# PREISSCHRIFTEN

GEKRÖNT UND HERAUSGEGEBEN VON DER

## FÜRSTLICH JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT

ZU LEIPZIG

L: MYRBERG: ÜBER SYSTEME ANALYTISCHER FUNKTIONEN, WELCHE EIN ADDITIONSTHEOREM BESITZEN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1922

# ÜBER SYSTEME ANALYTISCHER FUNKTIONEN WELCHE EIN ADDITIONS-THEOREM BESITZEN

VON

P. J. MYRBERG
DOZENT AN DER UNIVERSITÄT HELSINGFORS
(FINNLAND)

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1922

# Einleitung.

**1.** Wir sagen, daß irgendein System analytischer Funktionen

$$(1) \qquad \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

der $m$ unabhängigen komplexen Veränderlichen ein algebraisches (rationales) Additionstheorem besitzt, wenn diese Funktionen Gleichungen der Form

$$(2) \qquad \varphi_\nu(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_m + v_m) = f_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m); \quad \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m)\}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, deren rechte Seiten algebraische (rationale) Funktionen der $2n$ Funktionen

$$(3) \qquad \varphi_\mu(u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad \varphi_\mu(v_1, v_2, \ldots, v_m) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

sind, bei beliebigen Werten der unabhängigen Variabeln $u_i$, $v_i$.

Wir sagen ferner, daß das Funktionensystem (1) ein verallgemeinertes algebraisches (rationales) Additionstheorem besitzt, wenn die Funktionen $f_\nu$ neben den Funktionen (3) auch Ableitungen derselben algebraisch (rational) enthalten.

Betreffs der Funktionen mit algebraischem Additionstheorem gilt in dem Spezialfalle $n = m$ der folgende von **Weierstraß** ausgesprochene und von **Painlevé**[1]) bewiesene Satz.

**Satz von Weierstraß.** Wenn ein System von $n$ unter einander unabhängigen analytischen Funktionen von $n$ Veränderlichen ein algebraisches Additionstheorem besitzt, so können sie als algebraische Funktionen von Abelschen Funktionen mit demselben Periodensystem oder als Degenerierte solcher Funktionen ausgedrückt werden.

Die vorliegende Abhandlung gibt die Lösung der allgemeinen Aufgabe in demselben Umfang, in dem es durch den Satz von Weierstraß im Spezialfalle $n = m$ geschehen ist. Dieser Satz ist für die folgende Darstellung von wesentlicher Bedeutung, indem unsere Betrachtungen als eine Zurückführung des allgemeinen Falles auf den von Weierstraß behandelten Spezialfall angesehen werden können.

Neben dem Satze von Weierstraß werden wir von den Resultaten **Poincarés** Gebrauch machen, welche er in seiner Arbeit „Sur une classe nouvelle des transcendantes uniformes“[2]) veröffentlicht hat.

---

1) P. Painlevé, Sur les fonctions qui admettent un théoreme d'addition. (Acta mathematica 27. [1903].)

2) Journal de mathématique, IV série, VI (1890).

Den Gegenstand der Poincaréschen Untersuchungen bilden die Funktionensysteme mit rationalem Multiplikationstheorem:

$$\varphi_\nu(\varkappa u) = \overline{R}_\nu(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

wo

$$|\varkappa| > 1$$

ist. Jedes System mit einem Additionstheorem hat offenbar unendlich viele Multiplikationstheoreme derselben Art, während das Umgekehrte im allgemeinen nicht stattfindet.

Den Beweis für die Existenz analytischer Lösungen bei dem Gleichungssystem (4) gibt Poincaré vermittels des Majorantenprinzipes, wobei die Rationalität der Funktionen $\overline{R}_\nu$ jedoch keine wesentliche Rolle spielt.

Die Lösungen des Gleichungssystems (4) sind in der ganzen Ebene eindeutige, meromorphe Funktionen, welche bis auf eine Anzahl Parameter

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_h \qquad (h \leqq n)$$

bestimmt sind (deren Anzahl in den hier betrachteten Fällen gleich $n$ ist). Jene Lösungen sind zugleich eindeutige meromorphe Funktionen der Größen

$$u_1 = \beta_1 u, \quad u_2 = \beta_2 u, \quad \ldots, \quad u_h = \beta_h u$$

und besitzen als solche das Multiplikationstheorem

$$\varphi_\nu(\varkappa u_1, \varkappa u_2, \ldots, \varkappa u_h) = \overline{R}_\nu(\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_h), \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_h)).$$

In der vorliegenden Arbeit werden wir uns ausführlich nur mit rationalen Additionstheoremen und Funktionen einer Veränderlichen beschäftigen. Wie aber in den letzten Kapiteln dargelegt wird, behalten unsere Methoden bei den allgemeinsten algebraischen Additionstheoremen und bei beliebiger Anzahl unabhängiger Veränderlichen ungeändert ihre Gültigkeit.

## I. Funktionen einer Veränderlichen mit rationalem Additionstheorem.

**3.** Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionalgleichungen der Form

$$(5)\qquad \varphi_\nu(u+v) = R_\nu\{\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u);\ \varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots, \varphi_n(v)\}, \quad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, n)}$$

wo $R_\nu$ rationale Funktionen bezeichnen. Diese Gleichungen werden wir auch kurz

$$(5')\qquad \varphi_\nu(u+v) = R_\nu\{\varphi(u);\ \varphi(v)\} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, n)}$$

schreiben.

Unter der Voraussetzung, daß (5) ein analytisches Lösungssystem besitzt, können wir die rationalen Funktionen

$$(6)\qquad R_\nu\{x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n\} = R_\nu\{x;\ y\}$$

durch eine rationale Transformation gewissen Bedingungen unterwerfen.

Es seien

$$a,\quad b,\quad c = a + b$$

irgend drei reguläre Stellen der Funktionen $\varphi(u)$, welche die Eigenschaft haben, daß die Ausdrücke $R_\nu\{\varphi(u);\ \varphi(v)\}$ für keines der Wertpaare

$$u = a,\ v = b;\quad u = c,\ v = -a;\quad u = c,\ v = -b$$

unendlich oder unbestimmt werden. Wir setzen dann

$$(7)\qquad \varphi_\nu(u+c) - \varphi_\nu(c) = \psi_\nu(u) \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, n)}$$

und erhalten

$$(8)\quad \psi_\nu(u+v) = \varphi_\nu(u+a+v+b) - \varphi_\nu(c) = R_\nu\{\varphi(u+a);\ \varphi(v+b)\} - \varphi_\nu(c).$$

Ferner ist

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varphi_\nu(u+a) &= \varphi_\nu(u+c+(-b)) = R_\nu\{\psi(u) + \varphi(c);\ \varphi(-b)\}, \\ \varphi_\nu(v+b) &= \varphi_\nu(v+c+(-a)) = R_\nu\{\psi(v) + \varphi(c);\ \varphi(-a)\}. \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, daß das aus dem vorausgesetzten Lösungssystem

$$(10)\qquad \varphi_1(u),\quad \varphi_2(u),\quad \ldots,\quad \varphi_n(u)$$

von (5) hergeleitete Funktionssystem (7) ein rationales Additionstheorem

$$(11)\qquad \psi_\nu(u+v) = R_\nu'\{\psi(u);\ \psi(v)\} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, n)}$$

besitzt. Diese neuen Funktionen (7) haben den Nullpunkt $u = 0$ als reguläre Stelle.[1]) Ferner nehmen die Funktionen

$$(12)\qquad R_\nu'(x;\ y) \equiv R_\nu'(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

---

1) und verschwinden in diesem Punkte.

wenn sämtliche Variabeln $x$ und $y$ verschwinden, endliche bestimmte Werte an. Denn es ist nach (8) und (9)

$$R_\nu'(0,0) = R_\nu\{R\{\varphi(c);\ \varphi(-b)\};\ \ R\{\varphi(c);\ \varphi(-a)\}\} - \varphi_\nu(c),$$

wo

$$R\{\varphi(c);\ \varphi(-b)\},\quad R\{\varphi(c);\ \varphi(-a)\}$$

in bestimmter Form auftreten und bzw. gleich

$$\varphi(a),\quad \varphi(b)$$

sind; man hat daher für $R_\nu'(0,0)$ den in bestimmter Form auftretenden Wert

$$R_\nu\{\varphi(a),\ \varphi(b)\} - \varphi_\nu(c) = 0.$$

Die rationalen Funktionen (12) können somit in Reihen nach positiven Potenzen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ entwickelt werden, wo keine konstanten Glieder auftreten.

**4.** Nach (11) ist

$$\psi_\nu(u) = R_\nu'(\psi(u), 0),\quad \psi_\nu(v) = R_\nu'(0, \psi(v)).$$

Anders gesagt, die Gleichungen

$$x_\nu - R_\nu'(x, 0) = 0,\quad y_\nu - R_\nu'(0, y) = 0 \tag{13}$$

sind erfüllt für

$$x_\nu = \psi_\nu(u),\quad y_\nu = \psi_\nu(v). \tag{14}$$

Unter derselben Bedingung ist also nach (11)

$$\psi_\nu(u+v) = R_\nu'(x, y) = x_\nu + y_\nu + r_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{15}$$

wo

$$r_\nu(x, y) = R_\nu'(x, y) - R_\nu'(x, 0) - R_\nu'(0, y). \tag{16}$$

In den Variabeln $x$, $y$ gilt identisch

$$r_\nu(x, 0) = 0,\quad r_\nu(0, y) = 0,$$

woraus hervorgeht, daß in den Entwicklungen der Funktionen (16) nach Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ jedes Glied sowohl ein $x$ als ein $y$ enthält.

