О нуляхъ цѣлой функціи Эрмита и функцій Лямэ.

А. А. Маркова.

(Извлеченіе изъ письма академика А. А. Маркова къ проф. А. М. Ляпунову).

Въ надеждѣ, что Вы сохранили интересъ къ функціямъ Лямэ, я позволяю себѣ обратить Ваше вниманіе на замѣтку*) г-на Клейна „Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung", которая, впрочемъ, касается не столько самихъ функцій Лямэ сколько цѣлой функціи Эрмита, связанной извѣстнымъ образомъ съ уравненіемъ Лямэ.

На двухъ фигурахъ г-нъ Клейнъ показываетъ, какъ распредѣляются нули этой цѣлой функціи въ различныхъ случаяхъ, но не приводитъ никакого доказательства.

Обдумывая предложеніе г-на Клейна, я убѣдился, что для его доказательства можно съ успѣхомъ воспользоваться разсужденіями вполнѣ подобными тѣмъ, какія были мною примѣнены къ другой цѣлой функціи въ мемуарѣ**) „О цѣлой функціи

$$x^n F\left(\frac{-n-\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1-\Delta}{2},\ 1-\Delta,\ \frac{1}{x}\right) F\left(\frac{-n+\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1+\Delta}{2},\ 1+\Delta,\ \frac{1}{x}\right)$$

и о функціяхъ болѣе общаго характера"; что я и предполагаю сдѣлать въ настоящемъ письмѣ.

*) Mathematische Annalen XL.
**) Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg; VII série, XLI.

Начнемъ съ установленія обозначеній. Пусть

$$\varphi = \varphi(x) = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3), \quad e_1 < e_2 < e_3, \quad A = n(n+1),$$

$F(x, B)$ цѣлая функція n-ой степени отъ x, равная произведенію $y_1 y_2$ двухъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія

$$2\varphi y'' + \varphi' y' - 2(Ax+B)y = 0.$$

Извѣстно, что функція $F(x, B)$ удовлетворяетъ линейному дифференціальному уравненію третьяго порядка

$$2\varphi F''' + 3\varphi' F'' + \varphi'' F' - 8(Ax+B)F' - 4AF = 0$$

и нелинейному уравненію второго порядка

$$(F'F' - 2FF'')\varphi - FF'\varphi' + 4(Ax+B)FF = \Phi(B),$$

гдѣ $\Phi(B)$ не зависитъ отъ x.

Извѣстно также, что $F(x, B)$ цѣлая функція n-ой степени не только относительно x, но и относительно B, если коэффиціентъ при x^n мы полагаемъ въ этой функціи равнымъ единицѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что $\Phi(B)$ цѣлая функція $2n+1$ степени отъ B и что въ ней коэффиціентъ при B^{2n+1} число положительное.

Мы будемъ заниматься вопросомъ о распредѣленіи вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

по промежуткамъ

$$(-\infty, e_1), \quad (e_1, e_2), \quad (e_2, e_3), \quad (e_3, +\infty)$$

при различныхъ вещественныхъ значеніяхъ параметра B.

Если число B возрастаетъ непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$, это распредѣленіе мѣняется только при переходѣ B черезъ корни уравненія

$$\Phi(B) = 0.$$

Для значеній B, удовлетворяющихъ послѣднему уравненію, функція $F(x, B)$ обращается въ квадратъ одной изъ функцій Лямэ, т. е. принимаетъ видъ

$$(x-e_1)^{\varepsilon_1}(x-e_2)^{\varepsilon_2}(x-e_3)^{\varepsilon_3}[f(x)]^2,$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція отъ x, а показатели $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ имѣютъ одно изъ двухъ значеній: 0 и 1.

Относительно функцій Лямэ я буду предполагать извѣстными только слѣдующія предложенія:

1) онѣ соотвѣтствуютъ вещественнымъ значеніямъ B;

2) число ихъ равно $2n+1$ и каждой изъ нихъ соотвѣтствуетъ свое особое значеніе B, такъ что различнымъ функціямъ Лямэ соотвѣтствуютъ различныя значенія B;

3) всѣ корни уравненія

$$f(x)=0$$

вещественны и лежатъ между e_1 и e_3.

Въ силу этихъ предложеній всѣ корни уравненія

$$\Phi(B)=0$$

вещественны и различны.

