АКАДЕМИЯ НАУК УССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

МИХАЙЛОВА Ирина Валериевна

УДК 517.5

ТЕОРИЯ ЦЕЛЫХ J- РАСТЯГИВАЮЩИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

01.01.01 - математический анализ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель - академик АН УССР, профессор В.А.Марченко

доктор физ.-мат.наук, профессор $\boxed{\text{В.П.Потапов}}$

Харьков - 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

<u>К постановке и истории вопроса</u>. Согласно классическим результатам (Ф.Рисс, Р.Неванлинна, В.И.Смирнов), всякая функция $S(z)$, аналитическая в круге $|z|<1$, и удовлетворяющая там неравенству $|S(z)|<1$, допускает факторизацию вида:

$$S(z)=\prod_k b_k(z)e^{-\int\limits_{|\theta|=1}\frac{\theta+z}{\theta-z}d\sigma(\theta)} \qquad (|z|<1) \tag{I}$$

где $b_k(z)$ - множители Бляшке, $d\sigma(t)\geq 0$. Множитель Бляшке $b_k(z)$ имеет вид: $b_k(z)=\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\,\frac{|z_k|}{z_k}$, $|z_k|<1$, определен во всей комплексной плоскости и имеет полюс в точке $z=1/\bar{z}_k$ вне единичного круга.

Если $S(z)$ "принудительно" продолжить во внешность единичного круга, полагая $S(z)=S^{*-1}(1/\bar{z})$, то соотношение (I) становится справедливым всюду на множестве $\{z:\ |z|\neq 1\}$. Сомножитель $e^{-\int_{|\theta|=1}\frac{\theta+z}{\theta-z}d\sigma(\theta)}$ в (I) можно трактовать как "континуальное" произведение множителей вида $e^{-\sigma_0\frac{\theta+z}{\theta-z}}$ где $\sigma_0>0$. Функция же $e^{-\sigma_0\frac{\theta+z}{\theta-z}}$ является пределом произведений множителей Бляшке:

$$e^{-\sigma_0\frac{\theta+z}{\theta-z}}=\lim_{z=\frac{n-\sigma_0}{n}\theta,\ n\to+\infty}\left(\frac{z_n-z}{1-\bar{z}_n z}\,\frac{|z_n|}{z_n}\right)^n$$

В.П.Потапову принадлежит глубокое и плодотворное обобщение на матричные аналитические функции сформулированной выше теоремы о факторизации [I]. Именно, В.П.Потапов рассматривал, так называемые, аналитические $\mathcal{J}$ - растягивающие матрицы-функции, то есть, матрицы-функции (размера $n\times n$), мероморфные на множестве $\{z:\ |z|\neq 1\}$, удовлетворяющие там соотношению симметрии:

$$W(z)\mathcal{J}W^{*}\left(\frac{1}{\bar z}\right)=\mathcal{J} \qquad (|z|\neq 1) \tag{2}$$

и неравенству

$$\frac{W(z)\mathcal{J}W^{*}(z)-\mathcal{J}}{1-z\bar z}\geqslant 0 \qquad (|z|\neq 1) \tag{3}$$

где $n\times n$ матрица $\mathcal{J}$ - так называемая, метризующая матрица, удовлетворяет условиям

$$\mathcal{J}^2=I,\ \mathcal{J}^*=\mathcal{J}$$

(скалярное произведение $[x,y]=x\mathcal{J}y^*$, вообще говоря, индефинитно). В частности, возможно, что $\mathcal{J}=I$ или $\mathcal{J}=-I$, где I - единичная матрица. Если $\mathcal{J}=-I$, то неравенство (3) принимает вид $\frac{I-W(z)W^*(z)}{1-z\bar z}\geqslant 0$ и значит, $W(z)$ не имеет полюсов в круге $|z|<1$; если $\mathcal{J}=I$, то неравенство (3) таково: $\frac{I-W(z)W^*(z)}{z\bar z-1}\geqslant 0$, в этом случае $W(z)$ не имеет полюсов в $|z|>1$. В случае метризующей матрицы $\mathcal{J}$, отличной от $+I$ и $-I$, матрица-функция $W(z)$ может иметь полюсы как внутри, так и вне единичной окружности.

Мероморфная матрица-функция $W(z)$, удовлетворяющая (2) и (3), имеет предельные значения $W^+(t)=\lim\limits_{r\to 1+0} W(rt)$ и $W^-(t)=\lim\limits_{r\to 1-0} W(rt)$ $(t=e^{i\theta})$ при почти всех (по мере Лебега) t из единичной окружности. Вообще говоря, $W^+(t)\neq W^-(t)$. Если $W^+(t)=W^-(t)$ почти всюду, то матрица-функция $W(z)$ называется $\mathcal{J}$ - внутренней.

В.П.Потапов получил аналогичное (I) мультипликативное разложение матрицы-функции $W(z)$, мероморфной в $|z|\neq 1$ и удовлетворяющей (2),(3):

$$W(z)=\overset{\curvearrowright}{\prod_{k}} b_k(z) \overset{\curvearrowright}{\int_0^{l}} e^{-\frac{e^{i\theta(t)}+z}{e^{i\theta(t)}-z}\, d\sigma(t)} \qquad (4)$$

Ю.П.Гинзбург([2,3])перенес результаты В.П.Потапова на некоторые классы $\mathcal{J}$ - растягивающих оператор-функций в гильбертовом пространстве, а также сделал ряд важных усовершенствований в ее изложении.

Роль, которую для скалярных функций играют множители Бляшке, для $\mathcal{J}$ - растягивающих матриц-функций играют, так называемые, множители Бляшке-Потапова. В матричной индефинитной ситуации $(\mathcal{J} \neq \pm I)$, в отличие от скалярной, множители Бляшке-Потапова могут быть трех видов: с полюсом внутри, вне и на единичной окружности. Именно, эти множители имею вид:

(I) Если $|z_0| < 1$, то $b(z)=\left(\frac{z_0 - z}{1-\bar{z}_0 z}\frac{|z_0|}{z_0}\right)(P-I)+P$

(II) Если $|z_0| > 1$, то $b(z)=\left(\frac{z_0 - z}{1-\bar{z}_0 z}\frac{|z_0|}{z_0}\right)(Q+I)+Q$

(III) Если $|z_0| = 1$, то $b(z)= I + \frac{1+\bar{z}_0 z}{1-\bar{z}_0 z}\mathcal{E}$

Матрицы P, Q, $\mathcal{E}$ называются $\mathcal{J}$ - проекторами I-III видов. По определению, они обладают свойствами:

(I) $P^2=P,\ P\mathcal{J}\geq 0$, (II) $Q^2=-Q,\ Q\mathcal{J}\geq 0$, (III) $\mathcal{E}^2=0,\ \mathcal{E}\mathcal{J}\geq 0$

Роль сомножителя $e^{-\int_{|\theta|=1}\frac{\theta+z}{\theta-z}d\sigma(\theta)}$ играет в матричном случае мультипликативный интеграл

$$\overset{\curvearrowright}{\int_0^{l}} e^{-\frac{e^{i\theta(t)}+z}{e^{i\theta(t)}-z}\, d\sigma(t)}$$

- предел интегральных произведений вида $\overset{\curvearrowright}{\prod_{k}} e^{-\frac{e^{i\theta(t_k)}-z}{e^{i\theta(t_k)}-z}\int_{t_{k-1}}^{t_k} d\sigma(t)}$

Результаты В.П.Потапова могут быть посредством "конформной пересадки" из единичного круга в верхнюю полуплоскость сформулированы для матриц-функций $\mathfrak{A}(z)$, мероморфных вне вещественной оси и удовлетворяющих там условию симметрии

$$\mathfrak{A}(z)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(\bar{z}) = \mathcal{J} \qquad (z \neq \bar{z}) \tag{5}$$

и неравенству

$$\frac{\mathfrak{A}(z)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(z) - \mathcal{J}}{(z-\bar{z})/i} \geq 0 \qquad (z \neq \bar{z}) \tag{6}$$

Матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ (5), (6) называется $\mathcal{J}$ - внутренней (в верхней полуплоскости), если $\mathfrak{A}(x+i0) = \mathfrak{A}(x-i0)$ $(x=\bar{x})$ при почти всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Множители Бляшке-Потапова I - III видов для верхней полуплоскости выглядят так: $(\sigma_k = \Im m\, z_k)$:

$$\text{(I)}\quad b_k(z) = I + \frac{2i\sigma_k P}{z - z_k}, \quad \Im m\, z_k > 0$$

$$\text{(II)}\quad b_k(z) = I - \frac{2i\sigma_k Q}{z - z_k}, \quad \Im m\, z_k < 0$$

$$\text{(III)}\quad b_k(z) = I + \frac{i\tau \mathcal{E}}{z - z_k}, \quad z_k = \bar{z}_k$$

где по-прежнему, P, Q, $\mathcal{E}$ - $\mathcal{J}$ - проекторы видов I, II, III.

Центральным в теории аналитических матриц-функций является вопрос о разложении на множители, прежде всего, на множители отвечающие изолированным особенностям. Вопрос об отщеплении от аналитической матрицы-функции множителей, связанных с полюсами - то есть множителей Бляшке-Потапова - был исчерпывающим образом исследован В.П.Потаповым [4], и эти исследования уже нашли многочисленные применения как внутри теории функций, так и в приложениях к электротехнике и теории линейных систем.

Вопрос об отщеплении множителей, отвечающих изолированной существенно особой точке гораздо более сложен и менее изучен. Вместе с тем, он весьма важен. Этот вопрос тесно связан с изучением непрерывных цепочек инвариантных подпространств, анализом линейных систем с распределенными параметрами. Мы занимаемся здесь исследованием аналитических J - внутренних в верхней полуплоскости матриц-функций, имеющих во всей комплексной плоскости лишь одну особенность (если эта особенность существенная, то она не может лежать ни в $\Im z > 0$, ни в $\Im z < 0$). Без потери общности можно считать, что эта особенность - в точке $z = \infty$. Таким образом, мы рассматриваем целые матрицы - функции $\mathfrak{A}(z)$, удовлетворяющие условиям (5), (6)(и значит, условию $\mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^*(z) = J \quad (z = \bar{z})$), то есть, целые J - внутренние матрицы-функции.

Класс целых J - внутренних 2x2 матриц-функций обозначается здесь готической буквой $\mathfrak{M}$.

Теорема В.П.Потапова, в частности, дает и мультипликативное разложение целой J - внутренней матрицы-функции:

$$\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}(0) \int_0^{\ell} e^{-iz\varphi(t)dt} \tag{7}$$

где "показатель" $\varphi(t)$ мультипликативного интеграла удовлетворяет условию

$$\varphi(t)J \geq 0 \tag{8}$$

(и матрица $\varphi(t)$ суммируема). Интеграл в правой части (7) - это предел упорядоченных произведений сомножителей вида $e^{-iz\Delta_k\varphi}$. Условие (8) $\varphi(t)J \geq 0$ является отражением неравенства (6): $\{\mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^*(z) - J\}/\frac{z-\bar{z}}{i} \geq 0$.

В скалярном случае (где необходимо $J = \pm 1$) единственной J - внутренней целой функцией является функция e^{-iza}. Ее мультипликативное разложение тривиально, так как $e^{-iza_1} \cdot e^{-iza_2} = e^{-i(a_1+a_2)z}$ В матричном же случае, ввиду некоммутативности умножения, произведение $e^{-iz\varphi_1} \cdot e^{-iz\varphi_2}$, вообще говоря, не может быть записано в виде $e^{-iz\varphi}$ ни при какой матрице φ , и необходим мультипликативный интеграл.

Если в вопросах мультипликативного разложения рациональных J - внутренних матриц-функций элементарными множителями следует считать множители Бляшке-Потапова, то в вопросах разложения целых матриц-функций элементарным следует считать экспоненциальный множитель $e^{-iz\varphi}$, где $\varphi J \geq 0$. Естественным является выделение экспоненциальных множителей трех видов

(I) e^{-izkP} (II) $e^{-iz\,lQ}$ (III) $e^{-iz\mathcal{E}}$

($k, l > 0$ - числа, P , Q , $\mathcal{E}$ - J - проекторы видов I - III).

Уместно отметить, что экспоненциальные множители I - III видов являются пределами произведений множителей Бляшке-Потапова соответствующих видов. Именно, для I вида: $z_n = i\,\frac{4n-k}{k}$, $e^{-izkP} = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{I + \frac{2i\,\mathrm{Im}\,z_n}{z-z_n}P\right\}^{2n}$; для II вида: $e^{-izkQ} = \lim\limits_{n\to\infty}\left\{I - \frac{2i\,\mathrm{Im}\,d_n}{z-\alpha_n}Q\right\}^{2n}$, $d_n = -z_n$

(элементарный множитель III вида рационален: $e^{-iz\mathcal{E}} = I - iz\mathcal{E}$, и одновременно является множителем Бляшке-Потапова).

Важным внутренним вопросом теории аналитических J - растягивающих матриц-функций является вопрос о том, когда в их мультипликативном разложении фигурируют лишь множители одного из видов (например, только I вида). Для рациональных $\mathcal{J}$ - внутренних матриц-функций $\mathfrak{A}(z)$ этот вопрос решается просто: Если $\mathfrak{A}(z)$ имеет все полюсы в открытой верхней полуплоскости, то в произведении Бляшке-Потапова $\mathfrak{A}(z)=\overset{\curvearrowright}{\prod_k} b_k(z)$ присутствуют лишь множители I вида; симметрично этому случаю, на множители только II вида $\mathfrak{A}(z)$ разлагается, когда все ее полюсы - в открытой нижней полуплоскости; матрица-функция с вещественными полюсами разлагается в произведение множителей III вида.

Д.З.Аров([5]) дал критерий того, что мероморфная $\mathcal{J}$ - внутренняя матрица-функция является произведением Бляшке-Потапова множителей I вида. (Условия отсутствия полюсов в $\operatorname{Im} z \leq 0$ для этого недостаточно, так как в мультипликативном разложении, кроме произведения Бляшке-Потапова, априори, может присутствовать и мультипликативный интеграл).

Естественным является вопрос: при каких условиях целая $\mathcal{J}$ - внутренняя матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ представима мультипликативным интегралом с экспоненциальными множителями лишь I вида:

$$\mathfrak{A}(z)=\mathfrak{A}(0)\overset{\curvearrowright}{\int_0^{\ell}} e^{-iz P(t)dt}, \quad P^2(t)=P(t), \quad P(t)\mathcal{J}\geq 0 \qquad (9)$$

(и аналогичные вопросы для экспоненциальных множителей второго и третьего видов). Исследованием этого вопроса мы занимаемся во второй главе.

Вопрос о мультипликативном разложении целой $\mathcal{J}$ - внутренней матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ - это вопрос о нахождении показателя мультипликативного интеграла (7) по исходной матрице-функции $\mathfrak{A}(z)$. Знаменитая теорема единственности де Бранжа

[6] утверждает, что при естественных условиях нормировки целая 2x2 матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$, J - внутренняя с

$$J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

однозначно определяет показатель $\varphi(t)$ в (7). Такими условиями являются или условие вещественности или условие минимального типа в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$: $\ln \|\mathfrak{A}(iy)\| = o(|y|)$, $y \to +\infty$. В то время, как для всего класса $\mathfrak{M}$ целых J - внутренних матриц-функций трудно ожидать наличия эффективной процедуры нахождения $\varphi(t)$ по $\mathfrak{A}(z)$, для более узких подклассов класса $\mathfrak{M}$ такие процедуры могут быть даны.

Вопрос о восстановлении показателя $\varphi(t)$ по $\mathfrak{A}(z)$ тесно связан с другими вопросами, и прежде всего, с обратными задачами для канонических систем дифференциальных уравнений. Функция $\mathfrak{A}(t,z)$ - мультипликативный интеграл с "переменным верхним пределом": $\mathfrak{A}(t,z) = \int\limits_0^{t} e^{-iz\varphi(v)dv}$, как известно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{A}(t,z) = -iz\,\mathfrak{A}(t,z)\varphi(t) \qquad (0 \leq t \leq L) \qquad (11)$$

где J - из (10), а матрица $\varphi(t)J$ эрмитово положительна: $\varphi(t)J \geq 0$. Система (11) называется <u>канонической системой</u>, а матрица $\varphi(t)J$ - ее эрмитианом. Исходная матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ - это матрица монодромии системы (11).

Таким образом, задача о восстановлении показателя $\varphi(t)$ мультипликативного интеграла (7) может быть переформулирована как задача о восстановлении эрмитиана $\varphi(t)J$ канонической системы (11) по ее матрице монодромии. И значит, В.П.Потапова и Л.де Бранжа теоремы дают, в принципе, ответ на вопрос о восстановлении канонической системы. Налагая же некоторые дополнительные условия на каноническую систему или на ее матрицу монодромии $\mathfrak{A}(z)$, можно получать более эффективные процедуры восстановления эрмитиана $\varphi(t)J$ по матрице $\mathfrak{A}(z)$, чем конструкция, на которой основано доказательство теоремы В.П.Потапова.

Так, если $\mathfrak{A}(z)$ - вещественная ($\mathfrak{A}(z) = \overline{\mathfrak{A}(z)}$ при $z = \bar{z}$) целая J - внутренняя матрица-функция, допускающая представление

$$\mathfrak{A}(z) = Ae^{iza} + Be^{-iza} + \int_0^{2a} e^{iz(a-v)} N(v)\,dv \quad (12)$$

(где A, B - постоянные 2x2 матрицы, а матрица-функция $N(v) \in L^1[0, 2a]$, то $\mathfrak{A}(z)$ является матрицей монодромии вещественной канонической системы (11) ($i\varphi(t) = \overline{i\varphi(t)}$) с абсолютно-непрерывным эрмитианом, обладающим условием симплектичности:

$$\det(\varphi(t)J) \equiv 1, \quad i\varphi(t) = \overline{i\varphi(t)} \quad (13)$$

В этом частном случае каноническая система (11) эквивалентна системе типа Дирака с суммируемым потенциалом:

$$\frac{dU}{dt} = -iz\,U(t,z)J + U(t,z)A(t); \; A(t) = \begin{bmatrix} r(t) & p(t) \\ p(t) & -r(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

(система (14) переходит в (11, 13) после замены:

$$\mathfrak{A}(t,z) = U(t,z)V(t), \; V(t): \; \frac{dV(t)}{dt} = -A(t)V(t), \; \varphi(t) = JV(t)$$

Обратные задачи для таких систем хорошо изучены. В том случае, когда целая $\mathcal{J}$ - внутренняя матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ обладает асимптотикой типа (12), для исследования обратной задачи восстановления дифференциальной системы можно широко использовать операторы преобразования. Впервые такой подход к исследованию обратной спектральной задачи был выдвинут В.А.Марченко в 1950 году, когда В.А.Марченко применил метод операторов преобразования при рассмотрении обратной задачи для уравнения Штурма - Лиувилля. При решении обратной задачи теории рассеяния для системы типа Дирака, операторы преобразования были привлечены в работах Б.М.Левитана и М.Г.Гасымова ([8]). Исследование обратной задачи спектрального анализа для операции Дирака с периодическими коэффициентами дано в работах Т.В.Мисюры ([9],[10]).

Наличие асимптотики типа (12) у матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ представляется нам слишком жестким условием, и актуальной является разработка процедур построения мультипликативного разложения $\mathfrak{A}(z)$ при менее ограничительных предположениях.

Отметим, что М.Г.Крейн в ряде случаев исследовал обратные задачи, опираясь на созданную им теорию интегральных представлений эрмитово положительных функций (не привлекая операторов преобразования) ([11 - 15]). Матрицы монодромии, связанные с многими из рассмотренных М.Г.Крейном задач для струны, не обязательно обладают асимптотикой, аналогичной (12), а являются произвольными целыми $\mathcal{J}$ - внутренними матрицами - функциями (с ограничениями, вытекающими лишь из специального вида канонической системы, соответствующей струне).

Согласно теоремам де Бранжа и Потапова, знание матрицы монодромии $\mathfrak{A}(z)$ полностью определяет каноническую систему, и таким образом, $\mathfrak{A}(z)$ может рассматриваться как набор данных, характеризующий полностью систему. Вся матрица монодромии, однако, является переопределенным набором данных, ввиду соотношения: $\mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^*(\bar{z})\equiv J$. Представляет интерес нахождение таких наборов, которые, не будучи переопределенными, полностью определяли бы целую J - внутреннюю матрицу-функцию, или что то же самое, матрицу монодромии канонической системы, а значит, и саму эту систему. Теория обратных задач дифференциальных уравнений подсказывает, что в качестве таких наборов целесообразно рассматривать спектры различных граничных задач. Задача о восстановлении общей канонической системы (II) по спектрам двух задач с разделенными граничными условиями $y_1(0)=y_1(L)=0$; $y_1(0)=y_2(L)=0$, где $Y(t)=[y_1(t),\ y_2(t)]$ удовлетворяет (II)), может быть трактована как задача о восстановлении целой J - внутренней матрицы-функции $\mathcal{W}(z)=\begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z)\end{bmatrix}$ по элементам $W_{21}(z)$ и $W_{22}(z)$. Такая задача рассматривалась М.Г.Крейном в [16], который дал ее решение с помощью специальных интерполяционных рядов.

В теории обратных задач для дифференциальных уравнений оказалась плодотворной задача о восстановлении по спектрам задач с неразделенными граничными условиями: периодической и антипериодической. Полное решение такой обратной задачи для оператора Хилла дано В.А.Марченко и И.В. Островским в [17]. Аналогичная задача для системы типа Дирака (к которой сводится каноническая система с абсолютно непрерывным эрмитианом), рассмотрена в работе Т.В.Мисюры [9,10]. Решение для общей канонической системы дано в главе IУ диссертации. Как нам сообщил Б.Я.Левин, этот результат был независимо и ранее получен им и М.Г.Крейном, но не был опубликован.

Отметим, что, согласно теоремам Потапова и де Бранжа, эта задача равносильна теоретико-функциональной задаче построения целой $\mathcal{J}$ - внутренней матрицы-функции по набору данных, которые могут быть трактованы как спектры периодической и антипериодической краевых задач.

Целью исследования, проводимого в диссертации, является:

1. Выяснение вопроса о том, при каких условиях в мультипликативном разложении целой $\mathcal{J}$ - внутренней 2x2 матрицы-функции фигурируют лишь экспоненциальные множители только I вида или только II вида.

2. Разработка процедур мультипликативного разложения целых $\mathcal{J}$ - внутренних 2x2 матриц-функций, в случае, когда показатель мультипликативного интеграла не обязательно абсолютно непрерывен.

3. Параметризация целой $\mathcal{J}$. - внутренней 2x2 матрицы - функции с помощью набора "свободных параметров", содержащего спектры периодической и антипериодической краевых задач.

Структура диссертации и ее основные результаты. Диссертация состоит из введения и четырех глав. В главе I мы излагаем с доказательствами в удобной для нас форме основные факты, связанные с делимостью матриц-функций класса $\mathfrak{M}$, теорией кругов Вейля для матриц-функций этого класса, и даем некоторые асимптотические оценки для матриц-функций класса $\mathfrak{M}$.

В главе II мы исследуем сформулированный выше вопрос об условиях представимости матрицы-функции $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ мультипликативным интегралом с экспоненциальными сомножителями только I вида, то есть, мультипликативным интегралом (9). И также "симметричный" вопрос о том, когда матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ представима мультипликативным интегралом с сомножителями II вида:

$$\mathfrak{A}(z)=\mathfrak{A}(0)\int_0^{\curvearrowright\ell}e^{-izQ(t)dt},\quad Q(t)J\geq 0,\ Q^2(t)=-Q(t) \tag{15}$$

Множители II вида $e^{-izkQ}=I+(1-e^{izk})Q\ \ (QJ\geq 0,\ Q^2=-Q,\ k>0)$ ограничены в верхней полуплоскости, в то время как множители I и III вида в верхней полуплоскости растут. Следовательно, для того, чтобы матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ допускала мультипликативное предотавление (15) с экспоненциальными множителями только II вида, естественно потребовать определенных ограничений на рост $\mathfrak{A}(z)$ в верхней полуплоскости. Именно, как следует из теоремы 5.1 главы II, достаточным условием представимости $\mathfrak{A}(z)$ мультипликативным интегралом (15) является требование ограниченности на мнимой положительной полуоси " J – формы"

$$\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^*(iy)-J\leq MI\qquad (y>0) \tag{16}$$

(Аналогично, матрица-функция с условием на мнимой <u>отрицательной</u> полуоси: $\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^*(iy)-J\leq MI,\ y<0$, допускает представление (9)).

Как мы показываем далее, в §8 главы II, матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$, имеющая мультипликативное представление (15) с <u>абсолютно-непрерывным</u> показателем $Q(t)$, является ограниченной во всей верхней полуплоскости, и более того, обладает асимптотикой типа (12). То есть, в этом случае с $\mathfrak{A}(z)$ связана система, эквивалентная системе типа Дирака. Если от $Q(t)$ в (15) потребовать только ограниченности вариации, то матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ все еще остается ограниченной в верхней полуплоскости (теорема 8.2 главы II):

$$\| \mathfrak{A}(z) \| \le C \quad , \quad \operatorname{Im} z \ge 0 \tag{17}$$

Условие (16) слабее, чем (17). Таким образом, класс матриц-функций $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих (16), шире, чем класс матриц с асимптотикой, подобной (12). Он включает матрицы-функции, связанные с системами типа Дирака и даже с каноническими системами, имеющими эрмитиан $Q(t)J$ ограниченной вариации, но не исчерпывается ими.

С другой стороны, мы доказываем во II главе, что матрицы-функции с ограниченной на полуоси J - формой (16), еще допускают представление (15) со специально нормированным показателем

$$Q^2(t) = -Q(t), \quad Q(t)J \ge 0 \tag{18}$$

Теоремы 5.1 и 8.2 дают необходимое условие и достаточное условие для показателя $Q(t)$ для того, чтобы матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяла условию (16) на мнимой полуоси: Необходимое условие заключается в возможности представления $\mathfrak{A}(z)$ мультипликативным интегралом (15) со специальным показателем $Q(t)$ (18), если на $Q(t)$ наложить какие-либо условия гладкости (типа ограниченности вариации), то матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ (15) заведомо будет удовлетворять (16). Отметим, что класс матриц-функций $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, для которых выполнено условие (16), не исчерпывает всех матриц-функций, допускающих представление (15), то есть, между необходимыми и достаточными условиями, приводимыми здесь, существует некий зазор.

Теорема 5.1 получена нами в качестве следствия <u>основного предложения</u>, доказываемого в главе II:

Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ имеет представление (7)

с нормированным эрмитианом $\varphi(t)J$: $Sp(\varphi(t)J) \equiv 1$.
И пусть ее J - форма ограничена на мнимой полуоси (16). Тогда показатель $\varphi(t)$ в (7) удовлетворяет строгому неравенству:

$$Sp\,\varphi(t) < 0, \quad п.в. \quad t \in [0, L] \tag{19}$$

и

$$\varphi^2(t) = (Sp\,\varphi(t))\,\varphi(t)$$

Утверждение теоремы 5.1 о представимости матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$, удовлетворяющей (16), мультипликативным интегралом (15) следует из основного предложения, так как после замены переменных в (7): $\tau = -\int_0^t Sp\,\varphi(t)\,dt$, представление (7) переходит в (15). (Такая замена возможна ввиду строго неравенства (19)).

В § 5 мы даем также аналог теоремы 5.1 для вещественных матриц-функций $\mathfrak{A}(z)$: $\mathfrak{A}(z) = \overline{\mathfrak{A}(\bar z)}$ $(z = \bar z)$:

Теорема 5.2. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ вещественна и удовлетворяет условию на мнимой оси:

$$\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^*(iy) - J \le Me^{2ay}I, \; y > 0; \; a = \varlimsup_{r\to+\infty} \sup_{0\le\theta<2\pi} \frac{\ln\|\mathfrak{A}(re^{i\theta})\|}{r}$$

Тогда в вещественном мультипликативном разложении

$$\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}(0)\int_0^{\overset{a}{\curvearrowright}} e^{-izH(t)dt}, \quad H(t)J \ge 0, \; iH(t) = \overline{iH(t)}$$

показатель $H(t)$ можно считать нормированным условием симплектичности:

$$\det(H(t)J) \equiv 1.$$

Таким образом, здесь мы даем достаточный критерий представимости вещественной матрицы-функции мультипликативным интегралом с симплектическим показателем $H(t)$. Выделение случая такого мультипликативного интеграла важно для приложений. Каноническим системам с симплектическим эрмитианом $H(t)$ уделялось специальное внимание в монографии [20] (глава VI и приложения).

В главе II мы приводим также способ построения показателя $Q(t)$ в (15) по матрице-функции $\mathfrak{A}(z)$, удовлетворяющей условию на полуоси (16). При этом мы обращаемся к общему методу М.Г.Крейна решения обратной задачи с помощью теории продолжения эрмитово положительных функций. в § 6,7 мы реализуем эту идею М.Г.Крейна для построения мультипликативного разложения $\mathfrak{A}(z)$ в рассматриваемом нами классе матриц-функций $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих (16). Отметим, что такой способ определения $Q(t)$ по $\mathfrak{A}(z)$ связан с задачей построения резольвентной матрицы для непрерывной эрмитово положительной функции на конечном промежутке. Известно, что при этом надо решать некоторые интегральные уравнения (либо делать какие-либо иные "трансцендентные" (нефинитные) процедуры. В главе III мы выделяем класс матриц-функций, для которых можно дать финитную процедуру построения мультипликативного разложения (не прибегая к интегральным уравнениям).

В главе III мы рассматриваем подкласс матриц-функций $\mathfrak{Z}(z)$, допускающих дискретное разложение

$$\mathfrak{Z}(z) = e^{-izA_1} e^{-izA_2} \dots e^{-izA_n}, \qquad A_k J \geq 0 \tag{20}$$

Здесь речь идет о восстановлении вида матриц A_k в (20) по значениям матрицы-функции $\mathfrak{Z}(z)$ на мнимой полуоси, (предполагая заранее, что $\mathfrak{Z}(z)$ допускает разложение (20), но вид множителей e^{-izA_k} в этом разложении неизвестен). Используя теорию кругов Вейля, мы связываем вопрос об отщеплении слева от матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ множителя e^{-izA_1} с асимптотическим поведением $\mathcal{Z}(z)$ на мнимой полуоси. Это позволяет нам дать финитную (пошаговую) процедуру восстановления матриц A_k $(k=1,2,\dots,n)$ в (20) по асимптотическому поведению $\mathcal{Z}(z)$ на мнимой полуоси. Описание теоретико-функциональных основ этой процедуры изложено во введении к III главе. Поскольку представление (20) для матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ эквивалентно ее представлению в виде матрицы монодромии канонической системы (11) с кусочно-постоянным эрмитианом

$$\mathcal{H}(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k(t),\quad \varphi_k(t)=\begin{cases}1, & t\in[k-1,k)\\ 0, & t\notin[k-1,k)\end{cases},\ A_k\geq 0 \tag{21}$$

то этот результат дает способ восстановления канонической системы с кусочно-постоянным эрмитианом по ее матрице монодромии.

Отметим, что предложенный в III главе метод разложения на множители применим не только к целым произведениям целых экспоненциальных множителей. И разложение рациональной $\mathcal{J}$-внутренней матрицы-функции на множители Бляшке-Потапова (впервые данное В.П.Потаповым) тоже может быть получено, исходя из соображений, изложенных в III главе.

В главе IУ мы решаем задачу восстановления матрицы монодромии канонической системы по спектральному набору, в который входят собственные значения $\{\mu_k^{\pm}\}$ периодической и антипериодической краевых задач и задачи Дирихле $\{\lambda_k\}$ для канонической системы, а также набор чисел $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k\in\{-1,0,1\}$. При этом мы показываем, что при некоторых условиях нормировки для канонической системы и ее матрицы монодромии, заданному набору $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ соответствует единственная каноническая система. Необходимые и достаточные условия для набора $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ с тем, чтобы он был спектральным набором некоторой канонической системы, мы даем в терминах специальных конформных отображений на гребенчатые области, введенных в работе В.А.Марченко и И.В.Островского [17].

Необходимость этих условий следует из рассмотрения функции $A(z) = \frac{1}{2} Sp\, \mathcal{Z}(z)$, где $\mathcal{Z}(z)$ - матрица монодромии канонической системы. Так как корни уравнения $A(z)^2 = 1$ - собственные значения $\{\mu_k^{\pm}\}$ - вещественны, то, согласно утверждению I работы В.А.Марченко и И.В.Островского [17], $A(z)$ допускает параметризацию с помощью специальных конформных отображений. Это и дает возможность сформулировать необходимые условия на спектральный набор $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$. Основным результатом, доказанным в IУ главе диссертации является то, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы набор $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ был спектральным для некоторой канонической системы. Он следует из рассмотренной нами задачи параметризации целой J - внутренней матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ по $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$. Тем самым, мы приходим к выводу о взаимно-однозначном соответствии между произвольными гребенчатыми областями с отмеченными точками и каноническими системами.

Отметим, что появляющийся при исследовании этих вопросов класс целых функций $A(z)$, таких, что все корни уравнений $A(z) = \pm 1$ вещественны, рассматривался еще Ляпуновым. В связи со спектральными вопросами теории струны и канонических систем этот класс фигурировал в работах М.Г.Крейна ([18],[19]). Полученные нами результаты имеют прямое отношение к устаноенным М.Г. Крейном правилам движения мультипликаторов.

Апробация результатов и публикации. Результаты диссертации окладывались на Всесоюзной конференции "Комплексный анализ и ифференциальные уравнения" (Черноголовка, 1981 г.) и конферен-ии " $\mathcal{J}$ -теория В.П. Потапова и ее приложения" (г.Одесса, 1981 .). Основные результаты опубликованы в работах [21-24].

На защиту выносятся следующие новые результаты:

- Достаточный критерий представимости целой $\mathcal{J}$ -внутрен-ей 2х2 матрицы-функции мультипликативным интегралом с показа-елем специального вида (15), (9);

- финитная процедура восстановления дискретного мультипли-ативного разложения по значениям матрицы-функции на полуоси;

- решение обратной спектральной задачи для периодической аноничеcкой системы и параметризация целой $\mathcal{J}$ -внутренней атрицы-функции с помощью набора данных, включающих спектры ериодической и антипериодической краевых задач.