Vertauschen wir in (15) $u$ und $v$, und somit nach (14) $x$ und $y$, und addieren wir zu (15) die hierbei erhaltene Gleichung, so bekommen wir

$$\psi_\nu(u+v) = x_\nu + y_\nu + \bar{r}_\nu(x, y),$$

wo

$$\bar{r}_\nu(x, y) = \tfrac{1}{2}\{r_\nu(x, y) + r_\nu(y, x)\}$$

ist. Die Funktionen $\bar{r}_\nu(x, y)$ bleiben somit unverändert, wenn man die Variablenreihen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ miteinander vertauscht.

Die durch (7) definierten Funktionen $\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u)$ besitzen somit das rationale Additionstheorem

$$\psi_\nu(u+v) = \psi_\nu(u) + \psi_\nu(v) + \bar{r}_\nu(\psi(u), \psi(v)). \tag{17}$$

Indem wir unsere ursprünglichen Bezeichnungen wieder einführen, können wir die bisherigen Resultate im folgenden Satz zusammenfassen:

**Satz.** Jedem Lösungssystem des gegebenen rationalen Additionstheorems entspricht ein Funktionensystem, das ein Additionstheorem der Form

(17') $\overset{\bullet}{\varphi}_\nu(u+v) = R_\nu\{\varphi(u);\ \varphi(v)\} = \varphi_\nu(u) + \varphi_\nu(v) + r_\nu(\varphi(u);\ \varphi(v))$
$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$

besitzt, wo $r_\nu(x, y)$ rationale Funktionen der $2n$ Variabeln $x_i$, $y_i$ bezeichnen, die den Nullpunkt als reguläre Stelle haben und den Bedingungen

$$r_\nu(x, y) = r_\nu(y, x); \quad r_\nu(x, 0) = 0, \quad r_\nu(0, y) = 0$$

genügen.

**5.** Es werde also angenommen, daß die Gleichungen (17') ein analytisches Lösungssystem

(18) $$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

besitzen, wo die Funktionen (18) für $u = 0$ sämtlich regulär sind, in diesem Punkte verschwinden und sich nicht sämtlich auf Konstanten reduzieren.

Es seien $u$, $v$, $w$ voneinander unabhängige Variabeln und

(19) $$x_\nu = \varphi_\nu(u), \quad y_\nu = \varphi_\nu(v), \quad z_\nu = \varphi_\nu(w).$$

Wir bilden die Differenzen

$$\begin{aligned}\varrho_\nu(x, y, z) &= \varphi_\nu(\overline{u+v}+w) - \varphi_\nu(u+\overline{v+w}) = \\ &= R_\nu\{\varphi(u+v);\ \varphi(w)\} - R_\nu\{\varphi(u);\ \varphi(v+w)\},\end{aligned}$$

welche mit Rücksicht auf (5) rationale Funktionen der $3n$ Variabeln

(20) $$x_i, \quad y_i, \quad z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sind:

(21) $$\varrho_\nu(x, y, z) = R_\nu\{R\{x; y\}; z\} - R_\nu\{x; R\{y, z\}\}.$$

Offenbar müssen die Gleichungen

(22) $$\varrho_\nu(x, y, z) = 0$$

in den Variabeln $u$, $v$, $w$ identisch bestehen, wenn die Funktionen (19) eingeführt werden.

Wenn nun irgendeine der rationalen Funktionen (21) in bezug auf die Variabeln (20) nicht identisch verschwindet, so hat man wenigstens eine algebraische Gleichung zwischen den Funktionen (18). Um diese Tatsache, die für das Folgende von grundlegender Bedeutung ist, vollständig aufzuklären, beweisen wir den folgenden

**Hilfssatz.** Es sei

(23) $$Q(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m}; x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m}; \ldots; x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm}) = 0$$

irgendeine algebraische Gleichung zwischen den $m \cdot n$ Veränderlichen

(24) $$x_{\nu\mu} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, n\end{pmatrix}$$

welche identisch erfüllt wird, wenn

(25) $$x_{\nu\mu} = \varphi_\nu(u_\mu)$$

gesetzt wird, wo $\varphi_\nu$ analytische Funktionen und $u_\mu$ unabhängige Variabeln bezeichnen. Dann bestehen zwischen den Funktionen $\varphi$ eine oder mehrere algebraische Gleichungen.

Wenn ferner

(26) $$P_\varkappa(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

ein vollständiges System irreduzibler, untereinander unabhängiger Gleichungen dieser Art ist, so daß jede algebraische Relation zwischen den Funktionen $\varphi$ eine Folgerung von (26) ist, so ist die Gleichung (23) eine Folgerung der Gleichungen

$$P_\varkappa(x_{1\mu}, x_{2\mu}, \ldots, x_{n\mu}) = 0. \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, q \end{pmatrix} \tag{27}$$

Zuerst bemerken wir, daß, wenn $q \geq n$ ist, die Funktionen $\varphi$ sich auf Konstanten reduzieren, so daß unser Satz offenbar erfüllt ist.

Wenn $q < n$ ist, beweisen wir den ersten Teil des Hilfssatzes durch vollständige Induktion in bezug auf den Index $m$. Wir ordnen das Polynom $Q$ nach Potenzen der Größen

$$x_{\nu\mu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 2, 3, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{28}$$

wobei die Koeffizienten Polynome von

$$x_{11}, \quad x_{21}, \quad \ldots, \quad x_{n1}$$

sind. Es sei

$$Q_1(x_{11} x_{21}, \ldots, x_{n1}) \tag{29}$$

ein nicht identisch verschwindendes unter diesen Polynomen.

Wir substituieren jetzt

$$x_{11} = \varphi_1(u_1), \quad x_{21} = \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad x_{n1} = \varphi_n(u_1).$$

Wenn das Polynom (29) hierbei in $u_1$ identisch verschwindet, ist unsere Behauptung richtig. Wenn nicht, geben wir $u_1$ einen solchen speziellen Wert, daß $Q_1 \neq 0$ wird, und erhalten dann aus $Q$ ein Polynom der Größen (28), das in bezug auf diese Größen nicht identisch verschwindet, wohl aber, wenn

$$x_{\nu\mu} = \varphi_\nu(u_\mu) \qquad \begin{pmatrix} \mu = 2, 3, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

gesetzt wird.

Wenn unsere Behauptung für $m - 1$ gilt, so gilt sie also auch für $m$; da die Gültigkeit derselben für $m = 1$ evident ist, haben wir somit bewiesen, daß, unter den gemachten Annahmen, zwischen den Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ wenigstens eine algebraische Gleichung besteht.

Der Beweis des zweiten Teiles unseres Satzes ist ebenso einfach. Wegen der Unabhängigkeit der Gleichungen (26) definieren dieselben $q$ der Funktionen $\varphi$, sagen wir $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$, als algebraische Funktionen der $n - q$ übrigen $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_n$, zwischen denen aber, nach unseren Voraussetzungen, keine algebraische Beziehung stattfindet. Hiernach können wir zwischen den Gleichungen (23) und (27) die Größen

$$x_{1\mu}, \quad x_{2\mu}, \quad \ldots, \quad x_{q\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

eliminieren und erhalten in dieser Weise eine algebraische Gleichung

$$\overline{Q}(x_{q+1,1}, \ldots, x_{q+1,m}; \ldots; x_{n,1}, \ldots, x_{n,m}) = 0.$$

Wenn entgegen unserer Behauptung (23) nicht aus (27) folgte, wäre diese Gleichung keine Identität. Dagegen wird sie von den Funktionen (25) $(\nu = q + 1, \ldots, n)$ sicher erfüllt. Nach der ersten Hälfte unseres Satzes würde aber hieraus folgen, daß zwischen den Funktionen $\varphi_{q+1}, \ldots, \varphi_n$ wenigstens eine algebraische Gleichung besteht, was mit dem oben Gesagten im Widerspruch steht.

Unser Hilfssatz ist hiermit vollständig bewiesen.

6. Im allgemeinen bestehen nach dem Obigen zwischen den Funktionen des vorausgesetzten Lösungssystems (18) von (17′) gewisse algebraische Gleichungen. Es sei wieder (26) ein vollständiges System irreduzibler, untereinander unabhängiger Gleichungen dieser Art, aus denen somit jede algebraische Beziehung zwischen den genannten Funktionen eine Folge ist. Weil sich nach unserer Voraussetzung die Funktionen (18) nicht sämtlich auf Konstanten reduzieren, ist

$$q < n.$$

Auf die explizite Bestimmung der Gleichungen (26) werden wir später zurückkommen.

