq \beta < 2 + \gamma, \quad 0 \leqq \gamma < 1, \quad 0 \leqq \delta < 1 \text{ (Fig. 35).}$$

3. Drittens kann der Grenzkreis k_{ab} eine benachbarte Vierecksseite im Eckpunkte berühren. Ist dies die Seite $\widehat{bc}$, so muſs $\beta < 1$ sein. Einen von den vorigen Vierecken verschiedenen Typus werden wir nur dann er-

halten, wenn dieser Fall des Grenzkreises an jeder Vierecksseite eintritt. Dann müssen also wenigstens zwei gegenüberliegende Winkel < 1 sein.

4. Von den Vierecken, bei denen zwei gegenüberliegende Winkel kleiner als 1 sind, haben wir uns noch eine Anschauung zu verschaffen.

Indem wir $\beta < 1$, $\delta < 1$ voraussetzen, halten wir die vier Ecken des Vierecks fest und drehen den Bogen $\widehat{ab}$ um seine Endpunkte a und b nach innen (Fig. 36). Soll das Viereck dabei dieselben Winkel behalten, so müssen wir die Seiten $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$ nach aufsen, die Seite $\widehat{cd}$ nach innen drehen und zwar um denselben Winkel, um den wir die Seite $\widehat{ab}$ gedreht haben. Fahren wir mit der Drehung immer weiter fort, so müssen schliefslich die Teile der Begrenzung zusammenstofsen. Wir wollen sagen, unser Viereck befinde sich dann in der „Grenzlage". Diese ist erstens so möglich, dafs $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ sich berühren (Fig. 37), zweitens so, dafs $\widehat{ab}$ oder $\widehat{cd}$ auf eine gegenüberliegende Ecke stofsen (Fig. 38). In der Grenzlage trennen sich von der Vierecksmembran Kreisbogendreiecke ab. Aus der Grenzlage, die wir also ohne weiteres konstruieren können, erhalten wir dann das Viereck selbst, indem wir die Seiten unter Festhaltung der Eckpunkte und Winkel aus der Grenzlage herausdrehen. — Es ist im besonderen noch möglich, dafs eine Vierecksseite, z. B. $\widehat{ab}$, die Peripherie gerade einmal umspannt. Dann führen wir die Grenzlage so herbei, dafs wir den Kreis $\widehat{ab}$ in die Kreise überführen, die ihn im Punkte a (und b) berühren (Fig. 45) und in der Membran liegen.

Da in unserm reduzierten Viereck $\beta < 1$ und $\delta < 1$ sein soll, so sind beim Eintreten der Grenzlage der ersten Art die beiden Dreiecke mit den Winkeln 0, β, γ und 0, δ, α, in die das Viereck zerfällt, reduziert. Für diesen Typus gelten also die Ungleichheitsbedingungen:

$$0 \leq \alpha \leq 1 + \delta, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 + \beta, \quad 0 \leq \delta < 1 \text{ (Fig. 39).}$$

Beim Eintreten der Grenzlage der zweiten Art falle die Ecke c auf die Seite $\widehat{ab}$. Das Dreieck abc der Grenzlage hat die Winkel α, δ, $\gamma - \beta - 1$, braucht aber nicht reduziert zu sein, sondern längs seiner Seite ac darf noch eine Kreisscheibe lateral angehängt sein. Wir erhalten zwei Typen, je nachdem im Dreieck der Grenzlage (nachdem längs $\widehat{ac}$ eventuell eine

Kreisscheibe lateral abgetrennt ist) der Winkel α oder der Winkel $\gamma - \beta - 1 > 1$ sein kann.

1) $0 \leq \alpha < -\beta + \gamma + \delta, \quad 1 + \beta \leq \gamma \leq 3 + \beta < 4, \quad 0 \leq \delta < 1$ (Fig. 40).

2) $0 \leq \alpha < 2, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad 1 + \beta < \gamma \leq 2 + \alpha + \delta + \beta < 6, \quad 0 \leq \delta < 1$ (Fig. 41).

Wir stellen nun noch folgende Sätze über reduzierte Kreisbogenvierecke zusammen, die sich aus den vorstehenden Entwicklungen direkt ergeben:

1. „In einem reduzierten Viereck sind stets zwei Winkel kleiner als 1".

2. „In einem reduzierten Viereck ist die Summe der Windungszahlen in den Ecken nie gröfser als 2".

3. „In einem reduzierten Viereck ist die Summe der Umlaufszahlen der Seiten nie gröfser als 2".

4. „In einem reduzierten Viereck ist die Summe der Windungszahlen in den Ecken und der Umlaufszahlen der Seiten nie gröfser als 3".

B. Direkte Konstruktion der allgemeinen Vierecke.

Aus den reduzierten Vierecken können wir die allgemeinen Vierecke mit Hilfe der Erweiterungsprozesse konstruieren. Auf dem geschilderten Wege haben wir damit eine genaue und sichere Anschauung von den Membranen gewonnen und durch die gezeichneten Figuren sind alle Vierecke im wesentlichen ihrer Gestalt nach als bekannt zu betrachten. Darauf beruht der Vorteil dieser Konstruktionsmethode.

Aber es wird durch die vielen Fallunterscheidungen Unübersichtlichkeit hervorgerufen. Es treten ferner nicht wenige Fälle auf, wo dasselbe allgemeine Viereck durch geeignete Erweiterung aus verschiedenen reduzierten Vierecken erhalten werden kann. Erweitert man also auf alle möglichen Arten die reduzierten Vierecke, so gibt es unter den erhaltenen Vierecken identische.

Durch die folgende Konstruktionsmethode soll Übersicht und Ordnung in die gesamten Vierecksmembranen gebracht werden. Dabei wird jedes mögliche Viereck gerade einmal konstruiert. Doch besitzt sie nicht den Vorteil der vorigen Methode; man erhält keine anschauliche Vorstellung von den Vierecken.

§ 9.
Geometrische Deutung der Vierecksparameter.

Wie können wir an der Membran ihre sechs reellen Parameter geometrisch deuten? Vier Parameter können wir bei jedem Viereck durch die Winkel des Vierecks deuten, die wir uns ein für allemal als gegeben denken. Die Deutung der andern zwei Parameter läfst sich auf verschiedene Weisen geben, von denen wir folgende zwei Arten bevorzugen:

1. Ist irgend ein Kreisbogenviereck vorgelegt, so können die Kreise zweier gegenüberliegender Vierecksseiten (z. B. $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$) sich imaginär oder reell schneiden oder sich berühren.

Im ersten Falle transformieren wir die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ in zwei konzentrische Kreise. Dann lassen sich die Kreise $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$ auf ihnen verschieben, wobei die Winkel des Vierecks und die Radien der Kreise $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$ ungeändert bleiben (Fig. 42).

Schneiden sich die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ reell, so transformieren wir sie in zwei Gerade, indem wir den einen Schnittpunkt ins Unendliche werfen (Fig. 43). Alle Kreise, welche mit $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ dieselben Winkel bilden, besitzen den zweiten Schnittpunkt der Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ als Ähnlichkeitszentrum. In Kreise, die in Bezug auf dies Zentrum zu dem Kreise $\widehat{bc}$ resp. $\widehat{da}$ ähnlich liegen, können wir also die Kreise $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$ überführen unter Festhaltung der Winkel. Wenn sich die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ berühren, so werfen wir den Berührungspunkt ins Unendliche, wodurch die beiden Kreise zu zwei parallelen Geraden werden. Die Kreise $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$ verschieben wir dann auf diesen Geraden (Fig. 44), indem wir ihre Radien und die Viereckswinkel festhalten. Diesen Fall betrachten wir als Ausartung des ersten der drei Fälle.

Wir können die Parameter bei j e d e m Viereck nun auf folgende Weise deuten: Bei Veränderung des ersten Parameters möge sich der Kreis $\widehat{bc}$ (oder $\widehat{da}$) in der beschriebenen Weise bewegen, bei Veränderung des zweiten der Kreis $\widehat{ab}$ (oder $\widehat{cd}$).

2. Den bereits in § 8 benutzten Prozefs übertragen wir auf allgemeine Vierecke. Wir denken uns also die vier Ecken eines allgemeinen Vierecks fest und drehen eine Seite des Vierecks (z. B. $\widehat{ab}$) um ihre Endpunkte

(Fig. 36). Sollen dann die Viereckswinkel ungeändert bleiben, so müssen wir die Seiten $\widehat{bc}$, $\widehat{da}$ und $\widehat{cd}$ ebenfalls um ihre Endpunkte in geeignetem Sinne drehen und zwar um denselben Winkel, um welchen wir $\widehat{ab}$ gedreht hatten. Diese Drehung der Seiten läfst sich bei allen Kreisbogenvierecken ausführen, sie mögen umlaufende Seiten haben oder nicht.

Nur darf keine Vierecksseite die Peripherie gerade eine ganze Anzahl von Malen umspannen. Wir wollen von der Seite in diesem Falle den Ausdruck gebrauchen, dafs sie sich „gerade schliefst".

Dann wollen wir die Veränderung des Vierecks so vornehmen, dafs wir den Kreis der betreffenden Seite in diejenigen Kreise überführen, welche ihn in den Endpunkten der Seite berühren (Fig. 45).

Auf diese Weise werden wir den einen Parameter des Vierecks geometrisch deuten. Die Deutung des zweiten Parameters wird sich im nächsten Paragraphen ergeben.

Bei der Drehung der Seiten bleiben ihre Umlaufszahlen ungeändert, da die Endpunkte einer jeden Seite festgehalten werden und bei dem kontinuierlichen Prozefs der Drehung nicht übereinander hinweggleiten können.

Nun können wir aber die Vierecksseiten nach zwei verschiedenen Richtungen drehen. Wir definieren deshalb einen „positiven" und „negativen" Drehungssinn in folgender Weise:

„Positiv" ist diejenige Drehung, bei der sich die Schenkel des Winkels a, welche wir uns durch die Tangenten im Punkte a an die Kreisbögen $\widehat{ab}$ und $\widehat{da}$ gebildet denken, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn bewegen, „negativ" ist die Drehung von entgegengesetzter Drehungsrichtung.

In dem besondern Falle, wo eine Seite sich gerade schliefst, wollen wir unter positiver Drehung diejenige Veränderung der Seite verstehen, bei welcher der bewegte Kreis in das Innere der Membran hineingezogen wird, unter negativer Drehung die entgegengesetzte Bewegung, sodafs in Fig. 48 eine negative Drehung ausgeführt ist.

§ 10.

Die Grenzlagen.

Wir lassen jetzt das Viereck in seine „Grenzlagen" übergehen, die wir schon in § 8 benutzt hatten.