ГЛАВА I. АППАРАТ ИССЛЕДОВАНИЯ. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ J - ВНУТРЕННИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

§I. Понятие делимости в классе $\mathfrak{M}$

Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$, $\mathfrak{A}(0)=I$, принадлежит классу $\mathfrak{M}$, то есть, $\mathfrak{A}(z)$ - целая J - внутренняя матрица-функция:

$$\mathfrak{A}(z) J \mathfrak{A}^*(z) - J \begin{cases} \geq 0, & \Im m\, z > 0 \\ = 0, & \Im m\, z = 0 \end{cases} \qquad (I.1)$$

В этой главе излагаются основы аппарата исследования канонической дифференциальной системы:

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{A}(t,z) = -iz\mathfrak{A}(t,z)\mathcal{P}(t),\ t\in[0,L],\ \mathcal{P}(t)J\geq 0,\ \mathcal{P}(t)\in L^1[0,L] \qquad (I.2)$$

$$Sp(\mathcal{P}(t)J) \equiv 1\ ,\quad t\in[0,L] \qquad (I.3)$$

для которой $\mathfrak{A}(z)$ является матрицей монодромии:

$$\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}(0,z)^{-1}\mathfrak{A}(L,z) \qquad (I.4)$$

Отметим, что представление матрицы функции $\mathfrak{A}(z)$ в виде матрицы монодромии системы (I.2 - I.3) эквивалентно ее представлению мультипликативным интегралом ([25]):

$$\mathfrak{A}(z) = \int_0^{L\curvearrowright} e^{-iz\mathcal{P}(t)dt} \qquad (I.5)$$

Поэтому исследование связанной с $\mathfrak{A}(z)$ системы (I.2 - I.4) есть не что иное, как исследование мультипликативного представления (I.5).

Здесь мы изучаем свойства матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$, определяющиеся ее принадлежностью классу $\mathfrak{M}$: поведение элементов $\mathfrak{A}(z)$ на мнимой оси; вопросы разложения в произведение в клаосе $\mathfrak{M}$ (или, другими словами, делимости в классе $\mathfrak{M}$) и применения для этого разложения теории кругов Вейля.

Часто в дальнейшем особо выделяются матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, удовлетворяющие оценке на мнимой полуоси:

$$\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^{*}(iy)-J\leq MI \qquad (y>0), \tag{I.6}$$

поскольку часть основных результатов получена здесь для таких матриц-функций.

Представить матрицу-функцию $\mathfrak{A}(z)$ мультипликативным интегралом (I.5) – значит разложить ее в произведение (вообще говоря, континуальное) элементарных множителей из класса $\mathfrak{M}$. Можно рассматривать любые разложения $\mathfrak{A}(z)$ на множители из класса $\mathfrak{M}$. Самое простое из таких разложений– в виде произведения двух матриц-функций:

$$\mathfrak{A}(z)=\mathfrak{A}_1(z)\,\mathfrak{A}_2(z)$$

При этом матрицу-функцию $\mathfrak{A}_1(z)$ естественно называть левым делителем $\mathfrak{A}(z)$, а $\mathfrak{A}_2(z)$ - правым делителем $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$.

<u>Определение</u>. Пусть матрицы-функции $\mathfrak{A}_1(z)$, $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$. Матрица-функция $\mathfrak{A}_1(z)$ называется левым делителем матрицы $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$, если существует матрица-функция $\mathfrak{A}_2(z)\in\mathfrak{M}$, такая, что

$$\mathfrak{A}(z)=\mathfrak{A}_1(z)\,\mathfrak{A}_2(z)$$

Отметим, что для любой матрицы-функции $\mathfrak{A}_1(z)$ класса $\mathfrak{M}$ всегда существует обратная матрица-функция, которая является целой и определена формулой:

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(z)=J\,\mathfrak{A}^{*}(\bar{z})J \tag{I.7}$$

Соотношение (I.7) следует из принципа симметрии

$$\mathfrak{A}(z)\, J\, \mathfrak{A}^*(\bar{z}) = J$$

выполняющегося в классе $\mathfrak{M}$ в силу свойства J - унитарности (I.I) матриц-функций на вещественной оси.

Таким образом, $\mathfrak{A}_1(z)$ делит $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$, если

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(z)\, \mathfrak{A}(z)$$

- J - растягивающая в $\operatorname{Im} z > 0$ матрица-функция.

Идея использования делимости в классе $\mathfrak{M}$ для исследования свойств матрицы-функции $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ принадлежит В.П.Потапову и регулярно применяется в работах [I, 4, 26]. Исследование делимости аналитических J - растягивающих матриц-функций имеется и в ряде работ Л. де Бранжа (см. [6] и ссылки в этой монографии на более ранние работы). В этих работах устанавливается связь между делимостью матриц-функций и вкладываемостью некоторых пространств целых функций, введенных де Бранжем. На этом пути де Бранжем получен один из основных результатов - теорема единственности мультипликативного представления 2x2 целых J - внутренних матриц-функций.

Понятие делимости в классе $\mathfrak{M}$ имеет непосредственное отношение к "усечению" канонических систем.

Рассматривая на меньшем интервале $(0, a)$:

$$0 < a < L$$

каноническая система

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{A}(t,z) = -iz\,\mathfrak{A}(t,z)\varphi(t) \qquad (\mathrm{I}.8)$$

называется усечением системы (I.2, I.3) на интервал (0 , a). Матрица монодромии $\mathfrak{A}_1(z)$ усеченной системы равна:

$$\mathfrak{A}_1(z) = \mathfrak{A}(0,z)^{-1}\mathfrak{A}(a,z) = \int\limits_0^{a} e^{-iz\varphi(t)dt} \qquad (\mathrm{I}.9)$$

Хорошо известно следующее предложение:

<u>Теорема I.I</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ (I.4) – матрица монодромии системы (I.2, I.3), а $\mathfrak{A}_1(z)$ (I.9) – матрица монодромии усечения этой системы на $(0, a)$. Тогда $\mathfrak{A}_1(z)$ делит $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\gamma\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство</u>. Покажем, что J-форма отношения удовлетворяет нужным неравенствам:

$$\{\mathfrak{A}_1^{-1}(z)\mathfrak{A}(z)\} J \{\mathfrak{A}_1^{-1}(z)\mathfrak{A}(z)\}^{-1} - J = \frac{z-\bar{z}}{i}\cdot$$

$$\mathfrak{A}^{-1}(a,z)\int\limits_a^{l}\mathfrak{A}(t,z)\varphi(t)J\mathfrak{A}^*(t,z)dt\,\mathfrak{A}^{-1*}(a,z)\begin{cases}\geq 0, \operatorname{Im} z>0\\ = 0, \operatorname{Im} z=0\end{cases} \qquad (\mathrm{I}.\mathrm{I}0)$$

То есть, $\mathfrak{A}^{-1}(z)\mathfrak{A}(z) \in \gamma\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Еще проще проверить факт делимости $\mathfrak{A}(z)$ на $\mathfrak{A}_1(z)$ (слева), если использовать мультипликативное представление матриц монодромии (I.5), (I.9). Тогда

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(z)\,\mathfrak{A}(z) = \int\limits_a^{l} e^{-iz\varphi(t)dt} \in \gamma\mathfrak{M}$$

Если теперь положить величину a в (I.8, I.9) переменной: $a = t$, то матрица

$$\mathfrak{A}(0,z)^{-1}\mathfrak{A}(t,z) = \int\limits_0^{t} e^{-iz\varphi(t)dt} \qquad (\mathrm{I}.\mathrm{II})$$

является фундаментальной матрицей системы (I.2, I.3). Таким образом, теорема I.I утверждает, что исследуя структуру делителей матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$, мы исследуем фундаментальную матрицу системы (I.2, I.3), либо мультипликативный интеграл (I.II) с переменным верхним пределом.

Заключение о делимости одной из матриц-функций класса $\mathfrak{M}$ на другую мы будем выводить, используя теорию кругов Вейля для J - растягивающих матриц.

§2. Круги Вейля J - растягивающих матриц

С J-растягивающей матрицей A (неособенной):

$$AJA^* - J \geq 0 \tag{2.I}$$

с элементами

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

обычно связывается дробно-линейное преобразование $A\{\omega\}$ комплексного параметра ω :

$$A\{\omega\} = w = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \tag{2.3}$$

При суперпозиции дробно-линейных преобразований их матрицы коэффициентов перемножаются

$$A\{B\{\omega\}\} = (AB)\{\omega\}$$

Обратное к (2.3) преобразование

$$\omega = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \tag{2.4}$$

имеет матрицу коэффициентов A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = A^{-1} \tag{2.5}$$

Если матрица A J- растягивает и матрица J имеет вид

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

то для дробно-линейного преобразования (2.3)(2.2) естественно выделяются такие параметры ω, которые принадлежат верхней полуплоскости

$$\mathcal{J}m\,\omega = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} \geq 0 \qquad (2.7)$$

Преобразование (2.3) переводит границу верхней полуплоскости (2.7) в вещественную ось – в окружность:

$$|w - c| = r \qquad (2.8)$$

Благодаря свойству $\mathcal{J}$ – растягиваемости матрицы коэффициентов (2.1), (2.6), дробно-линейное преобразование (2.3) переводит верхнюю полуплоскость (2.7) в себя, то есть в круг лежащий в верхней полуплоскости (см. [27], [28]).

Определение. Кругом Вейля $W\{A\}$ $\mathcal{J}$ – растягивающей матрицы A (2.2) называется образ дробно-линейного преобразования (2.3), когда параметр ω пробегает верхнюю полуплоскость $\mathcal{J}m\,\omega \geq 0$.

Отметим, что если две $\mathcal{J}$ – растягивающие матрицы A_1, A_2 коллинеарны: $A_1 = \alpha A_2$, либо отличаются друг от друга $\mathcal{J}$ – унитарной матрицей $\mathcal{U}$: $\mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^* = \mathcal{J}$: $A_1 = A_2\mathcal{U}$, то их круги Вейля совпадают.

Представляя $\mathcal{J}m\,\omega = \frac{1}{2}[\bar{\omega}, 1]\mathcal{J}\begin{bmatrix}\omega \\ 1\end{bmatrix}$ и используя (2.4), (2.5), легко убедиться, что справедливо предложение:

Круг Вейля $W\{A\}$ матрицы A состоит из тех и только тех точек w, которые удовлетворяют неравенству

$$[\bar{w}, 1]\, A^{-1\,*}\mathcal{J}A^{-1}\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (2.9)$$

Общее доказательство этого факта для $2n \times 2n$ матриц A

(а также для операторного случая) можно найти в [27],[29,30].

Определение круга Вейля при помощи (2.9) использовалось в работах В.П.Потапова и И.В.Ковалишиной [26, 31,32]. Оно появляется естественным образом в связи с предложенным В.П.Потаповым методом решения ряда классических интерполяционных задач анализа. В исследованиях этих работ систематически применялись круги Вейля как одна из основных характеристик аналитических $\mathcal{J}$-растягивающих матриц-функций.

Задание круга Вейля неравенством (2.9) удобно также тем, что позволяет широко использовать алгебраический аппарат матричных неравенств.

Пользуясь определением (2.9), а также эквивалентными неравенству (2.I) неравенствами ([35]):

$$A^*\mathcal{J}A-\mathcal{J}\geqslant 0,\ \mathcal{J}-A^{-1}\mathcal{J}A^{-1*}\geqslant 0,\quad \mathcal{J}-A^{-1*}\mathcal{J}A^{-1}\geqslant 0 \qquad (2.10)$$

легко показать, что круг Вейля $W\{A\}$ (2.9) матрицы A (2.I) лежит в верхней полуплоскости.

Действительно, умножая последнее из неравенств (2.I0) слева на вектор $[\,\overline{W}\,,1\,]$, а справа – на сопряженный вектор $\begin{bmatrix} W \\ 1 \end{bmatrix}$, приходим к соотношению:

$$2\,\mathfrak{Im}\,w=[\,\overline{w},1]\,\mathcal{J}\begin{bmatrix} W \\ 1 \end{bmatrix}\geqslant [\,\overline{w},1]A^{-1*}\mathcal{J}A^{-1}\begin{bmatrix} W \\ 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, если W удовлетворяет (2.9), то $\mathfrak{Im}\,w\geqslant 0$, то есть, $W\{A\}$ лежит в верхней полуплоскости.

Матрица из неравенства (2.9)

$$W_A=A^{-1*}\mathcal{J}A^{-1}=\begin{bmatrix} -R & S \\ \overline{S} & -T \end{bmatrix} \qquad (2.11)$$

называется матрицей Вейля для матрицы A[I)].

I) В работах М.Г.Крейна и Ю.Л.Шмульяна [27, 29, 30] матрица из (2.II) называется матрицей H.

Выпишем выражение для центра и радиуса r, C круга Вейля. Для этого заметим, что из неравенства (2.10):

$$0 \leq J - A^{-1*} J A^{-1} = J - W_A = \begin{bmatrix} R & i - S \\ -i - \bar{S} & T \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

следует, что элемент R матрицы Вейля W_A всегда неотрицателен: $R \geq 0$; и если $R = 0$, то $S = i$.

Записывая (2.9) через элементы матрицы Вейля (2.11):

$$[\bar{w}, 1] \begin{bmatrix} -R & S \\ \bar{S} & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (2.13)$$

получаем эквивалентное (2.9) неравенство (при $R > 0$):

$$\left| w - \frac{S}{R} \right| \leq \frac{\sqrt{S\bar{S} - TR}}{R} = \frac{1}{R\,|\det A|} \qquad (2.14)$$

Отсюда следует, что если $R \neq 0$, то центр и радиус круга Вейля равны:

$$C = S/R \quad , \qquad r = 1/(R|\det A) \qquad (2.15)$$

В случае $R = 0$ круг Вейля есть полуплоскость

$$2\,\mathrm{Im}\, w = \frac{w - \bar{w}}{i} \geq T \qquad (2.16)$$

Замечание. В рассматриваемом нами случае 2x2 матриц элементы матрицы A (2.1) можно считать 1x1 матрицами. В общем случае элементы a, b, c, d есть $n \times n$ матрицы, либо даже операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{h}$. Тогда

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , \quad J = \begin{bmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{bmatrix}$$

$2n \times 2n$ матрицы либо операторы в пространстве $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$.

Общие операторные круги (зависящие от комплексного параметра z) рассматривались Ю.М. Березанским в [33, 47]. Операторные круги, связанные с дробно-линейным преобразованием, поожденным оператором $A: AJA^* \geq J$, исследовались в работах [27-30],[34],[58,59]. Для операторного случая дробно-линейное преобразование имеет общую форму записи. Так, если рассматривать преобразование единичного шара при помощи оператора A: $AA^* \leq I$, $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, то дробно-линейное преобразование записывается в виде (см. [34] или [58]):

$$\omega \longmapsto c + d\omega(I - b\omega)^{-1}a \tag{2.17}$$

Здесь ω - $n \times n$ матрица (либо оператор в $\mathfrak{h}$), такая, что $\omega\omega^* \leq I$.

Формулы для центра и радиусов операторного круга - образа единичного шара при отображении (2.17) приводились еще в [58]. В этом случае надо рассматривать отдельно левый и правый радиус операторного круга (ввиду некоммутативности сомножителей). Основные приложения теория кругов Вейля нашла именно в многомерном случае $2n \times 2n$ матриц. В нашей ситуации 2x2 матриц приходится оперировать с числами и используемые формулы имеют простой вид.

Теперь о том, как ведут себя круги Вейля при перемножении J-растягивающих матриц.

Пусть A_1, A_2 - две J-растягивающие матрицы. Последовательное применение к параметру ω, $\Im m\, \omega > 0$, дробно-линейных преобразований, порожденных этими матрицами:

$$A_1\{A_2\{\omega\}\} = A\{\omega\}$$

переводит всю верхнюю полуплоскость в часть круга Вейля $W\{A_1\}$. Так как матрица коэффициентов суперпозиции преобразований - произведение:

$$A = A_1 A_2 \tag{2.18}$$

то справедлива

<u>Лемма</u> 2.I. Круг Вейля произведения двух J-растягивающих матриц (2.18) вложен в круг Вейля $W\{A_1\}$ первого сомножи-

теля

$$W\{A\} \subseteq W\{A_1\} \tag{2.19}$$

Приведем здесь алгебраическое доказательство леммы 2.1, основанное на определении круга Вейля (2.9). Оно понадобится нам в следующем параграфе, когда мы будем рассматривать функциональные круги Вейля для J - растягивающих матриц-функций $\mathfrak{A}(z)$, аналитически зависящих от параметра z .

Для этого учтем, что имеет место неравенство между J -формами сомножителей и произведения:

$$\begin{aligned} AJA^* - J &= A_1A_2JA_2^*A_1^* - J = A_1\{A_2JA_2^* - J\}A_1^* + \\ &+ A_1JA_1^* - J \geqslant A_1JA_1^* - J \end{aligned} \tag{2.20}$$

Аналогичные неравенства имеют место для "правой" J - формы и "правого" сомножителя A_2 и для обратных матриц:

$$\begin{aligned} &A^*JA - J \geqslant A_2^*JA_2 - J, \quad J - A_2^{-1}JA_2^{-1*} \leqslant J - A^{-1}JA^{-1*}, \\ &J - A^{-1*}JA^{-1} \geqslant J - A_1^{-1*}JA_1^{-1} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Используя неравенство (2.21), получаем:

$$A^{-1*}JA^{-1} \leqslant A_1^{-1*}JA_1^{-1}$$

Отсюда вытекает, что если точка w лежит в круге Вейля $W\{A\}$ и удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant [\bar{w}, 1]\, A^{-1*}JA^{-1}\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$$

то тем более w удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant [\bar{w}, 1]\, A_1^{-1*}JA_1^{-1}\begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix}$$

и значит $w \in W\{A_1\}$. Таким образом, $W\{A\} \subseteq W\{A_1\}$ ■

Пусть теперь J - растягивающие матрицы A, A_1 удовлетворяют дополнительному условию <u>симплектичности</u>

$$AJA^{\tau}=J, \quad A_1 J A_1^{\tau}=J$$

(τ - транспортирование). Тогда имеет место утверждение, обратное лемме 2.1.

Лемма 2.2. Пусть A_1, A - J - растягивающие симплектические матрицы. И пусть их круги Вейля вложены, то есть, имеет место включение (2.19). Тогда матрица $A_1^{-1}A$ является J - растягивающей.

Доказательство. Из (2.19) вытекает, что связанное с матрицей A_2 :

$$A_2 = A_1^{-1}A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

дробно-линейное преобразование (2.3) переводит верхнюю полуплоскость в себя, то есть, A_2 - неособенная симплектическая "плюс-матрица" (см.напр. [35]). Но тогда согласно теореме 5.1 из [27] (либо теореме II из [35]), матрица A_2 - J - растягивающая. Лемма доказана.

Отметим, что требование симплектичности в лемме 2.2 существенно. Так, коллинеарные матрицы e^{J} и e^{J+I} являются J - растягивающими, а их круги Вейля $W\{e^{J}\} = W\{e^{J+I}\}$ - совпадают. Но отношение этих двух матриц - скалярная матрица $e^{I} = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$ не является J - растягивающей.

Леммы 2.1 и 2.2 вместе дают возможность свести вопрос об исследовании делимости J - растягивающих матриц к рассмотрению вопроса о вкладываемости их кругов Вейля.

§3. Круги Вейля и делимость в классе $\mathfrak{M}$

Пусть $\mathfrak{A}(z)$ - матрица-функция класса $\mathfrak{M}$. Тогда в каждой фиксированной точке $z = z_0$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ матрица $\mathfrak{A}(z)$ - J - растягивающая и с нею можно связать круг Вейля

$$W\{\mathfrak{A}(z_0)\} = W_{z_0}\{\mathfrak{A}\} \tag{3.1}$$

Следовательно, с матрицей-функцией $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ связывается множество кругов Вейля $W_z\{\mathfrak{A}\}$ в верхней полуплоскости, зависящих вместе с $\mathfrak{A}(z)$ от параметра z.

По формулам (2.15) вычисляются центр и радиус круга Вейля $W_z\{\mathfrak{A}\}$ как функции аргумента z.

Функции $S(z)$, $R(z)$, $T(z)$ из этих формул – элементы матрицы-функции Вейля

$$W_{\mathfrak{A}}\{z\} = \mathfrak{A}^{-1*}(z)\, J\, \mathfrak{A}^{-1}(z) = \begin{bmatrix} -R(z) & S(z) \\ \overline{S(z)} & T(z) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

При этом круг Вейля (3.1) алгебраически определен неравенством: $\{w\} = W_z\{\mathfrak{A}\}$:

$$[\bar{w}, 1]\, W_{\mathfrak{A}}(z) \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} = [\bar{w}, 1]\, \mathfrak{A}^{-1*}(z)\, J\, \mathfrak{A}^{-1}(z) \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{3.3}$$

В каждой фиксированной точке $z = z_0$, $\operatorname{Im} z > 0$, введенный только что круг Вейля (3.1),(3.3) есть результат дробно-линейного преобразования точек верхней полуплоскости ω : $\operatorname{Im}\omega > 0$

$$w = \frac{a(z)\,\omega + b(z)}{c(z)\,\omega + d(z)} \tag{3.4}$$

при $z = z_0$. Здесь

$$\mathfrak{A}(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Будем называть такой круг Вейля "точечным" (то есть, круг, состоящий из точек $\{w\}$. Термин мотивируется тем, что далее будет определен функциональный круг Вейля).

С матрицей-функцией $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ (3.5) обычно связывается дробно-линейное преобразование (3.4), параметром которого ω является уже не точка верхней полуплоскости, а аналитическая функция $\omega(z)$, принимающая значения в верхней полуплоскости:[2)]

$$w(z) = \frac{a(z)\,\omega(z) + b(z)}{c(z)\,\omega(z) + d(z)} \tag{3.6}$$

При этом результаты $w(z)$ отображения (3.6) являются также неванлинновскими функциями.

<u>Определение</u>. Множество функций $w(z)$ из N, представимых в виде (3.6), где $\omega(z) \in N$, называется функциональным кругом Вейля матрицы-функции $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ (3.5) и обозначается $W\{\mathfrak{A}(z)\}$.

Очевидно, круг Вейля $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ образуют те и только те аналитические функции $w(z)$, которые в каждой точке z принимают значения из точечного круга Вейля $W_z\{\mathfrak{A}\}$.

Так же, как и в случае точечных кругов Вейля, можно убедиться, что функциональный круг $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ определен неравенством

$$[\overline{w(z)}, 1]\, W_{\mathfrak{A}}(z) \begin{bmatrix} w(z) \\ 1 \end{bmatrix} = [\overline{w(z)}, 1]\, \mathfrak{A}(z)^{-1*} J \mathfrak{A}^{-1}(z) \begin{bmatrix} w(z) \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.7}$$

Отметим, что принадлежность двух неванлинновских функций $w_1(z)$, $w_2(z)$ одному и тому же кругу Вейля $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ накладывает на них ограничение

---

2) Аналитически в верхней полуплоскости функции, имеющие при $\operatorname{Im} z > 0$ положительную мнимую часть: $\operatorname{Im} w(z) \geq 0$, будем называть неванлинновскими. Множество всех таких функций будем обозначать буквой N.

$$|w_1(z)-w_2(z)| \leq 2r(z)=\frac{2}{R(z)\,|\det \mathfrak{A}(z)|} \qquad (3.8)$$

Для кругов $W\{\mathfrak{A}(z)\}$ справедлив аналог лемм 2.I, 2.2:

При перемножении матриц-функций класса $\mathfrak{M}$ функциональные круги Вейля вкладываются; если $\mathfrak{A}_1(z)$, $\mathfrak{A}(z)$ – симплектические матрицы-функции, то из вложения $W\{\mathfrak{A}_1(z)\} \supseteq W\{\mathfrak{A}(z)\}$ следует, что $\mathfrak{A}_1(z)$ делит (слева) $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$.

Нам остается уточнить, что означает тот факт, что матрица-функция симплектична.

Известен следующий факт.

<u>Лемма 3.I</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$. Следующие три свойства эквивалентны:

I. $\mathfrak{A}(z)$ – вещественна:

$$\mathfrak{A}(\lambda)=\overline{\mathfrak{A}(\lambda)} \qquad (\lambda=\bar\lambda) \qquad (3.9)$$

2. $\mathfrak{A}(z)$ – симплектична:

$$\mathfrak{A}(z)\mathcal{J}\mathfrak{A}^{\tau}(z)=\mathcal{J} \qquad (3.10)$$

3. $\det \mathfrak{A}(z)\equiv 1$.

<u>Доказательство</u>. а) Докажем эквивалентность I° и 2°. Из соотношения $\mathcal{J}$ – унитарности: $\mathfrak{A}(\lambda)\mathcal{J}\mathfrak{A}^{*}(\lambda)=\mathcal{J}$ $(\lambda=\bar\lambda)$, получаем $\overline{\mathfrak{A}(\lambda)}\mathcal{J}\mathfrak{A}^{\tau}(\lambda)=\mathcal{J}$ $(\lambda=\bar\lambda)$. Если $\mathfrak{A}(\lambda)$ удовлетворяет (3.9), то последнее соотношение имеет вид: $\mathfrak{A}(\lambda)\mathcal{J}\mathfrak{A}^{\tau}(\lambda)=\mathcal{J}$ $(\lambda=\bar\lambda)$. В силу аналитичности матрицы $\mathfrak{A}(z)$, это равенство справедливо для всех комплексных z, то есть, $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяет (3.10) и является симплектичной.

Наоборот, из соотношений $\mathcal{J}$ – унитарности на вещественной оси и симплектичности:

$$\overline{\mathfrak{A}(\lambda)}\mathcal{J}\mathfrak{A}^{\tau}(\lambda)=\mathcal{J}, \quad \mathfrak{A}(\lambda)\mathcal{J}\mathfrak{A}^{\tau}(\lambda)=\mathcal{J} \quad (\lambda=\bar\lambda)$$

вытекает равенство: $\overline{\mathfrak{A}(\lambda)} = \mathfrak{A}(\lambda)\ (\lambda = \overline{\lambda})$, и $\mathfrak{A}(z)$ вещественна.

б) Докажем эквивалентность 2^0 и 3^0. Вычисляя поэлементно произведение $\mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^{\tau}(z)$, получаем для 2x2 матриц:

$$\mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^{\tau}(z) = (\det \mathfrak{A}(z))J \tag{3.11}$$

Отсюда вытекает эквивалентность свойств 2^0 и 3^0.

Таким образом, имеет место теорема о делимости в классе $\mathfrak{M}$ и вкладываемости кругов Вейля:

<u>Теорема 3.1</u>. Пусть вещественные матрицы-функции $\mathfrak{A}_1(z)$, $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$. Матрица-функция $\mathfrak{A}_1(z)$ делит слева $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда

$$W\{\mathfrak{A}(z)\} \subseteq W\{\mathfrak{A}_1(z)\} \tag{3.12}$$

<u>Доказательство. 1^0.</u> Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}_1(z)$ делит слева $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$. Используем определение (3.7) круга Вейля для матриц-функций $\mathfrak{A}_1(z)$ и $\mathfrak{A}(z)$. Дословно повторяя доказательство леммы 2.1, приходим в выводу, что имеет место включение (3.12).

2^0. Пусть теперь известно, что круги Вейля матриц-функций $\mathfrak{A}(z)$ и $\mathfrak{A}_1(z)$ удовлетворяют (3.12). Тогда имеет место включение для точечных кругов Вейля:

$$W_z\{\mathfrak{A}\} \subseteq W_z\{\mathfrak{A}_1\}, \qquad \forall z:\ \Im m\, z > 0 \tag{3.13}$$

Пусть $z = z_0$, $\Im m\, z > 0$, - фиксированная точка. Согласно лемме 3.1 матрицы-функции $\mathfrak{A}_1(z)$ и $\mathfrak{A}(z)$ симплектичны. Ввиду условия (3.13) получаем теперь из леммы 2.2, что отношение

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(z_0)\,\mathfrak{A}(z_0)\ , \quad z = z_0,\ \Im m\, z > 0,$$

- J - растягивающая матрица. Так как это утверждение справедливо для всех точек $z=z_0$, $\Im z>0$, то $\mathfrak{A}_1^{-1}(z)\mathfrak{A}(z)-\mathcal{J}$ - растягивающая матрица-функция в верхней полуплоскости. Согласно §1, отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(z)\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$$

Теорема доказана.

§4. Матрицы-функции класса $\mathfrak{M}$, ограниченные на мнимой полуоси

В этом параграфе мы исследуем поведение элементов матриц-функций класса $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих оценке (1.6) на мнимой полуоси:

$$\|\mathfrak{A}(iy)\|\le C\ ,\quad y>0 \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует оценка $\mathcal{J}$ - формы матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$:

$$\mathfrak{A}(iy)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(iy)-\mathcal{J}\le MI\ ,\quad y>0 \tag{4.2}$$

($M=C^2+1$). Наоборот, если $\mathcal{J}$ - форма некоторой матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ удовлетворяет (4.2), то для самой матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ справедлива оценка:

$$\|\mathfrak{A}(iy)\|\le C_1\sqrt{y}\ ,\quad y>1 \tag{4.3}$$

Эта оценка следует из неравенства Шварца-Пика-Потапова ([4]), справедливого для любой матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, и любых двух невещественных точек z_1, z_2 : $z_1\ne z_2$:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathfrak{A}(z_1)J\mathfrak{A}^*(z_1)-J}{(z_1-\bar{z}_1)/i} & \dfrac{\mathfrak{A}(z_1)-\mathfrak{A}(z_2)}{z_1-z_2} \\ \dfrac{\mathfrak{A}^*(z_1)-\mathfrak{A}^*(z_2)}{\bar{z}_1-\bar{z}_2} & \dfrac{\mathfrak{A}^*(z_2)J\mathfrak{A}(z_2)-J}{(z_2-\bar{z}_2)/i} \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad (4.4)$$

Действительно, из условия положительности матрицы в (4.4) получаем при $z_1 = iy$, $z_2 = i$:

$$\|\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^*(iy)-J\|\cdot\|\mathfrak{A}^*(i)J\mathfrak{A}(i)-J\|\frac{1}{4y} \geqslant \left\| \frac{\mathfrak{A}(iy)-\mathfrak{A}(i)}{y-1} \right\|^2$$

Из последнего неравенства и (4.2) вытекает (4.3). Причем, можно положить

$$C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{M}\sqrt{\|\mathfrak{A}^*(i)J\mathfrak{A}(i)-J\|} + \|\mathfrak{A}(i)\| \qquad (4.5)$$

Аналогично, полагая в (4.4) $z_1 = i$, $z_2 = z$, приходим к оценке

$$\|\mathfrak{A}(z)\| \leqslant C_2\sqrt{|z|}\left(\sqrt{\|\mathfrak{A}^*(z)J\mathfrak{A}(z)-J\|} + C_3\right), \ \operatorname{Im} z > 1 \qquad (4.6)$$

В дальнейшем мы будем работать именно с условием (4.2) для J - формы матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$, а не с условием (4.I) для самой матрицы-функции.

Выделим отдельно следующие свойства целой J - внутренней матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$:

I. $\mathfrak{A}(z)$ имеет тип роста не выше экспоненциального: $\|\mathfrak{A}(z)\| \leqslant Ce^{L|z|}$

2. $\mathfrak{A}(z)$ является функцией класса Картрайт:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ \|\mathfrak{A}(\lambda)\|}{\quad{}^2} d\lambda < \infty$$

(Напомним здесь, что целая функция $f(z)$ называется функцией класса Картрайт, если тип ее роста не выше экспоненциального и сходится интеграл вдоль вещественной оси: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|f(\lambda)|}{1+\lambda^2}d\lambda<\infty$).

3. Детерминант $\mathfrak{A}(z)$ – экспонента:

$$\det \mathfrak{A}(z) = e^{izl} \det \mathfrak{A}(0)$$

Свойства 1), 2) были установлены в работе [36].

<u>Лемма 4.1</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$ удовлетворяет оценке (4.2). И пусть

$$\det \mathfrak{A}(z) = e^{-iz\tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Тогда $\tau = 0$, $\mathfrak{A}(z) \equiv I$.

<u>Доказательство</u>. Из (4.2) вытекает оценка (4.3) на мнимой положительной полуоси. Из принципа симметрии (1.7) приходим к выводу, что аналогичная оценка имеет место и на отрицательной мнимой полуоси:

$$\|\mathfrak{A}(iy)\| = \|\mathfrak{A}^{-1*}(-iy)\| = \frac{\|\mathfrak{A}(-iy)\|}{|\det \mathfrak{A}(-iy)|} \leq e^{-|y|\tau} C_1\sqrt{|y|}$$

$(y < -1)$

Таким образом, на всей прямой $z = iy$:

$$\|\mathfrak{A}(iy)\| \leq C_1\sqrt{|y|} + C_2$$

Поскольку $\mathfrak{A}(z)$ – не выше экспоненциального типа роста и класса Картрайт, то применяя принцип Фрагмента-Линделефа, получаем, что $\mathfrak{A}(z)$ – постоянная. Из условия $\mathfrak{A}(0) = I$,

$\mathfrak{A}(z) \equiv I$ ∎

Получим теперь оценку для элементов $\mathcal{J}$ – формы матрицы-функции $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ при условии (4.2).

Лемма 4.2. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in \gamma\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$, $\mathfrak{A}(z)\neq I$. И пусть $\mathcal{J}$ – форма $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяет оценке (4.2):

$$\mathfrak{A}(z)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(z)-\mathcal{J}=\begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ \overline{A_{12}(z)} & A_{22}(z)\end{bmatrix}\leq MI,\ z=iy,\ y>0 \qquad (4.7)$$

Тогда существует такое $Y>0$, что

$$\frac{1}{16M}\leq A_{KK}(iy)\leq M,\ K=1,2;\quad \forall y>Y \qquad (4.8)$$

Доказательство. Из свойства 3, $\det\mathfrak{A}(z)=e^{izl}$, В силу леммы 4.I, $l>0$. Отсюда вытекает равенство:

$$A_{11}(z)A_{22}(z)-|A_{12}(z)+i|^2=\det\{\mathfrak{A}(z)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(z)\}=-e^{-izl} \qquad (4.9)$$

(Обратим внимание на знак "минус" в (4.9) справа. Если бы его не было, то нижеследующее рассуждение не проходило бы).