Nach § 5 werden die Gleichungen

$$R_\nu\{R\{x;\, y\};\, z\} - R_\nu\{x;\, R\{y, z\}\} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

identisch erfüllt, wenn man die Substitution (19) ausführt. Andererseits ist offenbar für alle Werte von $u$ und $v$

$$P_\varkappa(\varphi_1(u+v),\, \varphi_2(u+v),\, \ldots,\, \varphi_n(u+v)) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

und wenn wir hier für die Funktionen $\varphi(u+v)$ ihre Ausdrücke (17′) substituieren, finden wir, daß auch die Gleichungen

$$P_\varkappa(R_1\{x;\, y\},\, R_2\{x;\, y\},\, \ldots,\, R_n\{x;\, y\}) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q) \tag{31}$$

von den Funktionen (19) identisch befriedigt werden.

Vermöge unseres Hilfssatzes schließen wir hieraus folgenden allgemeinen

**Satz.** Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines analytischen, für $u = 0$ regulären Funktionensystemes mit dem Additionstheorem (17′) ist die Existenz einer Anzahl $q$ $(0 \leqq q < n)$ untereinander unabhängiger algebraischer Gleichungen

$$P_\varkappa(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q) \tag{32}$$

derart, daß sowohl die Gleichungen (30) als (31) eine Folgerung der Gleichungen

$$\begin{aligned} P_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ P_\varkappa(y_1, y_2, \ldots, y_n) &= 0 \\ P_\varkappa(z_1, z_2, \ldots, z_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q) \tag{33}$$

sind.

7. Wir behaupten jetzt, daß die im obigen Satze genannte Bedingung auch hinreichend ist.

Die Gleichungen (32) mögen z. B. die Größen $t_{p+1}, \ldots, t_n$ als Funktionen von $t_1, t_2, \ldots, t_p$ $(p = n - q)$ bestimmen:

$$t_\nu = T_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_p) \equiv T_\nu(t). \qquad (\nu = p+1, \ldots, n) \tag{34}$$

Man kann durch geeignete Wahl der Größen $a, b, c$ in (7) stets erreichen, daß die algebraischen Funktionen (34) an der Stelle $t = 0$ regulär sind.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} R_\nu\{x_1, x_2, \ldots, x_p,\, T_{p+1}(x), \ldots, T_n(x);\, y_1, y_2, \ldots, y_p,\, T_{p+1}(y), \ldots, T_n(y)\} \\ = S_\nu\{x_1, x_2, \ldots, x_p;\, y_1, y_2, \ldots, y_p\} = S_\nu\{x;\, y\} \end{aligned} \tag{35}$$

und bemerken sofort, daß wegen der Symmetrie von $R\{x; y\}$

$$S_\nu\{x; y\} \equiv S_\nu\{y, x\}$$

ist. Nach (17) besitzen dann die Funktionen $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_p(u)$ das algebraische Additionstheorem

$$(36) \qquad \varphi_\nu(u+v) = S_\nu\{\varphi(u); \varphi(v)\}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

woraus für $v = u$ das Multiplikationstheorem

$$(37) \qquad \varphi_\nu(2u) = S_\nu\{\varphi(u); \varphi(u)\} = 2\varphi_\nu(u) + A_\nu\{\varphi(u)\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

hervorgeht, wo $A_\nu$ eine im Nullpunkt reguläre algebraische Funktion bezeichnet, deren Reihenentwicklung mit Gliedern zweiten oder höheren Grades beginnt.

Auf das Gleichungssystem (37) sind nun die Poincaréschen Resultate in der S. 1 genannten Arbeit anwendbar. Das fragliche Multiplikationstheorem wird in allgemeinster Weise durch ein System analytischer, in der Umgebung des Nullpunktes regulärer analytischer Funktionen

$$(38) \qquad \varphi_\nu(u) = \beta_\nu u \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

befriedigt, wo die Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ unbestimmte Parameter bezeichnen. Wenn

$$(39) \qquad \beta_i u = u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

gesetzt wird, gehen die Funktionen (38) in analytische Funktionen

$$(40) \qquad \varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

der $p$ unabhängigen Veränderlichen (39) über, und sie besitzen als solche das algebraische Multiplikationstheorem

$$(41) \qquad \varphi_\nu(2u_1, 2u_2, \ldots, 2u_p) = 2\varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_p) + A_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p)\} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, p).$$

8. Wir werden jetzt folgenden Satz beweisen:

**Satz.** Das Funktionensystem (40) besitzt das algebraische Additionstheorem

$$(42) \qquad \varphi_\nu(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_p+v_p) = S_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p); \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_p)\} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Wir zeigen zunächst, daß die Gleichungen

$$(43) \qquad S_\nu\{S\{x; y\}; z\} = S_\nu\{x; S\{y; z\}\}$$

in den Variabeln

$$x_i, \quad y_i, \quad z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

identisch erfüllt sind.

In der Tat ergibt sich aus unseren Voraussetzungen (Nr. 6), daß, zugleich mit (32), wo für $t$ sukzessiv $x, y, z$ zu setzen ist, auch die Gleichungen

$$R_\nu\{x; y\} = T_\nu(R_1\{x; y\}, R_2\{x; y\}, \ldots, R_p\{x; y\}), \quad (\nu = p+1, \ldots, n)$$

auf Grund des Gleichungssystems (31) bestehen. Mit Rücksicht hierauf und aus (35) schließt man sofort, daß die $p$ ersten Beziehungen (30) die Identitäten (43) zur Folge haben.

Aus den Gleichungen (43) und

$$S_\nu\{x; y\} \equiv S_\nu\{y, x\}$$

ergibt sich das Resultat, daß die Ausdrücke

$$S_\nu\{S\{x;y\};z\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

in bezug auf die drei Variablenreihen $x$, $y$, $z$ symmetrisch sind.

9. Wir setzen jetzt

$$\varphi_\nu(t) = \varphi_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_p) = \sum a_{(\lambda)} t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2}, \ldots, t_p^{\lambda_p}. \tag{44}$$

Es seien

$$S_\nu\{\varphi(u); \varphi(v)\} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \{u, v\}_\varkappa, \tag{45}$$

$$S_\nu\{S\{\varphi(u); \varphi(v)\}; \varphi(w)\} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \{u, v, w\}_\varkappa \tag{45'}$$

die nach homogenen Gliedern steigender Ordnung $\varkappa$ geordneten Reihenentwicklungen der betreffenden Funktionen. Die Ausdrücke

$$\{u, v, w\}_\varkappa, \quad \{u, v\}_\varkappa$$

sind symmetrisch in bezug auf ihre Variabelnsysteme, und es ist, wegen der Identität $S_\nu\{x; 0\} = x_\nu$,

$$\{u, v\}_1 = u_1 + v_1; \quad \{u, v\}_\varkappa = \{u, v, 0\}_\varkappa; \quad \{u, 0\}_\varkappa = \sum_{\Sigma\lambda=\varkappa} a_{(\lambda)} u_1^{\lambda_1}, \ldots, u_p^{\lambda_p}. \tag{46}$$

Wir werden, durch Anwendung vollständiger Induktion, beweisen, daß sich allgemein $\{u, v\}_\varkappa$ auf eine homogene Funktion $\varkappa$ter Ordnung der $p$ Variabeln

$$u_i + v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

reduziert.

Wir nehmen also an, unsere Behauptung sei wahr für $\varkappa < n > 1$. Nach der dritten Gleichung (46) ist dann

$$\{u, v\}_\varkappa = \sum_{\Sigma\lambda=\varkappa} a_{(\lambda)} (u_1 + v_1)^{\lambda_1} (u_2 + v_2)^{\lambda_2} \ldots (u_p + v_p)^{\lambda_p} \tag{47}$$

für $\varkappa = 1, 2, \ldots, n - 1$. Weil nach Nr. 7 $S_\nu\{x; y\}$ in der Umgebung des Nullpunktes eine Darstellung der Form

$$S_\nu\{x, y\} = x_\nu + y_\nu + A_\nu\{x; y\} \tag{48}$$

besitzt, wo $A_\nu$ eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe bezeichnet, deren jedes Glied sowohl ein $x$ als ein $y$ enthält, so ergibt sich durch Vergleichung der homogenen Glieder $n$ter Ordnung der beiden Seiten der Gleichung (45') eine Gleichung der Form

$$\{u, v, w\}_n = \{u, v\}_n + g_n\{\{u, v\}_\varkappa, w\}, \tag{49}$$

wo $g_n$ eine ganze Funktion von $w$ und

$$\{u, v\}_1, \quad \{u, v\}_2, \quad \ldots, \quad \{u, v\}_{n-1}$$

bezeichnet. Wegen (47) ist also

$$\begin{aligned} \{u, v, w\}_n = \{u, v\}_n &+ \sum b_{\lambda,\mu} (u_1 + v_1)^{\lambda_1} \ldots (u_p + v_p)^{\lambda_p} w_1^{\mu_1} \ldots w_p^{\mu_p} \\ &+ \sum a_{(\lambda)} w_1^{\lambda_1} \ldots w_p^{\lambda_p}, \end{aligned} \tag{50}$$

wo in einem und demselben Gliede weder alle $\lambda$ noch alle $\mu$ gleichzeitig verschwinden können.