Unter Benutzung der ersten Deutung der Vierecksparameter verschieben wir den Kreis $\widehat{bc}$ beständig in einer Richtung.

Sobald die Teile der Begrenzung der Membran zusammenstofsen, was jedoch nicht immer einzutreten braucht, wollen wir sagen, das Viereck „befindet sich in der Grenzlage“.

Dabei können vier verschiedene Arten von Grenzlagen eintreten bei dieser Deutung der Parameter. Erstens können sich zwei Seiten berühren (Fig. 46). Diese Grenzlage bezeichnen wir als Grenzlage erster Art. Oder es kann ein Eckpunkt an eine Seite des Viereckes stofsen (Fig. 47), was wir als Grenzlage zweiter Art bezeichnen. Oder es fallen die beiden Eckpunkte einer Seite zusammen, so dafs der begrenzende Bogen zwischen ihnen ganz verschwindet, was wir als Grenzlage dritter Art bezeichnen (Fig. 48). Oder es kann schliefslich, wenn sich die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ reell schneiden, der Kreis $\widehat{bc}$ sich ganz in einen der beiden Schnittpunkte zusammenziehen, so dafs er vollständig verschwindet (Fig. 49). Diese Grenzlage bezeichnen wir als Grenzlage vierter Art.

Die Bewegung des Kreises $\widehat{bc}$ läfst sich unter Umständen unbegrenzt weiterführen.

Die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ müssen sich dann immer imaginär schneiden, weil sonst, wenn keine andere Grenzlage vorher eintritt, immer die Grenzlage vierter Art eintritt. Ferner müssen die Bogen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ sich dabei beständig vergröfsern und schliefslich beliebig oft umlaufend werden. Denn würde ein Bogen sich beständig verkleinern, so müfste schliefslich die Grenzlage dritter Art eintreten.

Konstruieren wir, wenn $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ umlaufend geworden sind, für einen Punkt der Seite $\widehat{ab}$, der mit keinem Eckpunkt in demselben Blatte liegt, den Grenzkreis, so mufs dieser Tangentialkreis werden. Demnach haben wir ein Viereck vor uns, bei dem sich von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ Kreisringe einhängen lassen.

Läfst sich also der Kreis $\widehat{bc}$ unbegrenzt bewegen, so haben wir ein Viereck dieser Art vor uns.

Umgekehrt kann bei jedem Viereck dieser Art der Kreis $\widehat{bc}$ nach einer Richtung hin unbegrenzt bewegt werden. Es folgt also:

„Bei der ersten Deutung der Parameter ist die Bewegung des Kreises $\widehat{bc}$ stets begrenzt aufser bei den Vierecken, bei denen sich von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ transversal einhängen läfst; aber hier ist sie auch nur nach einer Richtung hin unbegrenzt".

Bei geeigneter Bewegungsrichtung des Kreises $\widehat{bc}$ kommt man also stets zu einer Grenzlage.

Führen wir bei der zweiten Deutung der Parameter die Drehung der Seiten immer weiter, so tritt schliefslich, wie wir sogleich zeigen werden, hierbei immer eine Grenzlage ein. Doch sind hier, da die Eckpunkte festbleiben, nur zwei Arten von Grenzlagen möglich, nämlich die Grenzlagen erster und zweiter Art (Fig. 37 und 38).

Wir zeigen, dafs die Drehung der Vierecksseiten immer begrenzt ist.

Wir betrachten zunächst Vierecke mit umlaufenden Seiten. $\widehat{ab}$ sei umlaufend.

Ist der Grenzkreis $k_{ab(a)}$ Diagonalkreis und geht er durch c, so liegt c mit Teilen der Seite $\widehat{ab}$ immer in demselben Blatte (Fig. 67). Dann läfst sich, wenn wir die Seiten drehen, die Drehung der Seite $\widehat{ab}$ entweder so weit führen, bis sie auf die festbleibende Ecke c stöfst, oder die Drehung läfst sich nicht so weit führen. Im ersten Falle tritt eine Grenzlage zweiter Art ein, im zweiten Falle, wo die Bewegung schon vorher begrenzt wird, mufs damit schon eine Grenzlage eingetreten sein.

Geht der Grenzkreis $k_{ab(a)}$ durch d, so zeigt man auf dieselbe Weise, dafs immer eine Grenzlage eintritt.

Ist der Grenzkreis $k_{ab(a)}$ Tangentialkreis, so liegen mit der Seite $\widehat{ab}$ die Eckpunkte c und d in demselben Blatte oder solche Punkte der Seite $\widehat{cd}$, unter oder über denen in anderen Blättern c und d liegen. Bei der Drehung der Seiten bleiben diese Punkte fest. Entweder läfst sich $\widehat{ab}$ so weit drehen, bis es an einen dieser Punkte stöfst, womit eine Grenzlage eingetreten ist, oder es tritt schon vorher eine Grenzlage ein.

Wir betrachten nun die Vierecke ohne umlaufende Seiten.

Drehen wir die Seite $\widehat{ab}$ in die Membran hinein, so bewegt sich der Bogen $\widehat{ab}$ gerade so, als wenn wir den Grenzkreis k_{ab} konstuieren würden. Würde der Grenzkreis Diagonalkreis werden, so wird auch die Seite $\widehat{ab}$ schliefslich durch eine der gegenüberliegenden Ecken gehen, wenn nicht schon vorher eine Grenzlage eintritt. Würde der Grenzkreis Tangentialkreis werden, so wird, da die Seite $\widehat{cd}$ auch in die Membran der Seite hinein, der Seite $\widehat{ab}$ entgegengedreht wird, $\widehat{ab}$ schliefslich auch $\widehat{cd}$ berühren, wenn nicht eine andere Grenzlage vorher eingetreten ist.

Es tritt also auch in diesem Falle stets eine Grenzlage ein.

Bei der zweiten Deutung der Parameter ist also die Bewegung stets begrenzt.

Während der Drehung bleibt nun die Membran immer einfach zusammenhängend. Das Eintreten der Grenzlage kommt einer Zerschneidung der Membran durch Linien gleich, die zwischen zwei Punkten der Begrenzung verlaufen und deshalb die Membran in mehrere einfach zusammenhängende Flächen zerlegen. Diese müssen Kreisbogenpolygone einfacherer Art sein und sind also Kreisbogenzweiecke und Kreisbogendreiecke.

Wir müssen noch auf die Eigenschaften jeder dieser Grenzlagen etwas eingehen.

1. Die Grenzlage erster Art. Berühren sich die Seiten $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ in der Grenzlage, so bezeichnen wir dies als die Grenzlage ($\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$).

Sind zwischen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ Kreisringe eingehängt, so können diese in der Grenzlage herausfallen.

Die Membran zerteilt sich in zwei Dreiecke mit den Winkeln 0, β, γ und 0, δ, α. Wir können daher die Grenzlage, wenn die Winkel gegeben sind, ohne weiteres konstruieren. Diese Grenzlagen existieren also für beliebige Winkel.

Die Seiten $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ können sich auch mehrmals in mehreren Blättern übereinander berühren. Die ganze Fläche des Vierecks zerfällt dann in so viel einfach zusammenhängende Flächen mehr. Jedes durch zwei aufeinanderfolgende Berührungen sich abschnürende Flächenstück ist ein Zweieck mit dem Winkel null, also ein in der Grenzlage herausgefallener Kreisring.

In der Grenzlage mufs, da sie durch Variation nur eines Parameters entstanden ist, noch ein Parameter enthalten sein. Bei seiner Veränderung möge sich etwa der Kreis $\widehat{bc}$ längs der Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$, unter Festhaltung der Viereckswinkel verschieben. Hierdurch wollen wir bei unserer zweiten Deutung der Viereckspararneter den zweiten Parameter veranschaulichen.

2. Die Grenzlage zweiter Art. Fällt in der Grenzlage d auf $\widehat{ab}$, so bezeichnen wir dies als Grenzlage $\widehat{ab}(d)$.

Die Membran zerfällt in ein Kreisbogendreieck bcd und ein Zweieck ab mit dem Winkel α. Mit dem Zweieck schnüren sich sämtliche an $\widehat{da}$ lateral angehängten Kreisscheiben von der Membran ab. $\widehat{da}$ ist nicht umlaufend.

Ist von d nach $\widehat{ab}$ polar eingehängt, so fallen alle diese Kreisscheiben in der Grenzlage heraus. Diagonale Einhängungen zwischen d und b werden in der Grenzlage zu lateralen Anhängungen am Dreieck acd längs der Seite $\widehat{db}$. Das Dreieck der Grenzlage hat demnach bei d den Winkel $\delta - \alpha - 1 - 2p_{ab(d)}$, wenn $p_{ab(d)}$ die Anzahl der in der Grenzlage herausfallenden Kreisscheiben bedeutet.

Die Ecke d kann auch noch in mehr als einem Blatt auf die Seite $\widehat{ab}$ stossen. Jedes durch zwei solche aufeinanderfolgende Stellen sich abschnürende Flächenstück wird zu einer Kreisscheibe, die demnach von d bezüglich $\widehat{ab}$ polar eingehängt war.

Damit bei einem Viereck diese Grenzlage eintreten kann, mufs

$$\delta > 1 + \alpha$$

sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann auch ohne weiteres die Grenzlage immer konstruiert werden.

Wenn $\delta = 1 + \alpha + 2p_{ab(d)}$ ist, so berühren sich die Kreise $\widehat{cd}$ und $\widehat{ab}$ im Punkte d in der Grenzlage. Transversale von $\widehat{cd}$ nach $\widehat{ab}$ gemachte Einhängungen fallen dann beim Übergang in die Grenzlage heraus.

In der Grenzlage ist noch ein Parameter enthalten, bei dessen Veränderung der Kreis $\widehat{da}$ in die andern Kreise übergeht, die ihn in d berühren. Bei unserer zweiten Deutung der Viereckspararneter werden wir diesen Parameter als den zweiten Parameter des Vierecks betrachten.

3. Die Grenzlage dritter Art. Fallen in der Grenzlage die Eckpunkte a und b zusammen, so bezeichnen wir dies als Grenzlage (ab).

Ist von a nach $\widehat{bc}$ hinüber oder von b nach $\widehat{da}$ hinüber polar eingehängt, so fallen diese Kreisscheiben beim Übergang in die Grenzlage sämtlich heraus. Laterale Anhängungen können sich längs der Seite $\widehat{ab}$

auch abschnüren. Diagonale Einhängungen, z. B. die zwischen a und c, werden bei dem Dreieck der Grenzlage zu lateralen Anhängungen längs ac.