С другой стороны, из положительности $\mathcal{J}$ – формы следует неравенство:

$$\det\{\mathfrak{A}(z)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(z)-\mathcal{J}\}=A_{11}(z)A_{12}(z)-|A_{12}(z)|^2\geq 0$$

Вычитая (4.9) из (4.I0), получим

$$|A_{12}(z)+i|^2-|A_{12}(z)|^2\geq e^{-2yl}$$

И значит,

$$2\,\mathrm{Im}\,A_{12}(z)+1\geq e^{-2yl},\qquad \mathrm{Im}\,A_{12}(z)\geq\frac{e^{-2yl}-1}{2}.$$

Используя теперь неравенство между квадратами модуля и мнимой части числа, получаем, с учетом последнего соотношения:

$$|A_{12}(z)+i|^2 \geq (\mathrm{Im}\, A_{12}(z)+1)^2 \geq \left(\frac{e^{-2yl}+1}{2}\right)^2$$

Отсюда и из (4.9) следует, что

$$A_{11}(z)A_{22}(z) = |A_{12}(z)+i|^2 - e^{-2yl} \geq \left(\frac{1-e^{-2yl}}{2}\right)^2$$

$$A_{11}(z)A_{22}(z) \geq \left(\frac{1-e^{-2yl}}{2}\right)^2 \qquad (y=\mathrm{Im}\, z>0) \tag{4.11}$$

Поскольку из (4.7) вытекает, что

$$A_{kk}(iy) \leq M, \quad y>0, \quad k=1,2,$$

то из (4.11) следует требуемая оценка (4.8) для $y \geq Y$. Где

$$Y = \ln 2/2l, \quad l>0; \quad e^{izl} = \det \mathfrak{A}(z) \tag{4.12}$$

Лемма доказана.

В рассматриваемой нами ситуации матриц-функций $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию (4.2), $\mathfrak{A}(z)$ не может быть вещественной. Это видно из лемм 4.1 и 3.1.

Мы остановимся сейчас на более широком классе матриц-функций, чем (4.2) - классе матриц-функций, имеющих минимальный тип роста в верхней полуплоскости:

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{0<\theta<\pi} \frac{\ln \|\mathfrak{A}(re^{i\theta})\|}{r} = 0 \tag{4.14}$$

И укажем на простую связь между матрицами-функциями, удовлетворяющими (4.14) и вещественными. Из принадлежности $\mathfrak{A}(z)$ классу Картрайт вытекает, что если $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяет (4.2), то для нее справедливо и (4.14).

<u>Лемма 4.3.</u> Пусть $\mathfrak{A}(z)$ - произвольная матрица-функция

класса $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0) = I$. И пусть

$$\det \mathfrak{A}(z) = e^{izl}, \quad l \in (-\infty, \infty) \tag{4.15}$$

Тогда матрица-функция

$$\mathfrak{B}(z) = e^{-izl/2}\,\mathfrak{A}(z) \tag{4.16}$$

является вещественной и принадлежит классу $\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство</u>. Из (4.15), (4.16) вытекает, что

$$\det \mathfrak{B}(z) = 1 \tag{4.17}$$

Поскольку матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ и $\mathfrak{B}(z)$ отличаются лишь скалярным множителем, то их круги Вейля совпадают, и значит, круг Вейля $W_z\{\mathfrak{B}\}$ лежит в верхней полуплоскости для каждого $z: \Im m\, z > 0$. Таким образом, при любом $z: \Im m\, z > 0$, матрица $\mathfrak{B}(z)$ является симплектической плюс-матрицей. Обращаясь к теореме II из [35], как мы это делали при доказательстве леммы 2.2, приходим к выводу, что

$$\mathfrak{B}(z) \in \mathfrak{M}$$

Вещественность $\mathfrak{B}(z)$ следует из (4.17) и леммы 3.1.

Лемма доказана.

<u>Лемма 4.4</u>. Пусть $\tilde{\mathfrak{A}}(z)$ – произвольная матрица-функция класса $\mathfrak{M}$. И пусть

$$a = \overline{\lim_{y\to+\infty}} \frac{\ln \|\tilde{\mathfrak{A}}(iy)\|}{y} \tag{4.18}$$

(a – тип роста матрицы-функции $\tilde{\mathfrak{A}}(z)$ вдоль мнимой полуоси). Тогда матрица-функция

$$\mathfrak{A}(z) = e^{iza}\,\tilde{\mathfrak{A}}(z) \tag{4.19}$$

имеет минимальный тип роста в верхней полуплоскости (4.14) и остается в классе $\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство</u>. То, что $\mathfrak{A}(z)$ имеет минимальный тип роста в $\operatorname{Im} z > 0$, следует из (4.18), (4.19) и принадлежности $\mathfrak{A}(z)$ классу Картрайт. Основное утверждение леммы состоит в том, что $\mathfrak{A}(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Факт принадлежности $\mathfrak{A}(z)$ классу $\mathfrak{M}$ вытекает из теоремы о параметризации ([37], стр.27), которая была получена на основании выведенного Д.З.Аровым в [38],[39] принципа максимума модуля для класса Д. Лемма доказана.

Отметим, что леммы 4.3,4.4 являются частными случаями результатов ученицы Д.З.Арова Л.А.Симаковой ([40]). В [40] дано описание тех скалярных аналитических функций, при умножении на которые данная плюс-матрица, аналитическая в единичном круге, превращается в J - растягивающую. Результаты Л.А.Симаковой относятся к матрицам произвольного размера. Наша же лемма 4.4 относится к 2x2 матрицам-функциям, и притом целым. Это приводит к существенным упрощениям в рассуждениях.

Леммы 4.3 и 4.4 говорят о том, что любую матрицу-функцию $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ умножением на экспоненту можно привести либо к вещественной либо к матрице-функции минимального типа роста в верхней полуплоскости, не выводя произведение из класса $\mathfrak{M}$. В главе II мы будем пользоваться "минимальной" нормировкой; в главах III, IУ - вещественной.

Ввиду существования взаимно однозначного соответствия между вещественными матрицами-функциями класса $\mathfrak{M}$ и "минимальными", теорему 3.I можно переформулировать следующим образом:

<u>Теорема 4.I</u>. Пусть матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$, $\mathfrak{A}_1(z)$ клас-

са $\mathfrak{M}$ имеют минимальный тип роста в верхней полуплоскости (4.14). Матрица-функция $\mathfrak{A}_1(z)$ делит слева $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда

$$W\{\mathfrak{A}(z)\} \subseteq W\{\mathfrak{A}_1(z)\}$$

■

Из соотношения между J - формами делимого $\mathfrak{A}(z)$ и делителя $\mathfrak{A}_1(z)$ в классе $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{A}(z) J \mathfrak{A}^*(z) - J \geqslant \mathfrak{A}_1(z) J \mathfrak{A}_1^*(z) \cdot J \qquad (\Im m\, z > 0),$$

а также между "правыми" J - формами делимого $\mathfrak{A}(z)$ и правого делителя $\mathfrak{A}_2(z)$: $\quad \mathfrak{A}(z)\,\mathfrak{A}_2^{-1}(z) \in \mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{A}^*(z) J \mathfrak{A}(z) - J \geqslant \mathfrak{A}_2^*(z) J \mathfrak{A}_2(z) - J \qquad (\Im m\, z > 0),$$

вытекает

<u>Лемма 4.5</u>. Произвольный (левый или правый) делитель $\mathfrak{A}_1(z)$ матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ (4.14) в классе $\mathfrak{M}$ имеет также минимальный тип роста в верхней полуплоскости. ■

То есть, матрицу-функцию $\mathfrak{A}(z)$ (4.14) можно разложить в произведение множителей только минимального типа роста в верхней полуплоскости. Заметим, что вещественные матрицы-функции строго положительного типа роста имеют и невещественные делители.

Отметим, что если $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяет (4.14), то в выражении для ее детерминанта (см. свойство 3), число $\ell \geqslant 0$:

$$\det \mathfrak{A}(z) = e^{-iz\ell} \det \mathfrak{A}(0) \quad , \; \ell \geqslant 0 \qquad (4.22)$$

В самом деле, если бы выполнялось $\ell < 0$, то $\det \mathfrak{A}(z)$ имел бы экспоненциальный тип роста $|\ell|$ в $\Im m\, z > 0$, что несовместимо с (4.14) и очевидным неравенством $|\det \mathfrak{A}(z)| \leqslant \|\mathfrak{A}(z)\|^2$ (справедливым для 2x2 матриц).

Число ℓ в выражении (4.22) для детерминанта $\mathfrak{A}(z)$, имеющий минимальный тип роста в верхней полуплоскости, определяет тип роста $\mathfrak{A}(z)$ <u>во всей</u> комплексной плоскости :

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{0\le\theta<2\pi} \frac{\ln\|\mathfrak{A}(re^{i\theta})\|}{r} = \ell; \quad \det\mathfrak{A}(z) = e^{iz\ell}\det\mathfrak{A}(0) \tag{4.23}$$

В самом деле, обращаясь к принципу симметрии (I.7):

$$\mathfrak{A}(\bar z) = J\mathfrak{A}^{-1*}(z)J$$

и учитывая, что для 2x2 матриц выполняется соотношение:

$$\|\mathfrak{A}^{-1}(z)\| = \frac{1}{|\det\mathfrak{A}(z)|}\ \|\mathfrak{A}(z)\|,$$

получаем из (4.22), что

$$\|\mathfrak{A}^{*}(\bar z)\| = e^{y\ell}\,\|\mathfrak{A}(z)\| \qquad (\operatorname{Im} z<0)$$

Отсюда и следует (4.23) для матриц-функций, удовлетворяющих (4.I4).

§5. Поведение элементов матриц-функций класса $\mathfrak{M}$ на мнимой оси

В этом параграфе мы приведем оценки роста матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ класса $\mathfrak{M}$ и ее J - формы, покажем, что элементы $\mathfrak{A}(z)$ не могут слишком быстро убывать.

Пусть

$$\mathfrak{A}(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} \tag{5.I}$$

- произвольная матрица-функция класса $\mathfrak{M}$. Выпишем выражения для $\mathcal{J}$ - форм через элементы матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$:

$$\mathfrak{A}(z)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(z)-\mathcal{J}=$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ \overline{A_{12}(z)} & A_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b\bar{a}-\bar{a}b}{i} & \dfrac{b\bar{c}-a\bar{d}+1}{i} \\ \dfrac{d\bar{a}-c\bar{b}-1}{i} & \dfrac{d\bar{c}-c\bar{d}}{i} \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (5.2)$$

$$\mathfrak{A}^*(z)\mathcal{J}\mathfrak{A}(z)-\mathcal{J}= \begin{bmatrix} \dfrac{a\bar{c}-\bar{a}c}{i} & \dfrac{b\bar{c}+d\bar{a}+1}{i} \\ \dfrac{a\bar{d}-\bar{b}c-1}{i} & \dfrac{b\bar{d}-\bar{b}d}{i} \end{bmatrix} \geq 0, \ \Im m z>0$$

Из положительности $\mathcal{J}$ - форм и обращения их в ноль на действительной оси $(z=\bar{z})$ вытекает неванлинновость и вещественность четверки отношений

$$\frac{b(z)}{a(z)}, \quad \frac{b(z)}{d(z)}, \quad \frac{a(z)}{c(z)}, \quad \frac{d(z)}{c(z)} \in N \qquad (5.3)$$

<u>Лемма 5.I</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ имеет вид (5.I) и $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$. И пусть для любой невещественной точки z: $\Im m z\neq 0$ ни один из элементов $\mathfrak{A}(z)$ не обращается в нуль:

$$a(z)b(z)c(z)d(z)\neq 0, \qquad \forall z: \Im m z\neq 0$$

Тогда имеет место оценка:

$$\min\{|a(iy)|, \ |b(iy)|, |c(iy)|, |d(iy)|\}\geq \frac{m}{y^2}, |y|>1 \qquad (5.4)$$

при некотором $m>0$.

<u>Доказательство</u>. Известно, что для любой неванлинновской функции $f(z)\in N$, $f(z)\neq 0$, справедливы оценки:

$$P_1 \frac{1}{y} < \Im f(iy) \leq |f(iy)| < P_2 y; \; y>1, \; P_1, P_2 > 0 \tag{5.5}$$

Из (5.3) и оценки (5.5) следует, что существует такое число $P>0$, что

$$\min\left\{ \left|\frac{b(iy)}{d(iy)}\right|, \left|\frac{b(iy)}{a(iy)}\right|, \left|\frac{a(iy)}{c(iy)}\right|, \left|\frac{d(iy)}{c(iy)}\right| \right\} \geqslant \frac{P}{y} \tag{5.6}$$

Тогда для отношений диагональных элементов справедливо неравенство

$$\min\left\{ \left|\frac{a(iy)}{d(iy)}\right|, \; \left|\frac{b(iy)}{c(iy)}\right| \right\} \geqslant \frac{P^2}{y^2} \tag{5.7}$$

(так как, например, $\frac{d}{a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$).

Из (5.6), (5.7) вытекает, что если бы существовали такие последовательности $m_k \to 0$, $y_k \to +\infty$, что

$$\min\{|a(iy_k)|, |b(iy_k)|, |c(iy_k)|, |d(iy_k)|\} \leqslant \frac{m_k}{y_k}$$

то значения элементов $a(iy_k) \to 0$, $b(iy_k) \to 0$, $c(iy_k) \to 0$, $d(iy_k) \to 0$, то есть, имело бы место $\mathfrak{A}(iy_k) \to 0$. Последнее невозможно в силу положительности J - форм $\mathfrak{A}(iy) J \mathfrak{A}^*(iy) - J \geqslant 0 \quad (y>0)$

Справедливость (5.4) при $\Im z = y < -1$ следует теперь из принципа симметрии (I.7). Лемма доказана.

<u>Лемма 5.2.</u> Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$. И пусть в ее матрице Вейля (3.2)

$$W_{\mathfrak{A}}(z) = \mathfrak{A}^{-1*}(z) J \mathfrak{A}^{-1}(z) = \begin{bmatrix} -R(z) & S(z) \\ \overline{S(z)} & -T(z) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

элемент

$$R(z_0)=0 \tag{5.9}$$

в некоторой точке $z_0,\ \Im z_0>0$. Тогда $R(z)\equiv 0$ и

$$\mathfrak{A}(z)=e^{-izp\mathcal{E}_0}\mathfrak{A}(0)=\begin{bmatrix}1 & pz\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathfrak{A}(0) \tag{5.10}$$

где

$$\mathcal{E}_0=\begin{bmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathcal{E}_0 J\geqslant 0,\ \ \mathcal{E}_0^{\,2}=0;\ p\geqslant 0.$$

<u>Доказательство</u>. Из

$$\mathfrak{A}^{-1}(z)=\frac{1}{\det\mathfrak{A}(z)}\begin{bmatrix}d(z) & -b(z)\\ -c(z) & a(z)\end{bmatrix}$$

вытекает, что элемент матрицы Вейля

$$R(z)=\frac{d(z)\overline{c(z)}-c(z)\overline{d(z)}}{i\,|\det\mathfrak{A}(z)|^2}=\frac{A_{22}(z)}{|\det\mathfrak{A}(z)|^2} \tag{5.11}$$

отличается от элемента $A_{22}(z)$ J - формы (5.2) множителем $1/|\det\mathfrak{A}(z)|^2$. Положим в неравенстве Шварца-Пика-Потапова (4.4) $z_1=z_0,\ z_2=z$. Тогда (5.9) влечет обращение в нуль диагонального элемента положительной матрицы (4.4). Значит, строка матрицы, включающая этот элемент, - нулевая:

$$[0,1]\ \frac{\mathfrak{A}(z_0)J\mathfrak{A}^*(z_0)-J}{(z_0-\bar z_0)/i}=[0,0],\quad \frac{c(z)-c(z_0)}{z-z_0}=0,\quad \frac{d(z)-d(z_0)}{z-z_0}=0 \tag{5.12}$$

Из (5.12) вытекает, что $c(z)\equiv c(z_0)=c,\ d(z)\equiv d(z_0)=d,\ \forall z$. Из условия $R(z_0)=0$, отношение $d(z)/c(z)=d/c$ - вещественное число. При этом $R(z)\equiv 0$.

Пусть $d(z_0)\neq 0$. Рассматривая неванлинновскую функцию

$b(z)/d(z)=b(z)/d$, учтем, что $b(z)$ – целая функция. Отсюда $b(z)/d=pz+q$, $p\geq 0$, $q=\bar q$. Из равенства $R(z)\equiv 0$ и положительности J – формы (5.2) вытекает тождество: $\overline{a(z)}d(z)-\overline{b(z)}c(z)-1\equiv 0$, откуда $a(z)=\frac{\bar c}{\bar d}b(z)+\frac{1}{\bar d}=\frac{c}{d}b(z)+\frac{1}{\bar d}$. Окончательно получаем

$$\mathfrak{A}(z)=\begin{bmatrix} c(pz+q)+\frac{1}{\bar d} & d(pz+q) \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & pz \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\bar d}+cq & dq \\ c & d \end{bmatrix},$$

$p\geq 0$, $q=\bar q$, $c/d=\bar c/\bar d$

или

$$\mathfrak{A}(z)=\begin{bmatrix} 1 & pz \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathfrak{A}(0)=e^{-izp\mathcal{E}_0}\mathfrak{A}(0)$$

Если $d=d(z_0)=0$, то

$$\mathfrak{A}(z)=\begin{bmatrix} (pz+q)c & \frac{1}{\bar c} \\ c & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & pz \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} qc & \frac{1}{\bar c} \\ c & 0 \end{bmatrix}=e^{-izp\mathcal{E}_0}\mathfrak{A}(0)$$

Лемма доказана.

Аналогично доказывается, что если в (5.8) $T(z_0)=0$, $\operatorname{Im} z_0>0$, то

$$\mathfrak{A}(z)=e^{-izp\tilde{\mathcal{E}}_0}\mathfrak{A}(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -pz & 1 \end{bmatrix}\mathfrak{A}(0),\ p\geq 0;\ \tilde{\mathcal{E}}_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

<u>Следствие I</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$. И пусть в некоторой точке z_0, такой, что $\operatorname{Im} z_0\neq 0$, выполняется $a(z_0)\,b(z_0)\,c(z_0)\,d(z_0)=0$. Тогда $\mathfrak{A}(z)$ имеет вид (5.10) или (5.13).

<u>Доказательство</u>. Пусть $\operatorname{Im} z_0>0$. Если один из элементов

матрицы $\mathfrak{A}(z)$ обращается в точке $z=z_0$ в нуль, то либо $R(z_0)=0$, либо $T(z_0)=0$. По лемме 5.2, $\mathfrak{A}(z)$ имеет вид (5.10) или (5.13). При $\Im z_0<0$ следствие верно в силу принципа симметрии (1.7).

Следствие 2. Если $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ не является матрицей вида $\mathfrak{A}(z)=e^{-iz\mathcal{E}}\mathfrak{A}(0)$, $\mathcal{E}J\geq 0$, $\mathcal{E}^2=0$, то диагональные элементы левой и правой J - форм (5.2) не обращаются в нуль ни в одной невещественной точке z, $\Im z\neq 0$.

Из выражения (2.14) для радиуса круга Вейля $W\{\mathfrak{A}(z)\}$

$$r(z)=\frac{1}{R(z)\ |\det\mathfrak{A}(z)|} \tag{5.14}$$

вытекает, согласно лемме 5.2, что радиус круга Вейля матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ не может обращаться в бесконечность (кроме случая $\mathfrak{A}(z)=e^{-iz\mathcal{E}}\mathfrak{A}(0)$, $\mathcal{E}J\geq 0$, $\mathcal{E}^2=0$). Следующая лемма указывает на то, что всегда существует последовательность $y_k\to+\infty$, такая что $r(iy_k)\to 0$ при $y_k\to+\infty$.

Лемма 5.3. Пусть вещественная матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$. И пусть в ее матрице Вейля (5.8) элемент $R(z)$ ограничен на мнимой полуоси:

$$R(iy)\leq C<\infty \qquad (y>1) \tag{5.15}$$

Тогда $R(z)\equiv 0$, $\mathfrak{A}(z)=e^{-izp\mathcal{E}_0}\mathfrak{A}(0)$, $p\geq 0$; $\mathcal{E}_0=\begin{bmatrix}0&i\\0&0\end{bmatrix}$.

Доказательство. Поскольку матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ вещественна, то $R(z)=-R(\bar z)$ и оценка (5.15) имеет место для всех $y\in(-\infty,\infty)$. Далее, так как сейчас $\det\mathfrak{A}(z)=1$, то из (5.11)

$$R(z)=2|c(z)|^2\Im\left(\frac{d(z)}{c(z)}\right)=2|d(z)|^2\Im\left(-\frac{c(z)}{d(z)}\right) \tag{5.16}$$

Из (5.I5), (5.I6) и оценки (5.5) мнимой части неванлинновской функции получаем, что либо $R(z) \equiv 0$, либо

$$|b(iy)|^2 \le c_1 y, \quad |d(iy)|^2 \le c_1 y \qquad (|y|>1)$$

Так как $\mathfrak{A}(z)$ – функция класса Картрайт, то из этих оценок вытекает, что $b(z) \equiv b$, $d(z) \equiv d$ – постоянные числа. Из условия вещественности функции $b(z)/d(z)$ следует, что $Jm(b/d)=0$, и значит в силу (5.I6), снова $R(z) \equiv 0$. Согласно лемме 5.2, $\mathfrak{A}(z)$ имеет вид (5.I0). Лемма доказана.

<u>Следствие</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ и пусть ее радиус Вейля отделен от нуля при $z=iy,\ y \to +\infty$:

$$r(iy) \ge \delta > 0 \qquad (y \to +\infty)$$

Тогда $r(z) = \infty$ и $\mathfrak{A}(z)$ имеет вид (5.I0).

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathfrak{A}(z)$ – произвольная матрица-функция класса $\mathfrak{M}$. Перейдем к вещественной матрице-функции (см.лемму 4.3):

$$\tilde{\mathfrak{A}}(z) = e^{-izl/2}\, \mathfrak{A}(z)$$

Круги Вейля коллинеарных матриц-функций $\tilde{\mathfrak{A}}(z)$ и $\mathfrak{A}(z)$ совпадают. Утверждение же следствия для вещественных матриц-функций справедливо в силу леммы 5.3 и формулы (5.I4) (с учетом того, что в (5.I4) $\det \tilde{\mathfrak{A}}(z) = 1$).

ГЛАВА II. МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОЛУОСИ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

§ I. Постановка вопроса

В этой главе мы исследуем мультипликативное представление целой $\mathcal{J}$-внутренней в верхней полуплоскости 2x2 матрицы-функции

$$\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}(0) \int_0^{\ell} e^{-iz\varphi(t)dt}, \quad \varphi(t)\mathcal{J} \geq 0 \tag{I.I}$$

с ограниченной $\mathcal{J}$-формой на мнимой полуоси:

$$\mathfrak{A}(iy)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(iy) - \mathcal{J} \leq MI \qquad (y > 0) \tag{I.2}$$

Здесь мы доказываем сформулированное во введении

<u>Основное предложение</u> I. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \gamma\mathfrak{M}$ имеет представление (I.I)с нормированным показателем: $Sp(\varphi(t)\mathcal{J}) \equiv 1$, и ее $\mathcal{J}$-форма ограничена на мнимой положительной полуоси (I.2). Тогда показатель $\varphi(t)$удовлетворяет строгому неравенству

$$Sp\ \varphi(t) < 0, \quad п.\ в.\ \ t \in [0, \ell] \tag{I.3}$$

и

$$\varphi^2(t) = (Sp\ \varphi(t))\varphi(t) \tag{I.4}$$

Из предложения I вытекает интересующее нас утверждение о том, что матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$, удовлетворяющие (I.2), допускают мультипликативное представление с показателем - $\mathcal{J}$-проектором П вида: $\varphi(t) = Q(t)$, $Q^2(t) = -Q(t)$, $Q(t)\mathcal{J} \geq 0$. Отметим, что обратное, вообще говоря, неверно: если показатель $\varphi(t)$ мультипликативного интеграла (I.I) - $\mathcal{J}$-проектор П вида, то $\mathcal{J}$ -форма этого интеграла не обязательно ограничена на мнимой полуоси. Но , накладывая на показатель $Q(t)$ в представлении

$$\mathfrak{A}(z)=\mathfrak{A}(0)\int_0^{\ell}\!\!\!\curvearrowright e^{-izQ(\tau)d\tau}, \quad Q(\tau)J\geq 0,\ Q^2(\tau)=-Q(\tau) \qquad (I.5)$$

дополнительные условия гладкости, можно добиться того, что $\mathfrak{A}(z)$ будет удовлетворять оценке (I.2) на мнимой полуоси.

В § 8 главы П мы показываем, что если показатель мультипликативного интеграла – J-проектор $Q(\tau)$ – имеет ограниченную вариацию, то матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ (I.5) ограничена во всей комплексной верхней полуплоскости.

Наконец, для вещественных матриц-функций $\mathfrak{B}(z)$ (т.е. $\mathfrak{B}(z)=\overline{\mathfrak{B}(\bar z)}$ при $z=\bar z$), удовлетворяющих условию:

$$\mathfrak{B}(iy)J\mathfrak{B}^*(iy)-J\leq Me^{2a|y|}I, \quad y>0$$

где a – экспоненциальный тип роста матрицы-функции $\mathfrak{B}(z)$ во всей комплексной плоскости, мы показываем, что в ее мультипликативном представлении[4)]

$$\mathfrak{B}(z)=\mathfrak{B}(0)\int_0^{a}\!\!\!\curvearrowright e^{-izH(t)dt}, \quad H(t)J\geq 0,\ iH(t)=\overline{iH(t)} \qquad (I.6)$$

эрмитиан $H(t)J$ можно считать симплектическим:

$$\det(H(t)J)\equiv 1 \qquad (I.7)$$

(что является аналогом основного предложения I для вещественных матриц-функций).

---

4) Обратим внимание на условие $iH(t)=\overline{iH(t)}$ в (I.6), обеспечивающее вещественность матрицы-функции $iH(t)$ (то есть, вещественность всех элементов матрицы $iH(t)$). Отсюда следует, что (I.6) есть представление вещественной матрицы-функции $\mathfrak{B}(z)$ <u>вещественным</u> мультипликативным интегралом.

Свойство эрмитиана $H(t)\mathcal{J}$ (I.7) важно для приложений. Матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ (I.6) с симплектическим эрмитианом $H(t)\mathcal{J}$ выделял в своих исследованиях М.Г. Крейн (см. [20]). (Напомним, что для 2x2 матриц условие симплектичности эквивалентно условию (I.7)).

§ 2. Доказательство ослабленного основного предложения.

Напомним, что основное предложение сформулировано в § I (см. в связи с этим формулу (I.3)).

В этом параграфе мы докажем, что для эрмитиана $\varphi(t)\mathcal{J}$ матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ (I.I), удовлетворяющей (I.2), справедливо ослабленное неравенство:

$$Sp\,\varphi(t) \leq 0\,, \quad \varphi^2(t) = (Sp\,\varphi(t))\,\varphi(t) \tag{2.I}$$

Отличие (2.I) от (I.3) в том, что неравенство в (2.I) нестрогое.

Для доказательства (2.I) нам понадобится следующая

<u>Лемма</u> 2.I. Пусть матрица φ является $\mathcal{J}$-положительной: $\varphi\mathcal{J} \geq 0$. Тогда имеет место один из двух случаев: либо φ есть линейная комбинация $\mathcal{J}$-проекторов I и II видов:

$$\varphi = \kappa P + \ell Q \tag{2.2}$$

где числа $0 \leq \kappa < +\infty$, $0 \leq \ell < +\infty$, а матрицы P, Q - $\mathcal{J}$-проекторы, соответственно, I и II видов, и при том взаимно ортогональные:

$$P^2 = P,\ P\mathcal{J} \geq 0;\ Q^2 = -Q,\ Q\mathcal{J} \geq 0;\ PQ = QP = 0;\ P - Q = I \tag{2.3}$$

либо φ есть $\mathcal{J}$-проектор III вида:

$$\varphi = \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}^2 = 0, \quad \mathcal{E}\mathcal{J} \geq 0.$$

Доказательство. Для простоты положим $\mathcal{J} = j = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (матрицы $\mathcal{J}: \mathcal{J}^* = \mathcal{J},\ \mathcal{J}^2 = I,\ \mathcal{J} \neq \pm I$ унитарно эквивалентны).

Из теории псевдоунитарных пространств (   ), существует такая $\mathcal{J}$ - унитарная матрица $\mathcal{U}: \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^* = \mathcal{J}$, что при $\varphi^2 \neq 0$ матрица $\mathcal{U}^{-1}\varphi j \mathcal{U}^{-1*} = \begin{bmatrix} \ell & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, откуда

$$\varphi j = \mathcal{U}\begin{bmatrix} \ell & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\mathcal{U}^*, \quad \varphi = \ell Q + kP, \quad Q = \mathcal{U}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathcal{U}^{-1}, \quad P = \mathcal{U}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{U}^{-1}$$

Очевидно, что P и Q справедливо (2.3), что и завершает доказательство.

Заметим, что числа k и ℓ в (2.2) находятся из равенства:

$$k - \ell = Sp\,\varphi, \quad \left(\varphi - \frac{k-\ell}{2} I\right)^2 = \left(\frac{k+\ell}{2}\right)^2 I \tag{2.4}$$

Лемма 2.I, по сути, утверждает, что из $\mathcal{J}$ - проекторов (I.6) можно составить любую $\mathcal{J}$ - положительную матрицу.

Отметим, что $\mathcal{J}$ - проекторы допускают параметризацию через нормированные плюс-векторы:

$$f = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad f^*\mathcal{J}f = 1: \quad P = ff^*\mathcal{J}, \quad Q = \bar{f}\bar{f}^*\mathcal{J} \tag{2.5}$$

и нейтральные векторы:

$$g = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad g^*\mathcal{J}g = 0; \quad \mathcal{E} = gg^*\mathcal{J} = \begin{bmatrix} -i\alpha\bar{\beta} & i\alpha\bar{\alpha} \\ -i\beta\bar{\beta} & i\bar{\alpha}\beta \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

причем, из $g^*\mathcal{J}g = 0$ видно, что в (2.6) α и β можно считать вещественными: $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$.

<u>Теорема</u> 2.I. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$ имеет представление (I.I). И пусть тип роста $\mathfrak{A}(z)$ в верхней полуплоскости $\mathfrak{Im}\, z>0$ минимален:

$$\|\mathfrak{A}(iy)\| = o(e^{\delta y}), \quad \forall\delta>0,\ y\to+\infty \tag{2.7}$$

Тогда эрмитиан $\varphi(t)\mathcal{J}$ в (I.I) удовлетворяет (2.I).

<u>Доказательство</u>. Согласно лемме 2.I, матрица-функция $\varphi(t)$ в (I.I) такова, что в любой точке $t\in[0,L]$ либо $\varphi^2(t)=0$, либо

$$\varphi(t) = \kappa(t)P(t) + \ell(t)Q(t) \tag{2.8}$$

где $\kappa(t)\geqslant 0$, $\ell(t)\geqslant 0$; P и Q удовлетворяют (2.3).

Положим в тех точках t, для которых $\varphi^2(t)=0$, функции $\kappa(t)=\ell(t)=0$, а для $\varphi^2(t)\neq 0$ функции $\kappa(t)$, $\ell(t)$ определим из (2.8). Тогда $\kappa(t)$, $\ell(t)$ определяются на всем интервале $[0,L]$ формулами (2.4):

$$\kappa(t)-\ell(t) = Sp\,\varphi(t),\quad \left(\varphi(t)-\frac{\kappa(t)-\ell(t)}{2}I\right)^2 = \left(\frac{\kappa(t)+\ell(t)}{2}\right)^2 I \tag{2.9}$$

В силу (2.9) и суммируемости матрицы-функции $\varphi(t)$, функции $\kappa(t)$, $\ell(t)$ - суммируемые на $[0,L]$. Нам надо показать, что $\kappa(t)=0$ п.в. $t\in[0,L]$.

Пусть, от противного, существует такое множество $E\subseteq[0,L]$ положительной меры, что $\kappa(t)>0$, $\forall t\in E$, то есть,

$$\int_E \kappa(t)\,dt = A>0 \tag{2.I0}$$

Введем матрицу-функцию

$$\hat{\varphi}(t) = \varphi(t) - \kappa(t) I = \begin{cases} (\kappa(t) + \ell(t)) Q(t), & \varphi^2(t) \neq 0 \\ \varphi(t), & \varphi^2(t) = 0 \end{cases}$$

Матрица-функция $\hat{\varphi}(t)\mathcal{J}$ является $\mathcal{J}$ - положительной и поэтому мультипликативный интеграл

$$\hat{\mathfrak{A}}(z) = \int_0^{\overset{\curvearrowright}{\ell}} e^{-iz\hat{\varphi}(t)dt} = e^{izA} \int_0^{\overset{\curvearrowright}{\ell}} e^{-iz\varphi(t)dt}$$

принадлежит классу $\mathfrak{M}$. В частности, $\hat{\mathfrak{A}}(z)\mathcal{J}\hat{\mathfrak{A}}^*(z) - \mathcal{J} \geq 0$, $\mathcal{J}m\, z > 0$, но в силу условий (2.7), (2.10) матрица-функция

$$\hat{\mathfrak{A}}(z) = e^{izA} \mathfrak{A}(z), \quad A > 0$$

такова, что $\|\hat{\mathfrak{A}}(iy)\| \to 0$ $(y \to +\infty)$. Последнее невозможно, так как справедливо неравенство $\hat{\mathfrak{A}}(iy)\mathcal{J}\hat{\mathfrak{A}}^*(iy) - \mathcal{J} \geq 0$ $(y > 0)$.

Противоречие показывает, что в (2.10) $A = 0$ и $\kappa(t) = 0$ п.в. $t \in [0, \ell]$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 вытекает, что в случае ограниченной $\mathcal{J}$ - формы:

$$\mathfrak{A}(iy)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(iy) - \mathcal{J} \leq M I, \quad y > 0 \qquad (2.11)$$

эрмитиан мультипликативного разложения (1.1):

$$\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}(0) \int_0^{\overset{\curvearrowright}{\ell}} e^{-iz\varphi(t)dt}, \quad \varphi(t)\mathcal{J} \geq 0, \; Sp(\varphi(t)\mathcal{J}) \equiv 1 \qquad (2.12)$$

почти в каждой точке t может иметь одно из двух представлений:

$$\varphi(t) = \mathcal{E}(t), \quad \mathcal{E}^2(t) = 0, \; \mathcal{E}(t)\mathcal{J} \geq 0 \qquad (2.13)$$

либо

$$\varphi(t) = \ell(t)Q(t),\ \ell(t)>0,\ Q^2(t) = -Q(t),\ Q(t)J \geq 0.$$

Для доказательства строгого неравенства (I.3): $Sp\,\Re(t)<0$, остается проверить, что представление (2.I3) для $\varphi(t)$ возможно лишь на множестве точек t лебеговой меры нуль.

С этой целью мы в следующем параграфе докажем вспомогательное предложение о том, что в случае (2.II) не существует такого подинтервала $(u', u'') \subseteq (0, L)$, на котором эрмитиан $\varphi(t)J$ обращается в постоянный $\mathcal{E}$ – проектор:

$$\varphi(t) \equiv \mathcal{E},\quad \mathcal{E}^2 = 0,\ \mathcal{E}J \geq 0,\quad \forall t \in (u', u'') \tag{2.I4}$$

Рассмотрение этого частного случая основного предложения I поможет нам при доказательстве самого основного предложения.