**10.** Wir gruppieren jetzt die Glieder der mittleren Summe der rechten Seite von (50), indem wir die Gesamtheit der Glieder, für welche

$$\lambda_i + \mu_i = \nu_i \tag{51} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, in derselben Gruppe $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ zusammenfassen. Bei jeder Vertauschung der Größensysteme $u, v, w$ werden, wegen der Symmetrie von $\{u, v, w\}_n$, die Glieder einer Gruppe untereinander einfach vertauscht.

Es sei

$$b_{\lambda,\mu}(u_1 + v_1)^{\lambda_1}(u_2 + v_2)^{\lambda_2} \ldots (u_p + v_p)^{\lambda_p} w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \ldots w_p^{\mu_p} \tag{52}$$

ein Glied der Gruppe $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$. Es sei ferner etwa $\lambda_\varkappa > 0$ und also $\mu_\varkappa < \nu_\varkappa$. Das Glied (52) enthält u. a. den Bestandteil

$$b_{\lambda,\mu}\lambda_\varkappa \mu_\varkappa v_1^{\lambda_1} \ldots v_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} v_\varkappa^{\lambda_\varkappa - 1} v_{\varkappa+1}^{\lambda_{\varkappa+1}} \ldots v_p^{\lambda_p} w_1^{\mu_1} \ldots w_p^{\mu_p}, \tag{53}$$

welcher durch Vertauschung der Größenreihen $u$ und $w$ in einen Teil eines gewissen zu derselben Gruppe gehörigen Gliedes übergehen muß. Dieses Glied ist, wenn wir den Koeffizienten desselben mit $b_{\nu_\varkappa}$ bezeichnen

$$b_{\nu_\varkappa}(u_1 + v_1)^{\nu_1} \ldots (u_{\varkappa-1} + v_{\varkappa-1})^{\nu_{\varkappa-1}}(u_\varkappa + v_\varkappa)^{\nu_\varkappa - 1}(u_{\varkappa+1} + v_{\varkappa+1})^{\nu_{\varkappa+1}} \ldots (u_p + v_p)^{\nu_p} w_\varkappa. \tag{54}$$

Der Ausdruck (53) kann somit auch in der Form [1])

$$b_{\nu_\varkappa}\binom{\nu_1}{\lambda_1} \ldots \binom{\nu_{\varkappa-1}}{\lambda_{\varkappa-1}}\binom{\nu_\varkappa - 1}{\lambda_\varkappa - 1}\binom{\nu_{\varkappa+1}}{\lambda_{\varkappa+1}} \ldots \binom{\nu_p}{\lambda_p} \cdot u_\varkappa \cdot v_1^{\lambda_1} \ldots v_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} v_\varkappa^{\lambda_\varkappa - 1} v_{\varkappa+1}^{\lambda_{\varkappa+1}} \ldots v_p^{\lambda_p} w_1^{\mu_1} \ldots w_p^{\mu_p} \tag{55}$$

geschrieben werden, woraus sich zwischen den Koeffizienten die Beziehung

$$\nu_\varkappa b_{\lambda,\mu} = \left\{\prod_{i=1}^{p}\binom{\nu_i}{\lambda_i}\right\} b_{\nu_\varkappa} \tag{56}$$

ergibt.

Zur Untersuchung der Abhängigkeit der $p$ Konstanten $b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_p}$ voneinander betrachten wir die folgenden zwei Glieder der Klasse $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$:

$$b_{\nu_1}(u_1 + v_1)^{\nu_1 - 1}(u_2 + v_2)^{\nu_2} \ldots (u_p + v_p)^{\nu_p},$$

$$b_{\nu_\varkappa}(u_1 + v_1)^{\nu_1} \ldots (u_{\varkappa-1} + v_{\varkappa-1})^{\nu_{\varkappa-1}}(u_\varkappa + v_\varkappa)^{\nu_\varkappa - 1}(u_{\varkappa+1} + v_{\varkappa+1})^{\nu_{\varkappa+1}} \ldots (u_p + v_p)^{\nu_p} w_\varkappa.$$

Diese Glieder enthalten bzw. die Bestandteile

$$b_{\nu_1}\nu_\varkappa u_\varkappa v_1^{\nu_1 - 1} v_2^{\nu_2} \ldots v_{\varkappa-1}^{\nu_{\varkappa-1}} v_\varkappa^{\nu_\varkappa - 1} v_{\varkappa+1}^{\nu_{\varkappa+1}} \ldots v_p^{\nu_p} w_1,$$

$$b_{\nu_\varkappa}\nu_1 u_1 v_1^{\nu_1 - 1} v_2^{\nu_2} \ldots v_{\varkappa-1}^{\nu_{\varkappa-1}} v_\varkappa^{\nu_\varkappa - 1} v_{\varkappa+1}^{\nu_{\varkappa+1}} \ldots v_p^{\nu_p} w_\varkappa,$$

welche durch Vertauschung der Variablenreihen $u, w$ ineinander übergehen müssen. Man erhält dadurch die Relationen

$$\frac{b_{\nu_\varkappa}}{\nu_\varkappa} = \frac{b_{\nu_1}}{\nu_1} \; (= C_\nu). \tag{57} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$$

---

1) Wir bedienen uns hier der Bezeichnung $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots n}$. Wenn ein $\nu_\mu$ und somit auch $\lambda_\mu$ Null ist, hat man einfach $\binom{\nu_\mu}{\lambda_\mu} = 1$ zu setzen.

Aus (56) und (57) folgt nun

$$b_{\lambda,\mu} = C_\nu \prod_{i=1}^{p} \binom{\nu_i}{\lambda_i}.$$

Hieraus geht aber hervor, daß die Summe der Glieder der Gruppe $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ gleich

$$C_\nu \{\prod_{i=1}^{p} (u_i + v_i + w_i)^{\nu_i} - \prod_{i=1}^{p} (u_i + v_i)^{\nu_i} - \prod_{i=1}^{p} w_i^{\nu_i}\}$$

ist.

**11.** Aus dem Vorhergehenden ergibt sich nach (50) für $\{u, v, w\}_n$ eine Darstellung der Form

(58) $$\{u, v, w\}_n = \{u, v\}_n + \sum c_{(\lambda)} (u_1 + v_1)^{\lambda_1} (u_2 + v_2)^{\lambda_2} \ldots (u_p + v_p)^{\lambda_p} + \sum d_{(\lambda)} w_1^{\lambda_1} w_2^{\lambda_2} \ldots w_p^{\lambda_p} + f_n(u + v + w).$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\{u, v\}_n + \sum c_{(\lambda)} (u_1 + v_1)^{\lambda_1} \ldots (u_p + v_p)^{\lambda_p} = \psi(u, v)$$
$$\sum d_{(\lambda)} w_1^{\lambda_1} \ldots w_p^{\lambda_p} = \chi(w),$$

ist somit nach (58) der Ausdruck $\psi(u, v) + \chi(w)$ eine symmetrische Funktion der Größenreihen $u, v, w$, so daß folglich

$$\psi(u, v) + \chi(w) = \psi(u, w) + \chi(v) = \psi(v, w) + \chi(u).$$

Für $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0$ folgt aus der ersten dieser Gleichungen, weil $\chi(0) = 0$ ist,

(59) $$\psi(u, v) = \psi(u, 0) + \chi(v)$$

und aus der zweiten

$$\psi(u, 0) - \chi(u) = \psi(v, 0) - \chi(v) = \text{Konst.}$$

Da $\psi(0, 0) = \chi(0) = 0$, ist diese Konstante gleich Null, woraus folgt: $\psi(u, 0) = \chi(u)$. Die Gleichung (59) gibt aber dann

$$\psi(u, v) = \chi(u) + \chi(v)$$

oder

(60) $$\{u, v\}_n = -\sum c_{(\lambda)} (u_1 + v_1)^{\lambda_1} (u_2 + v_2)^{\lambda_2} \ldots (u_p + v_p)^{\lambda_p} + \sum d_{(\lambda)} (u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_p^{\lambda_p} + v_1^{\lambda_1} v_2^{\lambda_2} \ldots v_p^{\lambda_p}).$$

Wir kehren jetzt zu unserem Multiplikationstheorem

$$\varphi_\nu(2u_1, 2u_2, \ldots, 2u_p) = 2\varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_p) + A_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p)\} \equiv S_\nu\{\varphi(u); \varphi(u)\}$$

zurück, dem die Reihen (44) genügen. Man erhält hieraus allgemein (vgl. (45) und (46)):

$$\{u, u\}_n = \{2u, 0\}_n$$

und alsdann aus (60)

$$(2^n - 2) \sum d_{(\lambda)} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_p^{\lambda_p} = 0,$$

welche Gleichung, weil $n > 1$ vorausgesetzt ist, nur unter den Bedingungen $d_{(\lambda)} = 0$ in den Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_p$ identisch bestehen kann.

Die Gleichung (60) gibt dann

(61) $$\{u, v\}_n = -\sum c_{(\lambda)} (u_1 + v_1)^{\lambda_1} (u_2 + v_2)^{\lambda_2} \ldots (u_p + v_p)^{\lambda_p},$$

wobei nach (46)

(62) $$-c_{(\lambda)} = a_{(\lambda)}$$

ist. Die Nr. 9 ausgesprochene Behauptung ist hiermit bewiesen.