Damit bei einem Viereck diese Grenzlage eintreten kann, mufs

$$\alpha + \beta \geqq 1$$

sein. Der Winkel des entstehenden Dreiecks bei den beiden zusammenfallenden Ecken hat die Gröfse $\alpha + \beta - 1$, wenn weder laterale noch polare Anhängungen herausfallen.

Ist die obige Ungleichheitsbedingung erfüllt, so existieren im Allgemeinen (vgl. § 14) unter allen Vierecken mit gleichen Winkeln auch solche, die in die dritte Grenzlage übergehen.

Ist $\alpha + \beta = 1$, so fallen transversale von $\widehat{da}$ nach $\widehat{bc}$ gemachte Einhängungen beim Übergang in die Grenzlage heraus.

4. Auf die Eigenschaften der vierten Grenzlage brauchen wir nicht weiter einzugehen.

Zwei Grenzlagen, die sich nur durch den Parameterwert unterscheiden, sollen als Grenzlagen von „gleichem Typus" bezeichnet werden.

§ 11.

Konstruktion aller zu gegebenen Winkeln möglichen Vierecke.

Nun können leicht alle Vierecke konstruiert werden, die es zu gegebenen Winkeln gibt.

Durch Drehung der Seiten um die festen Eckpunkte gehen die Vierecke in die Grenzlagen erster oder zweiter Art über. Aber diese Grenzlagen können wir nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten leicht konstruieren, da wir ja die Konstruktion der Kreisbogendreiecke, welche in der Grenzlage entstehen, als bekannt voraussetzen. Indem wir aus den Grenzlagen heraus in umgekehrter Richtung drehen, erhalten wir die Vierecke selbst, die zu den konstruierten Grenzlagen gehören.

Um nun sämtliche Vierecke zu konstruieren, die es zu gegebenen Winkeln gibt, haben wir nur sämtliche für diese Winkel möglichen Grenzlagen zu konstruieren. Indem wir noch den in jeder Grenzlage enthaltenen Parameter verändern, erhalten wir die gesamte zweiparametrige Schar der verlangten Vierecke durch Herausdrehen aus den Grenzlagen.

Jedes Viereck geht, je nachdem positiv oder negativ gedreht wird, in zwei Grenzlagen über. Konstruiert man also aus sämtlichen zu gegebenen Winkeln möglichen Grenzlagen Vierecke, so erhält man jedes verlangte Viereck gerade zweimal. Um jedes Viereck nur einmal zu erhalten, hat man von den konstruierten Grenzlagen beispielsweise nur diejenigen zu benutzen, aus denen man durch negative Drehung zum Viereck gelangt oder hat in der in § 16 näher bezeichneten Weise zu verfahren.

Bei den Grenzlagen der ersten Art ist es oft schwer, unmittelbar zu erkennen, ob man durch positive oder negative Drehung aus ihnen herausgelangt, bei den Grenzlagen zweiter Art dagegen ist dies leicht. Fällt zum Beispiel d auf $\widehat{ab}$, so kann bei Veränderung des Parameters der Grenzlage die Seite $\widehat{ab}$ dieselbe Anzahl von Umläufen bekommen wie die Seite $\widehat{db}$ des Dreiecks der Grenzlage oder noch einen Umlauf mehr (Fig. 51 u. 52). Im ersten Falle gelangt man durch negative, im zweiten durch positive Drehung aus der Grenzlage heraus.

Bei beliebig gegebenen Winkeln können stets beide Grenzlagen erster Art, $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ und $(\widehat{bc}, \widehat{da})$, konstruiert werden. Die besonderen Fälle, in denen diese Grenzlagen zur Konstruktion nicht brauchbar sind, werden wir im folgenden Paragraphen besprechen. Es sind, wenn man aus der Grenzlage herausdreht, nachträglich Kreisringe in der Zahl 0, 1, 2, 3 ... einzuhängen.

Was für Grenzlagen zweiter Art bei gegebenen Winkeln möglich sind, erkennt man durch Aufsuchen sämtlicher Bedingungen des Typus $\delta \geq 1 + \alpha$. Bei Verwendung dieser Grenzlagen ist zu beachten, daſs in den Grenzlagen polar eingehängte Kreisscheiben herausgefallen sein können. Es sei beispielsweise die zum Bestehen der Grenzlage $\widehat{ab}(d)$ notwendige Bedingung $\delta \geq 1 + \alpha$ erfüllt. Enthält die Zahl $\delta - \alpha - 1$ Vielfache von 2, so können dieselben ganz oder zum Teil auf die herausgefallenen Kreisscheiben gerechnet werden. Ist p die Anzahl dieser Vielfachen, so sind nacheinander die Grenzlagen zu konstruieren, bei denen die Dreiecke bei d die Winkel:

$$\delta - \alpha - 1; \quad \delta - \alpha - 3; \quad \delta - \alpha - 5; \quad \ldots \quad \delta - \alpha - 1 - 2p,$$

bei b und c die Winkel β und γ besitzen. Nachträglich sind dann, während wir aus der Grenzlage herausdrehen, noch Kreisscheiben bezw. in der Anzahl 0, 1, 2 . . . p von d nach $\widehat{ab}$ hinüber polar einzuhängen. Auf diese Weise erhält man sämtliche zur Bedingnng $\delta \geqq 1 + \alpha$ gehörigen Grenzlagen zweiter Art. Die bei der Konstruktion noch möglichen Ausnahmefälle bespreehen wir im folgenden Paragraphen.

§ 12.

Ausnahmefälle.

1. Man kommt, wenn die Winkel des Vierecks gewissen Bedingungen genügen, bei unmittelbarer Benutzung der gegebenen Regeln zu Grenzlagen, aus denen man durch Drehung der Seiten nicht herausgelangen kann, mit deren Hülfe man also auch kein Viereck konstruieren kann.

Wenn bei der Grenzlage $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ zwei benachbarte Eckpunkte, z. B. a und b, in den Berührungspunkt der Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ fallen (Fig. 53), so läfst sich aus der Grenzlage ein Viereck nur dann konstruieren, wenn der Parameter der Grenzlage so bestimmt wird, dafs auch die Seite $\widehat{cd}$ sich gerade schliefst (Fig. 54). Wenn ferner zwei gegenüberliegende Eckpunkte (z. B. d und b) in den Berührungspunkt der Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ fallen (Fig. 55), so ist es überhaupt nicht möglieh, ein Viereck zu erhalten.

Wenn wir bei beiden Grenzlagen nun den Berührungspunkt der Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ ins Unendliche werfen, so gehen die beiden Dreieeke der Grenzlage in geradlinige Dreiecke über. Dabei werden von den Winkeln der Dreiecke die Bedingungen erfüllt:

$$\delta - \alpha = 2m + 1; \quad \beta - \gamma = 2n + 1$$

wo m und n zwei positive oder negative ganze Zahlen bedeuten.[1])

Vierecke, deren Winkel diesen Bedingungen genügen, gehen also nicht in die gewöhnliche Grenzlage $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ über, wenn nicht $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ die Peripherie eine volle Anzahl von Malen umspannen.

Genügen die Winkel diesen Bedingungen nicht, so kann die Grenzlage $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ zur Konstruktion von Vierecken verwandt werden.

---

[1]) Schilling, Math. Ann. 44, S. 222.

Fällt bei der Grenzlage zweiter Art d auf $\widehat{ab}$, so ist es nicht möglich, aus der Grenzlage ein Viereck zu konstruieren, wenn im Dreieck bcd $\widehat{bc}$ oder $\widehat{cd}$ oder $\widehat{db}$ sich gerade schliefst, wenn nicht in den ersten beiden Fällen auch $\widehat{ab}$ sich immer gerade schliefst.

Transformieren wir beim ersten Fall b, beim zweiten und dritten d ins Unendliche, so wird das Dreieck der Grenzlage in allen drei Fällen geradlinig. Die Bedingung dafür wird:

$$(\delta - \alpha - 1) - \beta - \gamma = 1 + 2 p_{ab(d)} + 2 p_{bc(d)}$$

beim ersten Fall, wo $p_{ab(d)}$ die Anzahl der von d nach $\widehat{ab}$ hinüber polar eingehängten Kreisscheiben bedeutet, $p_{bc(d)}$ die Zahl der von d nach $\widehat{bc}$ polar eingehängten Kreisscheiben. Für die drei Fälle erhalten wir unter Verwendung analoger Bezeichnungen die Bedingungen:

$$1)\qquad \delta - \alpha - \beta - \gamma = 2(p_{ab(d)} + p_{bc(d)} + 1)$$
$$2)\qquad \alpha + \beta - \gamma - \delta = 2(p_{cd(b)} - p_{ab(d)})$$
$$3)\qquad \alpha - \beta + \gamma - \delta = 2(p_{ab(c)} - p_{ab(d)}).$$

Sobald eine dieser Gleichungen erfüllt wird, kann die Grenzlage $\widehat{ab}(d)$ nicht zur Konstruktion von Vierecken benutzt werden.

Genügen die Winkel diesen Bedingungen nicht, so ist die Grenzlage zweiter Art zur Konstruktion von Vierecken zu gebrauchen. —

2. Ferner ist der besondere Fall möglich, dafs bei Drehung der Seiten um die festen Ecken gleichzeitig zwei Grenzlagen von verschiedenem Typus eintreten. Diese so entstehenden Grenzlagen sind also auch noch bei der Konstruktion der Vierecke zu verwenden.

Dafs zwei Grenzlagen erster Art gleichzeitig eintreten, ist nicht möglich. Tritt eine Grenzlage erster und eine zweiter Art gleichzeitig ein, so müssen zwei Kreise sich nicht nur in einem Punkte, sondern längs eines Bogens berühren, so dafs die beiden Kreise ganz zusammenfallen (Fig. 56). Fallen die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ zusammen, so mufs die Bedingung erfüllt sein:

$$\delta - \alpha = 2m + 1; \quad \beta - \gamma = 2n + 1,$$

wo m und n zwei positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Dies sind aber dieselben Bedingungen, bei denen die gewöhnliche Grenzlage erster

Art unbrauchbar war. Dieselbe ist also durch diese neue Grenzlage zu ersetzen.

