УДК 517.53

ЕРЁМЕНКО А. Э., СОДИН М. Л.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСЛОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛИТТЛВУДА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Введение

Для мероморфной функции f обозначим через ρ_f ее сферическую производную, $\rho_f=|f'|/(1+|f|^2)$. Пусть $D(z, R)=\{w\in\mathbf{C}: |w-z|<R\}$, $D(R)=D(0, R)$; m_2 — мера Лебега в плоскости $\mathbf{C}$. В работе [1] Дж. Литтлвуд рассматривал величины

$$\varphi(n)=\sup_P \iint\limits_{D(1)} \rho_P dm_2=\sup_P \sup_{r>0} \frac{1}{r} \iint\limits_{D(r)} \rho_P dm_2.$$

Здесь точная верхняя грань берется по всем многочленам P степени n, $n=1, 2, \ldots$. Аналогичные величины для рациональных функций обозначим через $\psi(n)$. Из неравенства Буняковского — Шварца следует, что

$$\psi(n)\leqslant \left\{\iint\limits_{D(1)} dm_2 \cdot \sup_f \iint\limits_{D(1)} \rho_f^2 dm_2\right\}^{1/2}.$$

Второй интеграл есть не что иное, как сферическая площадь с учетом кратности образа круга $D(1)$ под действием рациональной функции степени n. Таким образом, этот интеграл не превосходит πn, и мы получаем:

$$\varphi(n)\leqslant \psi(n)\leqslant \pi\sqrt{n}. \tag{1.1}$$

Наилучшие известные оценки снизу получил У. Хейман [2]: $\psi(n)\geqslant A_1\sqrt{n}$, $\varphi(n)\geqslant A_2\log n$. Здесь A_1, A_2 — абсолютные постоянные. Таким образом, неравенство (1.1) дает правильный порядок величины $\psi(n)$. До настоящего времени не было известно, можно ли усилить оценку (1.1) для $\varphi(n)$. В работе [1] высказана гипотеза, состоящая в том, что для некоторых абсолютных положительных постоянных A и α выполняется

$$\varphi(n)\leqslant An^{1/2-\alpha}. \tag{1.2}$$

Из этой гипотезы Дж. Литтлвуд [1] вывел такое замечательное следствие: *для любой целой функции f конечного ненулевого порядка существует малая порция S плоскости такая, что для любого $a\in\mathbf{C}$ корни уравнения $f(z)=a$ принадлежат S за пренебрежимым исключением.* Например, для $f(z)=e^z$ можно взять $S=\{x+iy: |y|>x^2\}$. Тогда множество S имеет нулевую плотность, т. е.

$$m_2(S\cap D(r))=o(r^2), \quad r\to\infty,$$

и для любого a все корни уравнения $e^z=a$, за исключением конечного числа, попадают в S.

В настоящей работе доказано это следствие (теорема 2) и получена оценка $\varphi(n)=o(\sqrt{n})$, $n\to\infty$ (теорема 1). Теоремы 1 и 2 содержатся в

§ 3 и § 4 соответственно. Доказательство обеих теорем использует две леммы из теории потенциала, которые содержатся в § 2. Эти леммы могут представлять и самостоятельный интерес.

§ 2

ЛЕММА 1. *Пусть* $u\geqslant 0$ — *субгармоническая функция в области* $G\subset\mathbf{C}$, $\mu=\mu_u$ — *мера, ассоциированная по Риссу,* $N=\{z\in G\colon u(z)=0\}$. *Тогда существуют борелевские множества* E *и* L *такие, что* $N=E\cup L$, $m_2L=0$, $\mu E=0$.

Доказательство. Предположим, что область G и функция u ограничены. Переход к общему случаю не вызывает затруднений. Выберем в качестве E множество точек плотности множества N, принадлежащих N. Положим $L=N\setminus E$. По теореме Лебега (см., например, [3]) выполняется $m_2L=0$.