Nach (45), (61) und (62) ist somit für alle Werte der Größenreihen $u, v, w$

$$S_\nu\{\varphi(u); \varphi(v)\} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty}\{u, v\}_\varkappa = \sum a_{(\lambda)}(u_1+v_1)^{\lambda_1}\ldots(u_p+v_p)^{\lambda_p} = \varphi_\nu(u+v).$$

Die Lösungen des Gleichungssystems (41) des Multiplikationstheorems genügen daher dem Gleichungssystem (42) des zugeordneten Additionstheorems. Der in Nr. 8 ausgesprochene Satz ist hiermit bewiesen.

**12.** Es erübrigt noch zu zeigen, daß das Funktionensystem

(63) $$\varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_p), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

welches durch Adjunktion der $n-p$ algebraischen Funktionen

(64) $$\varphi_{p+1} = T_{p+1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p), \ldots, \varphi_n = T_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$$

zu den $p$ ersten Funktionen (63) erhalten wird, dem Gleichungssystem

(65) $$\varphi_\nu(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_p+v_p) = R_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p); \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_p)\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt.

Betreffs der $p$ ersten Gleichungen ist die Behauptung ohne weiteres evident. Was die anderen Gleichungen betrifft, so bemerken wir, daß wegen der Gleichungen (32), denen die Funktionen

$$\varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_p), \quad \varphi_\nu(v_1, v_2, \ldots, v_p) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, nach (31) die Gleichungen

(66) $$P_\varkappa(R_1\{\varphi(u); \varphi(v)\}, R_2\{\varphi(u); \varphi(v)\}, \ldots, R_n\{\varphi(u); \varphi(v)\}) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

und daher, nach dem oben Gesagten, auch die Gleichungen

(67) $$P_\varkappa(\varphi_1(u+v), \ldots, \varphi_p(u+v), R_{p+1}\{\varphi(u); \varphi(v)\}, \ldots, R_n\{\varphi(u); \varphi(v)\}) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

gültig sind. Weil aber andererseits die Gleichungen

(68) $$P_\varkappa(\varphi_1(u+v), \varphi_2(u+v), \ldots, \varphi_n(u+v)) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

identisch erfüllt sind, so folgt daraus das Bestehen der $n-p=q$ letzten Gleichungen (65).

Die Gültigkeit des Additionstheorems (65) ist hiermit bewiesen. Zugleich läßt sich, wegen der Rationalität des betreffenden Additionstheorems, der Schluß ziehen, daß die Funktionen

(63) $$\varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

für alle endlichen Werte eindeutige meromorphe Funktionen sind.

Nun sind die $p$ Funktionen

(69) $$\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_p), \quad \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_p), \quad \ldots, \quad \varphi_p(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

der $p$ unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_p$ nach der Form ihrer Reihenentwicklungen (Nr. 7) voneinander unabhängig. Wir können daher auf dieselben den in der Einleitung zitierten Satz von Weierstraß anwenden und haben das Resultat, daß die Funktionen (69) und somit auch die $n-p$ von ihnen algebraisch abhängigen Funktionen

(69′) $\varphi_{p+1} = T_{p+1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p), \ldots, \varphi_n = T_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$

algebraische Funktionen Abelscher Funktionen oder Degenerierte solcher Funktionen sind. Aus der Eindeutigkeit der Funktionen (69) und (69′) folgt aber dann, daß auch diese Funktionen selbst Abelsche Funktionen bzw. Degenerierte derselben sind.

Indem wir gemäß (39) wieder $u$ als unabhängige Variable einführen, gelangen wir zum folgenden

**Satz.** Jedes dem rationalen Additionstheorem (17′) genügende Funktionensystem wird, unter den im Satze Nr. 6 genannten Voraussetzungen, aus den Abelschen Funktionen

$$\varphi_\nu(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_p u) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

der $p$ Variabeln $\beta_i u$ mit demselben Periodensystem bzw. aus ihren Degenerierten durch die Spezialisierung der Konstanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ erhalten.

**13.** Über die gegenseitige Beziehung der allgemeinen Lösungssysteme des Additionstheorems (17′) und des zugeordneten Multiplikationstheorems

(70) $$\varphi_\nu(2u) = R_\nu\{\varphi(u); \varphi(u)\} = 2\varphi_\nu(u) + r_\nu\{\varphi(u); \varphi(u)\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

können aus dem Vorhergehenden folgende Schlüsse gezogen werden.

Nach Poincaré besitzt die allgemeine Lösung der Gleichungen (70) die Form

$$\varphi_\nu(u) = \beta_\nu u + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wo die $n$ Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sämtlich als arbiträre Parameter auftreten. In den oben betrachteten Funktionen (69), welche auch ein Lösungssystem von (70) bilden, sind die entsprechenden Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ gleichfalls arbiträre Parameter, wogegen die Koeffizienten $\beta_{p+1}, \ldots, \beta_n$ der ersten Potenz von $u$ in den folgenden Funktionen (69′) sich wegen der Beziehungen (69′) als lineare homogene Funktionen von $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ ergeben:

(71) $$\beta_{p+\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{p} m_{\lambda,\varkappa}\beta_\varkappa. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-p)$$

Da nun die Lösungen von (70) eindeutig bestimmt sind, sobald die Werte von $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ gegeben sind, schließen wir hieraus das folgende Resultat:

Die allgemeinsten Funktionen, die das Additionstheorem (17′) besitzen, werden, unter den Nr. 6 genannten Bedingungen, aus den allgemeinen Lösungen des Systems (70) erhalten, wenn man zwischen den $n$ Parametern $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, die in diesen auftreten, die linearen Relationen (71) aufstellt.

**14.** Wir wollen jetzt, von dem Gleichungssystem (17′) ausgehend, auf die Bestimmung der algebraischen Gleichungen (32) näher eingehen.

Indem wir zunächst auf die Bedingungen (31) keine Rücksicht nehmen, betrachten wir nur diejenigen unter den gesuchten irreduziblen Gleichungen (32), die zum Bestehen der Gleichungen (30) notwendig und hinreichend sind. Es seien

(72) $$P_\varkappa(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \varrho_0 \leqq \varrho)$$

diese Gleichungen, wo für $t$ sukzessiv $x$, $y$, $z$ zu setzen sind. Diese Gleichungen können stets so gewählt werden, daß ihre Gradzahlen unterhalb einer von den Funktionen $\varrho(x, y, z)$ abhängigen Grenze $r$ liegen, deren Bestimmung eine algebraische Aufgabe ist, die wir hier nicht näher behandeln werden.

Wir nehmen nun $q_0$ irgendwie $< n$ an und setzen

$$P_x(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \sum C_{(\lambda)}^{(x)} t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \ldots t_n^{\lambda_n}, \tag{73}$$

wo die rechten Seiten allgemeine ganze Funktionen $r$ten Grades mit unbestimmten Koeffizienten bezeichnen. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{gathered} P_x(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad P_x(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad P_x(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, \\ \varrho_\nu(x, y, z) = 0 \end{gathered} \quad \begin{pmatrix} x = 1, 2, \ldots, q_0 \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{74}$$

und drücken die Bedingung aus, daß die $n$ zuletztgeschriebenen Gleichungen eine Folge der $3q_0$ ersten Gleichungen sind. Wir erhalten in dieser Weise eine Anzahl algebraischer Gleichungen zwischen den unbestimmten Koeffizienten.

Es sind jetzt zwei Fälle möglich. Entweder können diese Gleichungen nur durch die Annahme, daß alle $C_{(\lambda)}^{(x)} = 0$ sind, befriedigt werden, oder es sind auch aus nicht lauter Nullen bestehende Lösungen vorhanden. Im ersten Falle ist die Unmöglichkeit der gemachten Annahme über die Größe der Zahl $q_0$ dargetan, im zweiten Falle dagegen bestimmt jedes Lösungssystem $C_{(\lambda)}^{(x)}$ ein Gleichungssystem (72), welches den aufgestellten Forderungen genügt. Wir geben der Zahl $q_0$ der Reihe nach alle Werte von 1 bis $n - 1$ und haben daher ein Verfahren zur expliziten Aufstellung der Gleichungen (72) vermittels einer endlichen Anzahl algebraischer Operationen.

**15.** Wir berücksichtigen jetzt die Bedingungen (31) und bilden zuerst die Gleichung

$$P_1(R_1\{x; y\}; R_2\{x; y\}, \ldots, R_n\{x; y\}) = 0. \tag{75}$$

Man hat hier zwischen zwei verschiedenen Fällen zu unterscheiden. Entweder ist die Gleichung (75) eine Folge der Gleichungen

$$P_x(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad P_x(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (x = 1, 2, \ldots, q_0) \tag{76}$$

oder es ist dies nicht der Fall. Im ersten Falle lassen wir die Gleichung (75) beiseite. Im zweiten Falle adjungieren wir zum Gleichungssystem (72) eine oder mehrere Gleichungen, bis ein Gleichungssystem erhalten wird, aus welchem die Gleichung (75) als eine Folge hergeleitet werden kann. Man hat wie früher eine obere Grenze für die Gradzahl der gesuchten Gleichungen, und diese Gleichungen können daher vermittels algebraischer Operationen gefunden werden.