Dafs zwei Grenzlagen zweiter Art gleichzeitig eintreten, ist möglich auf dreierlei typische Arten:

a) d fällt auf $\widehat{ab}$ und gleichzeitig auf $\widehat{bc}$ (Fig. 57). Dann ist:

$$\delta - \alpha - \beta - \gamma = 2(p_{ab(d)} + p_{bc(d)} + 1)$$

Aus dieser Grenzlage läfst sich aber nur dann durch Drehung ein Viereck erzeugen, wenn nach Absonderung aller polar eingehängten Kreisscheiben, wie in der Figur, entweder $\widehat{ab}$ allein oder $\widehat{bc}$ allein noch umlaufend ist, oder wenn die Parameter so bestimmt sind, dafs $\widehat{ab}$ und $\widehat{bc}$ sich gerade schliefsen.

b) d fällt auf $\widehat{ab}$ und gleichzeitig b auf $\widehat{cd}$ (Fig. 58). Dann ist:

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta = 2(p_{cd(b)} - (p_{ab(d)}),$$

Aus dieser Grenzlage läfst sich aber nur dann ein Viereck erzeugen, wenn nach Absonderung aller polar eingehängten Kreisscheiben $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ beide nicht mehr umlaufend sind (Fig. 59), was sich durch geeignete Bestimmung der Parameter erreichen läfst.

c) d fällt auf $\widehat{ab}$ und gleichzeitig c auf $\widehat{ab}$ (Fig. 60). Dann ist:

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = 2(p_{ab(c)} - p_{ab(d)}).$$

Aus dieser Grenzlage läfst sich ein Viereck konstruieren, wenn $\widehat{ab}$ nach Abtrennung aller polar eingehängten Kreisscheiben keinmal, einmal oder zweimal umlaufend ist (Fig. 61—63). Doch müssen dabei auf dem Kreise $\widehat{ab}$ die Eckpunkte in der Ordnung a, b, c, d oder a, b, d, c aufeinander folgen.

Die für die Winkel gefundenen Gleichungen stimmen aber mit den oben gefundenen überein, bei deren Bestehen die Grenzlage $\widehat{ab}(d)$ zur Konstruktion eines Vierecks unbrauchbar war. An die Stelle dieser Grenzlagen sind also diejenigen zu setzen, bei denen zwei Grenzlagen gleichzeitig eintreten.

Kapitel II.

Die Ergänzungsrelationen.

§ 13.

Prinzip bei der Ableitung der Ergänzungsrelationen.

Wir fragen, welches sind die Relationen, welche die Abhängigkeit zwischen den Umlaufszahlen der Seiten eines Kreisbogenvierecks und den Winkeln darstellen? Wir zählen aber einen Umlauf erst dann, wenn die ganze Peripherie auch wirklich durch den Bogen überschritten ist.

Die Umlaufszahlen bezeichnen wir mit u_{ab}, u_{bc}, u_{cd}, u_{da}.

Es bezeichnet im Dreieck mit den Ecken a, b, c und den Winkeln α, β, γ

$$E\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma+1}{2}\right)$$

die Umlaufszahl der dem Winkel α gegenüberliegenden Seite, wobei $E\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma+1}{2}\right)$ diejenige gröfste ganze positive Zahl oder Null bedeutet, welche von $\frac{\alpha-\beta-\gamma+1}{2}$ überschritten wird.[1])

Die für die Seiten dadurch gegebenen Ungleichheitsbedingungen nennt man Ergänzungsrelationen.

Lassen wir das Viereck, indem wir Ecken und Winkel festhalten, durch Drehung der Seiten in eine Grenzlage übergehen, so kennt man also für die in derselben entstehenden Dreiecke die Ergänzungsrelationen. Für die Grenzlage lassen sich deshalb leicht die Beziehungen zwischen den Umlaufszahlen der Seiten und den Winkeln aufstellen. Da nun beim Übergang zum Viereck aber sowohl die Winkel, wie auch die Umlaufszahlen der Seiten erhalten bleiben, gilt die erhaltene Relation ohne weiteres für das Viereck selbst.

Indem wir an allen zu gegebenen Winkeln möglichen Grenzlagen die Relationen aufstellen, erhalten wir die Ergänzungsrelationen für alle Vierecke, welche zu gegebenen Winkeln existieren.

Die Vierecke, welche aus Grenzlagen erster Art hervorgehen und die Vierecke, welche aus Grenzlagen zweiter Art hervorgehen, behandeln wir besonders.

[1]) Klein, Math. Ann. 37, S. 585.

§ 14.
Die Ergänzungsrelationen der Vierecke, welche aus Grenzlagen erster Art entstehen.

In der Grenzlage erster Art mögen sich $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ berühren. Wir könnten nun in jedem Dreieck der Grenzlage die Umlaufszahlen für sich zählen; da wir aber sogleich für die ganze Schar der Vierecke, die aus der Grenzlage erster Art hervorgehen können, die Ergänzungsrelationen ableiten wollen, müssen wir einen etwas anderen Weg einschlagen, denn auf die angegebene Art ergibt sich nicht, wie die Umlaufszahlen der Vierecksseiten von dem Parameter der Grenzlage abhängen.

Wenn wir aus der Grenzlage herausdrehen, so haben wir zunächst ein Viereck vor uns, bei dem sich von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ hinüber transversale Einhängungen machen lassen.

Für die Vierecke, welche aus der Grenzlage erster Art entstehen, müssen demnach dieselben Ergänzungsrelationen gelten wie für die Vierecke, in die sich transversale Einhängungen machen lassen. Um die verlangten Ergänzungsrelationen zu finden, können wir also die Relationen dieser Vierecke ableiten. Wir verfahren dabei folgendermafsen:

Wir denken uns ein Viereck vorgelegt, in das sich von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ transversale Einhängungen machen lassen und transformieren die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ in zwei konzentrische.

Wir bewegen, indem wir einen Vierecksparameter auf die erste Weise deuten, den Kreis $\widehat{bc}$. Die Bewegung ist nach einer Richtung hin unbegrenzt, denn die Einhängung eines Kreisringes kommt jedesmal einem Herumführen des Kreises $\widehat{bc}$ um einen Vollkreis gleich. Bei der Bewegung nach der andern Richtung tritt aber stets eine Grenzlage ein. Während das Viereck sich in dieser Grenzlage befindet, berechnen wir die Umlaufszahlen. Dabei erhalten wir zwar nicht die Umlaufszahlen für die Seiten des Ausgangsvierecks, denn bei der Bewegung des Kreises $\widehat{bc}$ sind Umlaufszahlen der Seiten $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ ev. verloren gegangen. Da wir aber die Bewegung von $\widehat{bc}$ genau kennen, lassen sich die verloren gegangenen Umlaufszahlen ermitteln, so dafs man die Relationen des vorgelegten Vierecks erhalten kann.

Wenn wir den Kreis $\widehat{bc}$ bis zur Grenzlage verschieben, so ist die Grenzlage vierter Art nicht möglich, da sich die Kreise $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ imaginär schneiden. Auch die Grenzlage zweiter Art ist nicht möglich. Fiele z. B. a auf $\widehat{bc}$, so könnte der Kreis $\widehat{bc}$ nach keiner Richtung unbegrenzt bewegt werden.

Also ist nur die Grenzlage erster Art $(\widehat{bc}, \widehat{da})$ oder eine der Grenzlagen dritter Art (a, b) und (c, d) möglich.

Tritt die erste Grenzlage ein, so mufs, während das Viereck sich nahezu in derselben befindet, ein zur Einhängung von Kreisringen geeigneter Schnitt, der von der Seite $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ geht, zwischen der von $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$ gebildeten Einschnürung hindurchgeführt werden. Wir müssen dabei von der Grenzlage die Eigenschaft verlangen, dafs dieser Schnitt vollständig innerhalb des von den Kreisen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ gebildeten Ringgebietes hindurchgeführt werden kann. Die einzigen Dreiecke mit den Winkeln α, β, 0 und γ, δ, 0, die sich zu einer Grenzlage mit dieser Eigenschaft zusammensetzen lassen, sind aber diejenigen, bei denen

$$\alpha+\beta<1$$
$$\gamma+\delta<1 \quad \text{ist.}$$

Dies ergibt sich, wenn man die reduzierten Dreiecke aller Typen zu einer Grenzlage mit der verlangten Eigenschaft zusammenzusetzen sucht.

Alle übrigen Vierecke der betrachteten Art gehen bei der erwähnten Verschiebung von $\widehat{bc}$ also in die dritte Grenzlage über, wobei weder polar noch lateral angehängte Kreisscheiben herausfallen.

Welche notwendige und hinreichende Bedingung mufs nun zwischen den Winkeln bestehen, wenn ein Viereck der betrachteten Art, z. B. durch Zusammenfallen der Eckpunkte c und d in die dritte Grenzlage übergehen soll? Offenbar lassen sich dann im Dreieck der Grenzlage nach der Seite $\widehat{ab}$ hinüber polare Anhängungen machen.

Damit nun im Dreieck mit den Winkeln $\gamma+\delta-1$, α, β nach der Seite $\widehat{ab}$ hinüber eine polare Anhängung möglich ist, mufs $(\gamma+\delta-1)-\alpha-\beta+1>0$ sein, da dann die Zahl $E\left(\frac{(\gamma+\delta-1)-\alpha-\beta+1}{2}\right)$, welche die Umlaufszahl der Seite $\widehat{ab}$ angibt, um 1 wachsen mufs, wenn man $\gamma+\delta-1$ um den Betrag 2 vergröfsert. Wenn demnach c und d zusammenfallen, so ist

$$\gamma+\delta-\alpha-\beta>0.$$

Diese Bedingung ist mit der Bedingung $\gamma+\delta \geqq 1$ zum Eintreten der Grenzlage (c, d) auch hinreichend. Denn die erste Grenzlage ist dann nicht möglich, die Grenzlage (a, b) ebenfalls nicht, weil dann $\alpha+\beta-\gamma-\delta>0$ sein müfste.

Wir berechnen nun die Umlaufszahlen, während das Viereck sich in der Grenzlage befindet.

Aus § 5 wissen wir bereits, dafs $u_{bc}=u_{da}=0$ ist.

Wenn nun

$$1) \qquad \gamma+\delta-\alpha-\beta>0$$

ist, so ist die Umlaufszahl von $\widehat{ab}$ in der Grenzlage gleich $E\left(\frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{2}\right)$.

Verschieben wir jetzt $\widehat{bc}$ in umgekehrter Richtung, so dafs aus der Grenzlage Vierecke entstehen, so wird hierbei, wenn wir immer weiter verschieben, im allgemeinen zuerst die Umlaufszahl von $\widehat{ab}$ um eine Einheit zunehmen (Fig. 64). Während also $\widehat{cd}$ noch nicht umlaufend ist, ist die Umlaufszahl von $\widehat{ab}$ gleich $E\left(\frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{2}\right)+\varepsilon$, wobei im allgemeinen für $\varepsilon=0$ und $\varepsilon=1$ Vierecke existieren.

Ist aber $\gamma+\delta-\alpha-\beta$ eine gerade positive Zahl, sodafs $\widehat{ab}$ in der Grenzlage sich gerade schliefst, so ist die Umlaufszahl von $\widehat{ab}$, während $\widehat{cd}$ noch nicht umlaufend ist, beständig gerade um eine Einheit gröfser als in der Grenzlage, sodafs also dann für ε nur der Wert 1 genommen werden darf.