Для матрицы $\mathfrak{A}(z)$ (2.I2) выполнение условия (2.I4) означало бы, что имеет место разложение:

$$\mathfrak{A}(z) = \int_0^{u'} e^{-iz\varphi(t)dt} \int_{u'}^{u''} e^{-iz\mathcal{E}dt} \int_{u''}^{L} e^{-iz\varphi(t)dt} =$$

$$= \int_0^{u'} e^{-iz\varphi(t)dt}\, e^{-izp\mathcal{E}} \int_{u'}^{u''} e^{-iz\varphi(t)dt},\quad p = u''-u' > 0.$$

$$\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{B}_1(z)\, e^{-izp\mathcal{E}}\, \mathfrak{B}_2(z) \tag{2.I5}$$

где

$$\mathfrak{B}_1(z),\ \mathfrak{B}_2(z) \in \mathfrak{M},\ p>0,\ \mathcal{E}^2 = 0,\ \mathcal{E}J \geq 0,\ \mathcal{E} \neq 0,$$

что несовместно с оценкой (2.II).

§ 3. Отщепление от матрицы-функции $\mathcal{E}$ - множителя

Исследуем свойства матриц-функций $\mathcal{Z}(z)\in\mathfrak{M}$, представимых в виде

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-iz\mathcal{E}}\mathcal{Z}_1(z)\,,\quad \mathcal{Z}_1(z)\in\mathfrak{M} \tag{3.I}$$

$$\mathcal{E}^2=0\,,\ \mathcal{E}\mathcal{J}\geqslant 0,\ \mathcal{E}\neq 0$$

Множитель $e^{-iz\mathcal{E}}=I-iz\mathcal{E}$ будем называть $\mathcal{E}$ - множителем.

Преобразованием подобия с $\mathcal{J}$ - унитарной матрицей $\mathcal{U}$: $\mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^*=\mathcal{J}$, матрицу $\mathcal{E}$ можно привести к виду

$$\mathcal{E}_o=\mathcal{U}\mathcal{E}\mathcal{U}^{-1}=\begin{bmatrix}0&i\\0&0\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

При этом

$$\mathcal{U}e^{-iz\mathcal{E}}\mathcal{U}^{-1}=e^{-iz\,\mathcal{U}\mathcal{E}\mathcal{U}^{-1}}=e^{-iz\mathcal{E}_o}=I-iz\mathcal{E}_o$$

Если $\mathcal{E}$ имеет вид (2.6), то в (3.2)

$$\mathcal{U}^{-1}=i\mathcal{J}\begin{bmatrix}\beta&0\\\alpha&1/\beta\end{bmatrix}\ \text{при}\ \beta\neq 0\ ;\ \text{и}\ \mathcal{U}=i\begin{bmatrix}0&-\alpha\\1/\alpha&0\end{bmatrix}\mathcal{J},\ \text{если}\ \beta=0 \tag{3.3}$$

О матрице $\mathcal{Z}(z)$, допускающей представление (3.I) будем говорить, что от нее отщепляется слева $\mathcal{E}$ - множитель.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы определить, при каких условиях от матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)\in\mathfrak{M}$ отщепляется слева множитель $e^{-iz\rho\mathcal{E}_o}$:

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-iz\rho\mathcal{E}_o}\mathcal{Z}_1(z),\ \ \mathcal{Z}_1(z)\in\mathfrak{M},\ \rho>0 \tag{3.4}$$

Исследуем для этого свойства функционального круга Вейля множителя

$$b_0(z)=e^{-izp\mathcal{E}_0}=\begin{bmatrix}1 & pz\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad p>0 \tag{3.5}$$

Лемма 3.1. Функциональный круг Вейля $W\{b_0(z)\}$ множителя $b_0(z)$ (3.5) состоит из тех и только тех неванлинновских функций $u(z)\in N$, для которых

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{u(iy)}{iy}\geqslant p \tag{3.6}$$

В самом деле, для любой $\omega(z)\in N$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\omega(iy)}{iy}\geqslant 0 \tag{3.7}$$

Обратимся теперь к определению функционального круга Вейля.

$$W\{b_0(z)\}=\{u(z):\ u(z)=\frac{1\cdot\omega(z)+pz}{1},\ \omega(z)\in N\}$$

Так что, круг Вейля множителя $b_0(z)$ – это все функции вида

$$u(z)=\omega(z)+pz, \quad \omega(z)\in N,\ p>0$$

Отсюда и из (3.7) и следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь свойства круга Вейля матрицы-функции вида (3.4).

Лемма 3.2. Пусть матрица-функция $b(z)\in \mathfrak{M}$, пусть для некоторой функции $u(z)=u_0(z)$ из круга Вейля $W\{b(z)\}$ справедливо равенство

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{u(iy)}{iy}=p, \quad \text{с некоторым } p>0 \tag{3.8}$$

Тогда либо $b(z)$ имеет вид

$$b(z)=e^{-izl\mathcal{E}_0}\,b(0) \tag{3.9}$$

где $\ell \leq p$, либо для всех функций $u(z) \in W\{\mathcal{Z}(z)\}$ имеет место (3.8).

Доказательство. Если $\mathcal{Z}(z)$ имеет вид (3.9), то в силу леммы 3.I соотношение (3.8) может иметь место лишь при $\ell \leq p$. Пусть $\mathcal{Z}(z)$ не является произведением (3.9). Тогда из (I.3.8) получаем для любой функции из круга Вейля $u(z) \in W\{\mathcal{Z}(z)\}$ неравенство:

$$|u(z) - u_0(z)| \leq 2\tau(z)$$

Но по следствию из леммы 5.3 главы I существует последовательность $y_k \to +\infty$, такая, что $\tau(iy_k) \to 0$. Следовательно, функция $u(z)$ удовлетворяет вместе с $u_0(z)$ равенству (3.8) (с тем же самым числом p). Лемма доказана.

Для $\mathcal{Z}(z)$ из леммы 3.2 функции ее круга Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$ удовлетворяют и (3.6), а значит, включаются в круг Вейля $W\{b_0(z)\}$. То есть,

$$W\{\mathcal{Z}(z)\} \subseteq W\{b_0(z)\}$$

Используя теперь факт соответствия между делимостью в классе $\mathfrak{M}$ и вкладываемостью кругов Вейля (теоремы 3.I и 4.I главы I), приходим к утверждению:

Лемма 3.3. Пусть матрица-функция $\mathcal{Z}(z) \in \mathfrak{M}$ имеет минимальный тип роста в $\operatorname{Im} z > 0$ или вещественна [5]. И пусть существует $\omega(z) \in N$, такая, что функция $u(z)$:

---

5) Утверждение леммы 3.3 справедливо и без требования вещественной или "минимальной" нормировки для матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$.

$$u(z)=\frac{a(z)\omega(z)+b(z)}{c(z)\omega(z)+d(z)}, \quad \mathcal{B}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

удовлетворяет условию (3.8). Тогда либо $\mathcal{B}(z)$ имеет вид (3.9), $\ell \le p$; либо $\mathcal{B}(z)$ делится на $b_0(z)$, то есть, справедливо (3.4).

∎

Полагая в (3.10) $\omega(z)=0$, получаем следующий критерий отщепляемости от матрицы-функции $\mathcal{B}(z)\in\mathfrak{M}$ $\mathcal{E}$ – множителя $b_0(z)$(3.5).

<u>Лемма 3.4</u>. Для того, чтобы матрица-функция

$$\mathcal{B}(z)\in\mathfrak{M}, \ \mathcal{B}(0)=I, \ \mathcal{B}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

допускала представление (3.4), необходимо и достаточно, чтобы[6]

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{b(iy)}{iy\, d(iy)} > p$$

Утверждение, дуальное к лемме 3.4, получается переходом к матрице-функции $\widetilde{\mathcal{B}}(z)=\mathcal{B}^*(-\bar z)$:

<u>Лемма 3.5</u>. Пусть матрица-функция $\widetilde{\mathcal{B}}(z)\in\mathfrak{M}$, $\widetilde{\mathcal{B}}(0)=I$. Для того, чтобы матрица-функция $\widetilde{\mathcal{B}}(z)$ допускала представление

$$\widetilde{\mathcal{B}}(z)=\widetilde{\mathcal{B}}_1(z)e^{-iz\widetilde{\mathcal{E}}_0}=\widetilde{\mathcal{B}}_1(z)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -pz & 1 \end{bmatrix}; p\ge 0, \ \widetilde{\mathcal{E}}_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

необходимо и достаточно, чтобы для элементов матрицы выполнялось условие

---

6) Этот критерий в иной форме имеется в работе М.Г.Крейна [16].

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{-\tilde{c}(iy)}{iy\,\tilde{d}(iy)} \geq p, \quad \tilde{\mathcal{Z}}(z) = \begin{bmatrix} \hat{a}(z) & \hat{b}(z) \\ \hat{c}(z) & \tilde{d}(z) \end{bmatrix}$$

Теперь мы докажем невозможность разложения (2.I5) для матрицы-функции $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющей оценке (2.II).

<u>Теорема 3.I</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ имеет ограниченную на мнимой полуоси J - форму (2.II). Тогда из представления

$$\mathfrak{A}(z) = \mathcal{Z}_1(z) e^{-iz\mathcal{E}} \mathcal{Z}_2(z), \quad \mathcal{Z}_k(z) \in \mathfrak{M}, \ k=1,2 \qquad (3.I2)$$

$\mathcal{E}^2 = 0, \ \mathcal{E}J \geq 0$

вытекает, что $\mathcal{E} = 0$.

<u>Доказательство</u>. Обозначим $\mathcal{Z}(z) = \mathcal{Z}_1(z) e^{-iz\mathcal{E}}$; $\mathfrak{A}(z) = \mathcal{Z}(z)\mathcal{Z}_2(z)$, $\mathcal{Z}_2(z) \in \mathfrak{M}$. Тогда из неравенства

$$\mathcal{Z}(z) J \mathcal{Z}^*(z) - J \leq \mathfrak{A}(z) J \mathfrak{A}^*(z) - J \leq M I, \quad z = iy, \ y > 0$$

видно, что J - форма матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ также удовлетворяет оценке на полуоси (2.II).

Пусть, от противного, матрица $\mathcal{E}$ в (3.I2) такова, что $\mathcal{E} \neq 0$.

I°. Подберем постоянную J - унитарную матрицу $\mathcal{U}: \mathcal{U} J \mathcal{U}^* = J$, так, что

$$\mathcal{U} \mathcal{E} \mathcal{U}^{-1} = \tilde{\mathcal{E}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда матрица-функция

$$\tilde{\mathcal{Z}}(z) = \mathcal{U} \mathcal{Z}(z) \mathcal{U}^{-1} = \tilde{\mathcal{Z}}_1(z) e^{-iz\tilde{\mathcal{E}}_0}, \quad \tilde{\mathcal{Z}}_1(z) \in \mathfrak{M} \qquad (3.I3)$$

удовлетворяет оценке:

$$\widetilde{\mathfrak{Z}}(iy)J\widetilde{\mathfrak{Z}}^*(iy)-J \le M_1 I \quad (y>0) \tag{3.14}$$

Покажем, что представление (3.13) для матрицы $\widetilde{\mathfrak{Z}}(z)$ несовместно с оценкой (3.14).

2°. Пусть (3.13) верно. Рассмотрим все числа $p \geq 0$, для которых следующая матрица остается в классе $\mathfrak{M}$:

$$\widetilde{\mathfrak{Z}}(z)\left(e^{-izp\widetilde{\mathcal{E}}_0}\right)^{-1} \in \mathfrak{M} \tag{3.15}$$

Так как (3.15) эквивалентно неравенству

$$\widetilde{\mathfrak{Z}}^*(z)J\widetilde{\mathfrak{Z}}(z)-J \geq \left(e^{-izp\widetilde{\mathcal{E}}_0}\right)^* J\left(e^{-izp\widetilde{\mathcal{E}}_0}\right)-J=\begin{bmatrix} 2py & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

то существует максимально возможное

$$p=p_0$$

для которого имеет место (3.15), (3.16). Из (3.13) следует, что $p_0 \geq 1$. Таким образом,

$$\widetilde{\mathfrak{Z}}(z)=\widetilde{\mathfrak{Z}}_3(z)e^{-izp_0\widetilde{\mathcal{E}}_0}, \quad \widetilde{\mathfrak{Z}}_3(z)\in\mathfrak{M}, \quad p_0 \geq 1 \tag{3.17}$$

3°. Выясним теперь ограничения, налагаемые на рост элементов матрицы $\widetilde{\mathfrak{Z}}_3(z)$ представлением (3.17) и оценкой (3.14).

В силу неотрицательности слагаемых в правой части неравенства

$$M_1 I \geq \widetilde{\mathfrak{Z}}(iy)J\widetilde{\mathfrak{Z}}^*(iy)-J=\{\widetilde{\mathfrak{Z}}_3(iy)J\widetilde{\mathfrak{Z}}_3^*(iy)-J\}+$$

$$+\widetilde{\mathfrak{Z}}_3(iy)\{e^{yp_0\widetilde{\mathcal{E}}_0}Je^{yp_0\widetilde{\mathcal{E}}_0^*}-J\}\widetilde{\mathfrak{Z}}_3^*(iy)$$

справедливы оценки:

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_3(iy)\{e^{yp_0\widetilde{\mathcal{E}}_0}\mathcal{J}e^{yp_0\widetilde{\mathcal{E}}_0^*}-\mathcal{J}\}\widetilde{\mathfrak{B}}_3^*(iy)\le M_1 I \quad , y>0 \tag{3.18}$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_3(iy)\mathcal{J}\widetilde{\mathfrak{B}}_3^*(iy)-\mathcal{J}\le M_1 I \quad , \quad y>0 \tag{3.19}$$

Далее обозначая $\widetilde{\mathfrak{B}}_3(z)=\begin{bmatrix}\widetilde{a}(z) & \widetilde{b}(z)\\ \widetilde{c}(z) & \widetilde{d}(z)\end{bmatrix}$ и учитывая, что

$$e^{yp_0\widetilde{\mathcal{E}}_0}\mathcal{J}e^{yp_0\widetilde{\mathcal{E}}_0^*}-\mathcal{J}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2p_0 y\end{bmatrix}$$

получаем из (3.18)

$$2yp_0\begin{bmatrix}|\widetilde{b}(iy)|^2 & \widetilde{b}(iy)\overline{\widetilde{d}(iy)}\\ \widetilde{d}(iy)\overline{\widetilde{b}(iy)} & |\widetilde{d}(iy)|^2\end{bmatrix}\le M_1 I$$

Откуда

$$|\widetilde{d}(iy)|^2\le\frac{M_1}{2yp_0}\le\frac{M_1}{2y} \tag{3.20}$$

С другой стороны, в силу леммы 4.2 главы I, условие (3.19) позволяет оценить снизу диагональный элемент $\mathcal{J}$ - формы

$$\frac{1}{16M_1}\le\frac{\widetilde{d}(iy)\overline{\widetilde{c}(iy)}-\widetilde{c}(iy)\overline{\widetilde{d}(iy)}}{i} \qquad (y>Y_1)$$

Из последнего неравенства и (3.20) вытекает соотношение

$$-\operatorname{Im}\frac{\widetilde{c}(iy)}{iy\widetilde{d}(iy)}\geqslant\frac{1}{8M_1^2}\quad , \quad y>Y_1 \tag{3.21}$$

4°. Наконец, по критерию леммы 3.5, оценка (3.21) гарантирует представимость $\widetilde{\mathfrak{B}}_3(z)$ в виде

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_3(z)=\widetilde{\mathfrak{B}}_4(z)e^{-iz\widetilde{p}\widetilde{\mathcal{E}}_0}\quad , \quad \widetilde{p}=\frac{1}{8M_1^2}\quad , \quad \widetilde{\mathfrak{B}}_4(z)\in\mathfrak{M}$$

Но тогда

$$\tilde{\mathcal{Z}}(z) = \tilde{\mathcal{Z}}_4(z) e^{-iz(p_0+\tilde{p})\tilde{\mathcal{E}}_0}, \ \tilde{p}>0, \ \tilde{\mathcal{Z}}_4(z)\in\mathfrak{M},$$

что противоречит максимальности числа p_0. Таким образом, представление (3.I3) несовместно с оценкой (3.I4), а это и означает, что в (3.I2) $\mathcal{E}=0$. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Пусть матрица-функция $\mathcal{Z}(z)\in\mathfrak{M}$

$$\mathcal{Z}(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

удовлетворяет оценке:

$$\mathcal{Z}(iy)J\mathcal{Z}^*(iy) - J \le MI, \ y>0 \tag{3.23}$$

Тогда функции

$$u_1(z) = -a(z)/b(z), \quad u_2(z) = b(z)/a(z)$$

удовлетворяют при $y\to+\infty$ асимптотике:

$$\operatorname{Im} u_k(iy)/y \to 0 \quad (k=1,2) \tag{3.24}$$

$$y \operatorname{Im} u_k(iy) \nearrow +\infty \quad (k=1,2) \tag{3.25}$$

В самом деле, используя леммы 3.5, 3.4, можно проверить, что нарушение одного из условий (3.24) или (3.25) при каком-либо k = I,2 влечет представление для матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$:

$$\mathcal{Z}(z) = \mathcal{Z}_1(z) e^{-iz\mathcal{E}}, \ \mathcal{E}J\ge 0, \mathcal{E}^2=0, \mathcal{E}\ne 0; \mathcal{Z}_1(z)\in\mathfrak{M},$$

что противоречит теореме 3.I.

<u>Замечание</u>. Аналогично доказывается справедливость асимптотики для отношений элементов $c(z)$ и $d(z)$ матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ (3.22), (3.23):

$$\frac{1}{y} d(iy)/c(iy) \to 0, \quad -\frac{1}{y} c(iy)/d(iy) \to 0 \qquad (3.26)$$

$$y\, \mathrm{Im}(d(iy)/c(iy)) \nearrow +\infty, \; -y\, \mathrm{Im}(c(iy)/d(iy)) \nearrow +\infty \qquad (3.27)$$

§ 4. Доказательство основного предложения

В этом параграфе мы доказываем основное предложение I, сформулированное в § I.

Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ имеет представление (I.I) (то есть, $\mathfrak{A}(z)$ – матрица монодромии канонической системы (I.I.2), (I.I.3)); и пусть $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяет оценке (I.2).

Рассмотрим фундаментальную матрицу системы (I.I.2):

$$\mathfrak{A}(t,z) = \int_0^{\overset{t}{\curvearrowright}} e^{-iz\varphi(v)dv} = \begin{bmatrix} a(t,z) & b(t,z) \\ c(t,z) & d(t,z) \end{bmatrix} \qquad (4.I)$$

Так как при любом t : $0 < t \le L$

$$\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}(t,z)\mathfrak{B}(t,z); \quad \mathfrak{B}(t,z) \in \mathfrak{M},$$

то

$$\mathfrak{A}(t,z)J\mathfrak{A}^*(t,z) - J \le \mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^*(z) - J \le MI, \; \begin{matrix} z = iy \\ y > 0 \end{matrix} \qquad (4.2)$$

То есть $(y>0)$:

$$\mathfrak{A}(t,iy)J\mathfrak{A}^*(t,iy) - J = \begin{bmatrix} A_{11}(t,iy) & A_{12}(t,iy) \\ \overline{A_{12}(t,iy)} & A_{22}(t,iy) \end{bmatrix} \le MI \qquad (4.3)$$

Доказательство основного предложения опирается на оценку роста при $z = iy$, $y \to +\infty$ элементов фундаментальной матрицы

рицы-функции $\mathfrak{A}(t,z)$ (4.I).

Нам известна (см. § 4 главы I) оценка нормы матрицы-функции $\mathfrak{A}(t, iy)$, удовлетворяющей условию (4.3):

$$\|\mathfrak{A}(t,iy)\| \leq C_1\sqrt{y}\ ,\quad \forall y>1,\quad \forall t\in[0,L] \tag{4.4}$$

При этом из (I.4.5) и неравенства

$$\|\mathfrak{A}(t,i)\| \leq exp(\int_0^L\|\varphi(t)\|dt) \leq exp(\int_0^L Sp(\varphi(t)J)dt) = e^L$$

видно, что C_1 в (4.4) можно положить равным:

$$C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{M(e^{2L}+1)} + e^L$$

Нам понадобится более точная оценка

$$\|\mathfrak{A}(t,iy)\| = o(\sqrt{y})\quad (y\to+\infty),\ \forall t\in[0,L] \tag{4.5}$$

$$o(\sqrt{y})/\sqrt{y} \to 0\quad (y\to+\infty)$$

<u>Лемма 4.I</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in \mathfrak{M}$ имеет представление (I.I), и удовлетворяет оценке на мнимой полуоси (I.2). Тогда для матриц-функций $\mathfrak{A}(t, z)$ (4.I) справедливо соотношение (4.5) при каждом фиксированном $t\in[0,L]$

<u>Доказательство</u>. При $t=0$ матрица $\mathfrak{A}(0,iy)=I$ и (4.5) имеет место. Пусть теперь t - какое-либо фиксированное число из интервала $0<t\leq L$.

Так как из равенства $\Im m\frac{b(t,z)}{a(t,z)} = \frac{A_{11}(t,z)}{2|a(t,z)|^2}$ (где $A_{11}(t,z)$ из (4.3)), элемент

$$|a(t,iy)|^2 = A_{11}(t,iy)/2\Im m(b(t,iy)/a(t,iy))$$

то, в силу ограниченности $A_{11}(t,iy)$ при $y>0$ и асимптотики (3.25): $y\,\mathrm{Im}(b(t,iy)/a(t,iy))\to\infty$ получаем: $|a(t,iy)|^2=o(y)$. Аналогично из равенства $|b(t,z)|^2=\dfrac{A_{11}(t,z)}{-2\,\mathrm{Im}(a(t,z)/b(t,z))}$ получаем

$$|b(t,iy)|^2=o(y)\,,\quad y\to+\infty \tag{4.6}$$

Асимптотика $|c(t,iy)|^2=o(y)$, $|d(t,iy)|^2=o(y)$ следует из (4.3) и (3.27). Из оценок для элементов матрицы-функции $\mathfrak{A}(t,iy)$ вытекает оценка (4.5) для нормы $\|\mathfrak{A}(t,iy)\|$. Лемма доказана.

Теорема 4.I. (основное предложение I). Пусть 2x2 матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\gamma\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$ имеет J – форму, ограниченную на мнимой положительной полуоси:

$$\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^*(iy)-J\le MI\,,\quad y>0 \tag{4.7}$$

Тогда в ее мультипликативном предстaвлении

$$\mathfrak{A}(z)=\int_0^{\overset{L}{\curvearrowright}} e^{-iz\varphi(v)dv},\quad \varphi(v)J\ge0,\ Sp(\varphi(v)J)\equiv1 \tag{4.8}$$

эрмитиан $\varphi(v)J$ удовлетворяет условию:

$$Sp\,\varphi(v)=-\ell(v)<0,\ \varphi^2(v)=-\ell(v)\varphi(v),\qquad \text{п.в. } v\in[0,L] \tag{4.9}$$

Доказательство. Согласно теореме 2.I,

$$Sp\,\varphi(v)=-\ell(v)\le0,\ \varphi^2(v)=-\ell(v)\varphi(v) \tag{4.10}$$

Пусть множество $E\subseteq[0,L]$ состоит из тех точек v, для которых в (4.10) $\ell(v)=0$. Покажем, что $mes\,E=0$.

Доказательство проведем от противного. Пусть $mes\,E=\mu>0$.

1^0. Если $v \in E$, то в (4.10) $\ell(v) = 0$ и $\varphi^2(v) = 0$, то есть, $\varphi(v) = \mathcal{E}(v)$, $\mathcal{E}(v)J \geq 0$, $\mathcal{E}^2(v) = 0$ и имеет место параметризация (2.6):

$$\varphi(v) = \begin{bmatrix} \alpha(v) \\ \beta(v) \end{bmatrix} [\alpha(v), \beta(v)]J, \quad \alpha(v) = \overline{\alpha(v)}, \quad \beta(v) = \overline{\beta(v)} \tag{4.11}$$

2^0. В силу представления (4.1), J - форма $\mathfrak{A}(z)$ равна

$$\mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^*(z) - J = 2y\int_0^L \mathfrak{A}(v,z)\varphi(v)J\mathfrak{A}^*(v,z)dv, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Так как $\varphi(v)J \geq 0$, то справедливо неравенство

$$\mathfrak{A}(z)J\mathfrak{A}^*(z) - J \geq 2y\int_E \mathfrak{A}(v,z)\varphi(v)J\mathfrak{A}^*(v,z)dv, \quad y = \operatorname{Im} z > 0$$

Выделим в этом матричном неравенстве элемент A_{11}:

$$A_{11}(z) \geq 2y\int_E [1,0]\mathfrak{A}(v,z)\varphi(v)J\mathfrak{A}^*(v,z)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}dv$$

и выпишем выражение для интеграла в правой части, используя представление (4.11) для $\varphi(v)$ и вид (4.1) матрицы $\mathfrak{A}(t,z)$. Мы имеем: $A_{11}(z) \geq$

$$\geq 2y\int_E [a(u,z), b(u,z)]\begin{bmatrix} \alpha(u) \\ \beta(u) \end{bmatrix}[\alpha(u), \beta(u)]\begin{bmatrix} \overline{a(u,z)} \\ \overline{b(u,z)} \end{bmatrix}du = 2y\int_E |\alpha a + \beta b|^2 du \tag{4.12}$$

3^0. Оценим снизу подинтегральную функцию в (4.12). Представляя эту функцию в виде

$$|a(v,z)\alpha(v) + b(v,z)\beta(v)| = |a(v,z)\beta(v)|\left|\frac{\alpha(v)}{\beta(v)} + \frac{b(v,z)}{a(v,z)}\right|$$

получаем, в силу вещественности $\alpha(v)$ и $\beta(v)$:

$$|a(v,z)\alpha(v)+b(v,z)\beta(v)|\geq|a(v,z)\beta(v)|\,\mathrm{Im}\,\frac{b(v,z)}{a(v,z)}=$$

$$=\frac{1}{2}A_{11}(v,z)\left|\frac{\beta(v)}{a(v,z)}\right|$$

где $A_{11}(v,z)$ – элемент $\mathcal{J}$ – формы (4.3). Таким образом,

$$|a(v,iy)\alpha(v)+b(v,iy)\beta(v)|^2\geq\frac{1}{4}\frac{A_{11}(v,iy)^2}{|a(v,iy)|^2}\beta^2(v),\ y>0 \quad (4.13)$$

Из равенства

$$|a(v,z)\alpha(v)+b(v,z)\beta(v)|=|b(v,z)\alpha(v)|\left|\frac{a(v,z)}{b(v,z)}+\frac{\beta(v)}{\alpha(v)}\right|$$

аналогично получаем вторую оценку

$$|a(v,iy)\alpha(v)+b(v,iy)\beta(v)|\geq\frac{1}{4}\frac{A_{11}(v,iy)^2}{|b(v,iy)|^2}\alpha(v)^2,\ y>0 \quad (4.14)$$

4°. Согласно нормировке эрмитиана в (4.8), $Sp(\varphi(v)\mathcal{J})\equiv 1$. И значит в (4.11)

$$Sp(\varphi(v)\mathcal{J})=\alpha^2(v)+\beta^2(v)=1,\quad v\in E \quad (4.15).$$

В силу (4.15),

$$E=E_1\cup E_2,\quad E_1=\{v:\ \alpha^2(v)\geq\tfrac{1}{2}\},\ E_2=\{v:\ \beta^2(v)\geq\tfrac{1}{2}\}$$

Пусть, например, $mes\,E_1\geq mes\,E_2$. Тогда $mes\,E_1\geq\frac{1}{2}mes\,E\geq\frac{\mu}{2}>0$; при $v\in E_1$ функция $\alpha(v)^2\geq\frac{1}{2}$ и из (4.14) следует, что в (4.12)

$$A_{11}(iy)\geq\frac{1}{2}y\int_E\frac{A_{11}^2(v,iy)}{|b(v,iy)|^2}|\alpha(v)|^2dv\geq\frac{1}{4}\int_{E_1}\frac{y\,A_{11}^2(v,iy)}{|b(v,iy)|^2}dv \quad (4.16)$$

5°. Покажем теперь, что подинтегральная функция в (4.I6) неограниченно возрастает при $y \to +\infty$

В самом деле, для любого $v \in (0, L]$, начиная с некоторого $Y = Y(v)$ числитель удовлетворяет неравенству $|A_{11}(v,iy)| \geq \frac{M}{16}$ $\forall y > Y$ (см.лемму I.4.2 и оценку (4.3), а знаменатель $y/|b(v,iy)|^2 \to +\infty$ в силу оценки (4.6). Таким образом в (4.I6)

$$A_{11}^2(v,iy)\frac{y}{|b(v,iy)|^2} \to +\infty \quad , \quad \forall v \in (0,L] \qquad (4.I7)$$

6°. Наконец, применяя лемму Фату:

$$\int\limits_{E_1} \varliminf_{n\to\infty} f_n(v)dv \leq \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{E_1} f_n(u)du, (f_n(u) \geq 0),$$

приходим к выводу, что из (4.I7)

$$\varliminf_{y\to+\infty} \frac{1}{4}\int\limits_{E_1} \frac{A_{11}^2(v,iy)\, y}{|b(v,iy)|^2} dv = +\infty$$

и значит, в (4.I6)

$$\lim_{y\to+\infty} A_{11}(iy) = +\infty$$

Но последнее противоречит (4.7). Таким образом, $mes\, E = 0$, и (4.9) имеет место. Теорема доказана.

§ 5. Случай вещественного мультипликативного интеграла

Пусть $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ - матрица монодромии канонической системы (I.I.2),(I.I.3):

$$\frac{d}{dt}Y(t,z) = -izY(t,z)\varphi(t), \quad t\in[0,L], \ \varphi(t)J \geq 0 \qquad (5.I)$$

$$Sp(\varphi(t)J) = 1 \qquad (5.2)$$

Здесь мы докажем сформулированное в § I этой главы следствие основного предложения. Это следствие заключается в том, что условие

$$-\ell(v) = Sp\,\varphi(v) < 0, \quad \varphi^2(v) = -\ell(v)\varphi(v) \qquad (5.3)$$

дает возможность связать с матрицей-функцией $\mathfrak{A}(z)$, удовлетворяющей оценке на мнимой полуоси:

$$\mathfrak{A}(iy)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(iy) - \mathcal{J} \leq MI \quad , \; y > 0 \qquad (5.4)$$

новую каноническую систему, для которой условие нормировки (5.2) заменено на другое, более удобное в приложениях.

Введем в (5.I) новую переменную

$$\tau(t) = -\int_0^t Sp\,\varphi(v)dv = \int_0^t \ell(v)dv \qquad (5.5)$$

Это можно сделать в силу (5.3). Обозначим

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}(\tau, z) = Y^{-1}(0,z)\,Y(t(\tau), z) \\ &Q(\tau) = \varphi(t(\tau)) \,/\, \ell(t(\tau)) \\ &\ell = \int_0^L \ell(v)dv \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Тогда $\mathfrak{A}(\tau, z)$ удовлетворяет системе:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\mathfrak{A}(\tau, z) = -iz\mathfrak{A}(\tau, z)Q(\tau), \quad \tau \in [0, \ell] \\ &\mathfrak{A}(0, z) = I \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Показатель $Q(\tau)$ $\mathcal{J}$- положителен и суммируем:

$$Q(\tau)\mathcal{J} \geq 0, \quad Q(\tau) \in L^1[0, \ell] \qquad (5.8)$$

и удовлетворяет следующему условию:

$$Sp\,Q(\tau) \equiv -1, \quad Q^2(\tau) = -Q(\tau) \tag{5.9}$$

Из (5.6) $\mathfrak{A}(z) = \mathfrak{A}(\ell, z)$. Таким образом, мы пришли к следствию основного предложения.

<u>Теорема 5.I</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0) = I$ удовлетворяет оценке (5.4). Тогда $\mathfrak{A}(z)$ – матрица монодромии специально нормированной системы (5.7–5.9).

Иными словами, в мультипликативном интеграле

$$\mathfrak{A}(z) = \int_0^{\ell} e^{-izQ(\tau)d\tau} \tag{5.I0}$$

эрмитиан может быть нормирован условием (5.9).

Отметим, что фундаментальная матрица $\mathfrak{A}(\tau, z)$ системы (5.7–5.9) такова, что

$$\det \mathfrak{A}(\tau, z) = e^{-iz\,Sp\int_0^{\tau} Q(v)dv} = e^{iz\tau} \tag{5.II}$$

В частности, $\det \mathfrak{A}(z) = e^{iz\ell}$ где ℓ – длина интервала в (5.7).

Сформулируем теперь аналог теоремы 5.I для вещественных матриц-функций.

<u>Теорема 5.2</u>. Пусть $\mathcal{B}(z) \in \mathfrak{M}$ – вещественная матрица-функция, $\mathcal{B}(0) = I$

$$a = \varlimsup_{r \to +\infty} \sup_{0 \le \theta < 2\pi} \frac{\ln \| \mathcal{B}(re^{i\theta}) \|}{r}$$

и пусть справедлива оценка

$$\mathcal{B}(iy) J \mathcal{B}^*(iy) - J \le M e^{2ay} I, \quad y > 0 \tag{5.I2}$$

Тогда в вещественном мультипликативном представлении $\mathcal{Z}(z)$:

$$\mathcal{Z}(z)=\int_0^{a} e^{-izH(v)dv}, \quad H(v)\mathcal{J}\geq 0, \quad iH(v)=\overline{iH(v)}, \tag{5.13}$$

матрица $H(v)$ может быть нормирована условием

$$H^2(v)=I, \quad \text{п. в. } v\in[0,a] \tag{5.14}$$

Заметим, что, в случае $H(v)\mathcal{J}\geq 0$, (5.14) равносильно условию:

$$\det(H(v)\mathcal{J})\equiv 1, \quad Sp\, H(v)\equiv 0 \tag{5.15}$$

<u>Доказательство</u>. Согласно лемме 4.4 главы I, матрица-функция $\mathfrak{A}(z)=e^{iza}\mathcal{Z}(z)$ принадлежит классу $\gamma\mathfrak{M}$. Из (5.12) вытекает оценка для матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$:

$$\mathfrak{A}(iy)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(iy)-\mathcal{J}\leq M_1 I, \quad y>0$$

и значит, $\mathfrak{A}(z)$ допускает представление (5.10), (5.9), (5.8) (по теореме 5.1). Так как $\det\mathfrak{A}(z)=e^{iz\ell}=e^{2iza}$, то в (5.10) $\ell=2a$. Полагая в (5.10)

$$Q(\tau)=\frac{H(v)-I}{2}, \quad \tau=2v \tag{5.16}$$

получаем

$$\mathfrak{A}(z)=\int_0^{a} e^{-iz(H(v)-I)dv}=e^{iza}\int_0^{a} e^{-izH(v)dv}$$

и значит $\mathcal{Z}(z)=e^{-iza}\mathfrak{A}(z)$ имеет вид (5.13).