Покажем, что $\mu E=0$. Зафиксируем точку $z_0\in E$ и произвольно малое число $\varepsilon>0$. Пусть r_0, $0<r_0<\varepsilon$, таково, что $D(z_0, r_0)\subset G$, и

$$m_2((G\setminus N)\cap D(z_0, r))<\delta r^2, \quad r<r_0,$$

где $\delta=(4^4\cdot 3\cdot 5\log 2)^{-1}$. Обозначим через $\theta(r)$ угловую меру множества $(G\setminus N)\cap\partial D(z_0, r_0)$. Покажем, что на каждом отрезке $[r, 2r]\subset(0, r_0]$ найдется точка r^* такая, что $\theta(r^*)\leqslant\eta=4^{-4}\cdot 3^{-1}$. В самом деле, если $\theta(r^*)\geqslant\eta$, $r\leqslant r^*\leqslant 2r$, то по неравенству Буняковского — Шварца выполняется:

$$r^2=\left(\int\limits_r^{2r}dt\right)^2\leqslant\int\limits_r^{2r}t\theta(t)\,dt\cdot\int\limits_r^{2r}\frac{dt}{t\theta(t)}\leqslant$$

$$\leqslant m_2((G\setminus N)\cap D(z_0, 2r))\,\eta^{-1}\log 2\leqslant 4\delta r^2\eta^{-1}\log 2=\frac{4}{5}r^2$$

— противоречие.

Таким образом, на каждом отрезке $[r, 2r]\subset(0, r_0]$ найдется точка r^* такая, что $\theta(r^*)<\eta$. Поэтому существует последовательность (r_k) со свойствами:

$$\frac{1}{4}\leqslant\frac{r_k}{r_{k-1}}\leqslant\frac{1}{2}, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

$$\theta(r_k)<\eta, \quad k=1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Обозначим $M=\sup\{u(z)\colon z\in G\}$, $M_k=\sup\{u(z)\colon |z-z_0|=r_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Пользуясь формулой Пуассона, получаем в силу (2.2):

$$M_{k+1}\leqslant\frac{r_k+r_{k+1}}{r_k-r_{k+1}}\int\limits_0^{2\pi}u(z_0+r_ke^{i\theta})\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant 3M_k\theta(r_k)\leqslant 3\eta M_k\leqslant(3\eta)^{k+1}M_0\leqslant(3\eta)^{k+1}M.$$

Из (2.1) следует, что $4^{-k-1}\leqslant r_{k+1}/r_0$, поэтому справедливо:

$$M_{k+1}\leqslant(3\cdot 4^4\eta)^{k+1}\left(\frac{r_{k+1}}{r_0}\right)^4M=(r_{k+1}/r_0)^4M\leqslant r_{k+1}^3, \tag{2.3}$$

если k достаточно велико.

Положим $n(t)=\mu D(z_0, t)$. Из формулы Пуассона — Иенсена, с учетом того, что $u(z_0)=0$, и из (2.3) следует, что при достаточно больших

k выполняется:

$$n(r_k/e)\leqslant\int\limits_{r_k/e}^{r_k}\frac{n(t)}{t}dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(z_0+r_ke^{i\theta})\,d\theta\leqslant M_k\leqslant r_k^3.$$

Таким образом, каждую точку $z_0\in E$ можно заключить в кружок $D(z_0,\ R(z_0))$ такой, что $\mu D(z_0,\ R(z_0))\leqslant e^3(R(z_0))^3$, причем $R(z_0)\leqslant\varepsilon e^{-3}$ для всех $z_0\in E$. Согласно известной теореме о покрытиях (см., например, [3, с. 13]) существует счетное, не более чем шестикратное покрытие множества E этими кружками, $E\subset\bigcup\limits_k D(z_k,\ R(z_k))$. Имеем:

$$\mu E\leqslant\sum_k\mu D(z_k,R(z_k))\leqslant e^3\sum_k(R(z_k))^3\leqslant\varepsilon\sum_k(R(z_k))^2\leqslant\frac{6\varepsilon}{\pi}m_2E.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon>0$, заключаем отсюда, что $\mu E=0$, что и требовалось доказать.