Пусть они будутъ

$$B_1<B_2<\ldots<B_i<B_{i+1}<\ldots<B_{2n+1}.$$

Положимъ еще

$$\frac{\partial F(x,B)}{\partial B}=U(x,B),$$

$$F(x,B_i)=(x-e_1)^{\varepsilon_1^{(i)}}(x-e_2)^{\varepsilon_2^{(i)}}(x-e_3)^{\varepsilon_3^{(i)}}[f_i(x)]^2$$

и условимся обозначать черезъ N_i' число корней уравненія

$$f_i(x)=0$$

въ промежуткѣ (e_1, e_2), а черезъ N_i'' число корней того-же уравненія въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Наконецъ символомъ ξ_i будемъ обозначать любой корень уравненія

$$f_i(x)=0,$$

а буквою e любое изъ чиселъ e_1, e_2, e_3.

Пока B лежитъ въ одномъ изъ промежутковъ

$$(-\infty, B_1),\ (B_1, B_2), \ldots, (B_i, B_{i+1}), \ldots, (B_{2n}, B_{2n+1}),\ (B_{2n+1}, +\infty)$$

распредѣленіе вещественныхъ корней уравненія

$$F(x,B)=0$$

по промежуткамъ

$$(-\infty, e_1),\ (e_1, e_2),\ (e_2, e_3),\ (e_3, +\infty)$$

не мѣняется при возрастаніи B.

Измѣненія-же въ этомъ распредѣленіи происходятъ только при переходѣ B черезъ значенія

$$B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}.$$

Для изслѣдованія этихъ измѣненій намъ надо при значеніяхъ B близкихъ къ B_i разсмотрѣть корни x уравненія

$$F(x,B)=0$$

близкіе къ ξ_i и къ e.

При безконечно малыхъ величинахъ разностей

$$x-\xi_i \quad \text{и} \quad B-B_i$$

уравненіе

$$F(x,B)=0$$

обращается въ слѣдующее

$$(x-\xi_i)^2 F''(\xi_i, B_i)+2(B-B_i)U(\xi_i, B_i)=0.$$

Съ другой стороны изъ вышеуказаннаго нелинейнаго дифференціальнаго уравненія нетрудно вывесть слѣдующее равенство

$$-2U(\xi_i, B_i)F''(\xi_i, B_i)\varphi(\xi_i)=\Phi'(B_i),$$

которое показываетъ, что отношеніе $\dfrac{-U(\xi_i, B_i)}{F''(\xi_i, B_i)}$ имѣетъ тотъ же знакъ какъ и произведеніе

$$\Phi'(B_i)\varphi(\xi_i).$$

Знакъ же послѣдняго произведенія одинаковъ со знакомъ $(-1)^{i-1}$, если ξ_i лежитъ въ промежуткѣ (e_1, e_2), и одинаковъ со знакомъ $(-1)^i$, если ξ_i лежитъ въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Слѣдовательно, если i число нечетное, при переходѣ B черезъ значеніе B_i, отъ меньшихъ величинъ къ бóльшимъ, $2N_i'$ мнимыхъ корней становятся вещественными и лежащими въ промежуткѣ (e_1, e_2), а $2N_i''$ вещественныхъ корней, заключенныхъ въ промежуткѣ (e_2, e_3), становятся мнимыми.

Напротивъ, если i число четное, при такомъ же переходѣ B черезъ значеніе B_i отъ меньшихъ величинъ къ бóльшимъ, вещественные корни, заключенные въ промежуткѣ (e_1, e_2), обращаются въ $2N_i'$ мнимыхъ корней, а $2N_i''$ мнимыхъ корней становятся вещественными и лежащими въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Обращаясь къ тому корню x уравненія

$$F(x, B) = 0,$$

который близокъ къ e при B близкомъ къ B_i, мы прежде всего должны предположить

$$F(e, B_i) = 0.$$

Затѣмъ безъ большого труда находимъ равенство

$$-U(e, B_i)F'(e, B_i)\varphi'(e) = \Phi'(B_i)$$

и, предполагая разности

$$x - e \quad \text{и} \quad B - B_i$$

безконечно малыми, получаемъ уравненіе

$$(x-e)F'(e, B_i) + (B - B_i)U(e, B_i) = 0.$$

Отсюда нетрудно заключить, что знакъ разности $x - e$ одинаковъ со знакомъ произведенія $(-1)^{i-1}(B - B_i)$ при $e = e_1$ и при $e = e_3$; если-же $e = e_2$, то знакъ разности $x - e$ одинаковъ со знакомъ $(-1)^i (B - B_i)$.

