Функциональный анализ и его приложения,
1986, т. 20, вып. 1, 71—72

УДК 517.53

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ ЛИТТЛВУДА И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. Э. Еременко, М. Л. Содин

Для мероморфной в $\mathbf{C}$ функции f обозначим через ρ_f сферическую производную, $\rho_f(z) = |f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$. Пусть $D(r) = \{z: |z| \leqslant r\}$, m_2 — мера Лебега в $\mathbf{C}$. Следуя Литтлвуду [1], рассмотрим величины $\varphi(n) = \sup\limits_f \iint\limits_{D(1)} \rho_f \, dm_2, n \in \mathbf{N}$, где верхняя грань берется по всем многочленам f степени n. Аналогичные величины для рациональных функций обозначим через $\psi(n)$. Из неравенства Буняковского — Шварца следует, что

$$\varphi(n) \leqslant \psi(n) \leqslant \Big(\iint\limits_{D(1)} dm_2 \sup_f \iint\limits_{D(1)} \rho_f^2 \, dm_2\Big)^{1/2} \leqslant \pi\sqrt{n}.$$

Наилучшие известные оценки снизу получил У. Хейман [2]: $\varphi(n) \geqslant A_1 \log n$, $\psi(n) \geqslant A_2\sqrt{n}$. Здесь и далее A_k — абсолютные постоянные. В [1] высказана гипотеза о том, что справедливо

$$\varphi(n) \leqslant A_3 n^{1/2-\alpha} \tag{1}$$

с некоторым $\alpha > 0$.

Т е о р е м а 1. $\varphi(n) = o(\sqrt{n})$, $n \to \infty$.

Из гипотезы (1) Литтлвуд вывел замечательное следствие, которое сформулировал так: для любой целой функции f конечного ненулевого порядка найдется бесконечно малая порция S плоскости, такая, что для почти всех w корни уравнения $f(z) = w$ лежат в S за пренебрежимым исключением. Анализ эллиптических функций в [2] показывает, что это утверждение неверно, если заменить целые функции мероморфными.

П р и м е р. $f(z) = \exp z$. Можно положить $S = \{x+iy: |y| > x^2\}$. Для любого w все корни уравнения $f(z) = w$, за исключением конечного числа, принадлежат S. Множество S имеет нулевую плотность, $m_2(S \cap D(r)) = o(r^2)$, $r \to \infty$.

Т е о р е м а 2. *Пусть f — целая функция конечного порядка, $\lambda(r)$ — ее уточненный порядок. Тогда существует множество $S \subset \mathbf{C}$ нулевой плотности такое, что для любого $w \in \mathbf{C}$ выполняется $n(r, w) = n_S(r, w) + o(r^{\lambda(r)})$, $r \to \infty$. Здесь $n_S(r, w)$ — количество корней уравнения $f(z) = w$ в $S \cap D(r)$.*

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на элементарной лемме из теории потенциала, частный случай которой содержится в [3, 4].

Л е м м а. *Пусть $u \geqslant 0$ — субгармоническая функция, μ — ее риссовская мера. Тогда $\{z: u(z) = 0\} = E \cup L$, где $\mu(E) = 0$, $m_2(L) = 0$.*

В качестве E можно взять множество точек плотности множества $\{z: u(z) = 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Предположим, что найдется бесконечное множество номеров $\mathbf{N}_1$ и многочлены f_n, $\deg f_n = n \in \mathbf{N}_1$ такие, что

$$\iint\limits_{D(1)} \rho_{f_n} dm_2 \geqslant A_4\sqrt{n}, \quad n \in \mathbf{N}_1. \tag{2}$$

Рассмотрим семейство субгармонических функций $v_n(z) = \dfrac{1}{n}\log\sqrt{1+|f_n(z)|^2}$ с риссовскими мерами μ_n. Непосредственное вычисление показывает, что лапласиан

$$\Delta v_n(z) = \frac{2}{n}\rho_{f_n}^2(z). \tag{3}$$

В частности, $\mu_n(\mathbf{C}) = 1$. Выбирая подпоследовательность, можно считать, что $\mu_n \to \mu$ слабо в каждом круге $D(r)$, $r > 0$, $n \in \mathbf{N}_2 \subset \mathbf{N}_1$. Возможны два случая.