Покажем связь леммы 1 с работами [4]—[6]. Пусть D — область, обладающая функцией Грина, $\infty\in D$. Продолжив функцию Грина с полюсом в ∞ нулем в $\mathbf{C}\setminus D$, получим функцию $u\geqslant0$, субгармоническую в $\mathbf{C}$. Риссовская мера μ этой функции совпадает с гармонической мерой в точке ∞ относительно области D. В этом случае лемма 1 превращается в результат Б. Эксендаля [4], [5], утверждающий, что гармоническая мера μ взаимно сингулярна с мерой Лебега m_2. Если дополнительно предположить, что область D односвязна, то известен более сильный результат [6]: мера μ сингулярна относительно меры Хаусдорфа $m_{1+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon>0$.

Представляется правдоподобным следующий «устойчивый» вариант леммы 1.

Гипотеза. *Существуют абсолютные постоянные $B>0$, $\beta>0$ такие, что для любой субгармонической функции u, $0<u<1$, в $D(1)$ и любого $\varepsilon>0$ справедливо*

$$\{z\in D(1):\ u(z)\leqslant\varepsilon\}\subset L_\varepsilon\cup E_\varepsilon,$$

где $m_2L_\varepsilon<B\varepsilon^\beta$ и $\mu E_\varepsilon\leqslant B\varepsilon^\beta$.

Простые примеры показывают, что эта гипотеза может быть верной только при $\beta\leqslant1/2$. Методом, использованным ниже при доказательстве теоремы 1, из нашей гипотезы можно вывести (1.2) с любым $\alpha<\frac{1}{2}-\beta/2$.

Чтобы сформулировать следующую лемму, потребуются некоторые определения.

Зафиксируем число $C>0$ и обозначим через U множество субгармонических функций u в круге $D(2)$, обладающих такими свойствами:

$$u(z)\leqslant C,\quad |z|<2;\quad u(0)\geqslant-C.$$

Следующие факты из теории потенциала можно найти, например, в [7], [8]. Множество U является компактным подмножеством пространства $L^1=L^1(D(2),\ dm_2)$. Далее все топологические термины, если не оговорено противное, относятся к топологии L^1. Из сходимости $u_n\to u$ следует слабая сходимость мер, ассоциированных по Риссу, $\mu_n\to\mu$. Это означает, что

$$\iint\limits_{D(2)}g\,d\mu_n\to\iint\limits_{D(2)}g\,d\mu$$

для каждой непрерывной функции g с компактным носителем в $D(2)$. Если $\mu_n \to \mu$, то для каждого компакта $K \subset D(2)$ выполняется $\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n K \leqslant \leqslant \mu K$.

Подмножество $U^+ \subset U$, состоящее из неотрицательных функций, замкнуто в U, следовательно, также компактно.

ЛЕММА 2. *Пусть* $u \in U^+$, $\delta > 0$. *Тогда найдется множество* $E \subset \overline{D(1)}$ *и число* $\varepsilon > 0$ *со следующими свойствами. Для любой функции* $v \in U$ *из шара* $\|u - v\| < \varepsilon$ *выполняется:*

$$\mu_v E \leqslant \delta, \tag{2.4}$$

$$\{z \in \overline{D(1)} : v(z) < \varepsilon\} \subset E \cup L_v, \tag{2.5}$$

где

$$m_2 L_v \leqslant \delta. \tag{2.6}$$

Доказательство. Применив к функции u лемму 1, найдем множество E (переобозначим его через E^*) и множество L со свойствами, указанными в лемме 1. Положим

$$M_1 = L \cap \overline{D(1)}, \quad M_2 = E^* \cap \overline{D(1)}, \quad M_3 = \{z \in \overline{D(1)} : u(z) > 0\}.$$

Выберем число $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы замкнутое множество $K = \{z \in \overline{D(1)} : u(z) \geqslant 2\varepsilon_1\} \subset M_3$ удовлетворяло условию

$$m_2(M_3 \setminus K) < \delta/4. \tag{2.7}$$

В качестве E выберем такой компакт, содержащийся в M_2, что

$$m_2(M_2 \setminus E) < \delta/4. \tag{2.8}$$

Поскольку $\mu_u M_2 = 0$ и $E \subset M_2$, выполняется

$$\mu_u E = 0. \tag{2.9}$$

В силу (2.9) существует число $\varepsilon_2 > 0$ такое, что из $v \in U$, $\|u - v\| \leqslant \varepsilon_2$, следует, что

$$\mu_v E < \delta. \tag{2.10}$$

Далее, если $\|u - v\| < \varepsilon_1 \delta/4$ и $X_v = \{z \in \overline{D(1)} : \ |u(z) - v(z)| > \varepsilon_1\}$, то

$$m_2 X_v \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1} \iint_{X_v} |u - v|\, dm_2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1} \|u - v\| < \delta/4. \tag{2.11}$$