Die nächsten Schritte bestehen in der sukzessiven Bildung der übrigen Gleichungen

$$P_x(R_1\{x; y\}, R_2\{x; y\}, \ldots, R_n\{x; y\}) = 0 \qquad (x = 1, 2, \ldots, q_0) \tag{77}$$

und ihrer Behandlung in der oben geschilderten Weise, indem man jedoch stets nicht nur die Gleichungen (72), sondern auch die Gesamtheit der schon zu ihnen adjungierten Gleichungen berücksichtigt. Es seien

$$P_x(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \qquad (x = q_0 + 1, q_0 + 2, \ldots, q_1) \tag{78}$$

die so erhaltenen neuen Gleichungen. Man fahre danach mit der Bildung der Gleichungen

$$P_\varkappa(R_1\{x;y\},\, R_2\{x;y\},\, \ldots,\, R_n\{x;y\}) = 0 \quad (\varkappa = q_0+1, q_0+2, \ldots, q_1)$$

fort, indem man untersucht, ob diese Gleichungen eine Folgerung von (72) und (78) bilden oder nicht, und man adjungiere im letzten Falle eine Anzahl neuer Gleichungen zu (72) und (78). Durch endlich viele derartige Schritte gelangt man schließlich entweder zu einem oder mehreren Gleichungssystemen

$$(32) \qquad P_\varkappa(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

welche die Eigenschaft haben, daß sowohl die Gleichungen (30) als (31) eine Folgerung der für $t = x, y, z$ geschriebenen Gleichungen (32) sind, und aus jedem solchen System ergibt sich nach Nr. 13 ein von gewissen Parametern abhängiges Lösungssystem von (17′); oder aber man findet, daß für keinen Wert $q < n$ ein derartiges System (32) existiert, und in diesem Falle besitzt das System (17′) kein Lösungssystem, das sich nicht auf Konstanten reduziert.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß nicht jedes in oben angegebener Weise gefundene Lösungssystem eine allgemeine Lösung zu sein braucht. Wenn nämlich die zu zwei Werten $q_1$ und $q_2$ gehörigen Gleichungssysteme (32) die Eigenschaft haben, daß sämtliche Gleichungen des letzteren Systems in dem erstgenannten System vorkommen, so ist die zum ersteren Gleichungssystem geordnete Lösung als eine partikuläre Lösung in der letzteren Lösung enthalten.

**16.** Durch explizite Aufstellung der Gleichungen (32) ist zugleich die Darstellung der Differentialgleichungen, denen die Abelschen Funktionen (40) genügen, auf algebraischem Wege möglich. Wenn nämlich in den Gleichungen (42) die Entwicklungen

$$\varphi_\nu(u+v) = \varphi_\nu(u) + \sum_{\mu=1}^{p} v_\mu \frac{\partial \varphi_\nu(u)}{\partial u_\mu} + \cdots$$

$$\varphi_\nu(v) \quad = \varphi_\nu(0) + \sum_{\mu=1}^{p} v_\mu \frac{\partial \varphi_\nu(0)}{\partial v_u} + \cdots = \sum_{\mu=1}^{p} \beta_\mu v_\mu + \cdots$$

eingeführt werden, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten von $v_1, v_2, \ldots, v_p$ zunächst die Ableitungen $\frac{\partial \varphi_\nu(u)}{\partial u_\mu}$ erster Ordnung als algebraische Funktionen der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Daraus erhält man aber dann unmittelbar die gesuchten Differentialgleichungen

$$(79) \qquad du_\varkappa = \sum_{\nu=1}^{p} f_{\mu,\nu}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)\, d\varphi_\nu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

deren Koeffizienten sich aus den Ableitungen $\frac{\partial \varphi_\nu(u)}{\partial u_\mu}$ in bekannter Weise rational zusammensetzen.

**17.** Die vorhergehenden Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf das transformierte Additionstheorem (17′), dem die Lösungen des ursprünglichen Additionstheorems (5) nach Ausführung der Transformation (7) genügen. Wir fragen jetzt nach denjenigen Bedingungen, unter welchen irgendeiner Lösung

(80) $$\psi_1(u),\ \psi_2(u),\ \ldots,\ \psi_n(u)$$

des transformierten Additionstheorems vermittels (7) eine Lösung

(81) $$\varphi_1(u),\ \varphi_2(u),\ \ldots,\ \varphi_n(u)$$

des ursprünglichen Additionstheorems zugeordnet wird.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß man beim Übergang von dem Gleichungssystem (5) zu (17′) zwei Schritte gemacht hat, welche hier berücksichtigt werden müssen.

Der erste Schritt besteht in der Aufstellung der Gleichungen (13), welche mit Rücksicht auf (8) und (9) in der Form

(82) $$\psi_\nu(u) = R_\nu\{R\{\psi(u)+\varphi(c);\ \varphi(-b)\};\ \varphi(b)\} - \varphi_\nu(c)$$

geschrieben werden können. Wegen der aus (7) für $u = -c$ bzw. $u = -a$ erhaltenen Relationen

(83) $$\begin{aligned}\varphi_\nu(0) &= \varphi_\nu(c) + \psi_\nu(-c)\\ \varphi_\nu(b) &= \varphi_\nu(c) + \psi_\nu(-a)\end{aligned}$$

und

$$\varphi_\nu(0) = \varphi_\nu(b + (-b)) = R_\nu\{\varphi(b), \varphi(-b)\}$$

lassen sich die rechten Seiten der Gleichungen (82) algebraisch aus den Funktionswerten

$$\psi_\mu(u),\quad \psi_\mu(-c),\quad \psi_\mu(-a) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

zusammensetzen, wobei die Koeffizienten von den Konstanten $\varphi_\nu(0) = \varkappa_\nu$ abhängen. Diese Konstanten können aber durch Auflösung der Gleichungen

$$\varkappa_\nu = R_\nu(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n;\ \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

welche man aus (5) für $u = v = 0$ erhält, gefunden werden.

Es sind jetzt zwei Fälle möglich; entweder sind alle Gleichungen (82) eine Folgerung der für

$$t_\mu = \psi_\mu(u),\quad \psi_\mu(-c),\quad \psi_\mu(-a)$$

geschriebenen Gleichungen[1])

(32) $$P_\varkappa(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, g)$$

oder dies ist nicht der Fall. Im letzteren Falle hat man das Gleichungssystem (32) durch Adjunktion neuer Gleichungen zu erweitern, was nach der Nr. 14 angegebenen Methode durch endliche Mittel ausführbar ist.

Der zweite Schritt, auf welchen oben hingewiesen wurde, besteht in der Symmetrisierung der rationalen Funktionen (16). Man erhält dadurch die Gleichungen

$$r_\nu\{\psi(u); \psi(v)\} = r_\nu\{\psi(v); \psi(u)\},$$

die im Hinblick auf (16) und auf die obigen Resultate durch ein System algebraischer Gleichungen zwischen den Funktionen (80) ersetzt werden können. Man kann hier dann die obigen Schlüsse wiederholen und gelangt zum entsprechenden Resultat.

Nun folgt aus jeder der oben adjungierten Gleichungen eine lineare homogene Relation zwischen den Parametern

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n.$$

1) Vgl. Fußnote S. 9.

Diese linearen Relationen zusammen charakterisieren vollständig die Gesamtheit der Lösungen von (17′), welche durch (7) in eine Lösung des ursprünglichen Additionstheorems übergehen.

Aus dem Obigen ergibt sich zugleich eine explizite Darstellung der Transformation (7) in algebraischer Form.

Diese Transformation wird durch die $n$ rationalen Funktionen

$$x_\nu' = R_\nu\{x; C\} - C_\nu \tag{84}$$

dargestellt, wo

$$x_\nu = \varphi_\nu(u), \quad x_\nu' = \psi_\nu(u), \quad C_\nu = \varphi_\nu(c)$$

gesetzt ist. Wegen der Relationen (83) können aber die Parameter $C_\nu$ durch

$$\psi_\nu(-c) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ersetzt werden, welche den bekannten algebraischen Gleichungen (32) unterworfen sind.

Man gewinnt dadurch den Ausdruck der gesuchten Transformation in expliziter Form, wo eine Anzahl willkürlicher Parameter algebraisch auftreten. Aus den Überlegungen der Nr. 3 geht hervor, daß diese Parameter, unter Vermeiden gewisser Ausnahmswerte, willkürlich gewählt werden können.

**18.** Wir wollen unsere bisherigen Resultate im folgenden Satze zusammenfassen.

**Satz.** Die allgemeinen Lösungen des rationalen Additionstheorems (5) bestehen aus Funktionensystemen der Form

$$\varphi_\nu(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_p u), \tag{85} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ willkürliche Parameter bezeichnen; diese Funktionen sind, als Funktionen der Argumente

$$\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_p u$$

betrachtet, Abelsche Funktionen mit demselben Periodensystem bzw. Degenerierte solcher Funktionen

Die Bestimmung der Zahl $p$ sowie der zwischen den Funktionen (85) herrschenden algebraischen Gleichungen ist auf algebraischem Wege möglich.[1])

**19.** Wir behandeln zum Schluß einige

Spezialfälle.