На основаніи всего сказаннаго нами легко составить слѣдующую таблицу:

Предѣлы для B	Число корней уравненія $F(x, B) = 0$			
	въ промеж. $(-\infty, e_1)$	въ промежуткѣ (e_1, e_2)	въ промежуткѣ (e_2, e_3)	въ промеж. $(e_3, +\infty)$
$-\infty < B < B_1$	$\varepsilon_1^{(1)}$	0	$\varepsilon_2^{(1)} + 2N_1'' + \varepsilon_3^{(1)}$	0
$B_1 < B < B_2$	0	$\varepsilon_1^{(1)} + 2N_1' + \varepsilon_2^{(1)} =$ $\varepsilon_1^{(2)} + 2N_2' + \varepsilon_2^{(2)}$	0	$\varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_3^{(2)}$
$B_2 < B < B_3$	$\varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_1^{(3)}$	0	$\varepsilon_2^{(2)} + 2N_2'' + \varepsilon_3^{(2)} =$ $\varepsilon_2^{(3)} + 2N_3'' + \varepsilon_3^{(3)}$	0
$B_3 < B < B_4$	0	$\varepsilon_1^{(3)} + 2N_3' + \varepsilon_2^{(3)} =$ $\varepsilon_1^{(4)} + 2N_4' + \varepsilon_2^{(4)}$	0	$\varepsilon_3^{(3)} = \varepsilon_3^{(4)}$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$B_{2n} < B < B_{2n+1}$	$\varepsilon_1^{(2n)} = \varepsilon_1^{(2n+1)}$	0	$\varepsilon_2^{(2n)} + 2N_{2n}'' + \varepsilon_3^{(2n)} =$ $\varepsilon_2^{(2n+1)} + 2N_{2n+1}'' + \varepsilon_3^{(2n+1)}$	0
$B_{2n+1} < B < +\infty$	0	$\varepsilon_1^{(2n+1)} + 2N_{2n+1}' + \varepsilon_2^{(2n+1)}$	0	$\varepsilon_3^{(2n+1)}$

А изъ счета мнимыхъ корней выводимъ:

$$N_1'' = N_2'', \quad N_2' = N_3', \quad N_3'' = N_4'', \ldots, \quad N_{2n-1}'' = N_{2n}'', \quad N_{2n}' = N_{2n+1}'.$$

Разсматривая нашу таблицу и принимая во вниманіе только что написанныя равенства, нетрудно посредствомъ простаго сложенія и вычитанія придти къ такой формулѣ

$$2N_1' + \varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_2^{(1)} - 2N_{2n+1}' = \varepsilon_2^{(2)} - \varepsilon_2^{(3)} + \varepsilon_2^{(4)} - \varepsilon_2^{(5)} + \ldots +$$
$$+ \varepsilon_2^{(2n-2)} - \varepsilon_2^{(2n-1)} + \varepsilon_1^{(2n)} + \varepsilon_2^{(2n)}.$$

Съ другой стороны изъ вида функціи $F(x, B)$ легко заключить, что при весьма большихъ значеніяхъ B^2 модули корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

должны быть также весьма большими и потому сами корни не могутъ заключаться между e_1 и e_3.

Поэтому должно быть

$$N_1'' = 0, \quad \varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_3^{(1)} = 0, \quad 2N_1' + \varepsilon_1^{(1)} = n,$$

$$N_{2n+1}' = 0, \quad \varepsilon_1^{(2n)} = \varepsilon_1^{(2n+1)} = \varepsilon_2^{(2n+1)} = 0, \quad 2N_{2n+1}'' + \varepsilon_3^{(2n+1)} = n,$$

въ силу чего приведенное выше равенство даетъ

$$n = \varepsilon_2^{(2)} - \varepsilon_2^{(3)} + \varepsilon_2^{(4)} - \varepsilon_2^{(5)} + \ldots + \varepsilon_2^{(2n-2)} - \varepsilon_2^{(2n-1)} + \varepsilon_2^{(2n)}$$

и слѣдовательно

$$\varepsilon_2^{(2)} = \varepsilon_2^{(4)} = \ldots = \varepsilon_2^{(2n-2)} = \varepsilon_2^{(2n)} = 1,$$

$$\varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_2^{(3)} = \varepsilon_2^{(5)} = \ldots = \varepsilon_2^{(2n-1)} = \varepsilon_2^{(2n+1)} = 0.$$

Такимъ образомъ всѣ числа $\varepsilon_2^{(i)}$ вполнѣ опредѣлены.