Положим $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1\delta/4)$. Если $v \in U$, $\|u - v\| \leqslant \varepsilon$, то в силу (2.10) выполнено (2.4). Кроме того, имеем:

$$\{z \in \overline{D(1)} : v(z) < \varepsilon\} \subset (\overline{D(1)} \setminus K) \cup X_v =$$

$$= X_v \cup (M_3 \setminus K) \cup (M_2 \setminus E) \cup M_1 \cup E =: L_v \cup E,$$

причем с помощью (2.7), (2.8), (2.11) получается:

$$m_2 L_v \leqslant m_2 X_v + m_2(M_3 \setminus K) + m_2(M_2 \setminus E) + m_2 M_1 < \delta.$$

Лемма 2 доказана.

§ 3

ТЕОРЕМА 1. *При* $n \to \infty$ *выполняется* $\varphi(n) = o(\sqrt{n})$.

Доказательство. В силу неравенства Буняковского — Шварца для любого измеримого множества $K \subset \overline{D(1)}$ выполняется

$$\iint\limits_K \rho_f dm_2 \leqslant \left\{ m_2 K \cdot \iint\limits_K \rho_f^2 dm_2 \right\}^{1/2} \tag{3.1}$$

(ср. § 1). Если теорема неверна, то найдутся сколь угодно большие номера n, многочлены P_n степени n и число $x>0$ такие, что

$$\iint\limits_{D(1)} \rho_{P_n} dm_2 \geqslant x\sqrt{n}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим последовательность неотрицательных субгармонических функций

$$v_n(z) = \frac{1}{n}\log\sqrt{1+|P_n(z)|^2} = \iint\limits_{D(1)} \log|z-\xi|\,d\mu_n(\xi) +$$

$$+ \iint\limits_{|\xi|\geqslant 1} \log\left|1-\frac{z}{\xi}\right| d\mu_n(\xi) + C_n.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Delta v_n(z) = \frac{2}{n}\rho_{P_n}^2(z) \tag{3.3}$$

(см., например, [9, с. 19]). В частности, $\mu_n(\mathbf{C})=1$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что $\mu_n \to \mu$ слабо в каждом круге $D(R)$, $R>0$.

Рассмотрим теперь два случая.

1°. $\underline{\lim}\, C_n < +\infty$. Еще раз выбирая подпоследовательность, считаем, что $v_n \to u \in U^+$. Применим к функции u лемму 2 с $\delta = x^2/(16\pi^2)$. Получим разбиение круга $\overline{D(1)}$ на три множества E, $L_n = L_{v_n}$ и $M_n = \{z \in \overline{D(1)}:\ v_n(z) \geqslant \varepsilon\}$, причем при достаточно больших n из выбранной последовательности справедливо

$$\mu_n E \leqslant \delta, \qquad m_2 L_n \leqslant \delta. \tag{3.4}$$

В силу (3.1), (3.3), (3.4) выполняется:

$$\iint\limits_{E\cup L_n} \rho_{P_n} dm_2 \leqslant \left(\pi \iint\limits_E \rho_{P_n}^2 dm_2\right)^{1/2} + (\pi n m_2 L_n)^{1/2} =$$

$$= (\pi^2 n \mu_n E)^{1/2} + (\pi n m_2 L_n)^{1/2} \leqslant 2\pi\sqrt{n\delta} = \frac{x\sqrt{n}}{2}. \tag{3.5}$$

Далее, образ множества M_n при отображении P_n содержится во внешности круга радиуса $\sqrt{e^{2n\varepsilon}-1}$ с центром в нуле. Поэтому сферическая площадь этого образа (с учетом кратности) стремится к 0 при $n\to\infty$ по выбранной последовательности. Отсюда с учетом (3.1) получаем:

$$\iint\limits_{M_n} \rho_{P_n} dm_2 = o(1), \quad n\to\infty. \tag{3.6}$$

Но (3.5) и (3.6) противоречат соотношению (3.2).