Соотношения $H(v)\mathcal{J}\geq 0,\ H^2(v)=I$ проверяются непосредственно из (5.8), (5.9) и (5.16). Теорема доказана.

§ 6. Эрмитово положительная функция, ассоциированная с матрицей-функцией класса

В следующих двух параграфах мы опишем способ построения матрицы $Q(\tau)$ в (5.7 - 5.9) по матрице монодромии $\mathfrak{N}(z)$, используя теорию продолжения эрмитово положительных функций.

Идея обращения к эрмитово положительным функциям для исследования обратных спектральных задач для дифференциальных систем была высказана М.Г.Крейном. Она разрабатывалась им в различных ситуациях. Эта идея, в частности, развивалась в работах [14], [15]. В этих работах рассматривались эрмитово положительные функции, удовлетворяющие определенным условиям (в терминологии М.Г.Крейна, имеющие акселеранту), и устанавливалось их взаимно однозначное соответствие с некоторым подклассом матриц-функций из $\mathcal{M}$.

В настоящей работе мы выделяем иной подкласс матриц-функций из $\mathcal{M}$ (для которого соответствующая эрмитово положительная функция не обязательно имеет акселеранту). При этом рассуждения и выкладки мы основываем на исследовании делимости матриц-функций класса $\mathcal{M}$ и, связанной с ней, теории кругов Вейля.

Пусть матрица-функция

$$\mathfrak{N}(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix} \in \mathcal{M} \tag{6.1}$$

приведена к минимальному типу роста в верхней полуплоскости, то есть, выполняется (2.7).

Обратимся к функциональному кругу Вейля $W\{\mathfrak{N}(z)\}$ матрицы-функции $\mathfrak{N}(z)$, то есть, рассмотрим совокупность неванлинновских функций $u(z)$, представимых в виде:

$$u(z) = \frac{\alpha(z)\omega(z) + \beta(z)}{\gamma(z)\omega(z) + \delta(z)} \tag{6.2}$$

где $\omega(z)$ – произвольная неванлинновская функция, $\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix} = \mathfrak{A}$.

Известно интегральное представление неванлинновских функций ([4I]):

$$u(z) = q_1 z + q_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right\} d\rho(\lambda),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty, \quad d\rho(\lambda) \geq 0, \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 = \bar{q}_2 \tag{6.3}$$

Класс неванлинновских функций обозначается N, или, следуя И.С.Кацу и М.Г.Крейну R ([4I]).

Через R_0 в [4I] обозначен подкласс неванлинновских функций, допускающих интегральное представление:

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda) < \infty, \quad d\sigma(\lambda) \geq 0 \tag{6.4}$$

Необходимым и достаточным критерием принадлежности неванлинновской функции $u(z)$ классу R_0 является

$$\lim_{y \to +\infty} |y\, u(iy)| < \infty$$

При естественной нормировке $(\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}(\sigma(\lambda-0) + \sigma(\lambda+0)),\ \sigma(0) = 0)$, $\sigma(\lambda)$ однозначно определена функцией $u(z)$ по формуле обращения Стилтьеса ([4I]):

$$\sigma_u(\lambda) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \mathrm{Im}(u(x+iy))\, dx \tag{6.5}$$

Чтобы связать с произвольной матрицей-функцией $\mathfrak{A}(z)$ (6.I) эрмитово положительную функцию, мы будем переходить от

$\mathfrak{A}(z)$ к ее " R_0 - достройке" - матрице-функции

$$\mathcal{Z}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{A}(z) = e^{-iz\tilde{\mathcal{E}}_0} \mathfrak{A}(z) \tag{6.6}$$

(Мотивировка термина и объяснение целей достройки будет дано чуть ниже).

Благодаря $\mathcal{E}$ - множителю в (6.6), функции $u(z)$ из круга Вейля матрицы $\mathcal{Z}(z)$ принадлежат классу R_0, поскольку для них выполняется соотношение:

$$\lim_{y \to +\infty} (-iy\, u(iy)) = \frac{1}{P}, \quad P \geq 1 \tag{6.7}$$

<u>Лемма 6.I</u>. Для того, чтобы матрица-функция $\mathcal{Z}(z)$ допускала представление (6.6), необходимо, чтобы любая функция из круга Вейля $u(z) \in W\{\mathcal{Z}(z)\}$ удовлетворяла условию (6.7), и достаточно, чтобы (6.7) удовлетворяла функция $u(z) = a(z)/c(z)$.

Утверждение леммы следует из лемм 3.3, 3.4 после перехода к матрице-функции $\tilde{\mathcal{Z}}(z) = J\mathcal{Z}(z)J$. ■

Таким образом, перейдя от $\mathfrak{A}(z)$ к ее R_0 - достройке $\mathcal{Z}(z)$, мы получили совокупность конечных мер $d\sigma(\lambda)$, фигурирующих в представлении (6.4) функций $u(z)$ из круга Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$. По этим мерам мы и будем строить эрмитово положительную функцию $S(x)$ на $(-\ell,\ell)$, связанную с $\mathcal{Z}(z)$, а значит, и с $\mathfrak{A}(z)$.

Отметим, что если бы мы обратились непосредственно к кругу Вейля самой матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ (не переходя к ее R_0 - достройке), то функции (6.2) из ее круга Вейля допускали бы общее представление (6.3). Меры из этого представления $d\rho(\lambda)$, вообще говоря, не конечны, и значит, построить по ним <u>непрерыв-</u>

ную эрмитово положительную функцию мы не смогли бы.

Итак, пусть $u(z)$ - какая-либо функция из круга Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$, $\mathcal{Z}(z)-R_0$ - достройка $\mathfrak{A}(z)$. Согласно только что доказанному, $u(z)$ допускает интегральное представление

$$u(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_u(\lambda)}{\lambda-z},\quad d\sigma_u(\lambda)\geqslant 0,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}d\sigma_u(\lambda)=\frac{1}{p},\ p\geqslant 1 \tag{6.8}$$

Возьмем меру $d\sigma_u(\lambda)$ из представления (6.8) и построим интеграл Хинчина - Бохнера:

$$F_u(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,d\sigma_u(\lambda),\quad -\infty<x<+\infty \tag{6.9}$$

Пусть в выражении для детерминанта матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$:

$$\det\mathfrak{A}(z)=e^{izl}\det\mathfrak{A}(0),\quad l>0 \tag{6.10}$$

- число l строго положительно. Отметим, что поскольку мы условились нормировать $\mathfrak{A}(z)$ к минимальному типу роста в верхней полуплоскости, то число l в (6.10) равно экспоненциальному типу роста $\mathfrak{A}(z)$ во всей комплексной плоскости (см. соотношение (4.23) главы I):

$$l=\lim_{r\to+\infty}\ \sup_{0\leq\theta<2\pi}\ \frac{\ln\|\mathfrak{A}(re^{i\theta})\|}{r} \tag{6.11}$$

Мы сейчас покажем, что, независимо от выбора функции $u(z)$ из $W\{\mathcal{Z}(z)\}$, все функции $F_u(x)$, задаваемые интегралами (6.9), совпадают на интервале $(-l, l)$, то есть, имеют общую часть - функцию $S(x)$ $(-l<x<l)$. Функция $S(x)$ является непрерывной эрмитово положительной на $(-l, l)$ функцией и строится по матрице-функции $\mathcal{Z}(z)$.

Определение. Семейство эрмитово положительных на $(-\infty, \infty)$ функций $F_u(x)$ (6.9), (6.8) будем называть "веником", порожденным матрицей-функцией $\mathcal{Z}(z)$.

Ниже мы докажем, что число ℓ из (6.10), (6.11) задает максимальный интервал, на котором совпадают все функции из веника, то есть, если для некоторого числа a все функции $F_u(x)$ из "веника" порожденного $\mathcal{Z}(z)$, совпадают на $(-a,a)$ то $a \le \ell$ (то есть, $(-a,a) \subseteq (-\ell,\ell)$).

Общую часть "веника" функций $F_u(x)$ - эрмитово положительную непрерывную функцию $S(x)$ на $(-\ell,\ell)$ - будем называть ассоциированной функцией с матрицей-функцией $\mathcal{Z}(z)$. Оговорим здесь, что мы дадим более формальное определение ассоциированной функции после доказательства теорем о том, что значения всех функций $F_u(x)$ (6.9), (6.8) действительно совпадают на $(-\ell,\ell)$, и что число ℓ определяет максимальный интервал совпадения всех этих функций.

Итак, покажем, что все функции $F_u(x)$ совпадают на $(-\ell,\ell)$.

Теорема 6.1 (о "венике"). Пусть матрица-функция $\mathcal{Z}(z)$- R_0 - достройка $\mathfrak{A}(z)$, где $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ и удовлетворяет (6.10). И пусть $u_1(z)$, $u_2(z)$ - функции из круга Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$, а меры $d\sigma_1(\lambda)$, $d\sigma_2(\lambda)$ взяты из представлений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_k(\lambda)}{\lambda - z} = u_k(z) \qquad (k = 1,2)$$

Тогда имеет место совпадение на интервале $(-\ell,\ell)$ построенных по мерам $d\sigma_1(\lambda)$ и $d\sigma_2(\lambda)$ интегралов Хинчина-Бохнера:

$$F_{\kappa}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,d\sigma_{\kappa}(\lambda)\qquad(\kappa=1,2)\tag{6.12}$$

$$F_1(x)=F_2(x)=S(x),\qquad x\in(-\ell,\ell)\tag{6.13}$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма:

Лемма 6.2 ([42]). Пусть $S(x)=\overline{S(x)}$ – непрерывная эрмитова функция на интервале ($-\ell$, ℓ). И пусть $u(z)$ – неванлинновская функция класса R_0 .

Для того, чтобы функция $S(x)$ допускала представление в виде интеграла Хинчина-Бохнера с мерой $d\sigma(\lambda)$:

$$S(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}\,d\sigma(\lambda),\quad x\in(-\ell,\ell)$$

где

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-z}=u(z)\tag{6.14}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $S(x)$ и преобразование Стилтьеса $u(z)$ (6.14) меры $d\sigma(\lambda)$, представляющей функцию $S(x)$, при каждом $x\in(0,\ell)$ были связаны асимптотическим соотношением

$$\lim_{\substack{z=iy\\ y\to+\infty}} e^{-izx}\Big\{u(z)-i\int\limits_0^x e^{izv}S(v)\,dv\Big\}=0,\ \forall x\in(0,\ell)\tag{6.15}$$

Доказательство теоремы 6.1. 1^0. Согласно (1.3.8) и (1.5.10), любые две функции $u_1(z),\ u_2(z)\in W\{\mathcal{Z}(z)\}$ связаны соотношением:

$$|u_1(z)-u_2(z)|\leq 2\,r(z)=\frac{2}{R(z)\,|\det\mathcal{Z}(z)|},\quad R(z)=\frac{A_{22}(z)}{|\det\mathcal{Z}(z)|^2},$$

где

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{bmatrix} = \mathcal{Z}(z)\mathcal{J}\mathcal{Z}^*(z) - \mathcal{J} \qquad (6.16)$$

Отсюда

$$|u_1(z) - u_2(z)| \le \frac{2\,|\det \mathcal{Z}(z)|}{A_{22}(z)} = \frac{2e^{-yl}}{A_{22}(z)} \qquad (6.17)$$

где $A_{22}(z)$ – элемент $\mathcal{J}$ – формы (6.16). Из представления

$$A_{22}(z) = 2\,|c(z)|^2\, \Im m\, \frac{d(z)}{c(z)}$$

лемм 5.1, 5.2 главы I и оценки (Т.5.5) мнимой части неванлинновской функции следует, что $\exists m:\ m/y^3 \le A_{22}(iy)\ \ (y>1)$

Отсюда и из (6.17) вытекает оценка:

$$|u_1(iy) - u_2(iy)| = o\left(e^{-y(l-\delta)}\right),\ \forall\delta>0,\ y\to+\infty \qquad (6.18)$$

2°. Рассмотрим теперь построение по функциям $u_K(z)$ интегралы Хинчина-Бохнера (6.12). По лемме 6.2, каждая из функций $S_K(x) = F_K(x)$, $x\in(-l, l)$ вместе со своей функцией $u_K(z)$ удовлетворяет на интервале $(0, l)$ асимптотическому соотношению (6.15). С другой стороны, из оценки (6.18) вытекает, что обе функции $u_1(z)$, $u_2(z)$ удовлетворяют соотношению (6.15) с одной и той же функцией $s(x)$, $x\in(0, l)$. Отсюда

$$S_1(x) = S_2(x) = s(x),\quad x\in(0, l)$$

и (6.13) имеет место. Теорема доказана.

Покажем теперь, что число l в (6.11) задает <u>максимально возможный</u> интервал $(-a, a)$, на котором совпадают <u>все</u> интегралы Хинчина-Бохнера $F_u(x)$, построенные по функциям

$u(z)\in W\{\mathcal{Z}(z)\}$, то есть, что этот максимальный интервал равен $(-\ell,\ell)$, где ℓ определено условием (6.II).

<u>Лемма 6.3</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in \mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (2.7), то есть, $\mathfrak{A}(z)$ - минимального типа роста в $\Im m\, z>0$. И пусть

$$\det\mathfrak{A}(z)=e^{izL}\det\mathfrak{A}(0),$$

а матрица $\mathcal{Z}(z)$ – R_0 - достройка $\mathfrak{A}(z)$: $\mathcal{Z}(z)=\begin{bmatrix}1&0\\-z&1\end{bmatrix}\mathfrak{A}(z)=$ $=\begin{bmatrix}a(z)&b(z)\\c(z)&d(z)\end{bmatrix}$. И пусть функция $s(x)$ такова, что имеет место совпадение на интервале $(-a,a)$ всех интегралов Хинчина-Бохнера, построенных по функциям $u(z)\in W\{\mathcal{Z}(z)\}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}d\sigma(\lambda)=s(x),\ x\in(-a,a),\quad \forall u(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-z}\in W\{\mathcal{Z}(z)\}\tag{6.I9}$$

Тогда

$$a\le L.$$

<u>Доказательство</u>. Выберем две функции $u_0(z)$, $u_\infty(z)$ из круга Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$: $\quad u_0(z)=\dfrac{b(z)}{d(z)},\quad u_\infty(z)=\dfrac{c(z)}{d(z)}.$

По условию леммы, построенные по ним интегралы Хинчина-Бохнера $F_0(x)$, $F_\infty(x)$ таковы, что $F_0(x)=F_\infty(x)=s(x)$, $x\in(-a,a)$. Но тогда из асимптотического критерия леммы 6.2 вытекает, что

$$\lim_{y\to+\infty}e^{yx}|u_0(iy)-u_\infty(iy)|=0,\quad \forall x\in(0,a)\tag{6.20}$$

Вычисляя разность

$$|u_0(iy)-u_\infty(iy)|=\frac{|\det\mathcal{Z}(iy)|}{|d(iy)\,c(iy)|}=\frac{e^{-yL}}{|d(iy)c(iy)|}\tag{6.2I}$$

и учитывая, что функции в знаменателе в (6.2I) имеют минимальный тип роста при $y \to +\infty$, приходим к выводу, что (6.20) имеет место лишь в случае $a \le L$. Лемма доказана.

Отметим, что из установленного в диссертации (1941 г.) А.П. Артеменко факта можно усмотреть, что сегмент $[-\ell, \ell]$ является <u>максимальным множеством</u>, на котором совпадают все функции $F_u(x)$ из "веника", то есть, вне сегмента $[-\ell, \ell]$ не существует такой точки $x = x_0$, $x_0 \notin [-\ell, \ell]$, в которой бы все функции из "веника" $F_u(x)$ принимали одно и то же значение F_0. (См. следствие теоремы II работы [43], [44], в этой работе воспроизведено содержание диссертации А.П.Артеменко).

<u>Определение</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям:

1°. $\det \mathfrak{A}(z) = e^{iz\ell} \det \mathfrak{A}(0), \quad \ell > 0$ (6.22)

2°. $\mathfrak{A}(z)$ - минимального типа роста в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$;

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln \|\mathfrak{A}(iy)\|}{y} = 0. \tag{6.23}$$

И пусть матрица-функция $\mathfrak{B}(z)$ - R_0 - достройка матрицы $\mathfrak{A}(z)$, то есть

$$\mathfrak{B}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{A}(z) \tag{6.24}$$

Эрмитово положительную функцию $S(x)$, определенную на $(-\ell, \ell)$ по любой функции $u(z)$ из функционального круга Вейля $W\{\mathfrak{B}(z)\}$ формулами

$$S(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} d\sigma(\lambda), x \in (-\ell, \ell); \quad u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \tag{6.25}$$

будем называть <u>ассоциированной</u> с $\mathcal{Z}(z)$.

Из (6.7), (6.8) вычисляется значение в нуле ассоциированной к $\mathcal{Z}(z)$ функции $S(x)$ (6.25):

$$S(0)=\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda)=\frac{1}{p}=\lim_{y\to+\infty}(-iyu(iy))\leq 1;\quad \forall\, u(z)\in W\{\mathcal{Z}(z)\} \quad (6.26)$$

Беря конкретное значение $u(z)=a(z)/c(z)$, получаем

$$S(0)=\lim_{y\to+\infty}\left(-iy\,\frac{a(iy)}{c(iy)}\right) \quad (6.27)$$

Выделим среди всех функций $u(z)\in W\{\mathcal{Z}(z)\}$ одну:

$$u_{(i)}(z)=\frac{a(z)i+b(z)}{c(z)i+d(z)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_{(i)}(\lambda)}{\lambda-z}$$

Учитывая, что $(\lambda=\bar{\lambda})$

$$\operatorname{Im} u_{(i)}(\lambda)=\left(\frac{a(\lambda)i+b(\lambda)}{c(\lambda)i+d(\lambda)}-\frac{-\overline{a(\lambda)}i+\overline{b(\lambda)}}{-\overline{c(\lambda)}i+\overline{d(\lambda)}}\right)=\frac{1}{|c(\lambda)|^2+|d(\lambda)|^2}$$

Получаем в (6.25) из формулы обращения Стилтьеса (6.5):

$$S(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}\,d\lambda}{|c(\lambda)|^2+|d(\lambda)|^2},\qquad x\in(-l,l) \quad (6.28)$$

(6.28) – одно из возможных представлений ассоциированной функции через элементы матрицы $\mathcal{Z}(z)$.

Итак, каждой матрице $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ со свойствами (6.22), (6.23) мы поставили в соответствие непрерывную эрмитово положительную функцию $S(x)$, $x\in(-l,l)$. Однако, это соответствие не является взаимно однозначным в том смысле, что одной функции $S(x)$ отвечает множество различных матриц-функций

$\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$ экспоненциального типа ℓ, с R_0 - достройкой которых ассоциирована эта функция $S(x)$, $x \in (-\ell, \ell)$. В самом деле, если матрица $M(z)$ имеет минимальный тип роста во всей комплексной плоскости, то матрицы-функции $\mathfrak{Z}(z)$, $\tilde{\mathfrak{Z}}(z)$:

$$\mathfrak{Z}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{A}(z); \quad \tilde{\mathfrak{Z}}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{A}(z) M(z) \qquad (6.29)$$

имеют ассоциированной одну и ту же функцию $S(x)$.

Оказывается, что среди этого множества различных $\mathfrak{A}(z)$, с R_0 - достройкой которых ассоциирована заданная на $(-\ell, \ell)$ эрмитово положительная функция $S(x)$, выделяется одна матрица-функция $R(z)$. Это - матрица-функция, задающая в точности <u>все</u> непрерывные эрмитово положительные на $(-\infty, \infty)$ функции $F(x)$ (6.9), такие, что

$$F(x) = S(x), \quad x \in (-\ell, \ell)$$

Матрица $R(z)$ называется <u>резольвентной</u> ([45]). Эта матрица $R(z)$ является в некотором смысле минимальной: любая матрица $\mathfrak{Z}(z) \in \mathfrak{M}$, ассоциированной к которой является заданная функция $S(x)$, $-\ell < x < \ell$, делится на $R(z)$. Ниже мы докажем это свойство матрицы-функции $R(z)$.

Чтобы дать точное определение резольвентной матрицы $R(z)$, приведем здесь постановку задачи М.Г.Крейна о продолжении эрмитово положительной функции с конечного интервала $(-\ell, \ell)$ на всю числовую ось $(-\infty, \infty)$ ([46],[45]).

Задача М.Г.Крейна состоит в том, чтобы описать множество всех интегралов Хинчина-Бохнера

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, d\sigma(\lambda), \qquad (6.30)$$

которые совпадают на $(-l, l)$ с заданной эрмитово положительной функцией $S(x)$:

$$F(x) = S(x), \quad x \in (-l, l) \tag{6.31}$$

С целью описания таких функций $F(x)$, рассматривают преобразование Стилтьеса меры $d\sigma(\lambda)$ из (6.30), (6.31) - неванлинновскую функцию

$$U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \tag{6.32}$$

М.Г.Крейном показано, что для каждой заданной эрмитово положительной функции $S(x)$ существует четверка целых функций $\gamma_{11}(z), \gamma_{12}(z), \gamma_{21}(z), \gamma_{22}(z)$ такая, что любая функция $U(z)$, построенная по мере $d\sigma(\lambda)$ (6.30), (6.31) является результатом дробно-линейного преобразования некоторой функции $\omega(z) \in N$:

$$U(z) = \frac{\gamma_{11}(z)\,\omega(z) + \gamma_{12}(z)}{\gamma_{21}(z)\,\omega(z) + \gamma_{22}(z)} \tag{6.33}$$

И наоборот, если функция $U(z)$ есть результат дробно-линейного преобразования (6.33) произвольной неванлинновской функции $\omega(z)$, то мера $d\sigma(\lambda)$ в представлении $U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}$ решает задачу продолжения функции $S(x)$, то есть, удовлетворяет (6.30), (6.31).

Матрица коэффициентов дробно-линейного преобразования (6.33)

$$R(z) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(z) & \gamma_{12}(z) \\ \gamma_{21}(z) & \gamma_{22}(z) \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}$$

называется <u>резольвентной</u> матрицей задачи о продолжении заданной непрерывной эрмитово положительной функции $S(x)$ с интервала

$(-\ell, \ell)$ на $(-\infty, \infty)$.

Иными словами, функциональный круг Вейля резольвентной матрицы $R(z)$ состоит из всех тех и только тех функций $u(z)$ (6.32), которые своими мерами $d\sigma(\lambda)$ задают интегралы Хинчина-Бохнера (6.30), совпадающие на $(-\ell, \ell)$ с $S(x)$.

Отметим здесь два условия нормировки, которые мы будем налагать на резольвентную матрицу.

Поскольку при умножении $R(z)$ справа на постоянную J - унитарную матрицу $\mathcal{U}: \mathcal{U} J \mathcal{U}^* = J$, круг Вейля не меняется, будем считать, что

$$R(0) = I \tag{6.34}$$

Так как умножение $R(z)$ на скалярный множитель также не меняет ее круга Вейля, то (используя лемму 4.4 главы I) мы будем приводить $R(z)$ к минимальному типу роста в верхней полуплоскости:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln \| R(iy) \|}{y} = 0 \tag{6.35}$$

Легко видеть, что при условии нормировки (6.34), (6.35) с каждой эрмитово положительной функцией $S(x)$, $x \in (-\ell, \ell)$, связывается единственная резольвентная матрица.

Имеется несколько различных подходов к построению резольвентной матрицы по значениям функции $S(x)$. В книге Ю.М.Березанского [47] дано построение резольвентной матрицы, изложенной в предоставленной М.Г.Крейном рукописи. Книга Ю.М.Березанского содержит также ряд других подходов к построению резольвентной матрицы.

В конце 60-х годов В.П.Потапов высказал идею нового подхода к описанию множества решений определенного класса задач,содержащего в себе, в частности, задачи об интегральном представлении положительно определенных ядер. Схема В.П.Потапова применительно к конкретным задачам была реализована им, его учениками и последователями. Ряд дискретных задач был рассмотрен И.В. Ковалишиной в [31],[32] . Первой континуальной задачей, исследованной методом В.П.Потапова, была задача об интегральном представлении эрмитово положительной функции. Это исследование осуществлено в работе И.В.Ковалишиной и В.П.Потапова [48] .

Отметим, что при построении резольвентной матрицы в [48] приходится решать интегральные уравнения Фредгольма I рода, и следовательно, задача их решения некорректна. Идея регуляризации в методе В.П.Потапова построения резольвентной матрицы для этой задачи и более общих задач была высказана В.Э.Кацнельсоном и реализована им в работах [49], [50] . Таким образом, имеется эффективный метод построения резольвентной матрицы задачи о продолжении эрмитово положительной функции для произвольной непрерывной эрмитово положительной функции $S(x)$ на $(-\ell, \ell)$.

Напомним, что нашей задачей основной целью является построение мультипликативного представления матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ с ограниченной на мнимой полуоси J - формой:

$$\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^*(iy)-J \leq MI \ , \quad y>0 \tag{6.36}$$

Сейчас мы покажем, что такие матрицы $\mathfrak{A}(z)$ совпадают с матрицами $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} R(z)$. И тем самым задача о мультипликативном представлении $\mathfrak{A}(z)$ тесно увязывается с задачей о продолжении эрмитово положительных функций.

Для этого нам понадобятся следующие два утверждения о резольвентных матрицах.

Лемма 6.4. Пусть $R(z)$ – резольвентная матрица задачи продолжения эрмитово положительной функции $s(x)$ с $(-\ell,\ell)$ на $(-\infty,\infty)$. И пусть $s(0)\leq 1$. Тогда от $R(z)$ отщепляется слева $\mathcal{E}$ – множитель $e^{-iz\widetilde{\mathcal{E}}_0}$, то есть

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix}^{-1} R(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} R(z) \in \mathfrak{M}$$

(напомним, что $e^{-iz\widetilde{\mathcal{E}}_0} = I - iz\widetilde{\mathcal{E}}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix}$).

Доказательство. Из условия $s(0)\leq 1$ следует, согласно соотношению (6.27), что имеет место неравенство:

$$s(0) = \lim_{y\to+\infty} \left(-iy\, r_{11}(iy)/r_{21}(iy)\right) \leq 1, \text{ где } \begin{bmatrix} r_{11}(z) & r_{12}(z) \\ r_{21}(z) & r_{22}(z) \end{bmatrix} = R(z).$$

Утверждение леммы следует теперь из леммы 6.I.

Связь между матрицами-функциями $\mathcal{Z}(z)$ (6.24), имеющими ассоциированной функцию $s(x)$ на $(-\ell,\ell)$, и резольвентной матрицей задачи продолжения этой функции $s(x)$ с $(-\ell,\ell)$ на $(-\infty,\infty)$, такова:

Лемма 6.5. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$ удовлетворяет (6.22), (6.23). И пусть $s(x)$, $x\in(-\ell,\ell)$ – ассоциированная функция с матрицей $\mathcal{Z}(z)$ (6.24). Тогда матрица-функция $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} R(z)$ делит $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} R(z) M(z), \quad M(z)\in\mathfrak{M} \tag{6.37}$$

Здесь $R(z)$ – построенная по $s(x)$ резольвентная матрица, удовлетворяющая (6.34), (6.35).

При этом[7] в (6.37)

$$\det M(z) \equiv 1 \tag{6.38}$$

---

[7] То есть, $M(z)$ – минимального типа роста во всей комплексной плоскости (см. формулу (I.4.23)).

Доказательство. I^0. Рассмотрим круги Вейля матрицы $\mathcal{Z}(z)$ (6.24) и резольвентной матрицы $R(z)$. Так как все функции $u(z)\in W\{\mathcal{Z}(z)\}$ удовлетворяют соотношению (6.25), то они включаются в круг Вейля $W\{R(z)\}$. Следовательно,

$$W\{\mathcal{Z}(z)\}\subseteq W\{R(z)\} \tag{6.39}$$

Поскольку матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ и $R(z)$ имеют минимальный тип роста в $\Im z>0$, то из включения (6.39) следует, согласно теореме 4.I главы I, что $R(z)$ делит $\mathcal{Z}(z)$ в классе M:

$$\mathcal{Z}(z)=R(z)M(z),\quad M(z)\in\mathfrak{M} \tag{6.40}$$

Соотношение (6.40) отличается от (6.37) левым множителем $\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}$. Чтобы доказать (6.37), остается проверить, что от $R(z)$ отщепляется множитель $\begin{bmatrix}1&0\\-z&1\end{bmatrix}=e^{-izE_0}$. Этот последний факт вытекает из леммы 6.4, так как сейчас, в силу (6.24), (6.26) функция $S(0)\leq 1$.

2^0. Докажем теперь справедливость (6.38). По лемме 4.5 главы I, матрица-функция $M(z)$ из (6.37) имеет минимальный тип роста при $\Im z>0$. И значит, из (I.4.22)

$$\det M(z)=e^{izv}\det M(0),\quad v\geqslant 0 \tag{6.4I}$$

причем, из условия $M(0)=I$, сейчас $\det M(0)=1$.

С другой стороны, из утверждения леммы 6.3 вытекает, что $\det R(z)=e^{izL}$, $L\geqslant \ell$. И так как $\det\mathfrak{A}(z)=e^{iz\ell}$, то из (6.37)

$$\det M(z)=e^{iz(\ell-L)},\qquad \ell-L\leq 0 \tag{6.42}$$

Отсюда и из (6.4I) следует (6.38). Лемма доказана.

Отметим, что из (6.4I), (6.42) следует [8], что

$$\det R(z) = e^{izl}$$

И теперь мы можем утверждать, что эрмитово положительная функция $S(x)$, $x \in (-l, l)$, по которой строится резольвентная матрица $R(z)$, является также ассоциированной на $(-l, l)$ функцией к матрице $R(z)$ (см. формулу (6.22)).

Докажем, используя лемму 6.5, что для матриц-функций $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию на мнимой полуоси (6.36), в равенстве (6.37) $M(z) = I$ и $\mathfrak{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} R(z)$.

<u>Теорема 6.2</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0) = I$ удовлетворяет (6.36). И пусть $R(z)$ – нормированная условиями (6.34), (6.35) резольвентная матрица задачи продолжения эрмитово положительной функции $S(x)$ с $(-l, l)$ на $(-\infty, \infty)$; $S(x)$ – ассоциированная функция с R_0 – достройкой $\mathcal{B}(z)$ (6.24) матрицы $\mathfrak{A}(z)$.

Тогда матрица-функция $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} R(z)$ совпадает с $\mathfrak{A}(z)$:

$$\mathfrak{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} R(z)$$

(напомним, что длина l интервала $(-l, l)$, на котором задается функция $S(x)$, определена ростом $\mathfrak{A}(z)$, см. формулы (6.I0), (6.II)).

---

8) То, что экспоненциальный тип роста резольвентной матрицы $R(z)$ определяется длиной интервала l, доказано впервые М.Г.Крейном (см., напр. [5I])

<u>Доказательство</u>. Фактически нужно проверить, что, в случае (6.36), в равенстве (6.37) матрица $M(z) = I$. Оценим для этого значения $M(z)$ на мнимой полуоси.

По лемме 4.I, матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$ (6.36) удовлетворяет оценке

$$\|\mathfrak{A}(iy)\| = o(\sqrt{y}), \quad y \to +\infty$$

Поскольку, согласно лемме 6.5 $M(z)$ делит справа $\mathfrak{A}(z)$, то

$$M^*(iy)\mathcal{J}M(iy)-\mathcal{J} \leq \mathfrak{A}^*(iy)\mathcal{J}\mathfrak{A}(iy)-\mathcal{J} = o(y), \quad y \to +\infty$$

Используя теперь оценку (I.4.6), получаем

$$\|M(iy)\| = o(|y|), \quad y \to +\infty \tag{6.43}$$

Из того, что $\det M(z) = 1$ и принципа симметрии (I.I.7) следует, что оценка (6.43) справедлива и для $y \to -\infty$. Так как $M(z)$ – матрица-функция класса Картрайт, то из оценки (6.43), выполняющейся при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$, вытекает, что $M(z) \equiv Const$. Из условия $M(0) = I$ следует, что $M(z) = I$. Теорема доказана.

§ 7. Канонические системы и резольвентные матрицы

Всюду в этом параграфе матрица-функция $\mathfrak{A}(z) \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0) = I$ имеет минимальный тип роста в верхней полуплоскости, $\operatorname{Im} z > 0$, а ее детерминант экспоненциально убывает в $\operatorname{Im} z > 0$:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln\|\mathfrak{A}(iy)\|}{y} = 0; \quad \det \mathfrak{A}(z) = e^{izl}, \quad l > 0 \tag{7.I}$$

$S(x)$ – эрмитово положительная на $(-l, l)$ функция, ассоцированная с R_0 - достройкой матрицы $\mathfrak{A}(z)$ - матрицей-функцией

$$\mathcal{Z}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{A}(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

$R(z) = R^{(\ell)}(z)$ - резольвентная матрица задачи продолжения функции $S(x)$ с интервала $(-\ell, \ell)$ на $(-\infty, \infty)$, нормированная условиями (6.34), (6.35).

Рассмотрим сужения $S(x)$ на подинтервалы $(-\theta, \theta)$:

$$S^{(\theta)}(x) = S(x), \quad x \in (-\theta, \theta), \quad 0 < \theta \le \ell \tag{7.3}$$

Сейчас мы убедимся в том, что каждому делителю матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ соответствует некоторое усечение $S^{(\theta)}(x)$ функции $S(x)$, в том смысле, что $S^{(\theta)}(x)$ является ассоциированной к R_0 - достройке этого делителя.

Лемма 7.1. Пусть $\mathfrak{A}_1(z), \mathfrak{A}_1(0) = I$ - произвольный левый делитель в классе $\mathfrak{M}$ матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$, удовлетворяющей (7.1); $S(x)$ - ассоциированная с R_0 - достройкой $\mathfrak{A}(z)$ функция. И пусть

$$\det \mathfrak{A}_1(z) = e^{iz\theta}, \quad \theta > 0 \tag{7.4}$$

Тогда справедливо неравенство:

$\theta \le \ell$

и функция $S^{(\theta)}(x)$ (7.3) является ассоциированной с матрицей-функцией $\mathcal{Z}_1(z)$:

$$\mathcal{Z}_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{A}_1(z) = e^{-iz\widetilde{\mathcal{E}}_0} \mathfrak{A}_1(z) \tag{7.5}$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим матрицу-функцию $N(z) = \mathfrak{A}_1^{-1}(z)\mathfrak{A}(z)$.