Hängen wir jetzt Kreisringe ein, so wachsen die Umlaufszahlen von $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ immer um dieselbe Anzahl von Einheiten, sodaß

$$u_{ab}=u_{cd}+E\left(\frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{2}\right)+\varepsilon \text{ ist.}$$

Wenn

$$2) \qquad \gamma+\delta-\alpha-\beta=0$$

ist, so geht bei der Konstruktion des Dreiecks der Grenzlage (c, d) der Kreis $\widehat{ab}$ durch die gegenüberliegende Spitze des Dreiecks, sodafs diese Grenzlage nicht zur Konstruktion eines Vierecks brauchbar ist. Wir werden also in diesem Fall, wenn wir im gegebenen Viereck den Kreis verschieben, auch nicht zu dieser Grenzlage gelangen. Es tritt deshalb ein spezieller Fall ein. Die dritte Grenzlage tritt gleichzeitig an den Seiten $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$

ein, sodafs ein Zweieck entsteht mit dem Winkel $\alpha+\beta-1=\gamma+\delta-1$. Führen wir den Kreis $\widehat{bc}$ wieder aus der Grenzlage heraus, so nehmen die Umlaufszahlen von $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ immer gleichzeitig zu. Es ist also stets:

$$u_{ab}=u_{cd}.$$

Wenn dann aber die oben abgeleitete Gleichung noch gelten soll, so ist in dieser $\varepsilon=0$ zu nehmen.

Gehen wir wieder auf die Vierecke zurück, die aus der Grenzlage $(\widehat{bc}, \widehat{da})$ entstanden, so finden wir aus Fig. 65 die Bedingung dafür, dafs die Seite $\widehat{ab}$ sich beim Herumführen des Kreises $\widehat{bc}$ früher überschlägt als $\widehat{cd}$. In der Figur ist der Kreis $\widehat{bc}$ noch über die Grenzlage hinaus nach db' geführt, bis c und d zusammenfallen. Es ist, weil im Dreieck cab' die Winkelsumme <1 sein mufs,

$$\begin{aligned}(1-\gamma-\delta)+\alpha+\beta&<1\\ \gamma+\delta-\alpha-\beta&>0.\end{aligned}$$

Wenn $\gamma+\delta-\alpha-\beta=0$ ist, so müssen auch hier die Seiten $\widehat{ab}$ und cd sich gleichzeitig beim Herumführen von $\widehat{bc}$ überschlagen, sodafs also für diese Vierecke die oben erhaltenen Regeln bestehen bleiben.

In dem speziellen Falle der Fig. 54 in § 12, der hier noch zu behandeln ist, ist $\gamma+\delta-\alpha-\beta$ eine gerade Zahl. Die abgeleitete Relation bleibt hier bestehen, sobald man $\varepsilon=1$ setzt.

Die Vierecke, die aus Grenzlagen vom Typus der Fig. 56 entstehen, behandeln wir im nächsten Paragraphen.

Wir fassen zusammen:

Für diejenigen Vierecke, welche aus der Grenzlage $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ entstehen, ist:

$$\text{I.}\qquad u_{ab}=u_{cd}+E\left(\frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{2}\right)+\varepsilon;\; u_{bc}=u_{da}=0$$

wenn $\gamma+\delta-\alpha-\beta>0$ ist.

Es gibt Vierecke nur für $\varepsilon=1$, wenn $\gamma+\delta-\alpha-\beta$ eine gerade positive Zahl, nur für $\varepsilon=0$, wenn $\gamma+\delta-\alpha-\beta=0$ ist, sonst für $\varepsilon=1$ und für $\varepsilon=0$.

Wir können an dieser Stelle leicht den aus § 5 noch rückständigen Beweis erbringen, dafs die Winkel der reduzierten Vierecke, bei denen sich von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ ein Kreisring einhängen läfst, und $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ umlaufend sind, den Bedingungen $\alpha + \beta < 1$, $\gamma + \delta < 1$ genügen müssen. Denn bei den Vierecken, die aus der dritten Grenzlage entstehen, ist, wenn zwei gegenüberliegende Seiten umlaufend sind, stets ein Kreisring eingehängt. Die reduzierten Vierecke der verlangten Art können also nur aus der ersten Grenzlage entstehen, bei der $\alpha + \beta < 1$, $\gamma + \delta < 1$ ist.

§ 15.
Die Ergänzungsrelationen der Vierecke, welche aus Grenzlagen zweiter Art entstehen.

Wir betrachten als Beispiel die Grenzlage zweiter Art $ab(d)$.

In derselben entsteht ein Dreieck mit den Winkeln:

$$\delta - \alpha - 1 - 2p_{ab(d)},\ \beta,\ \gamma.$$

Durch Anwendung der Ergänzungsrelation des Dreiecks ergibt sich demnach:

$$\begin{aligned}
u_{ab} &= p_{ab(d)} + E\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2}{2}\right) + \varepsilon \\
u_{bc} &= E\left(\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma - 2p_{ab(d)}}{2}\right) \\
u_{cd} &= E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2}{2}\right) \\
u_{da} &= 0.
\end{aligned}$$

Hierin hat $p_{ab(d)}$ nacheinander alle ganzzahligen Werte zu durchlaufen, für die

$$E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) \geq p_{ab(d)} \geq 0 \quad \text{ist.}$$

$E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right)$ soll die gröfste ganze nicht negative in $\frac{\delta - \alpha - 1}{2}$ enthaltene Zahl bedeuten, sodafs, wenn $\frac{\delta - \alpha - 1}{2}$ eine ganze Zahl ist, $E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) = \frac{\delta - \alpha - 1}{2}$ wird.

Im allgemeinen gibt es stets für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ Vierecke, die durch Variation des Parameters der Grenzlage entstehen.

Für die in § 12 behandelten Ausnahmefälle gelten jedoch diese Symbole für die Umlaufszahlen nicht ohne weiteres, da sich in der Grenzlage $ab(d)$ dort keine eigentlichen Kreisbogendreiecke abtrennen. Wir müssen dies nachher berücksichtigen.

Die obigen Formeln für die Umlaufszahlen zeigen unmittelbar, daſs, wenn $p_{ab(d)}$ und ε nacheinander die ihnen zukommenden Werte annehmen, die sich dann ergebende Zahlenreihe jeder Umlaufszahl keine Lücke besitzt, sofern die Umlaufszahlen sich überhaupt verändern. —

Wir stellen nun die zwischen den Umlaufszahlen bestehenden Relationen auf.

Ist zunächst:

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) + 2 > 0,$$

so findet man durch Hinzufügen der Bedingung:

$$2\left(\delta - \alpha - 1 - 2E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right)\right) > 0,$$

daſs $\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) < 0$ ist.

Also ist in diesem Falle für jeden Wert von $p_{ab(d)}$:

$$u_{ab} = p_{ab(d)} + \varepsilon.$$

Solange nun die Bedingung:

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2 > 0$$

erfüllt bleibt, ergibt sich:

$$u_{bc} = 0$$

und ferner:

$$u_{cd} = u_{ab} + E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2}\right) + 1 - \varepsilon,$$

wenn im besonderen $\alpha + \beta - \gamma - \delta > 0$ ist.

Wenn dagegen im besonderen $\alpha + \beta - \gamma - \delta < 0$ ist, so ist:

$$u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) = E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2}{2}\right) + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right)$$

$$= p_{ab(d)} = u_{ab} - \varepsilon$$

$$u_{ab} = u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon.$$

Setzen wir in der ersten der beiden Relationen, die zwischen u_{ab} und u_{cd} bestehen, noch ε für $1-\varepsilon$, so ergibt sich:

Solange $\alpha+\beta-\gamma-\delta+2p_{ab(d)}+2>0$ ist, gilt die Ergänzungsrelation I der Vierecke, die aus der Grenzlage (ab, cd) entstehen.

Ist der Winkel des Dreiecks der Grenzlage bei d null, so können Kreisringe zwischen $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ herausgefallen sein, was die Relationen auch berücksichtigen.

Treten nun die in den Fig. 56, 58, 59 gezeichneten speziellen Grenzlagen ein, so ist nach § 12:

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta = 2(p_{cd(b)}-p_{ab(d)})$$
$$u_{ab} = p_{ab(d)}+\varepsilon; \quad u_{cd} = p_{cd(b)}+\varepsilon,$$

wo beide Zahlen ε entweder zugleich 0 oder zugleich 1 sein müssen. Demnach ist in diesem Falle:

$$u_{cd}-u_{ab} = \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2},$$

sodaſs die Relation I bestehen bleibt, wenn wir in ihr $\varepsilon=1$ setzen, sobald $\alpha+\beta-\gamma-\delta$ eine gerade Zahl ist, dagegen $\varepsilon=0$, sobald $\alpha+\beta-\gamma-\delta=0$ ist.

Nimmt $p_{ab(d)}$ noch weiter ab, so wird $\alpha+\beta-\gamma-\delta+2p_{ab(d)}+2\leqq 0$

$$u_{cd} = 0.$$

u_{bc} ist zunächst ebenfalls noch null. Wird schlieſslich:

$$\delta-\alpha-\beta-\gamma-2p_{ab(d)}>0,$$

so ist in dem Symbol für u_{bc} das Argument positiv, und demnach ist jetzt:

$$\text{II.} \qquad u_{ab}+u_{bc} = E\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma-\delta}{2}\right)+\varepsilon;$$
$$u_{cd} = u_{da} = 0.$$

Tritt aber die in Fig. 57 gezeichnete spezielle Grenzlage ein, so ist nach § 12:

$$\delta-\alpha-\beta-\gamma = 2(p_{ab(d)}+p_{bc(d)}+1)$$
$$u_{ab} = p_{ab(d)}+\varepsilon_1; \quad u_{bc} = p_{bc(d)}+1-\varepsilon_1,$$

wo beide Zahlen ε_1 entweder zugleich 0 oder zugleich 1 sein müssen.

Demnach ist in diesem Falle:

$$\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2} = u_{ab}+u_{bc}.$$

Die Relation II gilt also für diese Vierecke, wenn man in ihr $\varepsilon = 1$ setzt.

Wählt man aber den Fall der Fig. 57 so, dafs $\widehat{ab}$ und $\widehat{bc}$ beide sich gerade schliefsen, so ist dann $u_{ab} = p_{ab(d)}$; $u_{bc} = p_{bc(d)}$ und in II $\varepsilon = 0$ zu setzen. —

Ist die anfangs gestellte Bedingung nicht erfüllt, sondern

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) + 2 < 0,$$

so ist stets $u_{cd} = 0$. u_{bc} ist zunächst ebenfalls null. Doch ist nicht notwendig wie im vorigen Falle $u_{ab} = p_{ab(d)} + \varepsilon$.