Обращаясь къ числамъ $\varepsilon_1^{(i)}$ и $\varepsilon_3^{(i)}$, замѣтимъ, что $\varepsilon_1^{(1)}$ равняется нулю при n четномъ и единицѣ при n нечетномъ. Это число мы обозначимъ черезъ ε.

Затѣмъ послѣдовательно находимъ:

$$\varepsilon_1^{(2)} = 1 - \varepsilon = \varepsilon_1^{(3)}, \quad \varepsilon_1^{(4)} = \varepsilon_1^{(5)} = \varepsilon, \quad \varepsilon_1^{(6)} = \varepsilon_1^{(7)} = 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon_1^{(8)} = \varepsilon_1^{(9)} = \varepsilon, \ldots,$$

$$\varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_3^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_3^{(3)} = \varepsilon_3^{(4)} = 1, \quad \varepsilon_3^{(5)} = \varepsilon_3^{(6)} = 0, \quad \varepsilon_3^{(7)} = \varepsilon_3^{(8)} = 1, \ldots.$$

Въ виду всѣхъ этихъ равенствъ, таблица распредѣленія вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

принимаетъ слѣдующій видъ:

Предѣлы для B	Число корней уравненія $F(x, B) = 0$ въ промежут. $(-\infty, e_1)$	въ промежут. (e_1, e_2)	въ промежут. (e_2, e_3)	въ промежут. $(e_3, +\infty)$
$-\infty < B < B_1$	$\varepsilon = \frac{1-(-1)^n}{2}$	0	0	0
$B_1 < B < B_2$	0	n	0	0
$B_2 < B < B_3$	$1 - \varepsilon$	0	1	0
$B_3 < B < B_4$	0	$n - 1$	0	1
$B_4 < B < B_5$	ε	0	2	0
$B_5 < B < B_6$	0	$n - 2$	0	0
$B_6 < B < B_7$	$1 - \varepsilon$	0	3	0
$B_7 < B < B_8$	0	$n - 3$	0	1
$B_8 < B < B_9$	ε	0	4	0
$B_9 < B < B_{10}$	0	$n - 4$	0	0
$B_{10} < B < B_{11}$	$1 - \varepsilon$	0	5	0
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

Послѣдняя таблица, по существу дѣла, равносильна чертежамъ г-на Клейна.

Замѣчу, что предыдущія разсужденія служатъ также для доказательства замѣченнаго Вами, въ диссертаціи „Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости", закона послѣдовательности функцій Лямэ.

Объ измѣненіи діаметра солнца въ зависимости отъ явленій, наблюдаемыхъ на его поверхности.

I. I. Сикора.

Съ самаго начала моихъ занятій солнцемъ меня поражали величіе, величина и сила явленій, происходящихъ на немъ; кромѣ того приходилось неоднократно наблюдать движеніе свѣтящейся массы протуберанцевъ. Это навело меня на мысль, что, коль скоро явленія пятенъ и протуберанцевъ реальныя, то, такъ какъ эти явленія захватываютъ большія пространства поверхности солнца и достигаютъ иногда грандіозныхъ размѣровъ, не должны ли они производить подъемы и опусканія поверхности солнца и, слѣдовательно, увеличивать или уменьшать діаметры солнца въ этихъ направленіяхъ.

Прійдя къ этому мнѣнію, я началъ рыться въ журналахъ и спеціальныхъ работахъ по теоріи солнца, думая найти какія-нибудь работы и указанія по этому вопросу; но оказалось, что по этому вопросу почти ничего не сдѣлано, такъ какъ всѣ работы относительно измѣненія діаметра солнца носятъ статистическій характеръ.

Мнѣ кажется, что первый поднялъ вопросъ объ измѣненіи діаметра солнца въ зависимости отъ явленій солнечныхъ пятенъ и протуберанцевъ A. Secchi; его статья относительно этого помѣщена въ журналѣ „Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani" за 1873 годъ. Эта статья касается 182 меридіанальныхъ наблюденій діаметра солнца за время отъ 12 іюля 1871 г. по 12 іюля 1872 г. и въ ней между прочимъ A. Secchi дѣлаетъ выводъ, что діаметръ больше, когда пятенъ и протуберанцевъ меньше. Затѣмъ относительно зависимости величины діаметра солнца отъ пятнообразовательной дѣятельности солнца существуютъ работы Tacchini, Hilfiker-a, Wolf-a, Auwers-a и другихъ. Большинство этихъ работъ сводится къ сравненію кривыхъ такъ называемыхъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ діаметровъ солнца, выводимыхъ изъ