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\varphi_\nu(u+v) = G_\nu\{\varphi(u); \varphi(v)\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $G_\nu$ ganze rationale Funktionen bezeichnen. Wegen unseres letzten Satzes reduzieren sich die Lösungen offenbar auf ganze lineare Funktionen bzw. Exponentialfunktionen.

---

1) Wenn man nicht wie in Nr. 14 das Additionstheorem in der Form (17′) als gegeben annimmt, hat man bei der Bildung der Gleichungen (32) zu berücksichtigen, daß die Gleichungen (32) auch zwischen den Parametern $t_\mu = \psi_\mu(-c)$, $\psi_\mu(-a)$ stattfinden, die in den rechten Seiten der Gleichungen (17′) nach Nr. 17 algebraisch vorkommen.

Wir behaupten ferner, daß im Falle $q = 0$, $p = n$, d. h. wenn die Gleichungen

$$R_\nu\{R(x; y); z\} = R_\nu\{x; R(y; z)\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

in den Variabeln $x$, $y$, $z$ identisch bestehen, die betreffenden Gleichungssysteme (5) vermittels elementarer Funktionen lösbar sind. In der Tat sind dann die Koeffizienten $f_{\mu,\nu}$ in den zugeordneten Differentialgleichungen (79) rationale Funktionen, und die Größen $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sind daher algebraisch-logarithmische Funktionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Dann sind aber

$$\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_p),\ \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_p),\ \ldots,\ \varphi_p(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

rationale bzw. Exponentialfunktionen.

In dem zweiten extremen Falle $q = n - 1$, $p = 1$ sind die Gleichungen (5) vermittels elliptischer Funktionen lösbar. Für den Fall $n = 2$ ergibt sich hieraus das folgende Resultat:

**Satz.** Das Gleichungspaar

$$\varphi_1(u + v) = R_1(\varphi_1(u), \varphi_2(u); \varphi_1(v), \varphi_2(v))$$
$$\varphi_2(u + v) = R_2(\varphi_1(u), \varphi_2(u); \varphi_1(v), \varphi_2(v))$$

ist stets vermittels elliptischer Funktionen bzw. Degenerierter derselben, d. h. rationaler und Exponentialfunktionen[1]) lösbar.

Im niedrigsten Falle $n = 1$ ist

$$\varphi(u + v) = \frac{\varphi(u) + \varphi(v) + a\,\varphi(u)\,\varphi(v)}{1 - b\,\varphi(u)\,\varphi(v)}$$

die allgemeinste Form des aus einer einzigen Gleichung bestehenden Additionstheorems (17′), wie man leicht findet, weil $R\{\varphi(u); \varphi(v)\}$ offenbar eine lineare Funktion der beiden Argumente ist. Die allgemeine Lösung ist in der Form $\varphi(\beta u)$ darstellbar, wo $\varphi(u)$ das für $u = 0$ verschwindende Integral der Differentialgleichung

$$\varphi'(u) = 1 + a\varphi(u) + b\varphi^2(u)$$

bezeichnet. Die Funktion ist eine rationale Funktion bzw. eine rationale Funktion der Exponentialfunktion.

## II. Funktionen mehrerer Veränderlichen mit rationalem Additionstheorem.

**20.** Wir werden in diesem Kapitel Systeme analytischer Funktionen

(86) $\quad \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_m),\ \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_m),\ \ldots,\ \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$

mehrerer Veränderlichen untersuchen, welche ein rationales Additionstheorem der Form

(87) $\quad \varphi_\nu(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_m + v_m) = R_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m); \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m)\}$
$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$

besitzen.

Die allgemeinen Lösungen von (87) kann man vermittels der Lösungen des für $m = 1$ aus (87) erhaltenen Additionstheorems (5) ohne weiteres darstellen.

1) und ihrer Kombinationen.

Es sei nämlich

$$(88) \qquad \varphi_\nu(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_p u) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

irgendeine allgemeine Lösung von (5). Wir setzen in (88)

$$(89) \qquad \beta_i u = \sum_{k=1}^{m} C_{i,k} u_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

und erhalten ein System analytischer Funktionen der $m$ Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_m$, welche dem Gleichungssystem (87) offenbar bei beliebigen Werten der willkürlichen Konstanten $C_{i,k}$ genügen.

Wir behaupten, daß durch die Funktionensysteme (88) die Gesamtheit der analytischen Lösungen des Gleichungssystems (87) gegeben ist.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß bei beliebiger Anzahl $m$ der unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ stets ein und dasselbe System von algebraischen Additionstheoremen

$$(90) \qquad \underset{(\nu = 1, 2, \ldots, p)}{\varphi_\nu(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_p + v_p)} = S_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p);\ \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_p)\}$$

aus dem rationalen Additionstheorem (87) hergeleitet werden kann, weil die verschiedenen Systeme algebraischer Gleichungen (32) zwischen den Funktionen (88) offenbar nicht von der Anzahl der Veränderlichen, sondern von den rationalen Funktionen $R_\nu$ allein abhängen.

Wir setzen jetzt in den Gleichungen (90)

$$(91) \qquad \varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \sum_{\lambda=1}^{m} C_{\nu\lambda} u_\lambda + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

und entwickeln dabei die beiden Seiten nach den aufsteigenden ganzen positiven Potenzen der Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Durch Vergleichung der Koeffizienten erhält man die Koeffizienten der Reihen (91) als eindeutige (ganze rationale) Funktionen der $m \cdot p$ Anfangskoeffizienten $c_{\nu\lambda}$, welche willkürlich gewählt werden können. Damit ist aber die obige Behauptung bewiesen.

Wir haben daher den

**Satz.** Die allgemeinen Lösungen des rationalen Additionstheorems

$$(92) \qquad \underset{(\nu = 1, 2, \ldots, n)}{\varphi_\nu(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_m + v_m)} = R_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m);\ \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m)\}$$

sind durch die Funktionen

$$(93) \qquad \varphi_\nu\Big(\sum_{\varkappa=1}^{m} c_{1\varkappa} u_\varkappa, \sum_{\varkappa=1}^{m} c_{2\varkappa} u_\varkappa, \ldots, \sum_{\varkappa=1}^{m} c_{p\varkappa} u_\varkappa\Big) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

geliefert, welche, als Funktionen der $p$ Argumente

$$(94) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{m} c_{i\varkappa} u_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

betrachtet, Abelsche Funktionen mit demselben Periodensystem bzw. Degenerierte solcher Funktionen sind.

## III. Funktionen mehrerer Veränderlichen mit verallgemeinertem rationalen Additionstheorem.

**21.** Wir gehen von dem verallgemeinerten rationalen Additionstheorem

$$\varphi_\nu(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_m+v_m) = R_\nu\left\{\varphi(u), \varphi(v), \frac{\partial^\lambda \varphi(u)}{\partial u^\lambda}, \frac{\partial^\mu \varphi(v)}{\partial v^\mu}\right\} \tag{95}$$

aus, wo die rechten Seiten rational von den Funktionen $\varphi_\varkappa(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $\varphi_\varkappa(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ und ihren Ableitungen abhängen. Wir behaupten, daß das durch (95) definierte verallgemeinerte Additionstheorem stets durch ein gewöhnliches Additionstheorem ersetzt werden kann.

Zu diesem Zweck entwickeln wir die beiden Seiten der Gleichungen vermöge des Taylorschen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von $v$. Durch Vergleichung der Koeffizienten erhält man sämtliche Ableitungen der Funktionen $\varphi_\nu(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ als rationale Funktionen von $\varphi$ und von endlich vielen Ableitungen dieser Funktionen ausgedrückt. Es sei $\frac{\partial^\lambda \varphi(u)}{\partial u^\lambda}$ das gemeinsame Symbol dieser letzten Ableitungen.[1] Wir bilden aus (95) durch Differentiation nach den Variabeln $u$ die Ausdrücke von

$$\frac{\partial^\lambda \varphi(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_m+v_m)}{\partial u^\lambda}. \tag{96}$$

Nach dem Vorigen können diese Ausdrücke als rationale Funktionen der Funktionen $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ und ihrer Ableitungen $\frac{\partial^\lambda \varphi(u)}{\partial u^\lambda}$ und $\frac{\partial^\lambda \varphi(v)}{\partial v^\lambda}$ dargestellt werden, welche eine gewisse Anzahl Parameter enthalten können. Hieraus geht aber hervor, daß man durch Adjunktion der Ableitungen $\frac{\partial^\lambda \varphi(u)}{\partial u^\lambda}$ zum Funktionensystem $\varphi$ ein erweitertes Funktionensystem erhält, welches ein rationales Additionstheorem im engeren Sinne besitzt.

Wir haben daher das Resultat, daß jedes **Gleichungssystem**, welches ein rationales verallgemeinertes Additionstheorem **definiert**, vermittels Abelscher Funktionen lösbar ist.

## IV. Funktionen mit algebraischem Additionstheorem.

**22.** Wir betrachten zunächst das Gleichungssystem

$$G_\nu(\varphi(u+v), \varphi(u), \varphi(v)) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{97}$$

wo $G_\nu$ ganze rationale Funktionen der Funktionen einer Veränderlichen $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$[2] bezeichnen. Wir haben ein algebraisches Additionstheorem, dessen Behandlung in genau derselben Weise geschehen kann, wie die des Additionstheorems im I. Kapitel. Wir werden dies nur in aller Kürze zeigen.