Wird aber wieder

$$\delta - \alpha - \beta - \gamma - 2p_{ab(d)} > 0,$$

so wird auch wiederum $u_{ab} = p_{ab(d)} + \varepsilon$, sodafs wieder die Relation II besteht.

Wir fassen zusammen:

Bei den Vierecken, die aus der Grenzlage $ab(d)$ hervorgehen, erteile man $p_{ab(d)}$ nacheinander alle ganzzahligen Werte, für die

$$E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right) \geqq p_{ab(d)} \geqq 0 \quad \text{ist.}$$

Solange wie

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2p_{ab(d)} + 2 > 0$$

ist, gilt die Relation I (S. 62) der aus der Grenzlage $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ entstehenden Vierecke nebst den Bestimmungen über die Zahl ε.

Solange wie dann weiter

$$\delta - \alpha - \beta - \gamma - 2p_{ab(d)} > 0$$

ist, gilt die Relation:

$$\text{II.} \qquad u_{ab} + u_{bc} = E\left(\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2}\right) + \varepsilon;$$
$$u_{cd} = u_{da} = 0,$$

wobei es stets für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ Vierecke gibt.

u_{ab} nimmt hier der Reihe nach alle Werte an, für welche:

$$E\left(\frac{\delta - \alpha + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2E\left(\frac{\delta - \alpha + 1}{2}\right)}{2}\right) \geqq u_{ab} \geqq E\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2}{2}\right) \text{ ist.}$$

Für diejenigen Werte von $p_{ab(d)}$, welche keine der obigen Bedingungen erfüllen, ist

$$u_{bc} = u_{cd} = u_{da} = 0,$$

und u_{ab} nimmt alle Werte an, die in I und II nicht vorkommen können.

Aus den Figuren 60—63 ergibt sich noch, dafs in dem noch übrigen speziellen Falle, wo $\alpha - \beta + \gamma - \delta$ eine gerade Zahl ist, die aus diesen Grenzlagen konstruierten Vierecke zu der zuletzt erwähnten Art gehören. Sie lassen sich auch stets so anordnen, dafs die Werte von u_{ab} bei ihnen eine ununterbrochene Folge ganzer Zahlen bilden.

Die für u_{ab} angegebene obere Grenze läfst sich so umformen, dafs wir sagen:

Der gröfste Wert von u_{ab} ist gleich

$$E\left(\frac{\delta - \alpha + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\gamma - \beta + 1}{2}\right) \text{ oder um 1 kleiner.}$$

Für $p_{ab(d)} = E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right)$ ergibt sich ferner:

$$u_{bc} = 0; \quad u_{cd} = E\left(\frac{\beta - \gamma + 1}{2}\right) \text{ oder um 1 kleiner.}$$
$$u_{da} = 0.$$

Für $p_{ab(d)} = 0$ ergibt sich noch:

$$u_{cd} = E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2}{2}\right); \quad u_{bc} = E\left(\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2}\right)$$
$$u_{da} = 0.$$

§ 16.

Die wesentlichsten Eigenschaften der vollständigen zu gegebenen Winkeln möglichen Schar von Vierecken.

Wir betrachten jetzt die zweidimensionale Schar sämtlicher zu fest gegebenen Winkeln vorhandenen Vierecke.

Wie in § 5 gezeigt ist, gibt es bei beliebigen Winkeln sowohl stets Vierecke, bei denen u_{ab} und u_{cd} zwar voneinander abhängig sind, im übrigen aber beliebig grofs vorgeschrieben werden können, als auch Vierecke, bei denen $u_{ab} = u_{cd} = 0$ ist. Ferner gibt es auch stets Vierecke, bei denen sich u_{bc} und u_{da} entsprechend verhalten.

Aus der mit Hülfe der Funktionentheorie erschlossenen Tatsache, daſs sämtliche Vierecke ein Kontinuum bilden, folgt, daſs Vierecke für sämtliche Zwischenwerte der Umlaufszahlen vorhanden sein müssen.

Wir wollen die Vierecksschar so anordnen, daſs die Werte jeder Umlaufszahl eine unterbrochene Folge bilden, für alle zusammengehörigen Wertequadrupel derselben in dieser Reihenfolge Vierecke konstruieren und die dabei auftretenden zugehörigen Ergänzungsrelationen angeben. Dann zeigen wir, daſs die in angegebener Weise konstruierte Vierecksschar alle möglichen Vierecke enthält. In der getroffenen Anordnung müssen sich dann notwendig die konstruierten Vierecke kontinuierlich aneinanderschlieſsen. —

Wir wählen die Bezeichnung derart, daſs

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta \geqq 0$$

und

$$\delta + \alpha - \beta - \gamma \geqq 0$$

ist, was stets möglich ist.

Zunächst schlieſsen sich die Umlaufszahlen aller Vierecke, die aus Grenzlagen erster Art $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ konstruiert werden können, lückenlos aneinander. Man erreicht dies, indem man zunächst 0, dann 1, dann 2 ... Kreisringe einhängt. Auch bei Grenzlagen zweiter Art schlieſsen sich, wie in § 15 gezeigt worden ist, die Umlaufszahlen lückenlos aneinander, wenn z. B. bei der Grenzlage $ab(d)$ die Zahl $p_{ab(d)}$ nacheinander die Werte $E\left(\frac{\delta - \alpha - 1}{2}\right), \ldots 1, 0$ annimmt.

Aus den Grenzlagen $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ erhalten wir durch Einhängen von Kreisringen Vierecke für alle Werte von u_{ab}, die gröſser oder gleich

$$E\left(\frac{\delta - \alpha + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\gamma - \beta + 1}{2}\right)$$

sind. Dieser Wert selbst ist der kleinste, der aus der Grenzlage $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ erhalten werden kann, wie man durch Anwendung der Dreiecksrelation auf die Dreiecke der Grenzlage findet. Zu diesem Wert von u_{ab} gehört

$$u_{cd} = E\left(\frac{\beta - \gamma + 1}{2}\right) + E\left(\frac{\alpha - \delta + 1}{2}\right).$$

A) Ist dieser Wert von $u_{cd} > 0$, so ist entweder $\beta - \gamma > 1$ oder $\alpha - \delta > 1$. Durch Hinzunahme von $\gamma + \delta - \alpha - \beta \geqq 0$ ergibt sich, dafs im ersten Falle noch $\delta - \alpha > 1$, im zweiten noch $\gamma - \beta > 1$ ist.

Wenn

1. $\delta - \alpha > 1$ und zugleich $\beta - \gamma > 1$ ist, so existieren die Grenzlagen $ab(d)$ und $cd(b)$.

Die gröfsten aus der Grenzlage $ab(d)$ sich ergebenden Werte von u_{ab} und u_{cd} schliefsen sich ohne Lücke an die kleinsten aus den Grenzlagen $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ erhaltenen Werte an.

Die kleinsten aus der Grenzlage $ab(d)$ sich ergebenden Werte von u_{ab} und u_{cd} sind in diesem Falle:

$$u_{ab} = E\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2}{2}\right) = 0$$

$$u_{cd} = E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta + 2}{2}\right) = 0.$$

Wenn

2. $\alpha - \delta > 1$ und zugleich $\gamma - \beta > 1$ ist, ergibt sich durch Betrachtung der Grenzlagen $ab(c)$ in genau entsprechender Weise, dafs man von den aus den Grenzlagen $(\widehat{ab}, \widehat{cd})$ entstehenden Vierecken aus unter Durchlaufung sämtlicher Zwischenwerte der Umlaufszahlen wieder zu Vierecken gelangt, bei denen $u_{ab} = u_{cd} = 0$ ist.

B) Wenn in der letzten Grenzlage erster Art bereits $u_{cd} = 0$ ist, so ist

$$\beta - \gamma < 1 \text{ und zugleich } \alpha - \delta < 1.$$

Jetzt kann u_{ab} in dieser Grenzlage erster Art ebenfalls bereits null oder noch gröfser als null sein.

Im letzteren Falle ist wenigstens eine der Bedingungen $\delta - \alpha > 1$; $\gamma - \beta > 1$ erfüllt. Die aus diesen jetzt vorhandenen Grenzlagen zweiter Art sich ergebenden Umlaufszahlen setzen wieder ohne Unterbrechung die aus der ersten Grenzlage sich ergebenden Werte der Umlaufszahlen fort.

Existiert die Grenzlage $ab(d)$, so ist der kleinste aus ihr sich ergebende Wert von u_{ab} gleich $E\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + 2}{2}\right)$.

Ist dieser Wert noch nicht null, so mufs $\gamma - \beta > 1$ sein. Bei den Vierecken der nun sicher existierenden Grenzlage $ab(c)$ wird dann aber der kleinste Wert von $u_{ab} = E\left(\frac{-\alpha + \beta - \gamma + \delta}{2}\right) = 0$. Zugleich ist auch $u_{cd} = 0$.

Existiert nicht die Grenzlage $ab(d)$, so gelangt man durch die Vierecke der Grenzlage $ab(c)$ allein zu Vierecken mit den Umlaufszahlen $u_{ab} = 0$; $u_{cd} = 0$.

Wir können jetzt sagen:

„Um unter der Voraussetzung:

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta \geqq 0$$
$$\delta + \alpha - \beta - \gamma \geqq 0$$

Vierecke in der Reihenfolge zu erhalten, dafs von beliebig grofsen Werten von u_{ab} und u_{cd} an bis zu den Werten $u_{ab} = u_{cd} = 0$ die Werte aller Umlaufszahlen eine ununterbrochene Folge ganzer Zahlen durchlaufen, konstruiere man zunächst Vierecke aus den Grenzlagen (ab, cd) und hänge Kreisringe so ein, dafs ihre Anzahl mit einer beliebig grofsen Zahl beginnend ununterbrochen die Reihe der ganzen Zahlen bis 0 einschliefslich durchläuft.

„Kommt bei diesen Vierecken der Wert $u_{ab} = 0$ noch nicht vor, so konstruiere man weiter Vierecke aus sämtlichen existierenden Grenzlagen $ab(d)$.

„Existieren diese nicht oder kommt auch bei ihnen noch nicht der Wert $u_{ab} = 0$ vor, so sind Grenzlagen $ab(c)$ in genügender Anzahl vorhanden, mit Hülfe deren sich die Vierecksreihe dann bis zu Vierecken mit der Umlaufszahl $u_{ab} = 0$ fortsetzen läfst.

„Kreisscheiben sind ev. polar bei den Grenzlagen zweiter Art nachträglich so einzuhängen, dafs ihre Anzahl die Reihe der ganzen Zahlen bis 0 einschliefslich durchläuft.