Пусть ее детерминант $\det N(z) = e^{izV}$. Согласно лемме 4.5 главы I, $N(z)$ минимального типа роста в $\Im z > 0$ и из (I.4.23) $V \geq 0$. Отсюда следует, что в (7.4) $\det \mathfrak{A}_1(z) = e^{iz(\ell - V)} = e^{iz\theta}$, $V \geq 0$ и число $\theta = \ell - V < \ell$.

Обратимся теперь к кругам Вейля матриц-функций $\mathcal{B}(z)$ (7.2) и $\mathcal{B}_1(z)$ (7.5). Так как $\mathfrak{A}_1(z)$ делит слева $\mathfrak{A}(z)$, то $\mathcal{B}_1(z)$ делит слева $\mathcal{B}(z)$ в классе $\gamma\mathfrak{M}$. Отсюда

$$W\{\mathcal{B}(z)\} \subseteq W\{\mathcal{B}_1(z)\} \tag{7.6}$$

Пусть $S(x)$ – функция, ассоциированная с $\mathcal{B}(z)$, а $S_1(x)$ – функция, ассоциированная с $\mathcal{B}_1(z)$. Совпадение функций $S(x) = S_1(x)$ при $x \in (-\theta, 0)$ следует из включения (7.6) и определения ассоциированной функции. Лемма доказана.

Пусть теперь θ:

$$0 < \theta \leq \ell$$

– фиксированное число.

Рассмотрим задачу продолжения эрмитово положительной функции $S^{(\theta)}(x)$ (7.3) с интервала $(-\theta, \theta)$ на $(-\infty, \infty)$. Эта задача называется <u>усечением</u> на интервал $(-\theta, \theta)$ исходной задачи о продолжении заданной функции $S(x)$ с $(-\ell, \ell)$ на $(-\infty, \infty)$.

Отметим, что если функция $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \, d\sigma(\lambda), \quad -\infty < x < +\infty$$

– решение задачи продолжения функции $S(x)$ с $(-\ell, \ell)$ на $(-\infty, \infty)$:

$$F(x) = S(x), \quad x \in (-\ell, \ell),$$

то $F(x)$ является решением любой усеченной задачи на интервал $(-\theta, \theta)$, $0 < \theta \leq \ell$.

<u>Определение</u>. Резольвентные матрицы

$$R^{(\theta)}(z) \in \mathfrak{M}, \quad 0<\theta \le \ell$$

задач продолжения функций $s^{(\theta)}(x)$ с интервалов $(-\theta,\theta)$ на $(-\infty,\infty)$, удовлетворяющие условиям нормировки

$$R^{(\theta)}(0)=I, \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln \| R^{(\theta)}(iy)\|}{y}=0, \quad 0<\theta\le\ell \tag{7.7}$$

называют резольвентными матрицами усечений на $(-\theta,\theta)$ задачи о продолжении эрмитово положительной функции $s(x)$.

Теперь мы покажем, что матрицы-функции $R^{(\theta)}(z)$, $0<\theta\le\ell$ задают некоторую цепочку делителей R_0 – достройки исходной матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$. И, более того, что в исследуемом нами случае ограниченности J – формы матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$, цепочка $R^{(\theta)}(z)$, $0<\theta\le\ell$ описывает <u>все</u> делители R_0 – достройки $\mathfrak{A}(z)$.

В самом деле, из определения резольвентной матрицы вытекает, что если $0<\theta\le\tau\le\ell$, то круг Вейля матрицы $R^{(\theta)}(z)$ шире, чем круг Вейля $R^{(\tau)}(z)$:

$$W\{R^{(\theta)}(z)\} \subseteq W\{R^{(\tau)}(z)\} \tag{7.8}$$

В силу теоремы 4.I главы I, из включения (7.8) следует делимость

$$R^{(\theta)}(z)^{-1} R^{(\tau)}(z) \in \mathfrak{M} \tag{7.9}$$

В частности, полагая в (7.9) $\tau=\ell$, получаем, что все матрицы $R^{(\theta)}(z)$, $0<\theta\le\ell$ делят матрицу-функцию $R(z)=R^{(\ell)}(z)$.

Так как из леммы 6.5 видно, что матрица-функция $\mathfrak{B}(z)=\begin{bmatrix}1&0\\-z&1\end{bmatrix}\mathfrak{A}(z)$, имеющая ассоциированной функцию $s(x)$, делится на $R(z)=R^{(\ell)}(z)$, то из (7.9) вытекает, что все матрицы $R^{(\theta)}(z)$, $0<\theta\le\ell$ являются делителями $\mathcal{Z}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$:

$$R^{(\theta)}(z)^{-1}\,\mathcal{Z}(z)\in\mathfrak{M} \tag{7.10}$$

Заметим, что матрицы $\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}R^{(\theta)}(z)$ принадлежат классу $\mathfrak{M}$ (см.лемму 6.4).

Тогда из (7.10) следует, что матрицы

$$\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}R^{(\theta)}(z)\,,\qquad 0<\theta\le\ell \tag{7.11}$$

делят исходную матрицу-функцию $\mathfrak{A}(z)$, то есть, справедлива

Лемма 7.2. Пусть функция $S(x)$ ассоциирована на $(-\ell,\ell)$ с матрицей $\mathcal{Z}(z)=\begin{bmatrix}1&0\\-z&1\end{bmatrix}\mathfrak{A}(z)$. И пусть $S^{(\theta)}(x)$ – ее сужение на интервал $(-\theta,\theta)$, $0<\theta\le\ell$. И пусть $R^{(\theta)}(z)$ – резольвентная матрица этого усечения.

Тогда матрица-функция

$$\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}R^{(\theta)}(z)$$

является делителем $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$.

Тем самым доказано, что матрицы-функции $\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}R^{(\theta)}(z)$, $0<\theta\le\ell$, задают некоторую цепочку делителей матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}(z)$ имеет ограниченную на мнимой полуоси $\mathcal{J}$ – форму:

$$\mathfrak{A}(iy)\mathcal{J}\mathfrak{A}^*(iy)-\mathcal{J}\le MI\;,\; y>0 \tag{7.12}$$

Тогда матрицы-функции (7.11) задают <u>все</u> левые делители $\mathfrak{A}(z)$:

<u>Теорема 7.1</u>. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$ удовлетворяет оценке на мнимой полуоси (7.12). И пусть функция

$S(x),\ x\in(-\ell,\ell)$ ассоциирована с R_0 - достройкой матрицы $\mathfrak{A}(z)$.

Тогда произвольный левый делитель $\mathfrak{A}_1(z),\ \mathfrak{A}_1(0)=I$ матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)$ в классе $\mathfrak{M}$ порождается усечением задачи продолжения на некоторый промежуток $(-\theta,\theta)$:

$$\mathfrak{A}_1(z)=\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}R^{(\theta)}(z) \tag{7.13}$$

Здесь $R^{(\theta)}(z)$ - резольвентная матрица задачи продолжения эрмитово положительной функции $S^{(\theta)}(x)$ с $(-\theta,\theta)$ на $(-\infty,\infty)$.

Число θ в (7.13) определено экспоненциальным типом θ матрицы-функции $\mathfrak{A}_1(z)$, или, что эквивалентно, условием:

$$\det\mathfrak{A}_1(z)=e^{iz\theta} \tag{7.14}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства между J - формами делимого и делителя:

$$MI\geqslant\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^*(iy)-J\geqslant\mathfrak{A}_1(iy)J\mathfrak{A}_1^*(iy)-J\qquad(y>0)$$

следует ограниченность J - формы делителя $\mathfrak{A}_1(z)$.

Тогда, во-первых, по лемме 4.1 главы I, в выражении для детерминанта (7.14) число θ строго положительно: $\theta>0$.

Во-вторых, по лемме 7.1, ассоциированная с матрицей $\mathfrak{B}_1(z)=\begin{bmatrix}1&0\\-z&1\end{bmatrix}\mathfrak{A}_1(z)$ функция есть $S^{(\theta)}(x)$.

И значит, в силу теоремы 6.2, справедливо равенство (7.13). Теорема доказана.

Заметим, что у произвольной матрицы-функции $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$ (не удовлетворяющей условию ограниченности J - формы на мнимой полуоси) могут быть и делители, не связанные с усечениями задачи продолжения эрмитово положительной функции $S(x)$

<u>Следствие</u>. 2x2 матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$ с ограниченной на полуоси $\mathcal{J}$ - формой (7.I2) допускается <u>единственное</u> мультипликативное представление с нормированным[9] эрмитианом[10]

<u>Доказательство</u>. I°. По теореме 5.I, матрица-функция $\mathfrak{A}(z)$, удовлетворяющая (7.I2) может быть представлена в виде

$$\mathfrak{A}(z)=\int_0^{\ell}\curvearrowright e^{-izQ(\tau)d\tau}, \quad Q(\tau)\mathcal{J}\geq 0,\ Q(\tau)\in L^1[0,\ell] \tag{7.I5}$$

где

$$Q^2(\tau)=-Q(\tau) \tag{7.I6}$$

Рассмотрим фундаментальную матрицу

$$\mathfrak{A}(\tau,z)=\int_0^{\tau}\curvearrowright e^{-izQ(v)dv} \qquad (0<\tau\leq\ell) \tag{7.I7}$$

По теореме I.I главы I, $\mathfrak{A}(\tau,z)$ - делитель $\mathfrak{A}(z)$. Тогда из утверждения теоремы 7.I и соотношения для детерминанта (5.II): $\det\mathfrak{A}(\tau,z)=e^{iz\tau}$ вытекает, что

$$\mathfrak{A}(\tau,z)=\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}R^{(\tau)}(z) \quad , \quad 0<\tau\leq\ell \tag{7.I8}$$

---

[9] Здесь под нормированным понимается либо эрмитиан $\Phi(t)\mathcal{J}$ из представления (I.5, I.2) главы I с нормировочным условием $Sp\,(\Phi(t)\mathcal{J})=1$; либо эрмитиан $Q(t)\mathcal{J}$: $Q^2(t)=-Q(t)$ из представления (5.8-5.I0).

[10] Утверждение следствия - частный случай теоремы единственности мультипликативного представления, полученной де Бранжем ([6]). Единственность представления для матриц-функций $\mathfrak{A}(z)$, удовлетворяющих условию (7.I2) мы здесь получаем не обращаясь к общим рассуждениям де Бранжа.

Единственность представления (7.15), (7.16) следует из соотношения (7.18) и единственности резольвентной матрицы $R^{(\tau)}(z)$ (при каждом фиксированном τ).

2°. Единственность представления

$$\mathfrak{A}(z)=\int_0^l e^{-iz\varphi(t)dt}, \quad \varphi(t)\mathcal{J}\geq 0, \quad \varphi(t)\in L^1[0,l]$$

с нормированным эрмитианом $\varphi(t)\mathcal{J}$: $Sp(\varphi(t)\mathcal{J})\equiv 1$ следует из возможности перехода от $\varphi(t)$ к $Q(\tau)$ (7.16) по формулам (5.6). Утверждение следствия доказано.

Из теоремы 7.1 и формулы (7.18) вытекает следующий способ построения эрмитиана $Q(\tau)\mathcal{J}$ системы (5.7–5.9) по ее матрице монодромии $\mathfrak{A}(z)$ (удовлетворяющей (7.12)):

Теорема 7.2. Пусть матрица-функция $\mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}(0)=I$ имеет ограниченную на мнимой положительной полуоси $\mathcal{J}$ – форму (7.12). Тогда каноническую систему, для которой $\mathfrak{A}(z)$ является матрицей монодромии, можно записать в виде

$$\frac{d}{d\tau}\mathfrak{A}(\tau,z)=-iz\mathfrak{A}(\tau,z)Q(\tau),\ \tau\in[0,l],\ Q(\tau)\mathcal{J}\geq 0,\ Q^2(\tau)=-Q(\tau)$$

$$\mathfrak{A}(0,z)=I$$

$$\mathfrak{A}(z)=\mathfrak{A}(l,z)$$

Эта система однозначно определяется матрицей функцией из равенств

$$\mathfrak{A}(\theta,z)=\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}R^{(\theta)}(z) \qquad 0<\theta\leq l$$

Здесь $R^{(\theta)}(z)$ – резольвентная матрица-функция задачи о продолжении эрмитово положительной функции $S^{(\theta)}(x)$ с интервала $(-\theta,\theta)$ на $(-\infty,\infty)$; $S^{(\theta)}(x)$ – сужение на $(-\theta,\theta)$

функции $S(x)$, ассоциированной с R_0 - достройкой $\mathfrak{A}(z)$.

Функцию $S(x)$ можно положить равной

$$S(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}\,d\lambda}{|c(\lambda)|^2+|d(\lambda)|^2}\quad,\quad x\in(-\ell,\ell) \qquad (7.19)$$

где $c(z)$, $d(z)$ - элементы матрицы-функции:

$$\mathcal{B}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z)\\ c(z) & d(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -z & 1\end{bmatrix}\mathfrak{A}(z)$$

(напомним, что (7.19) - одно из возможных представлений функции $S(x)$, ассоциированной с $\mathcal{B}(z)$ (см.(6.28)).

Аналогом этой теоремы для случая вещественных матриц-функций является

Теорема 7.2 (Re). Пусть матрица-функция $A(z)\in\mathfrak{M}$, $A(0)=I$ вещественна (то есть, $A(z)=\overline{A(\bar z)}$, $z=\bar z$) и удовлетворяет условию:

$$A(iy)JA^*(iy)-J\le M e^{2ya}I,\quad a=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\|\mathfrak{A}(iy)\|}{y}$$

Тогда каноническую систему, связанную с $A(z)$: $A(z)=A(a,z)$,

$$\frac{d}{dt}A(t,z)=-izA(t,z)H(t),\qquad t\in[0,a],\ H(t)J\ge 0,\ iH(t)=\overline{iH(t)}$$

$$A(0,z)=I$$

можно считать нормированной условием

$$\det(H(t)J)\equiv 1$$

Матрица $H(t)$ может быть найдена из равенства

$$A(t,z)=\begin{bmatrix}1&0\\z&1\end{bmatrix}R^{(2t)}(z),\quad H(t)=i\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}R^{(2t)}(z)\Big|_{z=0}$$

где $R^{(2t)}(z)$ – резольвентные матрицы задачи продолжения эрмитово положительных функций $S^{(2t)}(x)$ с интервала $(-2t,2t)$ на $(-\infty,\infty)$, <u>вещественные</u> и такие, что $R^{(2t)}(0)=I,\ \forall t\in(0,a)$; $S^{(2t)}(x)$ – усечение на $(-2t,2t)$ функции $S(x)$:

$$S(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}d\lambda}{c(\lambda)^2+d(\lambda)^2},\quad x\in(-2a,2a)$$

$c(z),d(z)$ – элементы матрицы-функции $\begin{bmatrix}a(z)&b(z)\\c(z)&d(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-z&1\end{bmatrix}A(z)$

§ 8. Канонические системы с абсолютно непрерывным эрмитианом и с эрмитианом ограниченной вариации

В § 5 мы показали, что из ограниченности J – формы матрицы монодромии $\mathfrak{A}(z)$ на полуоси

$$\mathfrak{A}(iy)J\mathfrak{A}^*(iy)-J\leqslant MI,\quad y>0 \tag{8.1}$$

вытекает, что в связанной с нею системе

$$\frac{d}{d\tau}\mathfrak{A}(\tau,z)=-iz\mathfrak{A}(\tau,z)Q(\tau),\quad \tau\in[0,\ell],\quad Q(\tau)J\geqslant 0 \tag{8.2}$$

$$\mathfrak{A}(0,z)=I$$

можно считать

$$Q^2(\tau)=-Q(\tau),\quad Q(\tau)\in L^1[0,\ell] \tag{8.3}$$

Рассмотрим теперь некоторые достаточные условия на эрмитиан $Q(\tau)J$, при которых матрица монодромии системы (8.2, 8.3) удовлетворяет условию на полуоси (8.1).

1. Пусть эрмитиан $Q(\tau)J$ системы (8.2,8.3) имеет <u>сумми-</u>

руемую производную $Q(t)\in W_1^1[0,l]$.

Тогда система (8.2,8.3) эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathfrak{A}(t,z)=\int_0^t(1-e^{+iz(t-v)})\mathfrak{A}(v,z)Q'(v)dv+$$
$$+(I+Q(0))-e^{izt}Q(0)\qquad (t\in[0,l]) \tag{8.4}$$

Перенося на случай уравнения (8.4) технику исследования, применяемую в [52] , приходим к выводу, что фундаментальная матрица $\mathfrak{A}(t,z)$ представима в виде

$$\mathfrak{A}(t,z)=B(t)-A(t)e^{izt}+\int_0^t e^{iz(t-v)}N(t,v)dv+\int_0^t e^{izv}M(t,v)dv \tag{8.5}$$

где матрицы-функции $A(t)$ и $B(t)$ определяются по $Q(t)$ из уравнений

$$B(t)=\int_0^t B(v)Q'(v)dv+I+Q(0)$$

$$A(t)=-\int_0^t A(v)Q'(v)dv+Q(0)$$

Если ввести обычную параметризацию для проектора $Q(t)$:

$$Q(t)=\begin{bmatrix}\overline{\alpha(t)}\\ \overline{\beta(t)}\end{bmatrix}[\alpha(t),\beta(t)]\mathcal{J},\quad [\overline{\alpha(t)},\overline{\beta(t)}]\mathcal{J}\begin{bmatrix}\alpha(t)\\ \beta(t)\end{bmatrix}=1$$

в которой $\alpha(t)$, $\beta(t)$ согласованы специальным образом:

$$[\alpha(t),\beta(t)]\mathcal{J}\begin{bmatrix}\overline{\alpha'(t)}\\ \overline{\beta'(t)}\end{bmatrix}=0$$

то

$$A(t)=\begin{bmatrix}\overline{\alpha(0)}\\ \overline{\beta(0)}\end{bmatrix}[\alpha(t),\beta(t)]\mathcal{J},\quad B(t)=\begin{bmatrix}\alpha(0)\\ \beta(0)\end{bmatrix}[\overline{\alpha(t)},\overline{\beta(t)}]\mathcal{J} \tag{8.6}$$

Ядра $N(t,v)$ и $M(t,v)$ в (8.5) удовлетворяют системе

$$N(t,v)=-\int_v^t N(u,v)Q'(u)du-\int_v^t M(u,u-v)Q'(u)du-B'(v)$$

$$M(t,v)=\int_v^t N(u,u-v)Q'(u)du+\int_v^t M(u,v)Q'(u)du+A'(v)$$

Решая эту систему методом последовательных приближений, приходим к равномерной оценке

$$\|M(t,v)\|\leq e^{c_1\int_0^t\|Q'(u)\|du},\quad \|N(t,v)\|\leq e^{c_1\int_0^t\|Q'(u)\|du} \tag{8.7}$$

Из (8.5), (8.7) вытекает оценка для матрицы монодромии

$$\|\mathfrak{A}(z)\|\leq e^{c\int_0^\ell\|Q'(v)\|dv},\quad \Im z\geqslant 0 \tag{8.8}$$

Таким образом, мы пришли к теореме:

<u>Теорема 8.I</u>. Пусть $\mathfrak{A}(z)$ – матрица монодромии канонической системы (8.2) – (8.3) с абсолютно непрерывным эрмитианом $Q(t)J$. Тогда $\mathfrak{A}(z)$ допускает интегральное представление (8.5), в котором матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$ абсолютно непрерывны, а ядра $M(t,v)$, $N(t,v)$ удовлетворяют равномерной оценке (8.7).

Отметим, что множество матриц монодромии систем (8.2)–(8.3) эрмитиан $Q(t)J$ которых абсолютно непрерывен, совпадает (с точностью до умножения на e^{iza} и постоянную матрицу) с классом матриц монодромии систем типа Дирака с суммируемым потенциалом ([53]). Глубокое исследование вопросов, связанных с обратной задачей для этих систем дано в [10] ,[11] .

II. Если $Q(t)$ имеет на $[0,\ell]$ ограниченную вариацию, то оценка (8.8) переходит в следующую

$$\|\mathfrak{A}(z)\| \le e^{c \overset{\ell}{\underset{0}{\mathrm{Var}}}\, Q} \qquad (\mathrm{Im}\, z \geq 0) \tag{8.9}$$

То есть, справедлива теорема

<u>Теорема 8.2</u>. Пусть $\mathfrak{A}(z)$ – матрица монодромии системы (8.2) – (8.3), эрмитиан $Q(t)J$ которой имеет ограниченную на $[0,\ell]$ вариацию. Тогда $\mathfrak{A}(z)$ удовлетворяет оценке (8.9), выполняющейся во всей верхней полуплоскости.

Таким образом, класс систем с ограниченной на мнимой полуоси матрицей монодромии содержит системы (8.2), (8.3) с абсолютно непрерывным эрмитианом (системы, эквивалентные системам типа Дирака) и даже более широко, с эрмитианом ограниченной вариации.

ГЛАВА Ш. РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ В ДИСКРЕТНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЦЕЛЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

§ I. Дискретные произведения

В этой главе мы исследуем частный случай восстановления мультипликативного представления вещественной целой $\mathcal{J}$ - внутренней 2x2 матрицы-функции

$$\mathcal{W}(z)=\int_0^{n\,\curvearrowright} e^{-izH(t)dt}, \quad H(t)\mathcal{J}\geq 0,\ iH(t)=\overline{iH(t)} \qquad (\text{I.I})$$

когда известно, что эрмитиан мультипликативного интеграла кусочно-постоянный:

$$H(t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)A_k, \quad \varphi_k(t)=\begin{cases}1, & t\in[k-1,k)\\ 0, & t\notin[k-1,k)\end{cases} \qquad (\text{I.2})$$

$$A_k\mathcal{J}\geq 0,\quad iA_k=\overline{iA_k},\quad k=1,2,\dots,n$$

То есть, случай дискретного произведения

$$\mathcal{W}(z)=e^{-izA_1}e^{-izA_2}\dots e^{-izA_n},\quad A_k\mathcal{J}\geq 0,\ iA_k=\overline{iA_k} \qquad (\text{I.3})$$

Эта задача эквивалентна восстановлению канонической системы

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(t,z)=-iz\mathcal{W}(t,z)H(t),\quad t\in[0,n] \qquad (\text{I.4})$$

$$\mathcal{W}(0,z)=I$$

с кусочно постоянным эрмитианом (I.2) по ее матрице монодромии

$$\mathcal{W}(z)=\mathcal{W}(n,z) \qquad (\text{I.5})$$

Здесь речь идет о восстановлении вида матриц A_k в (I.2), (I.4, I.5)(или в (I.3)), если заранее известно, что $\mathcal{W}(z)$ допускает представление (I.2), (I.4, I.5) (или, что эквивалентно, (I.3)), но вид матриц A_K в нем неизвестен.

Вопрос, когда $\mathcal{Z}(z)$ допускает представление (I.3), мы здесь не исследуем. Отметим, что в ряде задач анализа (к таким задачам, например, относится исследование групповым методом дискретных интерполяционных задач ([31,32,54])) возникает ситуация, когда заранее известно, что некоторая матрица-функция $\mathcal{Z}(z)$ должна допускать дискретное разложение (I.3) и ставится вопрос об отыскании конкретного вида множителей в (I.3), то есть, матриц A_K $(K=1,2,\ldots,n)$. Это и составляет предмет наших исследований.

Используя теорию кругов Вейля, мы связываем вопрос об отщеплении слева от матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ множителя e^{-izA_1} с асимптотическим поведением $\mathcal{Z}(z)$ на мнимой полуоси.

Это позволяет нам дать финитную (пошаговую) процедуру определения матриц A_K $(K=1,2,\ldots,n)$ в (I.3) по асимптотическому поведению $\mathcal{Z}(z)$.

При этом мы рассматриваем общий случай вещественного дискретного разложения (I.3), когда на матрицы A_K не наложено никаких ограничений, кроме, обеспечивающего единственность разложения (I.3), условия некоммутативности рядомстоящих матриц:

$$A_{K-1}\,A_K \neq A_K\,A_{K-1} \tag{I.6}$$

Для 2х2 J - положительных вещественных матриц A_K это условие эквивалентно их неколлинеарности:

$$A_{K-1} \neq \alpha A_K\,, \quad \forall \alpha \in [0,\infty) \tag{I.7}$$

Оно естественно потому, что иначе любую матрицу A_K можно представить в виде $A_K=\lambda A_K+\mu A_K$ $(\lambda+\mu=1)$ и тогда записывая в (I.3) множитель:

$$e^{-izA_k} = e^{-iz\lambda A_k} e^{-iz\mu A_k}$$

мы получили бы еще одно представление для матрицы-функции $\mathcal{B}(z)$, чего не может быть при наложенном ограничении (I.6), (I.7).

Обратимся к произведению (I.3). Составляющие его множители вида

$$b(z) = e^{-izA}, \quad AJ \geqslant 0$$

мы условились называть целыми элементарными множителями (см. формулы стр. 9 введения).

Во введении уже говорилось о том, что свойства целого элементарного множителя $b(z)$ во многом определяются его асимптотическим поведением вблизи точки $z = \infty$.

Цель этой главы - исследовать разложение матрицы-функции $\mathcal{B}(z)$ в произведение элементарных целых множителей. При исследовании в главе II мультипликативного представления класса матриц-функций $\mathfrak{A}(z)$ с ограниченной J - формой (удовлетворяющих условию (II.I.2), мы видели, что важную роль в вопросах разложения в произведение играют асимптотические свойства круга Вейля этого произведения (мультипликативного интеграла (I.I)).

В этой главе заключение об отщеплении и виде отщепляемого от дискретного произведения $\mathcal{B}(z)$ (I.3) множителя $b_1(z) = e^{-izA_1}$ мы будем делать на основании исследования асимптотических свойств круга Вейля этого множителя и всего произведения $\mathcal{B}(z)$ (I.3).

Причем, сначала, в § 2, мы исследуем асимптотические свойства "точечных" кругов Вейля $W_z\{b\}$ множителя $b(z)$.

Оказывается (это мы покажем в § 2), что круг Вейля $W_z\{b\}$

целого элементарного множителя $b(z)$ при $\operatorname{Im} z = y \to +\infty$ стягивается в точку ξ, $\xi = \xi\{b\}$:

$$\lim_{y \to +\infty} W_{iy}\{b\} = \{\xi\}$$

По положению точки ξ можно судить о свойствах элементарного множителя $b(z)$.

При этом, если два множителя $b_1(z) = e^{-izA_1}$, $b_2(z) = e^{-izA_2}$ имеют неколлинеарные показатели: $A_1 \neq \alpha A_2$ $(\forall \alpha \in [0,\infty))$ (или, что эквивалентно $A_1A_2 \neq A_2A_1$), то предельные точки ξ_1 и ξ_2 их кругов Вейля $W_z\{b_1\}$ и $W_z\{b_2\}$ <u>различны</u>, то есть, при достаточно больших y: $y > Y$, круги Вейля $W_{iy}\{b_1\}$ и $W_{iy}\{b_2\}$ <u>не пересекаются</u>. Такое разделение асимптотик кругов Вейля для различных множителей позволяет сделать вывод о единственности представления (I.3) матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$. По предельной точке ξ круга Вейля множителя e^{-izA_1} можно построить показатель A_1 с точностью до умножения всех элементов A_1 на скаляр:

$$A_1 = \rho \widetilde{A}_1$$

где $\widetilde{A}_1$ определено точкой ξ.

Таким образом, исследование асимптотических свойств кругов Вейля $W_z\{b\}$ целых элементарных множителей $b(z)$ позволит нам в § 2 определять (с точностью до умножения на скаляр) матрицу A_1 в представлении (I.3) по асимптотическим свойствам матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$.

Чтобы точно определить левый элементарный множитель e^{-izA_1} (то есть, найти матрицу A_1) в разложении (I.3), мы в § 3 обратимся к свойствам <u>функциональных кругов Вейля</u> элементарных множителей. Эти исследования позволят нам в § 3 дать финитную (пошаговую), процедуру восстановления матриц A_K $(K=1,2,\ldots n)$ в (I.3) по значениям матрицы $\mathcal{Z}(z)$.

§ 2. Асимптотические свойства кругов Вейля дискретного произведения

Исследуем сначала вид показателя A вещественного целого $\mathcal{J}$ - внутреннего 2x2 множителя e^{-izA}

$$A\mathcal{J} \geqslant 0, \quad iA = \overline{iA} \tag{2.I}$$

Заметим, что (2.I) эквивалентно любому из следующих трех условий (для 2x2 матриц и для $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$):

$$A\mathcal{J} = \overline{A\mathcal{J}} \geqslant 0 \tag{2.2}$$

$$A\mathcal{J} \geqslant 0, \quad Sp\, A = 0 \tag{2.3}$$

$$A\mathcal{J} \geqslant 0, \quad A^2 = \varkappa^2 I \tag{2.4}$$

причем, в (2.4) полагаем $\varkappa \geqslant 0$:

$$\varkappa = \sqrt{-\det A} = \sqrt{\det (A\mathcal{J})} \tag{2.5}$$

Из леммы 2.I главы II вытекает, что в зависимости от величины $\varkappa$ в (2.4, 2.5) матрица A либо коллинеарна сумме взаимно ортогональных $\mathcal{J}$ - проекторов:

$$A = \varkappa\ (P + Q) \qquad \text{при } \varkappa \neq 0 \tag{2.6}$$

где

$$P\mathcal{J} \geqslant 0,\ P^2 = P;\ Q\mathcal{J} \geqslant 0,\ Q^2 = -Q;\ PQ = QP = 0,\ P - Q = I \tag{2.7}$$

либо A есть $\mathcal{J}$ - проектор III вида:

$$A = \mathcal{E},\ \ \mathcal{E}^2 = 0,\ \ \mathcal{E}\mathcal{J} \geqslant 0 \qquad \text{при } \varkappa = 0 \tag{2.8}$$

Отсюда и из параметризации (П.2.5), (П.2.6) $\mathcal{J}$ - проекторов, вытекает представление матрицы A (2.1):

$$A = \begin{bmatrix} \alpha\bar{\alpha} & \dfrac{\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta}{2} \\ \dfrac{\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta}{2} & \beta\bar{\beta} \end{bmatrix}\mathcal{J}, \tag{2.9}$$

где

$$\mathcal{I}m\,\alpha\bar{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta}{2i} = \varkappa > 0,\ \varkappa = \sqrt{\det(A\mathcal{J})} \tag{2.10}$$

Обратимся теперь к понятию "точечного" круга Вейля $W_z\{\mathcal{Z}\}$ матрицы-функции $\mathcal{Z}(z) \in \mathfrak{M}$ (см. § 3 главы I). Напомним, что при каждом фиксированном $z = z_0$, $\mathcal{I}m\, z > 0$, круг Вейля $W_z\{\mathcal{Z}\}$ можно определить, как множество всех точек $\{w\}$ верхней полуплоскости, удовлетворяющих неравенству:

$$[\bar{w}, 1]\, \mathcal{Z}^{-1^*}(z)\, \mathcal{J}\, \mathcal{Z}^{-1}(z) \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.11}$$

(см. формулу (3.3) главы I). Это множество точек $\{w\}$ (2.11) есть круг в верхней полуплоскости. Его положение (центр и радиус) меняется при изменении аргумента z. То есть, $W_z\{\mathcal{Z}\}$ - семейство кругов в верхней полуплоскости, зависящее от аргумента z, $\mathcal{I}m\, z > 0$.

Исследуем асимптотические свойства кругов $W_z\{b\}$, связанных с заданным элементарным множителем $b(z)$, при $\mathcal{I}m\, z \to +\infty$.

Для этого выпишем матрицу Вейля $W_b(z) = b^{-1^*}(z)\mathcal{J} b^{-1}(z)$ элементарного множителя $b(z) = e^{-izA}$, используя представление (2.9), (2.10) матрицы A.

Так как $(A^2 = \varkappa^2 I)$

$$e^{\alpha A} = I + \alpha A + \frac{\alpha^2}{2!}A^2 + \ldots = ch(\alpha\varkappa)I + \frac{sh(\alpha\varkappa)}{\varkappa}A \quad (2.12)$$

$$b^{-1}(z) = Cos(z\varkappa)I + i\,Sin(z\varkappa)\,\frac{1}{\varkappa}A \quad (2.13)$$

то

$$W_b(z) = \begin{bmatrix} -\frac{sh2\varkappa y}{\varkappa}\beta\bar\beta & \frac{sh2\varkappa y}{\varkappa}Re(\alpha\bar\beta) + i\,ch2\varkappa y \\ \frac{sh2\varkappa y}{\varkappa}Re(\alpha\bar\beta) - i\,ch2\varkappa y & -\frac{sh2\varkappa y}{\varkappa}\alpha\bar\alpha \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

При $\varkappa = 0$

$$W_b(z) = \begin{bmatrix} -2y\,\beta\bar\beta & 2\alpha\beta + i \\ 2\alpha\beta - i & -2y\,\alpha\alpha \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Считаем, что в (2.15) $\alpha = \bar\alpha$, $\beta = \bar\beta$. Здесь $y = \Im m\, z$.