2°. $C_n \to +\infty$. Тогда из известной оценки Картана — Альфорса для потенциалов снизу (см., например, [8], [7]) следует, что при достаточно больших n из выбранной последовательности справедливо

$$v_n(z) \geqslant 1, \quad z \in \overline{D(1)} \setminus L_n,$$

где $m_2 L_n < \delta$. Рассуждая, как в первом случае, опять получим противоречие с (3.2). Теорема 1 доказана.

§ 4

Пусть f — целая функция порядка $\lambda<\infty$. Рассмотрим *функцию сравнения* $V(r)=r^\lambda l(r)$ такую, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{V(r)}=1,\quad M(r,f)=\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|,$$

и $l(r)\sim l(2r)$, $r\to\infty$. Такая функция $V(r)$ всегда существует [9].

Обозначим через $n(r,a)$ количество корней уравнения $f(z)=a$ (с учетом кратности) в круге $D(r)$, а через $n(r,a;S)$ — количество корней этого уравнения на множестве $S\cap D(r)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть f — целая функция порядка $\lambda<\infty$, V — функция сравнения. Тогда существует множество S нулевой плотности такое, что для всех $a\in\mathbf{C}$ выполняется*

$$n(r,a)=n(r,a;S)+o(V(r)),\quad r\to\infty.$$

Замечание 1. Рассмотрение эллиптических функций показывает, что теорема 2 перестает быть справедливой для мероморфных функций.

Замечание 2. Теорема 2 становится бессодержательной, если $\lambda=0$. В этом случае, как показали А. А. Гольдберг и Н. В. Заболоцкий [10], для всех $a\in\mathbf{C}$ выполняется $n(r,a)=o(V(r))$, $r\to\infty$. Если же $\lambda>0$, то хорошо известно [9], что для всех $a\in\mathbf{C}$, кроме, возможно, одного исключительного, выполняется $\varlimsup\limits_{r\to\infty} n(r,a)/V(r)>0$.

Отметим, что в работе [1] из гипотезы (1.2) выведено более сильное, чем теорема 2, утверждение как по характеристике множества S, так и по оценке остаточного члена.

Доказательство теоремы 2. Используем обозначения $x^+=\max(x,0)$, $x^-=(-x)^+$. Обозначим через $\mathbf{E}_L(f)$ множество таких $a\in\mathbf{C}$, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta\geqslant\lambda\log r \tag{4.1}$$

для неограниченного множества значений r. Известно [11], что

$$m_2\mathbf{E}_L(f)=0. \tag{4.2}$$

Не уменьшая общности, считаем, что $f(0)=1$ и что $0\notin\mathbf{E}_L(f)$. Выберем большое число $M>0$ и рассмотрим в круге $D(2)$ семейство субгармонических функций

$$v_{n,a}(z)=\frac{\log|f(2^nz)-a|}{V(2^n)},\quad n=1,2,\ldots,$$
$$a\in Q=\left\{a\in\mathbf{C}:|a|\leqslant M,|a-1|\geqslant\frac{1}{M}\right\}. \tag{4.3}$$

Это семейство содержится в некотором множестве U (определенном перед леммой 2).

Из (4.1) и (4.3) следует, что при $a\notin\mathbf{E}_L(f)$ выполняется:

$$\operatorname{dist}(v_{n,a},U^+)\leqslant\|v_{n,a}-v^+_{n,a}\|=\|v^-_{n,a}\|=$$
$$=\frac{1}{V(2^n)}\int\limits_0^2\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(2^nre^{i\theta})-a|}rdrd\theta\leqslant C_1n(V(2^n))^{-1},\quad n\geqslant n_0(a), \tag{4.4}$$

где C_1 — постоянная, зависящая только от функции V.