„Die Konstruktion läfst sich offenbar von den letzten Vierecken aus in analoger Weise fortsetzen bis zu Vierecken, bei denen u_{bc} und u_{da} beliebig grofse Werte annehmen."

Für die Umlaufszahlen der so konstruierten Vierecksschar gelten also nach § 14 und 15 zunächst die Relationen:

$$\text{I. } u_{ab} = u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon; \quad u_{bc} = u_{da} = 0$$

für beliebig grofse Werte von u_{cd} bis zum Werte $u_{cd} = 0$.

Vierecke mit einer Relation vom Typus II können z. B. nicht aus den Grenzlagen $ab(c)$ entstehen, denn die hierzu notwendige Bedingung

$\gamma - \delta - \alpha - \beta > 0$ würde in Widerspruch mit der Voraussetzung $\delta + \alpha - \beta - \gamma \geqq 0$ stehen. Sie entstehen demnach nur aus den Grenzlagen $ab(d)$ und $bc(d)$.

Ist, was wir vorerst voraussetzen wollen,

$$1) \qquad \delta - \alpha - \beta - \gamma > 0,$$

so gibt es Vierecke mit den Relationen:

$$\text{II.} \quad u_{ab} + u_{bc} = E\left(\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2}\right) + \varepsilon; \quad u_{cd} = u_{da} = 0,$$

wo wir u_{bc} alle Werte

$$0 \leqq u_{bc} \leqq E\left(\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2}\right)$$

erteilen. Dies sind dann also die einzigen Vierecke mit Relationen von diesem Typus.

Sollte die aus II sich ergebende Wertereihe sich nicht an die aus I erhaltene Wertereihe anschliefsen, so gibt es für die dazwischen fehlenden Werte von u_{ab} auch noch Vierecke, für welche dann aufserdem immer $u_{bc} = u_{cd} = u_{da} = 0$ ist.

Die Relation II enthält bereits die Vierecke, für die $u_{ab} = 0$ ist.

Zuletzt gibt es Vierecke mit den Relationen:

$$\text{III.} \quad u_{bc} = u_{da} + E\left(\frac{\delta + \alpha - \beta - \gamma}{2}\right) + \varepsilon; \quad u_{ab} = u_{cd} = 0.$$

Die aus II und III sich ergebende Wertereihe für u_{bc} ist, wenn notwendig, in entsprechender Weise zu vervollständigen wie die Wertereihe für u_{ab}.

Ist nun

$$2) \qquad \delta - \alpha - \beta - \gamma \leqq 0,$$

so haben wir in § 15 die Relation II zwar nicht für diese Fälle abgeleitet. Stellen wir sie trotzdem auf, so reduziert sie sich auf:

$$u_{ab} + u_{bc} = \varepsilon; \quad u_{cd} = u_{da} = 0.$$

Für $\varepsilon = 1$ wird die erste Gleichung befriedigt durch: $u_{ab} = 1$; $u_{bc} = 0$ und $u_{ab} = 0$; $u_{bc} = 1$,

für $\varepsilon = 0$ durch $u_{ab} = u_{bc} = 0$.

Im allgemeinen sind Vierecke mit diesen Umlaufszahlen vorhanden.

Ist jedoch $\gamma+\delta-\alpha-\beta=0$ und zugleich $\delta+\alpha-\beta-\gamma>0$, so sind für $\varepsilon=0$ nur die Vierecke vorhanden, für welche

$$u_{ab}=u_{cd}=u_{da}=0;\quad u_{bc}=1 \quad \text{ist.}$$

Da dieselben aber durch die übrigen Relationen und Angaben schon berücksichtigt werden, genügt es, $\varepsilon=0$ zu nehmen.

Ist $\gamma+\delta-\alpha-\beta>0$ und gleichzeitig $\delta+\alpha-\beta-\gamma=0$, so genügt ebenfalls $\varepsilon=0$.

Ist $\gamma+\delta-\alpha-\beta=0$ und zugleich $\delta+\alpha-\beta-\gamma=0$, so ist nur $\varepsilon=0$ zulässig.

Wir können demnach die Relation II immer aufstellen, wenn wir die Regel für ε so fassen:

„In der Relation II ist nur $\varepsilon=0$ vorzuschreiben, wenn wenigstens eine der Gleichungen $\gamma+\delta-\alpha-\beta=0$; $\delta+\alpha-\beta-\gamma=0$ erfüllt ist, sonst $\varepsilon=0$ und $\varepsilon=1$."

Wegen unserer Voraussetzung gibt es keine weiteren Relationen vom Typus der Relationen I und III. Der Voraussetzung wegen treten aber auch keine Vierecke von der Art weiter auf, wo drei Umlaufszahlen null sind. Denn nach § 15 mufs, damit z. B. Vierecke vorhanden sind, bei denen $u_{bc}=u_{cd}=u_{da}=0$ und u_{ab} von Null verschieden ist, $\gamma+\delta-\alpha-\beta>0$ sein.

Die den obigen Relationen genügenden Wertequadrupel der Umlaufszahlen sind demnach sämtliche, die zu den gegebenen Winkeln auftreten. —

Wir haben in diesem Paragraphen bereits gezeigt, wie zu jedem dieser Wertequadrupel aus einer Grenzlage Vierecke konstruiert werden können.

Wir untersuchen diese Konstruktion noch auf ihre Vollständigkeit hin.

Wir legen die Tatsache zugrunde, dafs alle zu gegebenen Winkeln möglichen Vierecke ein Kontinuum bilden.

Wir geben neben den Winkeln auch noch feste den Ergänzungsrelationen genügende Umlaufszahlen vor. Konstruieren wir Vierecke mit diesen Winkeln und Umlaufszahlen in der vorher angegebenen Weise aus einer Grenzlage, so gelangen wir, wenn wir aus dieser heraus beständig in demselben Sinne weiter drehen, schliefslich in eine bestimmte zweite Grenzlage.

Verändern wir den Parameter der ersten Grenzlage, so ändert sich der Typus der zugehörigen zweiten Grenzlage nicht, sondern es tritt nichts als die Veränderung ihres Parameters ein. Denn würde jene zweite Grenzlage in eine Grenzlage von anderem Typus übergehen, so ist dies der Kontinuität wegen nur über eine Lage hinweg möglich, bei der die beiden Grenzlagen von verschiedenem Typus zugleich eintreten. Dann müssen aber nach § 12 die Winkel eine besondere Gleichung erfüllen, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Genügen sie aber einer solchen Gleichung, so bleiben wir bei Veränderung des Parameters immer bei Vierecken, die in dieselben ausgearteten Grenzlagen übergehen.

Umgekehrt hat auch die Veränderung des Parameters der zweiten Grenzlage stets nur die Veränderung des Parameters der ersten Grenzlage zur Folge.

Die Parameter der zusammengehörigen ersten und zweiten Grenzlage können wir wegen der fest vorgegebenen Umlaufszahlen nur so weit verändern, bis eine Seite sich gerade schliefst.

Geht nun ein Viereck z. B. in die Grenzlagen $ab(d)$ und $cd(b)$ über, so entsteht auf diese Weise ein Teilkontinuum von Vierecken, das begrenzt ist von einem Viereck, bei dem $\widehat{ab}$ sich gerade schliefst, von den Grenzlagen $ab(d)$ und $cd(b)$ und von einem Viereck, bei dem $\widehat{cd}$ sich gerade schliefst.

Bei diesen Vierecken und Grenzlagen hört die Existenzmöglichkeit für die Membrane mit den vorgegebenen Umlaufszahlen und Winkeln zunächst auf.

Könnten wir nun aus anderen Grenzlagen noch weitere Vierecke mit denselben Umlaufszahlen konstruieren, so müssen sich diese in die zuerst konstruierten Vierecke kontinuierlich überführen lassen, was aber nur über solche Vierecke hinweg möglich erscheint, bei denen sich eine Seite gerade schliefst. Es müfste also ein Viereck mit einer sich gerade schliefsenden Seite geben, das sich kontinuierlich in zwei verschiedene Grenzlagen überführen läfst. Ein derartiges Viereck gibt es aber nicht, da ein Viereck mit einer sich gerade schliefsenden Seite nur einen Parameter besitzt (Fig. 45), bei dessen Veränderung es nur in eine Grenzlage übergehen kann.

Wir können das Ergebnis der letzten Überlegung so aussprechen:

„Alle Vierecke mit denselben Winkeln, die es zu festen, den Ergänzungsrelationen genügenden Umlaufszahlen gibt, lassen sich aus einer einzigen diese Umlaufszahlen und Winkel besitzenden Grenzlage konstruieren, wenn dem Parameter derselben jeder mögliche Wert gegeben und um jeden möglichen Betrag aus der Grenzlage herausgedreht wird.“

Es bleibt noch die Frage, wie wir bei der in diesem Paragraphen anfangs angegebenen Konstruktion des zweidimensionalen Kontinuums auch jedes mögliche Viereck nur einmal erhalten. Zweimal werden Vierecke nur konstruiert, wenn zwei bei der angegebenen Konstruktion zu benutzende Grenzlagen dieselben Umlaufszahlen besitzen. Von diesen beiden ist dann also stets eine auszuschalten. —

Es ergibt sich also:

Benutzt man die vorher angegebenen Grenzlagen zur Konstruktion des Kontinuums, so erhält man hierbei auch sämtliche Vierecke, die zu den gegebenen Winkeln existieren. Benutzt man von zwei Grenzlagen von verschiedenem Typus, welche dieselben Umlaufszahlen der Seiten ergeben, jedesmal nur eine zur Konstruktion, so erhält man jedes Viereck auch nur einmal.

Wir fassen die über die Ergänzungsrelationen erhaltenen Ergebnisse zusammen:

Die Bezeichnung werde so gewählt, dafs

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta \geqq 0$$

und

$$\delta + \alpha - \beta - \gamma \geqq 0 \quad \text{ist.}$$

Dann hat man zunächst Vierecke mit den Relationen:

$$\text{I.} \qquad u_{ab} = u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon; \quad u_{bc} = u_{da} = 0.$$

Hierin hat u_{cd} die positiven ganzen Zahlen von $+\infty$ bis 0 (einschliefslich) zu durchlaufen. Für jeden Wert von u_{cd} ist zuerst $\varepsilon = 1$, dann $\varepsilon = 0$ vorzuschreiben. Wenn $\gamma + \delta - \alpha - \beta = 0$ ist, gibt es nur Vierecke für $\varepsilon = 0$, wenn $\gamma + \delta - \alpha - \beta$ eine gerade Zahl ist, nur für $\varepsilon = 1$.