Используя (2.14), (2.15) находим по формулам (1.2.15) центр и радиус круга Вейля $W_z\{b\}$ как функции от Z (точнее, как функции от $y = \Im m\, z$):

$$C_z = \frac{\alpha}{\beta} + i\,\frac{\varkappa}{\beta\bar\beta}(cth2\varkappa y - 1) \quad \text{при} \quad \varkappa \neq 0$$

$$r_z = \frac{\varkappa}{\beta\bar\beta}\,\frac{1}{sh\,2\varkappa y} \quad \text{при} \quad \varkappa \neq 0 \qquad (2.16)$$

$$C_z = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{i}{2y\beta\beta} \quad \text{при} \quad \varkappa = 0$$

$$r_z = \frac{1}{2y\beta\beta} \quad \text{при} \quad \varkappa = 0 \qquad (2.17)$$

Если $\beta = 0$, то круг Вейля есть полуплоскость

$$\Im m\, W \geq \alpha\bar\alpha\, \Im m\, z \quad (2.18)$$

Обозначим $\alpha / \beta = \xi$

из (2.10)

$$\Im m\, \xi = \Im m(\alpha/\beta) = \frac{\varkappa}{\beta\bar{\beta}} \geqslant 0 \qquad (2.19)$$

Мы получаем следующую картину поведения кругов $W_z\{b\}$, $\Im m\, z > 0$, множителя $b(z) = e^{-izA}$ в зависимости от свойств матрицы A (2.10):

При $A^2 \neq 0$ $(\varkappa \neq 0)$ круг $W_z\{b\}$ лежит строго в верхней полуплоскости и стягивается к точке $\xi = \alpha/\beta$, когда $\Im m\, z \to +\infty$

При $A^2 = 0$ $(\varkappa = 0)$ и $\beta \neq 0$ круг $W_z\{b\}$ касается вещественной оси в точке $\xi = \alpha/\beta$ и стягивается к этой точке, когда $\Im m\, z \to +\infty$

При $A^2 = 0$ и $\beta = 0$ круг $W_z\{b\}$ есть полуплоскость $\Im m\, w \geqslant \alpha\bar{\alpha}\, \Im m\, z$ и стягивается к точке $\xi = \infty$, когда $\Im m\, z \to +\infty$

Итак, справедлива

<u>Лемма 2.1</u>. Круг Вейля элементарного множителя $b(z) = e^{-izA}$, где матрица A имеет вид (2.9) стягивается в точку $\xi = \alpha/\beta$, когда $\Im m\, z \to +\infty$

Заметим, что матрица A определяется точкой $\xi = \alpha/\beta$ с точностью до скалярного множителя ρ. В самом деле, полагая в (2.9) $\alpha = \xi\beta$, $\rho = |\beta|^2$, получаем:

при $\Im m\, \xi > 0$, $A = \rho H$, где

$$H = H(\xi) = \frac{1}{\Im m\, \xi}\begin{bmatrix} \xi\bar{\xi} & Re\, \xi \\ Re\, \xi & 1 \end{bmatrix} J, \quad H^2 = I, \quad HJ \geqslant 0 \qquad (2.20)$$

при $\xi = \bar{\xi} < \infty$, $A = \rho\mathcal{E}$, где

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi^2 & \xi \\ \xi & 1 \end{bmatrix} J, \quad \mathcal{E}^2 = 0, \quad \mathcal{E}J \geqslant 0 \qquad (2.21)$$

при $\xi = \infty$, $A = \rho\,\mathcal{E}_0$, где

$$\mathcal{E}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_0^2 = 0, \quad \mathcal{E}_0 \mathcal{J} \geqslant 0 \tag{2.22}$$

Из этого факта следует, что если два целых множителя

$$b_1(z) = e^{-izA}, \quad b_2(z) = e^{-izB}, \quad A\mathcal{J} = \overline{A\mathcal{J}} \geqslant 0, \quad B\mathcal{J} = \overline{B\mathcal{J}} \geqslant 0$$

имеют неколлинеарные показатели: $A \neq \rho B \quad (\forall \rho \in [0, \infty))$
то предельные точки их кругов Вейля не совпадают: $\xi_1 \neq \xi_2$
И так как радиусы этих кругов стремятся к нулю, то начиная с некоторого $Y > 0$, для любого аргумента $z: \Im m\, z > Y$ круги Вейля этих двух множителей не пересекаются

$$W_z\{b_1\} \cap W_z\{b_2\} = \varnothing, \quad \Im m\, z > Y \quad (A \neq \rho B) \tag{2.23}$$

Пусть теперь матрица-функция $\mathcal{Z}(z) \in \gamma\mathfrak{M}$ такова, что от нее отщепляется слева целый элементарный множитель e^{-izA}, то есть $\mathcal{Z}(z)$ имеет вид:

$$\mathcal{Z}(z) = e^{-izA}\,\mathfrak{A}(z), \quad \mathfrak{A}(z) \in \gamma\mathfrak{M}, \quad A\mathcal{J} = \overline{A\mathcal{J}} \geqslant 0 \tag{2.24}$$

Тогда, в силу соответствия между делимостью $\mathcal{J}$ - растягивающих матриц и вкладываемостью их кругов Вейля (см. § 3 главы I), из (2.24) следует, что $\forall z: \Im m\, z > 0$ имеет место включение кругов Вейля

$$W_z\{\mathcal{Z}\} \subseteq W_z\{e^{-izA}\}, \quad \Im m\, z > 0 \tag{2.25}$$

Следовательно, круг Вейля произведения (2.24) вложен в круг Вейля левого множителя $b(z) = e^{-izA}$ и поэтому стягивается к той же точке ξ, которая является предельной для $W_z\{e^{-izA}\}$.

Таким образом, предельная точка ξ произведения $\mathcal{Z}(z)= e^{-izA}\mathfrak{A}(z)$ определяет показатель A левого множителя, с точностью до умножения всех элементов A на скаляр, по формулам (2.20-2.22).

Итак, из включения (2.25) и разделения асимптотик (2.23) для кругов Вейля различных элементарных множителей, вытекает следующая

<u>Лемма 2.2</u>. Пусть матрица-функция $\mathcal{Z}(z)$ допускает два представления:

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-izA}\mathfrak{A}_1(z),\ \mathcal{Z}(z)=e^{-izB}\mathfrak{A}_2(z)$$
$$AJ=\overline{AJ}\geqslant 0,\ BJ=\overline{BJ}\geqslant 0,\quad \mathfrak{A}_k(z)\in\mathfrak{M}\ (k=1,2) \tag{2.26}$$

Тогда показатели A и B элементарных множителей в (2.26) коллинеарны: $A=\rho B$, $\rho\in[0,\infty)$.

Из леммы 2.2 вытекает единственность представления матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ (I.4) в виде произведения элементарных множителей:

<u>Теорема 2.I</u>. Пусть матрица-функция $\mathcal{Z}(z)$ допускает два разложения:

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-izA_1}e^{-izA_2}\dots e^{-izA_n},\quad A_kJ=\overline{A_kJ}\geqslant 0$$

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-izB_1}e^{-izB_2}\dots e^{-izB_n},\quad B_kJ=\overline{B_kJ}\geqslant 0$$

где

$$A_{k-1}\neq pA_k\ (\forall p\in[0,\infty)),\ B_{k-1}\neq qB_k\ (\forall q\in[0,\infty)),\forall k$$

Тогда $n=m$, $B_k=A_k$ $(k=1,2,\dots,n)$

<u>Доказательство</u>. Согласно лемме 2.2, показатели A_1 и B_1 коллинеарны: $A_1=\rho B_1$. Если $\rho\neq 1$, например, $\rho>1$, то

из представления

$$e^{izB_1}\mathcal{Z}(z)=e^{-iz(\rho-1)B_1}e^{-izA_2}\dots=e^{-izB_2}e^{-izB_3}\dots$$

вытекает коллинеарность B_1 и B_2, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $A_1=B_1$. Рассматривая далее матрицу $e^{izA_1}\mathcal{Z}(z)$, приходим к выводу, что $A_2=B_2$. И далее последовательно убеждаемся, что $A_k=B_k, \forall k$, $n=m$. Теорема доказана.

§ 3. Восстановление дискретного произведения

Исследуя асимптотику точечных кругов Вейля для элементарных целых множителей, мы в § 2 получили формулы (2.20–2.22) построения показателя A_1 левого множителя e^{-izA_1} в представлении

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-izA_1}e^{-izA_2}\dots e^{-izA_n},\quad A_k\mathcal{J}=\overline{A_k\mathcal{J}}\geqslant 0 \tag{3.1}$$

по предельной точке ξ круга $W_z\{\mathcal{Z}\}$:

$$\{\xi\}=\lim_{y\to+\infty}W_{iy}\{\mathcal{Z}\} \tag{3.2}$$

с точностью до умножения всех элементов A_1 на число $\rho>0$.

Отметим, что если $\mathcal{Z}(z)$ имеет вид

$$\mathcal{Z}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z)\\ c(z) & d(z)\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

то величина $b(z)/d(z)\in W_z\{\mathcal{Z}\}$ и ξ в (3.2) задается равенством:

$$\xi=\lim_{y\to+\infty}\frac{b(iy)}{d(iy)} \tag{3.4}$$

Чтобы восстановить полностью матрицу A_1 в (3.I), обратимся к понятию функционального круга Вейля матриц-функций $\mathcal{Z}(z)\in\mathfrak{M}$.

Напомним, что функциональный круг Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$ есть множество всех неванлинновских функций, получаемых в результате дробно-линейного преобразования произвольной функции $\omega(z)\in N$ (см. § 3 главы I):

$$u(z)=\frac{a(z)\omega(z)+b(z)}{c(z)\omega(z)+d(z)},\quad \mathcal{Z}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z)\\ c(z) & d(z)\end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

Прежде, чем исследовать свойства круга Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$ произведения (3.I), подвергнем $\mathcal{Z}(z)$ преобразованию подобия с J - унитарной матрицей $\mathcal{U}$: $\mathcal{U}J\mathcal{U}^*=J$:

$$\widetilde{\mathcal{Z}}(z)=\mathcal{U}^{-1}\mathcal{Z}(z)\mathcal{U}=e^{-iz\widetilde{A}_1}\dots e^{-iz\widetilde{A}_n},\quad \widetilde{A}_k=\mathcal{U}^{-1}A_k\mathcal{U} \qquad (3.6)$$

Матрицу $\mathcal{U}$, в зависимости от величины ξ (3.4), полагаем равной

При $\mathcal{J}m\,\xi>0,\quad \mathcal{U}=\frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}m\,\xi}}\begin{bmatrix}\mathcal{J}m\,\xi & Re\,\xi\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (3.7)

при $\xi=\overline{\xi}<\infty,\quad \mathcal{U}=\begin{bmatrix}\xi & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (3.8)

при $\xi=\infty,\quad \mathcal{U}=I$

Так как показатель A_1 левого множителя e^{-izA_1} в (3.I) восстанавливается по формулам (2.20-2.22), то в преобразованном произведении (3.6) левый множитель будет иметь вид:

Если $\mathcal{J}m\,\xi>0$, то

$$e^{-iz\widetilde{A}_1}=e^{-iz\mathcal{U}^{-1}A_1\mathcal{U}}=e^{-iz\rho J},\quad J=\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix},\ J^2=I \qquad (3.9)$$

Если $\xi_1 = \overline{\xi}_1$, то

$$e^{-iz\mathcal{A}_1} = e^{-iz\rho\mathcal{E}_0}, \quad \mathcal{E}_0 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{E}_0^2 = 0, \mathcal{E}_0 J \geq 0 \quad (3.10)$$

Таким образом, необходимые сведения относительно скаляра ρ, нам позволят получить критерии отщепляемости от матрицы-функции $\tilde{\mathcal{Z}}(z)$ множителя $e^{-iz\rho J}$ и множителя $e^{-iz\rho\mathcal{E}_0}$.

Выведем сейчас эти критерии. С этой целью изучим свойства функциональных кругов для таких двух стандартных представлений целых элементарных множителей:

$$B_0(z) = e^{-iz\rho J}, \qquad b_0(z) = e^{-iz\rho\mathcal{E}_0}$$

Функциональный круг Вейля множителя $b_0(z) = e^{-iz\rho\mathcal{E}_0}$ изучался нами в § 3 главы II. Из выведенного в § II.3 критерия леммы 3.4 и полученных нами только что формул перехода (3.8), (3.10), (2.21), вытекает следующий общий критерий:

<u>Теорема 3.1</u>. 1. Для того, чтобы матрица-функция $\mathcal{Z}(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$, $\mathcal{Z}(0) = I$ допускала представление

$$\mathcal{Z}(z) = e^{-iz\rho\mathcal{E}_0}\mathcal{Z}_1(z), \ \mathcal{E}_0 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_1(z) \in \mathcal{M}, \quad (3.11)$$

$\rho > 0$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{y \to +\infty} b(iy)/(iy\,d(iy)) \geq \rho$$

2. Для того, чтобы матрица-функция $\mathcal{Z}(z)$ допускала представление

$$\mathcal{Z}(z) = e^{-iz\rho\mathcal{E}}\mathcal{Z}_1(z), \mathcal{Z}_1(z) \in \mathcal{M}, \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1 \end{bmatrix} J, \xi_1 = \overline{\xi}_1, \mathcal{E}^2 = 0, \mathcal{E}J \geq 0 \quad (3.12)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) $\lim\limits_{y\to+\infty} b(iy)/d(iy)=\xi \quad (\xi=\overline{\xi})$ (3.13)

б) матрица-функция $\widetilde{\mathcal{Z}}(z)=\mathcal{U}^{-1}\mathcal{Z}(z)\mathcal{U}=\begin{bmatrix}\widetilde{a}(z) & \widetilde{b}(z)\\ \widetilde{c}(z) & \widetilde{d}(z)\end{bmatrix}$

где $\mathcal{U}$ построено по ξ (3.13) как в (3.8), удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{y\to+\infty} \widetilde{b}(iy)/(iy\,\widetilde{d}(iy))\geqslant \rho$$

Перейдем к описанию свойств круга Вейля множителя

$$B_0(z)=e^{-iz\rho J}=\begin{bmatrix}\cos\rho z & \sin\rho z\\ -\sin\rho z & \cos\rho z\end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Из (3.5) вытекает, что функциональный круг Вейля $W\{B_0(z)\}$ составляет функции $u(z)$, имеющие вид

$$u(z)=\frac{\cos(\rho z)\,\omega(z)+\sin(\rho z)}{-\sin(\rho z)\,\omega(z)+\cos(\rho z)}, \quad \omega(z)\in N$$

В частности, полагая $\omega(z)=i$, получаем, что неванлинновская функция i:

$$u_0(z)=i\in W\{B_0(z)\} \tag{3.15}$$

В дальнейших исследованиях важную роль играет тот факт, что радиус круга Вейля $r(z)$ вещественной целой J - внутренней матрицы функции экспоненциального типа роста L убывает при $\operatorname{Im} z\to+\infty$ как $e^{-2L\operatorname{Im} z}$ (см. соотношение (1.38) и леммы 5.1, 5.2 главы 1):

<u>Лемма 3.1</u>. Пусть вещественная матрица-функция $\mathcal{Z}(z)\in\mathfrak{M}$, имеет экспоненциальный тип $L>0$:

$$\lim_{r\to+\infty}\ \sup_{0\le\theta<2\pi} \frac{\ln\|\mathcal{Z}(re^{i\theta})\|}{r} = L > 0 \qquad (3.16)$$

Тогда любые две функции $u_1(z)$, $u_2(z)$ из функционального круга Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$ удовлетворяют соотношению

$$u_1(iy) - u_2(iy) = o(e^{-2(L-\delta)y}), \forall\delta>0,\ y\to+\infty \qquad (3.17)$$

Учитывая, что экспоненциальный тип роста множителя (3.14) равен ρ , получаем из (3.15), (3.17) соотношение для функций $u(z)$ из круга Вейля $W\{B_0(z)\}$:

$$u(z) - i = o(e^{-2y(\rho-\delta)}),\ \forall\delta>0,\ y=\Im z\to+\infty \qquad (3.18)$$

Докажем, что (3.18) – характеристическое свойство функций из круга Вейля множителя $B_0(z)$, то есть, что <u>все</u> неванлинновские функции, удовлетворяющие (3.18) принадлежат кругу Вейля $W\{B_0(z)\}$.

Для доказательства этого факта обратимся в введенному в главе II (§ 6) понятию резольвентной матрицы задачи продолжения эрмитово положительной функции.

Отметим, что после умножения матрицы $B_0(z)=e^{-iz\rho\mathcal{J}}$ на скалярную экспоненту $e^{iz\rho}$, получается матрица-функция, ограниченная в верхней полуплоскости: $\Im z\ge 0$:

$$(e^{iz\rho})e^{-iz\rho\mathcal{J}} = e^{-2iz\rho Q_0} = I - (1-e^{2iz\rho})Q_0 = O(1)$$

$$Q_0 = \tfrac{1}{2}(\mathcal{J}-I),\quad Q_0^2 = -Q_0,\quad Q_0\mathcal{J}\ge 0$$

Переходя к " R_0 – достройке" этой матрицы

$$e^{-iz\mathcal{E}_0}\cdot e^{-2iz\rho Q_0} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -z & 1\end{bmatrix} e^{-2iz\rho Q_0} \qquad (3.19)$$

и применяя теорему 6.2 главы II, приходим к выводу, что матрица (3.19) $e^{-iz\mathcal{E}_0}e^{2izpQ_0}$ есть резольвентная матрица задачи продолжения эрмитово положительной функции $S(x)$ с интервала $(-2\rho,2\rho)$ на $(-\infty,\infty)$.

Значения $S(x)$ на $(-2\rho,2\rho)$ вычислим по формуле (II.6.28):

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda x}d\lambda}{1+\lambda^2}=e^{-|x|} \tag{3.20}$$

$$S(x)=e^{-|x|},\quad x\in(-2\rho,2\rho)$$

Таким образом, мы пришли к утверждению:

<u>Теорема 3.2</u>. Матрица-функция [10])

$$R(z)=e^{-iz\widetilde{\mathcal{E}}_0}e^{-iz\rho J}=\begin{bmatrix}1&0\\-z&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\rho z&\sin\rho z\\-\sin\rho z&\cos\rho z\end{bmatrix} \tag{3.21}$$

является вещественной резольвентной матрицей задачи продолжения эрмитово положительной функции $S(x)=e^{-|x|}$ с интервала $(-2\rho,2\rho)$ на $(-\infty,\infty)$.

Возвращаясь к интегралу Хинчина-Бохнера $F(x)$ (3.20), отметим, что его порождает мера $d\sigma(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$, взятая из представления неванлинновской функции

$$\widetilde{\mathcal{U}}_0(z)=\frac{i}{-iz+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda-z)(1+\lambda^2)} \tag{3.22}$$

Отсюда и из асимптотического критерия леммы 6.2 главы II приходим к следующему характеристическому свойству функций из

---

[10]) Вид (3.21) резольвентной матрицы продолжения функции $S(x)=e^{-|x|}$ с $(-2\rho,2\rho)$ на $(-\infty,\infty)$ хорошо известен.

круга Вейля матрицы $R(z)=e^{-iz\widetilde{\mathcal{E}}_0}e^{-iz\rho J}$ (3.2I):

<u>Лемма 3.2</u>. Пусть неванлинновская функция $\widetilde{u}(z)$ удовлетворяет асимптотике:

$$\widetilde{u}(z)-\left(\frac{i}{-iz+1}\right)=o\left(e^{-2y(\rho-\delta)}\right),\ z=iy,\ y\to+\infty,\ \forall\delta>0 \quad (3.23)$$

Тогда $\widetilde{u}(z)$ входит в круг Вейля матрицы $R(z)$ (3.2I).

<u>Доказательство</u>. Из соотношений (3.20), (3.22) и асимптотического критерия леммы П.6.3 вытекает, что функция $\widetilde{u}(z)$, удовлетворяющая (3.23), допускает представление

$$\widetilde{u}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_{\widetilde{u}}(z)}{\lambda-z}$$

с мерой $d\sigma_{\widetilde{u}}(\lambda)$ такой, что интеграл Хинчина-Бохнера

$$F_{\widetilde{u}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}d\sigma_{\widetilde{u}}(\lambda)$$

совпадает на $(-2\rho,2\rho)$ с функцией $e^{-|x|}=S(x)$. Но тогда, согласно определению резольвентной матрицы $R(z)$ задачи продолжения $S(x)$ с $(-2\rho,2\rho)$ на $(-\infty,\infty)$, $\widetilde{u}(z)$ принадлежит кругу Вейля $W\{R(z)\}$. Так как, согласно теореме 3.2, резольвентная матрица $R(z)$ имеет вид (3.2I), отсюда и следует утверждение леммы.

Из леммы 3.2 следует интересующий нас критерий принадлежности функций $u(z)$ кругу Вейля множителя $B_0(z)=e^{-iz\rho J}$:

<u>Лемма 3.3</u>. Пусть неванлинновская функция $u(z)$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$u(iy)-i=o\left(e^{-2y(\rho-\delta)}\right),\ y\to+\infty,\ \forall\delta>0 \quad (3.24)$$

Тогда $u(z)$ входит в круг Вейля множителя $B_0(z)=e^{-iz\rho J}$

Утверждение леммы следует из леммы 3.2 после перехода к результатам дробно-линейного преобразования с матрицей коэффициентов $e^{-iz\mathcal{E}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix}$:

$$\tilde{u}(z) = e^{-iz\tilde{\mathcal{E}}_0}\{u(z)\} = \frac{u(z)}{-zu(z)+1}, \quad \tilde{u}_0(z) = e^{-iz\tilde{\mathcal{E}}_0}\{i\} = \frac{i}{-iz+1}$$

Характеристическое свойство (3.24) функций $u(z)$ круга Вейля $W\{B_0(z)\}$ приводит к следующему критерию отщепляемости от произвольной матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ слева множителя $B_0(z) = e^{-iz\rho\mathcal{J}}$:

<u>Лемма 3.4</u>. Пусть $\mathcal{Z}(z)\in\mathfrak{M}, \mathcal{Z}(0)=I$ – вещественная матрица функция экспоненциального типа L (3.16). И пусть $L \geq \rho > 0$. Для того, чтобы $\mathcal{Z}(z)$ допускала представление:

$$\mathcal{Z}(z) = e^{-iz\rho\mathcal{J}}\mathfrak{A}(z), \; \mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M}, \; \rho>0, \; \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

необходимо, чтобы каждая функция $u(z)$ из ее круга Вейля $W\{\mathcal{Z}(z)\}$ удовлетворяла (3.24), и достаточно, чтобы существовала хотя бы одна функция $u(z) \in W\{\mathcal{Z}(z)\}$, удовлетворяющая (3.24).

<u>Доказательство</u>. Если $\mathcal{Z}(z)$ имеет вид (3.25), то все функции ее круга Вейля $u(z)\in W\{\mathcal{Z}(z)\}$ входят в круг Вейля $W\{e^{-iz\rho\mathcal{J}}\}$, и значит удовлетворяют (3.24). Наоборот, если хотя бы одна функция $u(z) = u_1(z) \in W\{\mathcal{Z}(z)\}$ удовлетворяет (3.24), то из утверждений лемм 3.1 и 3.3, следует включение: $W\{\mathcal{Z}(z)\} \subseteq W\{e^{-iz\rho\mathcal{J}}\}$. Представление (3.25) следует теперь из теоремы 1.3.1 о соответствии между вкладываемостью кругов Вейля и делимостью в классе $\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Используя лемму 3.4 и формулы перехода (3.7), (3.9) и (2.20) от произвольного элементарного множителя e^{-izA}, $AJ=\overline{AJ}\geq 0$, $A^2\neq 0$ к множителю $e^{-iz\rho J}$, получаем общий критерий отщепляемости от матрицы-функции $\mathcal{Z}(z)$ множителя e^{-izA}.

Теорема 3.3. Пусть матрица-функция $\mathcal{Z}(z)\in\mathfrak{M}$ имеет экспоненциальный тип роста (3.16) $L\geq\rho>0$.

1. Для того, чтобы $\mathcal{Z}(z)$ допускала представление (3.25), необходимо и достаточно, чтобы отношение ее элементов $u(z)=b(z)/d(z)$ удовлетворяло условию (3.24) (Здесь

$$\mathcal{Z}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z)\\ c(z) & d(z)\end{bmatrix}).$$

2. Для того, чтобы $\mathcal{Z}(z)$ допускала представление:

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-izA}\mathfrak{A}(z),\ \mathfrak{A}(z)\in\mathfrak{M},\ A=\frac{\rho}{\operatorname{Im}\xi}\begin{bmatrix}\xi\bar{\xi} & \operatorname{Re}\xi\\ \operatorname{Re}\xi & 1\end{bmatrix}J,$$

$$\operatorname{Im}\xi>0,\quad A^2=\rho^2 I,\quad AJ\geq 0,$$

необходимо и достаточно выполнение совокупности двух условий:

а) $\lim\limits_{y\to+\infty} b(iy)/d(iy)=\xi\qquad(\operatorname{Im}\xi>0)$

б) элементы матрицы-функции

$$\tilde{\mathcal{Z}}(z)=\mathcal{U}^{-1}\mathcal{Z}(z)\mathcal{U}=\begin{bmatrix}\tilde{a}(z) & \tilde{b}(z)\\ \tilde{c}(z) & \tilde{d}(z)\end{bmatrix},\ \mathcal{U}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Im}\xi}}\begin{bmatrix}\operatorname{Im}\xi & \operatorname{Re}\xi\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\tilde{b}(iy)/\tilde{d}(iy)-i=o\left(e^{-2y(\rho-\delta)}\right),\ \forall\delta>0,\ y\to+\infty$$

Из теорем 3.3 и 3.1 вытекает следующая

Процедура восстановления дискретного произведения

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-izA_1}e^{-izA_2}\dots e^{-izA_n},\quad A_k\mathcal{J}=\overline{A_k\mathcal{J}}\geqslant 0 \quad (3.26)$$

<u>по матрице-функции</u> $\mathcal{Z}(z)$:

Пусть

$$\mathcal{Z}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z)\end{bmatrix}$$

Определим точку ξ_1 как предел

$$\xi_1=\lim_{y\to+\infty} b(iy)/d(iy) \quad (3.27)$$

Тогда, в зависимости от свойств ξ_1, матрица A_1 равна:

При $\operatorname{Im}\xi_1>0$,

$$A_1=\frac{\rho}{\operatorname{Im}\xi_1}\begin{bmatrix}\xi_1\bar{\xi}_1 & \operatorname{Re}\xi_1 \\ \operatorname{Re}\xi_1 & 1\end{bmatrix}\mathcal{J}\quad (A_1^2\neq 0,\ A_1\mathcal{J}\geqslant 0)$$

при $\xi_1=\bar{\xi}_1<\infty$ (3.28)

$$A_1=\rho\begin{bmatrix}\xi_1^2 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1\end{bmatrix}\mathcal{J}\qquad (A_1^2=0,\ A_1\mathcal{J}\geqslant 0)$$

при $\xi_1=\infty$, $A_1=\rho\begin{bmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Коэффициент ρ в (3.28) находится из соотношений:

В случае $\operatorname{Im}\xi_1>0$

$$\rho=\sup\{\ell:\ e^{2y\ell}[\tilde{b}(iy)/\tilde{d}(iy)-i]\to 0\ (y\to+\infty)\}$$

где

$$\begin{bmatrix}\hat{a}(z) & \tilde{b}(z)\\ \tilde{c}(z) & \tilde{d}(z)\end{bmatrix}=\frac{1}{\operatorname{Im}\xi_1}\begin{bmatrix}1 & -\operatorname{Re}\xi_1\\ 0 & \operatorname{Im}\xi_1\end{bmatrix}\mathcal{Z}(z)\begin{bmatrix}\operatorname{Im}\xi_1 & \operatorname{Re}\xi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

В случае $\xi_1 = \overline{\xi}_1 < \infty$ (3.29)

$$\rho = \lim_{y\to+\infty} \frac{\tilde{b}(iy)}{iy\tilde{d}(iy)}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{a}(z) & \tilde{b}(z) \\ \tilde{c}(z) & \tilde{d}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \xi_1 \end{bmatrix} \mathcal{Z}(z) \begin{bmatrix} \xi_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

В случае $\xi_1 = \infty$

$$\rho = \lim_{y\to+\infty} \frac{b(iy)}{iy\,d(iy)}, \quad \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} = \mathcal{Z}(z)$$

Рассматривая далее матрицу

$$\mathcal{Z}_1(z) = e^{izA_1}\mathcal{Z}(z) \quad (= e^{-izA_2} \cdots e^{-izA_n}) \tag{3.30}$$

и вновь пользуясь для матрицы $\mathcal{Z}(z) = \mathcal{Z}_1(z)$ формулами восстановления (3.27–3.29), находим матрицу A_2 в (3.30). И так далее вплоть до определения матрицы A_n. Таким образом, при помощи указанной процедуры, шаг за шагом, поочередно определяются по $\mathcal{Z}(z)$ все матрицы A_K в (3.36) (или, что то же самое, эрмитиан (I.2) канонической системы (I.4, I.5)).

ГЛАВА IУ. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ С ПОМОЩЬЮ НАБОРА СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Согласно теоремам В.П.Потапова ([I]) и Л.де Бранжа ([6]), произвольная вещественная целая $\mathcal{J}$ - внутренняя матрица-функция $\mathcal{Z}(z)$, $\mathcal{Z}(0)=I$, допускает единственное мультипликативное представление (подробнее об этих теоремах мы писали во введении):

$$\mathcal{Z}(z) = \int_0^{L} e^{-izH(t)dt} \tag{I.I}$$

$$H(t)\mathcal{J} \geq 0,\ iH(t) = \overline{iH(t)},\ Sp(H(t)\mathcal{J}) \equiv 1,\ H(t) \in L^1[0,L] \tag{I.2}$$

Представление (I.I) означает, что $\mathcal{Z}(z)$ является матрицей монодромии канонической системы

$$\mathcal{Z}(z) = Y(L,z) \tag{I.3}$$

$$\frac{d}{dt} Y(t,z) = -iz\, Y(t,z)H(t)\ ,\quad t \in [0,L] \tag{I.4}$$

$$Y(0,z) = I$$

с эрмитианом $H(t)\mathcal{J}$, удовлетворяющим (I.2).

Тем самым, теоремы В.П.Потапова и Л.де Бранжа показывают, что матрица монодромии является объектом, полностью определяющим каноническую систему.

Матрица $\mathcal{Z}(z)$, как спектральная характеристика канонической системы является <u>переопределенным</u> объектом (из соотношения симметрии (I.I.7) $\mathcal{Z}(z)\mathcal{J}\mathcal{Z}^*(\bar{z}) = \mathcal{J}$ видно, что элементы матрицы монодромии не являются независимыми величинами).

В этой главе мы параметризуем матрицу монодромии с помощью некоторого набора свободных параметров. В этот набор входят собственные значения периодической и антипериодической краевых задач и задачи Дирихле для канонической системы, а также некоторый набор чисел $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k \in \{-1,0,1\}$.

Образцом для такого выбора спектральных данных является рассмотренный в работах В.А.Марченко и И.В.Островского [17] , спектральный набор, характеризующий оператор Хилла.

Заметим, что предметом исследования в этой главе является именно параметризация матрицы монодромии. Здесь мы покажем, как по набору спектральных данных канонической системы построить ее матрицу монодромии, и тем самым сведем задачу построения канонической системы по спектральному набору к задаче восстановления этой системы по матрице монодромии. Вопрос восстановления самой канонической системы мы не рассматриваем.

Однако, если параметризованная матрица монодромии $\mathcal{Z}(z)$ дополнительно удовлетворяет условию

$$\mathcal{Z}(iy)J\mathcal{Z}^*(iy)-J \le Me^{2y\ell}I, \quad \ell=\lim_{r\to+\infty}\ \sup_{0\le\theta<2\pi}\frac{\ln\|\mathcal{Z}(re^{i\theta})\|}{r}$$

то, используя теорему 7.2(Re) главы II, по матрице $\mathcal{Z}(z)$ можно восстановить и вид канонической системы.

Для определения набора спектральных данных, аналогичного введенному в [17] , нам понадобятся собственные значения:

$$\text{(I)}\ \{\mu_{2k}^{\pm}\}; \quad (\text{II})\ \{\mu_{2k+1}^{\pm}\}; \quad (\text{III})\ \{\lambda_k\} \qquad (\text{I.5})$$

следующих краевых задач для канонической системы (I.4, I.2):

(I) периодической $\quad Y(t)\big|_{t=0} = Y(t)\big|_{t=L}$

(II) антипериодической: $Y(t)\big|_{t=0} = -Y(t)\big|_{t=L}$

и

(III) задачи Дирихле:

$$y_1(0) = y_1(L) = 0, \qquad Y(t) = [y_1(t), y_2(t)]$$

Запишем выражения для характеристических функций задач (I–III). Пусть, например, число μ является собственным значением краевой задачи (I.4)–(I). Тогда существует такой ненулевой вектор $Y_\mu(t)$ – решение системы (I.4), что

$$Y_\mu(0) = Y_\mu(L) = Y_\mu(0)\,\mathcal{W}(\mu)$$

где $\mathcal{W}(z) = (W_{jk})$ – матрица монодромии системы (I.4). Отсюда следует вырождение матрицы $I - \mathcal{W}(z)$ в точке $z = \mu$: $\det(I - \mathcal{W}(\mu)) = 0$. Учитывая, что $\det \mathcal{W}(z) = 1$, получаем:

$$(W_{11}(\mu) - 1)(W_{22}(\mu) - 1) - W_{12}(\mu)W_{21}(\mu) = 0; \; W_{11}(\mu) + W_{22}(\mu) = 2$$

Обозначим $u(z) = \frac{1}{2}(W_{11}(z) + W_{22}(z))$. Тогда собственные значения краевой задачи (I.4)–(I) – нули функции $\chi_1(z) = u(z) - 1$, то есть $\chi_1(z) = u(z) - 1$ – характеристическая функция краевой задачи (I.4)–(I). Аналогично, характеристические функции краевых задач (I.4)–(II), (I.4)–(III) равны: $\chi_2(z) = u(z) + 1$, $\chi_3(z) = W_{21}(z)$.

Таким образом, характеристические функции краевых задач (I–III):

$$\text{(I)}\ \chi_1(z) = u(z) - 1, \ \text{(II)}\ \chi_2(z) = u(z) + 1, \ \text{(III)}\ \chi_3 = W_{21}(z) \qquad (I.6)$$

где

$$\mathcal{W}(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix}, \quad u(z) = \frac{1}{2}\,Sp\,\mathcal{W}(z) = \frac{W_{11}(z) + W_{22}(z)}{2}$$

В спектральный набор канонической системы (I.4, I.2) кроме собственный значений (I.5) краевых задач (I–III) входит еще и последовательность $\{\sigma_k\}$:

$$\left\{ \sigma_k = \operatorname{Sign} V(\lambda_k),\ V(z) = \frac{W_{11}(z) - W_{22}(z)}{2} \right\} \tag{I.7}$$

Итак, спектральный набор канонической системы (I.4, I.2) – это

$$\{ \mu_k^{\pm},\ \lambda_k,\ \sigma_k \} \tag{I.8}$$

Формулы (I.5), (I.7) показывают, что набор (I.8) для канонической системы можно определить по ее матрице монодромии $\mathcal{W}(z)$:

$$\begin{aligned} &1^{\circ}.\ \{\mu_k^{\pm}\} \text{ – нули функции } U^2(z) - 1,\ U(z) = \frac{W_{11}(z) + W_{22}(z)}{2} \\ &2^{\circ}.\ \{\lambda_k\} \text{ – нули функции } W_{21}(z) \\ &3^{\circ}.\ \sigma_k = \operatorname{Sign} V(\lambda_k),\ V(z) = \frac{W_{11}(z) - W_{22}(z)}{2} \end{aligned} \tag{I.9}$$

Нашей целью является восстановление матрицы монодромии канонической системы по ее спектральному набору $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$. То есть, построение целой вещественной $\mathcal{J}$ – внутренней матрицы-функции $\mathcal{W}(z)$, $\mathcal{W}(0) = I$, такой, что для ее элементов выполняется (I.9).