1°. $\liminf v_n < +\infty$. Выбирая подпоследовательность, $\mathbf{N}_3 \subset \mathbf{N}_1$, считаем, что $v_n \to u$ в среднем на каждом круге, $n \in \mathbf{N}_3$. Применяя лемму к функции $u \geqslant 0$, получим три множества M, L, E такие, что $u > 0$ на M, $\mu(E) = 0$, $m_2(L) = 0$, $D(1) = M \cup L \cup E$. Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Выберем δ, $0 < \delta < \varepsilon$, так, чтобы множество $M' = \{z \in D(1): u(z) \geqslant 2\delta\}$ обладало свойством $m_2(M \setminus M') < \varepsilon$. Затем выберем замкнутое множество $E' \subset E$ так, чтобы выполнялось $m_2(E \setminus E') < \varepsilon$. Очевидно, что $\mu(E') =$

$= 0$, поэтому при достаточно больших $n \in \mathbf{N}_3$ справедливо

$$\mu_n(E') < \varepsilon. \tag{4}$$

Положим $L' = D(1) \setminus (E' \cup M')$. Тогда

$$m_2(L') < 2\varepsilon. \tag{5}$$

Из сходимости $v_n \to u$ следует, что найдутся множества L_n такие, что

$$m_2(L_n) < \varepsilon \ \text{ и } \ v_n(z) \geqslant \delta \ \text{ при } z \in M' \setminus L_n, \quad n \in \mathbf{N}_3. \tag{6}$$

Для любого измеримого множества $T \subset D(1)$ неравенство Буняковского — Шварца дает

$$\iint_T \rho_f \, dm_2 \leqslant \left(m_2 T \iint_T \rho_f^2 \, dm_2\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Полагая в (7) $T = L' \cup L_n$, получим в силу (5), (6)

$$\iint_{L' \cup L_n} \rho_{f_n} \, dm_2 \leqslant \left(3\varepsilon \iint_{D(1)} \rho_{f_n}^2 \, dm_2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{3\varepsilon\pi n}, \quad n \in \mathbf{N}_3. \tag{8}$$

Выбирая в (7) $T = E'$, и применяя (3), (4), получаем

$$\iint_{E'} \rho_{f_n} \, dm_2 \leqslant (\pi^2 n \mu_n(E'))^{1/2} \leqslant \pi \sqrt{n\varepsilon}, \quad n \in \mathbf{N}_3. \tag{9}$$

Заметим теперь, что в силу (6) образ множества $M' \setminus L_n$ под действием функции f_n имеет сферическую площадь, не превосходящую $2\pi n \exp(-2n\delta)$ [с учетом кратности]. Применяя (7) с $T = M' \setminus L_n$, получаем

$$\iint_{M' \setminus L_n} \rho_{f_n} \, dm_2 \leqslant (\pi \cdot 2\pi n \exp(-2n\delta))^{1/2} = o(1), \quad n \in \mathbf{N}_3.$$

Складывая это соотношение с неравенствами (8), (9), получим противоречие с (2).

2°. $v_n \to +\infty$. Тогда при достаточно больших $n \in \mathbf{N}_2$ выполняется $v_n(z) \geqslant 1$ при $z \in D(1) \setminus L_n$, где $m_2(L_n) \to 0$. Далее рассуждаем, как в 1°.

Теорема доказана.

Гипотеза. *Пусть* $0 \leqslant u \leqslant 1$ — *субгармоническая функция в* $D(1)$. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *выполняется* $\{z: u(z) < \varepsilon\} = L_\varepsilon \cup E_\varepsilon$, *где* $\mu(E_\varepsilon) \leqslant A_5 \varepsilon^\beta$, $m_2(L_\varepsilon) \leqslant A_5 \varepsilon^\beta$ *с некоторой абсолютной постоянной* $\beta > 0$.

Доказательство теоремы 1 показывает, что из этой гипотезы следовало бы (1) с $\alpha < \beta/2$.

Авторы благодарят В. С. Азарина, С. Ю. Фаворова и А. Л. Вольберга за полезное обсуждение этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Littlewood J.*— J. London Math. Soc., 1952, v. 27, № 4, p. 387—392. 2. *Hayman W. K.*— J. d'analyse math., 1979, v. 36, p. 75—95. 3. *Øksendal B.*— Amer. J. Math., 1972, v. 94, p. 331—342. 4. *Øksendal B.*— Pacific J. Math., 1981, v. 95, p. 179—192.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР
Харьковский институт
радиоэлектроники

Поступило в редакцию
26 декабря 1984 г.