---

1) Die Ableitungen nach $v$ können dann auch durch endlich viele Ableitungen $\frac{\partial^\lambda \varphi(v)}{\partial v^\lambda}$ rational ausgedrückt werden.

2) $t = u, v, u+v$.

Es ist auf rein algebraischem Wege möglich, jedes Gleichungssystem

$$P_\varkappa(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q < n)$$

zu finden, welches die Eigenschaft hat, daß erstens jede der Gleichungen

$$\varphi_\nu(\overline{u+v}+w) = \varphi_\nu(u+\overline{v+w}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{98}$$

deren beide Seiten vermöge (99) als algebraische Funktionen von

$$x_\mu = \varphi_\mu(u), \quad y_\mu = \varphi_\mu(v), \quad z_\mu = \varphi_\mu(w) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt werden können, eine Folge des Gleichungssystems

$$P_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad P_\varkappa(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad P_\varkappa(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

wird, und zweitens, daß die durch

$$G_\nu(S, x, y) = 0 \tag{99}$$

definierten algebraischen Funktionen $S_\nu(x, y)$ unter den Bedingungen

$$P_\varkappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad P_\varkappa(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

die Gleichungen

$$P_\varkappa(S_1, S_2, \ldots, S_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q)$$

identisch befriedigen. Man erhält dadurch endlich viele Systeme algebraischer Gleichungen

$$P_\varkappa(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q) \tag{100}$$

zwischen den Funktionen $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$.

Wir bezeichnen mit

$$\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_p(u) \qquad (p = n - q) \tag{101}$$

irgend $p$ der Funktionen $\varphi$, durch welche wegen (100) alle $q$ übrigen Funktionen $\varphi$ algebraisch ausgedrückt werden können. Es sei

$$\overline{G}_\nu(\varphi(u+v), \varphi(u), \varphi(v)) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{102}$$

das Additionstheorem des Funktionensystems (101). Wir behaupten, daß es nach Ausführung einer Transformation der Form

$$\varphi_\nu(u+c) - \varphi_\nu(c) = \psi_\nu(u)$$

möglich ist, der Funktionaldeterminante

$$DG(S, x, y) = \frac{\partial(\overline{G}_1, \overline{G}_2, \ldots, \overline{G}_p)}{\partial(S_1, S_2, \ldots, S_p)}$$

für $x = y = 0$ einen von Null verschiedenen Wert zu geben.

Es seien nämlich

$$u = a, \quad v = b, \quad u + v = a + b$$

Werte, für welche

$$DG(\varphi(u+v), \varphi(u), \varphi(v)) \neq 0$$

ist. Wir setzen $c = a + b$ und erhalten die Gleichungen

$$\overline{G}_\nu(\psi(u+v) + \varphi(c), \varphi(u+a), \varphi(v+b)) = 0,$$

wo $\varphi(u+a)$, $\varphi(v+b)$ algebraische Funktionen von $\psi(u)$ bzw. $\psi(v)$ sind. Es seien

$$\overline{G}_\nu'(S', x', y') = 0$$

die transformierten Gleichungen zwischen

$$x_\nu' = \psi_\nu(u), \quad y_\nu' = \psi_\nu(v), \quad S_\nu' = \psi_\nu(u+v) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

und
$$DG'(S', x', y')$$
die zugeordnete Funktionaldeterminante. Es ist
$$DG'(0, 0, 0) = DG(\varphi(c), \varphi(a), \varphi(b)) \neq 0,$$
womit die Behauptung bewiesen ist.

**23.** Wir lösen jetzt die Gleichungen (102) nach den Größen $\varphi_\nu(u+v)$ auf und erhalten die Gleichungen

$$(103) \qquad \varphi_\nu(u+v) = S_\nu\{\varphi(u); \varphi(v)\}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

wo $S_\nu$ algebraische Funktionen bezeichnen, die den Nullpunkt $x = y = 0$ zur regulären Stelle haben. Durch Symmetrisierung und Transformation der Gleichungen auf die in Nr. 4 angegebene Weise kann man wie bei rationalen Additionstheoremen erreichen, daß die algebraischen Funktionen $S_\nu$ in der Umgebung des Nullpunktes in Reihen der Form
$$S_\nu\{x; y\} = x_\nu + y_\nu + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$
entwickelt werden können, die nach steigenden positiven Potenzen von $x$, $y$ fortschreiten.

Nachher gelten die bei den rationalen Additionstheoremen entwickelten Betrachtungen ungeändert. Das aus (103) enthaltene Multiplikationstheorem

$$(104) \qquad S_\nu(2u) = S_\nu\{\varphi(u); \varphi(u)\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügt den Poincaréschen Bedingungen, und die allgemeine Lösung von (104) ist zugleich die allgemeine Lösung des Additionstheorems (103).

Diese allgemeine Lösung ist bestimmt bis auf $p$ willkürliche Parameter $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$, und es sind die Funktionen $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_p(u)$ analytische Funktionen der $p$ Argumente
$$u_i = \beta_i u, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$
die das algebraische Additionstheorem
$$\varphi_\nu(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_p + v_p) \underset{(\nu = 1, 2, \ldots, p)}{=} S_\nu'\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p); \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_p)\}$$
besitzen. Auf Grund des Weierstraßschen Satzes kann man folgenden Satz aufstellen:

**Satz.** Die allgemeinen Lösungen des algebraischen Additionstheorems (97) sind durch Funktionen der Form
$$\varphi_\nu(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_p u) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$
darstellbar, welche, als Funktionen der Argumente
$$\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_p u$$
betrachtet, algebraische Funktionen Abelscher Funktionen mit demselben Periodensystem bzw. Degenerierte solcher Funktionen sind.

**24.** Die obigen Resultate können, wie bei rationalen Additionstheoremen, auf Systeme analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen sowie auf verallgemeinerte algebraische Additionstheoreme erweitert werden. Wir können daher den folgenden Satz aussprechen, welcher unsere Resultate in allgemeinster Form darstellt.

**Satz.** Jedes System von Funktionalgleichungen der Form

$$G_\nu\left(\varphi(u+v), \varphi(u), \varphi(v), \frac{\partial^\lambda \varphi(u)}{\partial u^\lambda}, \frac{\partial^\mu \varphi(v)}{\partial v^\mu}\right) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $G_\nu$ ganze rationale Funktionen der Funktionen

$$\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_m), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_m), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

beliebig vieler Veränderlichen sowie ihrer beliebigen (gewöhnlichen oder partiellen) Ableitungen bezeichnen, ist vermittels Abelscher Funktionen lösbar.

# Anhang.

**25.** Aus den Resultaten des II. Kapitels können einige Folgerungen gezogen werden, die in gewisser Hinsicht den Satz von Weierstraß ergänzen.

In dem Weierstraßschen Satze werden die Funktionen $\varphi$ als voneinander unabhängig vorausgesetzt. Wir wollen hier Systeme voneinander abhängiger Funktionen betrachten, die ein algebraisches Additionstheorem besitzen.

Wir gehen von irgendeiner allgemeinen Lösung

$$\varphi_\nu\left(\sum_{\varkappa=1}^{n} c_{1\varkappa} u_\varkappa, \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{2\varkappa} u_\varkappa, \ldots, \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{n\varkappa} u_\varkappa\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{105}$$

des Additionstheorems

$$\varphi_\nu(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, v_n + v_n) = \underset{(\nu = 1, 2, \ldots, n)}{S_\nu\{\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n); \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)\}} \tag{106}$$

aus. Unter diesen Lösungen sind die Systeme voneinander abhängiger Funktionen als partikuläre Lösungen enthalten, deren Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$ in bezug auf die Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ identisch gleich Null ist. Das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

welche den Wert der fraglichen Funktionaldeterminante für $u_1 = \cdots = u_n = 0$ darstellt, ist eine notwendige Bedingung für die Abhängigkeit der Funktionen.

Wir wollen zeigen, daß diese Bedingung für die Abhängigkeit der Funktionen $\varphi$ auch hinreichend ist.

Wir nehmen allgemein an, daß alle Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$, ... bis zur $(n-p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, während wenigstens eine Unterdeterminante $(n-p)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht Null ist. Es ist dann möglich, die Argumente

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} c_{i\varkappa} u_\varkappa \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{107}$$

als lineare homogene Funktionen von $p$ unter ihnen darzustellen, wodurch die Funktionen (105) in die Funktionen von $p$ unabhängigen Veränderlichen übergehen, die je $p+1$ genommen miteinander analytisch verbunden sind.

Wir haben daher folgenden, von Painlevé für $n = 2$ bewiesenen[1])

**Satz.** Die analytisch abhängigen Lösungssysteme des Additionstheorems (106) können nach einer linearen Transformation der Argumente als algebraische Funktionen von Abelschen Funktionen dargestellt werden, wo $n - p$ der Variabeln Null sind. Hier bezeichnet $p$ die Anzahl der unabhängigen Funktionen $\varphi$.

---

1) Vgl. die S. 1 zitierte Abhandlung, S. 52.