Для каждого $\delta>0$ и каждой функции $u\in U^+$ выберем число $\varepsilon=\varepsilon(\delta,u)<\delta$ согласно лемме 2 и рассмотрим покрытие множества

$U^+\subset U$ шарами радиусов $\varepsilon(\delta, u)/3$ с центрами в каждой точке $u\in U^+$. В силу компактности найдется конечное подпокрытие шарами с центрами в некоторых точках $u_{i,\delta}$, $1\leqslant i\leqslant N_\delta$. Положим

$$\gamma(\delta)=\min\{\varepsilon(\delta, u_{i,\delta})/3 : 1\leqslant i\leqslant N_\delta\}\to 0, \quad \delta\to 0.$$

Выберем последовательность $\delta_n\to 0$, убывающую настолько медленно, чтобы выполнялось

$$C_1 n/V(2^n)<\gamma(\delta_n)=o(1), \qquad n\to\infty. \tag{4.5}$$

Положим $v_n=v_{n,0}$. Неотрицательная функция $v_n{}^+$ содержится в одном из N_{δ_n} шаров построенного выше конечного покрытия. Обозначим центр этого шара через u_n, а радиус — через ε_n. По построению выполняется: $3\varepsilon_n=\varepsilon(\delta_n, u_n)$, $\gamma(\delta_n)<\varepsilon_n$,

$$\|u_n-v_n^+\|<\varepsilon_n. \tag{4.6}$$

Применим лемму 2 к $u=u_n$, $\delta=\delta_n$. В силу выбора ε_n утверждение леммы выполняется с $\varepsilon=3\varepsilon_n$. Лемма 2 дает множества E_n, $L_n=L_{v_n^+}$ такие, что для любой функции $v\in U$ такой, что $\|v-u_n\|<3\varepsilon_n$, выполняется

$$\mu_v E_n<\delta_n \tag{4.7}$$

и, кроме того, с учетом (4.6) выполняется

$$\{z\in\overline{D(1)} : v_n^+(z)<3\varepsilon_n\}\subset E_n\cup L_n, \tag{4.8}$$

$$m_2 L_n<\delta_n. \tag{4.9}$$

Пользуясь неравенством $\log^+|a+b|\leqslant\log^+|a|+\log^+|b|+\log 2$ и соотношением (4.5), получаем:

$$|v_{n,a}^+(z)-v_n^+(z)|\leqslant C_2(V(2^n))^{-1}<\gamma(\delta_n)<\varepsilon_n \tag{4.10}$$

при $z\in D(2)$, $n>n_0(a)$. В силу (4.10) и (4.8) при любом $a\in Q$, начиная с некоторого номера, выполняется:

$$\{z\in\overline{D(1)} : v_{n,a}(z)<\varepsilon_n\}\subset\{z\in\overline{D(1)} : v_n(z)<2\varepsilon_n\}\subset E_n\cup L_n. \tag{4.11}$$

Пусть теперь $S_n=\{z : 2^{n-1}<|z|\leqslant 2^n,\ 2^{-n}z\in L_n\}$, $S^Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. В силу (4.9) имеем:

$$m_2(S^Q\cap D(2^n))=m_2\left(\bigcup_{k=1}^{n} S_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n} 2^k\delta_k=o(2^n), \quad n\to\infty,$$

поэтому множество S^Q имеет нулевую плотность.

Пусть $a\in Q\setminus \mathrm{E}_L(f)$. Оценим количество a-точек функции f на множестве $\{z : 2^{n-1}<|z|\leqslant 2^n\}\setminus S_n$. Это количество равно $V(2^n)\ \mu_{v_{n,a}}\left(\left\{z:\frac{1}{2}<|z|\leqslant 1\right\}\setminus L_n\right)$. Заметим сначала, что функция $v_{n,a}$ — гармоническая на множестве $\{z\in D(2) : v_{n,a}(z)\geqslant\varepsilon_n\}$. Поэтому, используя (4.11), получаем:

$$\mu_{v_{n,a}}\left(\left\{z:\frac{1}{2}<|z|\leqslant 1\right\}\setminus L_n\right)\leqslant\mu_{v_{n,a}}(E_n). \tag{4.12}$$