В настоящей главе рассмотрены необходимые и достаточные условия, при которых $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ является спектральным набором канонической системы, и показано, что при определенных условиях нормировки с этим набором связывается единственная каноническая система.

Необходимые условия, которым удовлетворяет набор $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$

вытекают из результатов работы В.А.Марченко и И.В.Островского [17]. Достаточность этих условий следует из построения § 2 главы IУ и теоремы В.П.Потапова. Отметим, что при построении матрицы монодромии в § 2 мы существенно опирались на исследования М.Г.Крейна [16] и И.В.Островского [55].

Для того, чтобы сформулировать необходимые условия для набора спектральных данных $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$, отметим сейчас некоторые свойства собственных значений $\{\mu_k^{\pm}\}$ и $\{\lambda_k\}$.

Исключим из рассмотрений случай канонической системы (I.4, I.2) с постоянным вырожденным эрмитианом

$$H(t) \equiv \mathcal{E}, \quad t \in [0, L], \qquad \mathcal{E}J \geq 0, \ \mathcal{E}^2 = 0$$

Такой системе отвечает матрица монодромии

$$\mathcal{Z}(z) = I - iz\mathcal{E} = \mathcal{U}\begin{bmatrix} 1 & Lz \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{U}^{-1}, \ L > 0, \ \mathcal{U}J\mathcal{U}^* = J \qquad (I.10)$$

В этом вырожденном случае спектр периодической задачи составляет всю комплексную плоскость, а антипериодическая задача не имеет решений (что легко усмотреть из представления для матрицы монодромии (I.10)).

Не составляет труда вывести следующие свойства собственных значений (I.5):

1. Так как $z = 0$ – корень характеристических функций $\chi_1(z)$, $\chi_3(z)$ (I.6), то нумерацию собственных значений краевых задач (I), (III) можно выбрать так, что

$$\mu_0^- = \mu_0^+ = 0, \quad \lambda_0 = 0$$

2. Все собственные значения задач (I–III) вещественны:

$$\mu_k^{\pm} = \overline{\mu_k^{\pm}}, \quad \lambda_k = \overline{\lambda_k}$$

3. Собственные значения (I.5) удовлетворяют условию перемежаемости:

$$\ldots < \mu_{-1}^- \leqslant \lambda_{-1} \leqslant \mu_{-1}^+ < \mu_0^- = \lambda_0 = 0 = \mu_0^+ < \mu_1^- \leqslant \lambda_1 \leqslant \mu_1^+ < \ldots \quad (\pi)$$

Доказательство свойств 2,3 содержится в [19, 57]. Соотношение (π) можно также вывести, следуя рассмотрениям [17, 52]

Чтобы связать собственные значения (I.5) со специальными конформными отображениями (как это было сделано в [17]), напомним здесь понятие такого отображения.

Для этого рассмотрим в верхней полуплоскости области $E^+(h)$ вида:

$$\{\theta:\ s_1\pi < Re\,\theta < s_2\pi,\ Im\,\theta > 0\} \setminus \bigcup_{s_1<k<s_2} \{\theta:$$

$$Re\,\theta = k\pi;\ 0 < Im\,\theta \leqslant h_k\}$$

Здесь s_1, s_2 - целые числа (возможно, $s_1 = -\infty$, $s_2 = +\infty$). И рассмотрим совокупность всех функций $\theta^+(z)$, отображающих верхнюю полуплоскость на области E^+. Продолженные в нижнюю полуплоскость по принципу симметрии функции $\theta^+(z)$ будем обозначать $\theta(z)$. Класс всех таких функций обозначается через $\mathcal{R}$. Функции $\theta(z)$ отображают всю плоскость с горизонтальными разрезами $\{z:\ \mu_k^- \leqslant z \leqslant \mu_k^+,\ Im\,z = 0\}$ на область $E(h)$ - всю плоскость или полосу $\{\theta:\ s_1\pi < Re\,\theta < s_2\pi\}$ с вертикальными разрезами $\{\theta:\ Re\,\theta = k\pi,\ -h_k \leqslant Im\,\theta \leqslant h_k\}$.

Имеет место следующее утверждение ([17]):

<u>Утверждение</u> I ([17]). Произвольная целая вещественная функция $u(z)$, принимающая значения +1, -1 только на вещественной оси, допускает представление

$$u(z) = \cos\Theta(z) \tag{I.11}$$

где $\Theta(z) \in \mathcal{R}$. Наоборот, если $\Theta(z) \in \mathcal{R}$, то функция $u(z)$ (I.11) удовлетворяет указанным свойствам.

Обозначим через $\mathcal{R}_0$ класс функций $\Theta(z) \in \mathcal{R}$, таких, что $\Theta(\pm 0) = 0$.

Так как собственные значения $\{\mu_k^{\pm}\}$ вещественны, то функция $u(z)$ в (I.6) удовлетворяет условиям утверждения I, и значит, представима в виде $u(z) = \cos\Theta(z)$, $\Theta(z) \in \mathcal{R}_0$, а для чисел $\{\mu_k^{\pm}\}$ (собственных значений периодической и антипериодической краевых задач канонической системы) выполняются соотношения:

$$\Theta(\mu_k^{\pm}) = \pi k \pm 0$$

Из условия перемежаемости (π) следует, что на одном из берегов каждого разреза области $E(h)$ можно отметить точку h^*, такую, что $\Theta(\lambda_k) = h_k^*$, $\operatorname{Sign} \operatorname{Im} h_k^* = \sigma_k$.

Таким образом, <u>необходимое условие на спектральный набор</u>

$$\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\} \tag{I.12}$$

вытекающее из утверждения I, формируется так:

Существует область

$$E(h) = \{\Theta: \pi S_1 < \operatorname{Re}\Theta < \pi S_2\} \setminus \bigcup_{S_1 < k < S_2} \{\Theta: \operatorname{Re}\Theta = k\pi, -h_k \leq \operatorname{Im}\Theta \leq h_k\} \tag{I.13}$$

($h_0 = 0$, $-\infty \leq S_1 < 0 < S_2 \leq +\infty$) с отличными на ее разрезах точками h_k^* и функция $\Theta(z) \in \mathcal{R}_0$ (отображающая всю комплексную плоскость с горизонтальными разрезами на $E(h)$) такие, что набор спектральных данных задается равенствами:

$$\Theta(\mu_k^{\pm}) = \pi k \pm 0, \ \Theta(\lambda_k) = h_k^*, \ \sigma_k = \operatorname{Sign} \operatorname{Im} h_k^* \tag{I.14}$$

.

(при $-\infty < S_1$, надо также рассматривать $\mu^+_{S_1}: \Theta(\mu^+_{S_1}) = \pi S_1 + 0$, а при $S_2 < +\infty$, $\mu^-_{S_2}: \Theta(\mu^-_{S_2}) = \pi S_2 - 0$).

Оказывается (это мы покажем в § 2), что условия (I.I4) являются и достаточными для того, чтобы последовательности $\{\mu^{\pm}_K, \lambda_K, \sigma_K\}$ были спектральным набором для некоторой канонической системы.

Матрица монодромии $\mathcal{W}(z)$ (или, что то же самое, эрмитиан $H(t)\mathcal{J}$ канонической системы (I.4, I.2)) не определяется набором $\{\mu^{\pm}_K, \lambda_K, \sigma_K\}$ спектральных данных однозначно, а лишь с точностью до подобия. Этот произвол можно исключить, нормируя матрицу монодромии $\mathcal{W}(z)$ (и каноническую систему).

Лемма I.I. Набор $\{\mu^{\pm}_K, \lambda_K, \sigma_K\}$ спектральных данных, связанный с матрицей монодромии $\mathcal{W}(z)$ не меняется при преобразовании подобия $\mathcal{W}(z)$ с $\mathcal{J}$ - унитарной верхнетреугольной матрицей[I2)] $\mathcal{U}: \mathcal{U}\mathcal{J}\mathcal{U}^* = \mathcal{J}$:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(z) = \mathcal{U}\mathcal{W}(z)\mathcal{U}^{-1}, \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1/c & b/c \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad c = \bar{c}, \; b = \bar{b} \qquad (\text{I.I5})$$

Доказательство. Последовательность $\{\mu^{\pm}_K\}$ из (I.9) остается неизменной, так как при преобразовании подобия след матрицы сохраняется: $\widetilde{U}(z) = \frac{1}{2} Sp\, \widetilde{\mathcal{W}}(z) = \frac{1}{2} \mathcal{W}(z) = U(z)$. Собственные числа $\{\lambda_K\}$ не меняются, так как при верхнетреугольном преобразовании подобия элемент $W_{21}(z)$ матрицы $\mathcal{W}(z)$ только лишь умножается на константу c : $\widetilde{W}_{21}(z) = c\, W_{21}(z)$. Задающая знаки величин: $Sign(W_{11}(\lambda_K) - W_{22}(\lambda_K))$ последовательность σ_K остается неизменной, так как сейчас $\widetilde{W}_{11}(z) - \widetilde{W}_{22}(z) = W_{11}(z) - W_{22}(z) -$

I2) Отметим, что любая вещественная верхнетреугольная $\mathcal{J}$ - унитарная матрица $\mathcal{U}$ имеет вид (I.I5).

$-\,bW_{21}(z)$, а функция $W_{21}(\lambda_k)=0$. Лемма доказана.

Пусть теперь о матрице монодромии $\mathcal{Z}(z)$ известно, что от нее отщепляется слева $\mathcal{E}$ - множитель $b_0(z)=e^{-izp\mathcal{E}_0}$:

$$\mathcal{Z}(z)=e^{-izp\mathcal{E}_0}\mathcal{Z}_1(z),\ b_0(z)=e^{-izp\mathcal{E}_0}=\begin{bmatrix}1 & pz\\ 0 & 1\end{bmatrix},\mathcal{Z}_1(z)\in\mathcal{M} \quad (I.I6)$$

Отщепим слева от $\mathcal{Z}(z)$ этот множитель $b_0(z)$ и перенесем его направо: $\hat{\mathcal{Z}}(z)=\mathcal{Z}_1(z)e^{-izp\mathcal{E}_0}$, тогда

$$\hat{\mathcal{Z}}(z)=b_0(z)^{-1}\mathcal{Z}(z)b_0(z)\in\mathcal{M},\ b_0(z)=\begin{bmatrix}1 & pz\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ p>0 \quad (I.I7)$$

Так как $b_0(z)$ - <u>верхнетреугольная</u> $\mathcal{J}$ - внутренняя матрица-функция, то спектральный набор матрицы $\hat{\mathcal{Z}}(z)$ (I.I7) - тот же что и у $\mathcal{Z}(z)$. Мы приходим к следующей лемме:

<u>Лемма 2.I</u>. Пусть матрица-функция $\mathcal{Z}(z)\in\mathcal{M}$, $\mathcal{Z}(0)=I$ допускает представление (I.I6). Тогда матрицам $\mathcal{Z}(z)$ и $\hat{\mathcal{Z}}(z)$ (I.I7) соответствует один и тот же спектральный набор $\{\mu_k^{\pm},\lambda_k,\sigma_k\}$. ■

При помощи преобразований подобия (I.I5), (I.I7) будем нормировать матрицу $\mathcal{Z}(z)$ следующим образом:

I°. $$\frac{d}{dz}\mathcal{Z}(z)\Big|_{z=0}=\begin{bmatrix}0 & K\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad (I.I8)$$

Такая нормировка возможна в силу того, что матрица $i\mathcal{Z}'(0)\mathcal{J}\geq 0$ - эрмитово положительная, и значит, преобразованием подобия с матрицей $\mathcal{U}$ (I.I5) ее можно привести к виду $i\mathcal{Z}'(0)\mathcal{J}=\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Число K при этом не может задаваться произвольно.

2°. Будем считать, что от $\mathcal{Z}(z)$ не отщепляется слева множитель $b_0(z)=\begin{bmatrix}1 & pz\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $(\forall p>0)$ (этого можно добиться с помощью преобразования подобия (I.17)). Такое условие, в силу леммы II.3.3 означает, что

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{W_{11}(iy)}{iy\,W_{21}(iy)} = 0, \quad \mathcal{W}(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix} \qquad (I.19)$$

§ 2. Построение матрицы монодромии по спектральным данным

Теорема 2.I. Пусть последовательность чисел

$$\{\mu_k^{\pm},\ \lambda_k\ ,\ \sigma_k\} \qquad (2.I)$$

удовлетворяет условию: существует область $E^*(h)$ (I.I3) с отмеченными на ее разрезах точками h_k^* и функция $\theta(z) \in \mathcal{R}_0$, отображающая плоскость с горизонтальными разрезами на $E^*(h)$, такие, что $\theta(z)$ задает последовательности (2.I) по формулам (I.I4). Тогда (2.I) является спектральным набором для некоторой канонической системы. Матрица монодромии этой системы, нормированная условиями (I.20, I.2I), строится по $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ единственным образом.

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы построим целую вещественную $\mathcal{J}$ - внутреннюю матрицу-функцию

$$\mathcal{W}(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

такую, что ее элементы связаны с набором $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ соотношениями (I.9). Кроме того, $\mathcal{W}(z)$ должна удовлетворять условиям нормировки (I.I8), (I.I9).

Итак, пусть $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ - заданный набор, удовлетворяющий (I.I4). По утверждению I, функция $u(z)$ из (I.9) однозначно определяется функцией $\Theta(z)$ (I.I4):

$$u(z) = \cos\Theta(z)$$

При этом (согласно лемме I.I и замечанию I в [I7]) $u(z)$ - не выше экспоненциального типа роста и класса Картрайт. Отсюда следует еще одно представление для $u(z)$ (по теореме II из [56], стр.323):

$$u(z)+1=2\lim_{R\to+\infty}\prod_{|\mu^{\pm}_{2k+1}|<R}\left(1-\frac{z}{\mu^{-}_{2k+1}}\right)\left(1-\frac{z}{\mu^{+}_{2k+1}}\right)$$

По теореме И.В.Островского ([55]), из (I.I4) следует, что имеет смысл бесконечное произведение:

$$\varphi(z)=dz\lim_{R\to+\infty}\prod_{|\lambda_k|<R}{}'\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{2.3}$$

Причем, согласно [55] и теореме М.Г.Крейна ([56] , стр. 398), отношение $u(z)/\varphi(z)$ - неванлинновская функция при правильном выборе числа d .

Поскольку $\varphi(z)$ (2.3) имеет корнями последовательность $\{\lambda_k\}$ из (2.I), положим

$$W_{21}(z)=\varphi(z)$$

При этом постоянную d в (2.3) подберем из условия, согласованного с нормировочным соотношением (I.I8) $W_{21}'(0)=\varphi'(0)=-1$. (Отметим, что при таком выборе d, $u(z)/W_{21}(z)$ - неванлинновская функция).

Таким образом, мы построили элемент $W_{21}(z)$ искомой матрицы $\mathcal{W}(z)$ и сумму диагональных элементов:

$$2u(z) = W_{11}(z)+W_{22}(z) \tag{2.4}$$

Чтобы построить по этим величинам элементы $W_{11}(z)$ и $W_{22}(z)$, определим значения $W_{11}(\lambda_k)$, $W_{22}(\lambda_k)$ в точках λ_k. Из соотношения $\det \mathcal{B}(z)=1$ следует, что в точках λ_k должно выполняться равенство

$$W_{11}(\lambda_k)\,W_{22}(\lambda_k) = 1 \tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5) получаем:

$$\begin{aligned} W_{11}(\lambda_k) &= u(\lambda_k) + \sigma_k\sqrt{u^2(\lambda_k)-1} \\ W_{22}(\lambda_k) &= u(\lambda_k) - \sigma_k\sqrt{u^2(\lambda_k)-1} \end{aligned} \tag{2.6}$$

(знак σ_k перед радикалом определен соотношением (I.7): $\operatorname{Sign}(W_{11}(\lambda_k)-W_{22}(\lambda_k)) = \sigma_k$). Отметим, что из (I.I4) следует, что имеет место соотношение перемежаемости $(\mathcal{J})$, а из $(\mathcal{J})$ вытекает, что величины под радикалами в (2.6) положительны.

Обратимся теперь к общему представлению мероморфной неванлинновской функции (см.(П.6.3)). Для вещественных неванлинновских функций оно имеет вид:

$$f(z) = pz + q + \sum_k \frac{1+\lambda_k z}{\lambda_k - z}\,\varkappa_k, \quad \sum \varkappa_k < \infty, \tag{2.7}$$

$$\varkappa_k > 0, \quad p \geq 0, \quad q = \bar{q}$$

В частности, (2.7) справедливо для функции $f(z) = \dfrac{u(z)}{W_{21}(z)}$. Величины $\varkappa_k$ при этом равны:

$$\varkappa_k = -\frac{u(\lambda_k)}{W_{21}'(\lambda_k)}\,\frac{1}{1+\lambda_k^2} > 0 \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) следует, что

$$\sum_k \left| \frac{u(\lambda_k)}{W_{21}'(\lambda_k)}\,\frac{1}{1+\lambda_k^2} \right| < \infty \tag{2.9}$$

Поскольку в (2.6) $|W_{11}(\lambda_K)|, |W_{22}(\lambda_K)| \leq 2|u(\lambda_K)|$, то из (2.9) можно построить равномерно сходящиеся ряды:

$$\psi_1(z) = -\sum_K \frac{1+\lambda_K z}{\lambda_K - z} \frac{W_{11}(\lambda_K)}{W_{21}'(\lambda_K)} \frac{1}{1+\lambda_K^2}$$

$$\psi_2(z) = -\sum_K \frac{1+\lambda_K z}{\lambda_K - z} \frac{W_{22}(\lambda_K)}{W_{21}'(\lambda_K)} \frac{1}{1+\lambda_K^2} \qquad (2.10)$$

Из (2.6) следует, что $W_{11}(\lambda_K)/W_{21}'(\lambda_K)<0$, $W_{22}(\lambda_K)/W_{21}'(\lambda_K)<0$, и функции $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ – неванлинновские. Определим элементы $W_{11}(z)$ и $W_{22}(z)$ матрицы $\mathcal{W}(z)$ формулами

$$W_{11}(z) = (\psi_1(z)+q_1)W_{21}(z); \quad W_{22}(z) = (\psi_2(z)+q_2+p_2 z)W_{21}(z) \qquad (2.11)$$

Постоянные $q_1=\bar{q}_1$, $q_2=\bar{q}_2$, $p_2 \geq 0$ задаются равенствами:

$$W_{11}'(0)=0, \; W_{22}'(0)=0, \quad p_2 = \lim_{y\to+\infty} \frac{2u(iy)}{iyW_{21}(iy)}$$

Легко видеть, что определенные так элементы $W_{11}(z)$, $W_{22}(z)$ удовлетворяют всем нужным требованиям:

$$W_{11}(z)+W_{22}(z) = 2u(z), \quad \operatorname{Sign}(W_{11}(\lambda_K) - W_{22}(\lambda_K)) = \sigma_K$$

и при этом выполняются нормировочные соотношения (I.18),(I.19). Таким образом, мы построили элементы $W_{11}(z)$, $W_{22}(z)$, $W_{21}(z)$ искомой матрицы-функции $\mathcal{W}(z)$.

Элемент $W_{12}(z)$ определяется из равенства $\det \mathcal{W}(z) = 1$, откуда

$$W_{12}(z) = \frac{W_{11}(z)W_{22}(z)-1}{W_{21}(z)}$$

Из соотношения $W_{11}(\lambda_K)W_{22}(\lambda_K)=1$ следует, что $W_{12}(z)$ – целая функция.

Построение искомой матрицы-функции $\mathcal{W}(z)$ завершено. Остается доказать, что построенная матрица-функция $\mathfrak{Z}(z)$ $\mathcal{J}$- растягивает в верхней полуплоскости, $\mathfrak{Im}\, z > 0$.

Обратимся для этого к работе М.Г.Крейна [16] . Так как $u(z)/W_{21}(z)$ - неванлинновская функция, то из того факта, что функция $u(z)$ принадлежит классу Картрайт и предложения $\mathfrak{D}$ ([16], стр.305) следует, что и $W_{21}(z)$ - функция класса Картрайт.

Повторяя затем рассуждения, примененные М.Г.Крейном в [16] при доказательстве теоремы $\mathfrak{M}$, убеждаемся, что имеет место разложение:

$$\frac{1}{W_{21}(z)} = -\frac{1}{z} + q + z\sum_{k}\frac{1}{W_{21}'(\lambda_k)\lambda_k(z-\lambda_k)} \tag{2.17}$$

$$q = \bar{q}\,, \quad \sum_{k} 1/(W_{21}'(\lambda_k)(\lambda_k^2+1)) < \infty$$

(Представление (2.17) рассматривается и в работе [55]).

Используя разложение (2.17) и разложение в ряды (2.15), (2.16), (2.11), убеждаемся в справедливости неравенства:

$$\mathfrak{Im}\,\frac{W_{11}(z)}{W_{21}(z)}\;\mathfrak{Im}\,\frac{W_{22}(z)}{W_{21}(z)} - \left(\mathfrak{Im}\frac{1}{W_{21}(z)}\right)^2 \geqslant 0, \ \mathfrak{Im}\, z>0$$

Последнее неравенство вместе с условием $\mathfrak{Im}\,\frac{W_{11}(z)}{W_{21}(z)} \geqslant 0, \mathfrak{Im}\, z>0$ обеспечивает, согласно лемме 3 ([16], стр.309) $\mathcal{J}$ - растягиваемость матрицы-функции $\mathfrak{Z}(z)$.

Таким образом, мы построили целую $\mathcal{J}$ - внутреннюю матрицу-функцию $\mathfrak{Z}(z)$. По теореме В.П.Потапова, $\mathfrak{Z}(z)$ является матрицей монодромии канонической системы (1.2, 1.4). При этом, в силу выполнения (1.9), числа $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ (2.1) являются спектральным набором для этой системы. Теорема доказана.

Выясним теперь, какие условия на эрмитиан $H(t)\mathcal{J}$ канонической системы (I.4, I.2) накладывают нормировочные соотношения (I.18), (I.19) для ее матрицы монодромии $\mathcal{Z}(z)$.

При преобразовании подобия (I.15) матрицы $\mathcal{Z}(z)$ с $\mathcal{J}$-унитарной матрицей $\mathcal{U}$, матрица $H(t)$ в (I.4, I.2) также претерпевает преобразование подобия:

$$H(t) \longrightarrow \frac{1}{K(t)} \mathcal{U} H(t) \mathcal{U}^{-1} = \tilde{H}(t) \qquad (2.18)$$

(множитель $1/K(t)$, $K(t) = Sp(\mathcal{U}H(t)\mathcal{U}^{-1}\mathcal{J})$ в (2.18) обеспечивает для нового эрмитиана $\tilde{H}(t)\mathcal{J}$ выполнение условия: $Sp(\tilde{H}(t)\mathcal{J}) \equiv 1$. Из соотношения $i\mathcal{Z}'(0)\mathcal{J} = \int_0^L H(t)\mathcal{J}dt$ видно, что условие (I.18) для матрицы монодромии $\mathcal{Z}(z)$ обеспечивает следующую нормировку эрмитиана канонической системы:

$$\int_0^L H(t)\mathcal{J}dt = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.19)$$

(этой нормировки можно добиться посредством преобразования (2.18) с верхнетреугольной $\mathcal{J}$-унитарной матрицей $\mathcal{U}$). При этом, из равенства $Sp(H(t)\mathcal{J}) \equiv 1$, число $K = L-1$, $L > 1$.

Чтобы выяснить смысл второго нормировочного условия (I.19), обратимся к периодической системе, связанной с системой (I.4, I.2):

$$\frac{d}{dt}\hat{Y}(t,z) = -iz\,\hat{Y}(t,z)\,H(t) \qquad (2.20)$$

$$\hat{H}(t) = H(t) \quad (t \in [0, L]), \quad \hat{H}(t+L) = \hat{H}(t) \qquad (2.21)$$

Будем рассматривать системы (2.20) на интервалах $[t_0, t_0+L]$. При этом их эрмитиан на $[t_0, t_0+L]$ определяется из (2.21).

Из леммы 1.2 следует, что если матрица $H(t)$ каноничеокой системы (1.4, 1.2) является на некотором интервале $(0, a)$, $0<a<L$ постоянной матрицей, равной $\mathcal{E}_0=\begin{bmatrix}0&i\\0&0\end{bmatrix}$: $H(t)\equiv\mathcal{E}, \forall t\in(0,a)$, то спектральный набор $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ для систем (2.20), рассматриваемых на интервалах $[0, L]$ и $[t_0, t_0+L]$, где $t_0\in(0,a)$ — один и тот же.

С тем, чтобы матрица монодромии $\mathcal{Z}(z)$ системы (1.4, 1.2) удовлетворяла условию (1.19), следует считать, что в начале интервала $[0, L]$ матрица $H(t)$ не является постоянной матрицей, равной $\mathcal{E}_0$:

$$\overline{\exists} a: \quad (0<a<L), \ \forall t\in(0,a), \ H(t)\equiv\mathcal{E}_0=\begin{bmatrix}0&i\\0&0\end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

(этого можно добиться переходя, в случае необходимости, от системы 1.4, 1.2) к системе (2.20), (2.21), рассматриваемой на интервале $[t_0, t_0+L]$).

Обращаясь теперь к теореме де Бранжа, утверждающей, что с каждой матрицей монодромии $\mathcal{Z}(z)$ связана <u>единственная</u> каноническая система (1.4, 1.2), приходим к следствию теоремы 2.1:

Для заданного набора $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$, удовлетворяющего (1.14), существует лишь единственная каноническая система (1.4, 1.2), для которой выполняются условия нормировки (2.18), (2.22), такая, что $\{\mu_k^{\pm}, \lambda_k, \sigma_k\}$ есть ее спектральный набор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В.П. Мультипликативная структура J - нерастягивающих матриц-функций. - Тр.Моск. матем. об-ва, 1955, т.4, с.125-236.
2. Гинзбург Ю.П. О мультипликативных представлениях J - нерастягивающих оператор-функций. I. - Матем.исследования.Кишинев, 1967, т.2, вып.2, с.52-83.
3. Гинзбург Ю.П. О мультипликативных представлениях J - нерастягивающих оператор-функций. II. - Матем.исследования. Кишинев, 1967, т.2, вып.3, с.20-51.
4. Ефимов А.В., Потапов В.П. J - растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей. - Успехи матем.наук, 1973, т.28, вып.1, с.65-130.
5. Аров Д.З. Об одной интерполяционной задаче и индефинитном произведении Бляшке-Потапова. - Тезисы докладов. Школа по теории операторов в функц.простр. - Минск, 1982, с.14-15.
6. L. de Branges. Hilbert Spaces of Entire Functions. - N. Y., Prentice Hall, 1968. - 339p.
7. Марченко В.А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка. - Докл. АН СССР, 1950, т.72,№3, с.457-460.
8. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния. - Докл. АН СССР, 1966, т.167, №6, с.1219-1222.
9. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. I.- Теория функций, функ. анализ и их приложения. Харьков, 1978, вып.30, с.90-101.

10. Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач ... П. Теория функций, функ. анализ и их приложения. Харьков, 1979, вып.31, с.102-109.

11. Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля. - Докл. АН СССР, 1951, т.76, № 1, с.21-24.

12. Крейн М.Г. Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот. Докл. АН СССР, 1951, т.76, № 3, с.345-348.

13. Крейн М.Г. Об обратных задачах для неоднородной струны. - Докл. АН СССР, 1952, т.82, с.669-672.

14. Крейн М.Г. Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности. - Докл.АН СССР,1955, т.105. № 4, с.637-640.

15. Крейн М.Г. К теории акселерант и S - матриц канонических дифференциальных систем. - Докл. АН СССР, 1956, т.111, № 6, с.1167-1170.

16. Крейн М.Г. О неопределенном случае краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале $(0, \infty)$. - Изв. АН СССР, сер.матем. 1952, т.16, № 4, с.293-324.

17. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла. - Мат.сборник, 1975, т.97, № 4, с.540-606.

18. Крейн М.Г. Об обратных задачах теории фильтров и λ -зон устойчивости. - Докл. АН СССР, 1953, т.58, №5, с.708-710.

19. Крейн М.Г. Основные положения теории λ - зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. - В кн.: Памяти А.А. Андронова. - М., Из-во АН СССР, 1955, с.413-498.

20. Гохберг И.П., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложение.М.:Наука,1967, 508 с.

21. Михайлова И.В. Использование геометрической интерпретации для получения мультипликативного представления $\mathcal{J}$ - внутренней матрицы-функции. - В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. К.:Наук.думка, 1983, с.101-117.

22. Михайлова И.В. О соответствии между двумя классами целых $\mathcal{J}$ - внутренних матриц-функций. - Докл. АН УССР. Сер.А, 1983, № 4, с.26-29.

23. Михайлова И.В. Исследование мультипликативного представления одного подкласса целых $\mathcal{J}$ - внутренних матриц-функций. -Харьков, 1984. - 100 с. Рукопись представлена Физико-технич.ин-том низких температур АН УССР. Деп. в ВИНИТИ 29 апреля 1984, №2805-84 ДЕП.

24. Михайлова И.В. Решение обратной спектральной задачи для канонической системы. - Харьков, 1984. - 28 с. Рукопись представлена Физико-технич.ин-том низких температур АН УССР. Деп. в ВИНИТИ 27 ноября 1984 г., №7571-84 ДЕП.

25. Потапов В.П. Бесконечные произведения и мультипликативный интеграл. - В кн.: Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов. - К.: Наук.думка, 1983, с.101-117.

26. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика. - Докл. АН АрмССР, 1974, т.59, с.17-32.

27. Крейн М.Г., Шмульян Ю.Л. О дробно-линейных преобразованиях с операторами коэффициентами. - Математические исследования. Кишинев, 1967, т.2, вып. 3(5), с.64-98.

28. Шмульян Ю.Л. Дробно-линейные преобразования верхней операторной полуплоскости. - Известия вузов. Математика, 1969, № 1, с.97-105.

29. Шмульян Ю.Л. О дробно-линейных преобразованиях с оператор-

ными коэффициентами и операторных шарах. - Математический сборник, 1968, т.77, №3, с.335-353.

30. Шмульян Ю.Л. Дробно-линейные преобразования в пространстве с инволюцией. - Известия вузов. Математика, 1969, № 2, с.117-126.

31. Ковалишина И.В. $\mathcal{J}$ - растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори. - Докл. АН АрмССР, 1974, т.59, № 3, с.129-135.

32. Ковалишина И.В. $\mathcal{J}$ - растягивающие матрицы-функции и проблема моментов. - Докл. АН АрмССР, 1974, т.60, №1,с.3-10.

33. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка.- Труды Моск. математич. об-ва, 1956, т.5, с. 203 - 268.

34. Шмульян Ю.Л. Теория отношений и пространства с индефинитной метрикой. - Функциональный анализ и его приложения, 1976, т.10, вып.1, с.67-72.

35. Потапов В.П. Дробно-линейные преобразования матриц. - В кн.: Исследования по теории операторов и их приложения. К.:Наук. думка, 1979, с.75-91.

36. Крейн М.Г. К теории целых функций экспоненциального типа.- Изв.АН СССР, Сер. матем., 1947, т.11, №4, с.309-326.

37. Голинский Л.Б., Михайлова И.В. Гильбертовы пространства целых функций как объект $\mathcal{J}$ - теории. - Харьков, 1980. - Физико-технич. ин-т низк.температур АН УССР, препринт 28-80.

38. Аров Д.З. Реализация матриц-функций по Дарлингтону. - Изв. АН СССР, Сер.матем., 1973, т.37, №6, с.1299-1331.

39. Аров Д.З. Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости. - Сиб.мат.ж., 1975, т.16, № 3, с.440-463.

40. Симакова Л.А. О плюс-матрицах-функциях ограниченной характеристики. - Матем. исследования. Кишинев, 1974, т.9, вып. 2 (32), с.149-171.

41. Кац И.С., Крейн М.Г. R - функции - аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя. - В кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Дополнение I. - М.: Мир, 1968, с.629-647.

42. Кацнельсон В.Э. Континуальные аналоги теоремы Гамбургера - Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1981, № 36, с.31-48.

43. Артеменко А.П. Эрмитово положительные функции и позитивные функционалы. I. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1984, № 41, с.3-17.

44. Артеменко А.П. Эрмитово положительные функции и позитивные функционалы. II. - Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1984, № 42, с.3-15.

45. Крейн М.Г., Лангер Г.К. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ними проблемы продолжения. - Докл. АН СССР, 1981, т.258, с.537-540.

46. Крейн М.Г. О проблеме продолжения эрмитово положительных непрерывных функций. - Докл. АН СССР, 1940, т.26, №1, с.17-22.

47. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - К.: Наук.думка, 1965.-800 с.

48. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Интегральные представления эрмитово положительных функций. - Харьков, 1981. - 119 с. Рукопись представлена Харьк.ин-том ж.-д.трансп. Деп. в ВИНИТИ 19 июня 1981, № 2984-81.

49. Кацнельсон В.Э. Методы $\mathcal{J}$ - теории в интерполяционных задачах. Часть I. - Рукопись представлена Харьк.госуниверситетом. Деп. в ВИНИТИ II января 1983 г., № 171-83.

50. Кацнельсон В.Э. Регуляризация основного матричного неравенства задачи о разложении положительно определенного ядра на элементарные произведения.- Докл. АН УССР, Сер.А, 1984, № 3, с. 6-8.

51. Крейн М.Г. Об одном замечательном классе эрмитовых операторов.- Докл. АН СССР, 1944, т.34, № 5, с. 191-195.

52. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.- К.: Наук. думка, 1977.- 332 с.

53. Сахнович Л.А. Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке.- Успехи матем.наук, 1980, т.35, вып.4(214), с.62-129.

54. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач.- Изв. АН СССР, Сер.матем., 1983, т.47, с. 455 - 497.

55. Островский И.В. Об одном классе целых функций.- Докл. АН СССР, 1976, т.229, № 1, с. 39-41.

56. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций.- М.: Гостехиздат, 1956. - 632 с.

57. Крейн М.Г. О характеристической функции $A(\lambda)$ линейной канонической системы дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами.- Прикл. матем. и механика, 1957, т.21, № 3, с.320-329.

58. Redheffer R.M. On a Certain Linear Fractional Transformation.- Journal of Mathematics and Physics, 1960, v. 39, N 1, p. 269-286.

59. Захар-Иткин М.Х. Матричные уравнения Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований.- Успехи матем. наук, 1973, т. 28, вып.3(171), с. 83-120.