Ferner hat man Vierecke mit den Relationen:

$$\text{II.} \quad u_{ab} + u_{bc} = E\left(\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2}\right) + \varepsilon; \quad u_{cd} = u_{da} = 0,$$

worin für u_{bc} die Werte von 0 bis $E\left(\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)$ (einschliefslich) zu setzen sind. Ist wenigstens eine der Gleichungen $\gamma+\delta-\alpha-\beta=0$; $\delta+\alpha-\beta-\gamma=0$ erfüllt, so ist nur $\varepsilon=0$ vorzuschreiben, sonst gibt es stets Vierecke für $\varepsilon=0$ und $\varepsilon=1$.

Sollte die aus II erhaltene Wertereihe für u_{ab} sich nicht an die aus I erhaltene anschliefsen, so gibt es für die dazwischen fehlenden Werte von u_{ab} auch Vierecke, für welche dann aufserdem immer

$$u_{bc} = u_{cd} = u_{da} = 0 \quad \text{ist.}$$

Endlich hat man Vierecke mit den Relationen:

$$\text{III.} \quad u_{bc} = u_{da} + E\left(\frac{\delta+\alpha-\beta-\gamma}{2}\right) + \varepsilon; \quad u_{ab} = u_{cd} = 0.$$

Hier hat u_{da} mit 0 beginnend die Reihe der positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen, und für jeden Wert ist zuerst $\varepsilon=0$, dann $\varepsilon=1$ vorzuschreiben. Aufserdem gilt in den Ausnahmefällen für ε die analoge Regel wie bei I.

Die aus II und III erhaltene Wertereihe für u_{bc} ist, wenn notwendig, in entsprechender Weise zu vervollständigen, wie die Wertereihe für u_{ab}.

Hat man unter Benutzung dieser Regeln sämtliche zusammengehörigen Werte der Zahlen u_{ab}, u_{bc}, u_{cd}, u_{da} ermittelt, so existieren für jedes dieser Wertequadrupel auch Vierecke, welche die gegebenen Winkel und die gefundenen Umlaufszahlen besitzen. Zugleich sind diese Vierecke sämtliche, die zu den gegebenen Winkeln existieren. Sie bilden in der bei den Relationen angegebenen Reihenfolge ein zweidimensionales Kontinuum.

Durch eine andere Schreibweise[1]) kann man nach Herrn E. Hilb die Regel für die Ergänzungsrelationen noch folgendermaſsen vereinfachen, sobald mindestens eine Seite umlaufend ist:

Man nenne die umlaufende Seite $\widehat{ab}$. Dann gelten die Relationen:

$$\begin{aligned} u_{bc} &= E\left(\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2} - u_{ab} + 1 - \varepsilon\right) \\ u_{cd} &= E\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2} + u_{ab} + \varepsilon\right) \\ u_{da} &= E\left(\frac{\gamma-\delta-\alpha-\beta}{2} - u_{ab} + 1 - \varepsilon\right) \end{aligned}$$

wo ε im allgemeinen 0 oder 1 sein kann.

§ 17.
Herstellung des Kontinuums aller vorhandenen Vierecke.

Wir wollen jetzt geometrisch das Kontinuum herstellen für die sechsdimensionale Schar aller überhaupt existierenden Kreisbogenvierecke. Wir verändern jetzt also auch die Winkel. Um ein geschlossenes Kontinuum herzustellen, haben wir aber nur nötig, an den Grenzen unserer zweidimensionalen Kontinua eine Überleitung herzustellen, wir brauchen also nur bei den Vierecken, bei denen transversale Einhängungen möglich sind, kontinuierlich die Winkel zu verändern.

Wir behandeln zunächst die Vierecke, bei denen sich von $\widehat{ab}$ nach $\widehat{cd}$ hinüber Kreisringe einhängen lassen.

Wir gehen aus von einem Viereck mit den Winkeln 0, 0, 0, 0 (Fig. 66). Wir können einmal, während wir den Wert 0 für δ festhalten, den Winkel α beliebig vergröſsern, indem wir den Eckpunkt a festhalten und d auf dem Kreise weiter führen (Fig. 66). Genau so kann man auch δ allein wachsen lassen, während man für α den Wert 0 festhält. Zweitens kann man hinterher unter Festhaltung der Eckpunkte d und a den Bogen $\widehat{da}$ nach auswärts drehen, wodurch α und δ um einen beliebigen gleichen Betrag vergröſsert werden können (Fig. 66). Auf diese Weise kann man jeden Wert

[1]) Vgl. die in der Vorbemerkung bereits genannte Note in den Göttinger Nachrichten.

der Winkel α und δ kontinuierlich erreichen. Genau so kann man bei den Winkeln β und γ jeden Wert kontinuierlich erreichen.

Man kann zwischen den zweidimensionalen Kontinua in entsprechender Weise eine Verbindung durch Vierecke herstellen, bei denen sich von $\widehat{bc}$ nach $\widehat{da}$ hinüber Kreisringe einhängen lassen.

Auf diese Weise sind sämtliche Kreisbogenvierecke übersichtlich in ein Kontinuum eingeordnet.

§ 18.
Die Eindeutigkeitsfrage.

Wir haben noch die Frage zu erledigen:

Sind zwei Membrane, die in den zwölf Mafszahlen, welche den algebraischen und Ergänzungsrelationen genügen müssen, und dem Kern übereinstimmen, identisch?

Sind zwei solche Membrane nicht identisch, so können doch ihre Begrenzungen, denen dann auch derselbe Umlaufssinn zugeordnet ist, stets zur Deckung gebracht werden.

Alle Vierecke mit fest gegebenen Winkeln und Umlaufszahlen können nach § 16 aus einer einzigen Grenzlage unter Abänderung des Parameters derselben konstruiert werden.

Bei dieser Konstruktion können die Begrenzungen zweier Vierecke, die aus Grenzlagen erster Art von gleichem Typus, aber verschiedenem Parameterwert konstruiert sind, nicht identisch sein und auch nicht durch lineare Transformation zur Deckung gebracht werden. Denn wäre dies möglich, so würden die beiden Grenzlagen erster Art, wenn die Vierecke dann wieder in sie übergeführt werden, dieselben Ecken und demnach auch den gleichen Parameterwert besitzen.

Verändern wir in einer Grenzlage zweiter Art deren Parameter, so bleiben drei Ecken fest, eine Ecke wird verschoben. Die aus zwei Grenzlagen zweiter Art von gleichem Typus, aber verschiedenem Parameterwert konstruierten Vierecke können also nie in der Begrenzung übereinstimmen.

Vierecke mit demselben Kern, denselben Winkeln und Umlaufszahlen, die doch nicht identisch sind, müssen sich also, wenn sie überhaupt möglich sind, aus ein und derselben Grenzlage mit festem Parameterwert konstruieren und durch Drehung um die festen Ecken ineinander überführen lassen.

Messen wir durch den Winkel, um den die Schenkel eines Vierecks-winkels hierbei gedreht werden, den Betrag der Drehung, so mufs dieser Betrag bei der Drehung von einer dieser Membrane zur andern gleich einem ganzzahligen Vielfachen von 360° sein, denn nur dann kehrt unter Erhaltung des Umlaufssinnes ein Begrenzungskreis wieder in seine ursprüngliche Lage zurück.

Besitzt nun ein Viereck eine oder mehrere umlaufende Seiten, so erreicht der Betrag der Drehung, durch die es in eine Grenzlage übergeht, nie 180°.

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dafs 180° erreicht werden können. $\widehat{ab}$ sei umlaufend.

Wir wollen den vom Kreise $\widehat{ab}$ umschlossenen Teil der Vollebene, der bei positiver Umlaufung der Membran zur Linken liegt, als das „Innere" des Kreises $\widehat{ab}$, den anderen als das „Äufsere" bezeichnen.

Die Eckpunkte c und d müfsten nun, wenn der Drehungswinkel 180° soll erreichen können, auf verschiedenen Seiten des Kreises $\widehat{ab}$ liegen.

Denn würden beide im Äufsern des Kreises $\widehat{ab}$ liegen, so würde der Grenzkreis für die Seite $\widehat{ab}$ nicht Diagonalkreis sein können, aber auch nicht Tangentialkreis; denn dann müfste der ganze Kreis $\widehat{cd}$ und also auch die Ecken c und d im Innern des Kreises $\widehat{ab}$ liegen. Demnach müfste sich der Grenzkreis auf einen Punkt zusammenziehen lassen, was nicht möglich ist.

Würden c und d beide im Innern des Kreises $\widehat{ab}$ liegen, so würden sie nach Ausführung der Drehung von 180° im Äufsern liegen, was, wie eben gezeigt, nicht möglich ist. c und d liegen also auf verschiedenen Seiten von $\widehat{ab}$.

Es möge c im Innern des Kreises $\widehat{ab}$ liegen, d im Äufsern (Fig. 67). Der Grenzkreis $k_{ab(a)}$ mufs dann notwendig durch c gehen. Während der Drehung führen wir nun den Grenzkreis mit, indem wir ihn unter beständiger Berührung von $\widehat{ab}$ um die Punkte a und c drehen. Ist die Drehung so weit fortgeführt, dafs der Kreis $\widehat{ab}$ durch c geht und nicht schon vorher eine andere Grenzlage eingetreten, so fällt der Grenzkreis mit dem

Kreis $\widehat{ab}$ zusammen. Damit ist die Grenzlage $ab(c)$ eingetreten und der Betrag der Drehung noch kleiner als 180°.

Stets tritt die andere Grenzlage also ein, ehe der Betrag der Drehung 180° erreicht hat.

Es ergibt sich demnach: Zwei Membrane, welche in den zwölf Mafszahlen nebst den Umlaufszahlen und dem Kern übereinstimmen, sind stets identisch, wenn wenigstens eine Seite umlaufend ist.

Ist aber keine Seite umlaufend, so kann der Drehungswinkel von einer Grenzlage des Vierecks zur andern gröfser als 360° sein. Deshalb brauchen zwei Membrane der bezeichneten Art dann nicht identisch zu sein. Beispiele sind leicht zu konstruieren:

Aus dem in Fig. 34 gezeichneten Viereck konstruieren wir zwei neue. Das erste erhalten wir, indem wir an die Seiten $\widehat{bc}$ und $\widehat{da}$, das zweite, indem wir an die Seiten $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$ je zwei Kreisscheiben lateral anhängen. Beide Vierecke stimmen nun in den Winkeln und in den Begrenzungslinien, demnach in allen zwölf Mafszahlen und im Kern überein, aber sind gestaltlich doch vollkommen voneinander verschieden. Man kann sich auf dieselbe Weise aus jedem beliebigen Viereck ohne umlaufende Seiten Vierecke der bezeichneten Art verschaffen.