Далее, из (4.4), (4.5), (4.10) и (4.6) следует, что при $a\in Q\setminus \mathrm{E}_L(f)$ справедливо:

$$\|v_{n,a}-u_n\|\leqslant\|v_{n,a}-v_{n,a}^+\|+\|v_{n,a}^+-v_n^+\|+$$
$$+\|v_n^+-u_n\|\leqslant\gamma(\delta_n)+\varepsilon_n+\varepsilon_n\leqslant 3\varepsilon_n, \quad n>n_0(a).$$

Следовательно, к функции $v_{n,a}$ применима оценка (4.7), и мы получаем:

$$\mu_{v_{n,a}} E_n < \delta_n. \tag{4.13}$$

Используя (4.12), (4.13) и свойства функции сравнения V, получаем, что количество a-точек функции f, попадающих в $\overline{D(2^n)} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} S_k$, есть

$$\sum_{k=1}^{n} V(2^k) \mu_{v_{k,a}} E_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \delta_k V(2^k) = o\left(\sum_{k=1}^{n} V(2^k)\right) = o(V(2^n)), \quad n \to \infty.$$

Поэтому при $a \in Q \setminus \mathrm{E}_L(f)$ выполняется

$$n(r, a) = n(r, a; S^Q) + o(V(r)), \quad r \to \infty.$$

Рассмотрим теперь счетное семейство множеств

$$Q_k = \left\{a \in \mathbf{C} : |a| \leqslant k, |a-1| \geqslant \frac{1}{k}\right\},$$

покрывающих в совокупности всю плоскость $\mathbf{C}$, кроме точки 1. Каждому Q_k соответствует множество $S(k) = S^{Q_k}$ нулевой плоскости такое, что для всех $a \in Q_k \setminus \mathrm{E}_L(f)$ выполняется

$$n(r, a) = n(r, a; S(k)) + o(V(r)), \quad r \to \infty. \tag{4.14}$$

Выберем возрастающую последовательность положительных чисел (r_k), $r_k \to \infty$, так, чтобы выполнялось

$$m_2((S(1) \cup \ldots \cup S(k)) \cap D(r)) \leqslant 2^{-k} r^2, \quad r > r_k. \tag{4.15}$$

Положим $S_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (S(k) \setminus \overline{D(r_k)})$. Если $r_{k-1} \leqslant r < r_k$, то в силу (4.15) справедливо $m_2(S_0 \cap D(r)) \leqslant 2^{-k+1} r^2$. Следовательно, плотность множества S_0 равна 0. Из (4.14) следует, что при $a \notin \mathrm{E}_L(f)$, $a \neq 1$, выполняется

$$n(r, a) = n(r, a, S_0) + o(V(r)), \quad r \to \infty.$$

Наконец, добавляя к множеству S_0 множество $f^{-1}(\mathrm{E}_L(f) \cup \{1\})$, мера которого равна нулю в силу (4.2), получим искомое множество S. Теорема доказана.

Авторы благодарят В. С. Азарина, А. Л. Вольберга, А. А. Гольдберга и С. Ю. Фаворова за обсуждение этой работы и ценные замечания.

Литература

1. *Littlewood J.* On some conjectural inequalities with applications to the theory of integral functions.— J. London Math. Soc., 1952, v. 27, № 4, p. 387—392.
2. *Hayman W. K.* On a conjecture of Littlewood.— J. d'Analyse Math., 1979, v. 36, p. 75—95.
3. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbf{R}^n$. М.: Мир, 1978.
4. *Øksendal B.* Null sets for measures orthogonal to $R(x)$ — Amer. J. Math., 1972, v. 94, № 2, p. 331—342.
5. *Øksendal B.* Brownian motion and sets of harmonic measure zero.— Pacific. J. Math., 1981, v. 95, p. 179—192.
6. *Макаров Н. Г.* Определяющие подмножества, носитель гармонической меры и возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве.— Докл. АН СССР, 1984, т. 247, № 5, с. 1033—1037.
7. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
8. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций. I. Текст лекций. Харьков: ХГУ, 1978.
9. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
10. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка.— Матем. заметки, 1983, т. 34, № 2, с. 227—236.
11. *Littlewood J.* On exceptional values of power series.— J. London Math. Soc., 1930, v. 5, p. 82—87.

Поступила в редакцию 30.I.1985