О делителях почти периодического полинома

В. П. Потапов (Одесса)

Введение

В настоящей работе мы изучаем вопросы делимости и распределения нулей почти периодических полиномов, т. е. конечных сумм вида

$$P(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k z}, \tag{1}$$

где λ_k, $k = 1, \ldots, N$ — вещественные числа, $z = x + iy$ — комплексная переменная, и опираемся, в существенном, на результаты теории распределения нулей целых почти периодических функций экспоненциального типа, развитой моими глубокоуважаемыми учителями — профессорами Крейном и Левиным. Ввиду того, что их совместная работа еще не опубликована, я должен буду изложить здесь во введении, пользуясь любезным разрешением авторов, некоторые из полученных ими результатов.

Мы будем предполагать известными основные факты из теории почти периодических функций в объеме, соответствующем известной монографии Бора[1]).

Напомним следующие определения:

Аналитическая в полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ функция $f(z)$ называется почти периодической в этой полосе, если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество чисел τ такое, что для всех точек z полосы (α, β) выполняется неравенство

$$| f(z + \tau) - f(z) | < \varepsilon .$$

Если $f(z)$ — аналитическая в любой полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$, то она называется целой почти периодической.

Функция $f(z)$ называется целой функцией экспоненциального типа, если она голоморфна во всей плоскости и удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| < A_B e^{B|z|}, \quad (A_B > 0,\ B > 0) \tag{2}$$

для всех значений переменной $z = x + iy$.

При этом предполагается, что точная нижняя граница чисел B отлична от нуля. Эта нижняя граница $H = \inf B$ называется типом функции $f(z)$.

---

[1]) Бор Г., Почти периодические функции, ГТТИ, 1934. См также **Favard**, Les fonctions presque périodique, Paris (1933), **Besicovitch**, Almost periodic functions, Cambridge (1932).

Если, кроме того, известно, что $f(z)$ ограничена числом M на вещественной оси, т. е. $|f(x)| < M$ $(-\infty < x < +\infty)$, то, как легко показать с помощью принципа Фрагмена-Линделефа, $f(z)$ будет удовлетворять в z-плоскости более точному чем (2) неравенству, а именно:

$$|f(x+iy)| < Me^{H|y|}. \tag{3}$$

В частности, этому неравенству удовлетворяют целые почти периодические функции экспоненциального типа H.

Полином (1) является, очевидно, простейшей целой почти периодической функцией экспоненциального типа $H = \max\{|\lambda_k|\}$.

Вопросом распределения нулей аналитических почти периодических в полосе (α, β) функций занимался Иессен[1]) и установил следующий результат, являющийся обобщением известной формулы Иенсена для целых функций.

Функция

$$\Psi(\sigma, T) = \frac{1}{T}\int_0^T \ln|f(\sigma+it)|\,dt \tag{4}$$

существует для каждого $\alpha < \sigma < \beta$, $0 < T < \infty$ и является непрерывной функцией от σ. В каждом замкнутом подинтервале интервала (α, β) $\Psi(\sigma, T)$ равномерно стремится к предельной функции $\Psi(\sigma)$, когда $T \to \infty$,

$$\Psi(\sigma) = \lim_{T\to\infty} \Psi(\sigma, T);$$

$\Psi(\sigma)$ является выпуклой функцией и, следовательно, имеет почти всюду производную за исключением, быть может, счетного множества значений σ. Пусть в точках α_0, β_0, $\alpha_0 < \beta_0$ существует $\Psi'(\sigma)$. Тогда, если $N(\alpha_0, \beta_0, T)$ обозначает число нулей функции $f(z)$ в прямоугольнике $\alpha_0 < \sigma < \beta_0$, $0 < t < T$, то существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{N(\alpha_0, \beta_0, T)}{T} = H(\alpha_0, \beta_0),$$

называемый плотностью нулей $f(z)$ в полосе $\alpha_0 < \sigma < \beta_0$ и притом

$$2\pi H(\alpha_0, \beta_0) = \Psi'(\beta_0) - \Psi'(\alpha_0).$$

Далее, вопросы распределения нулей почти периодического полинома затрагиваются в связи с проблемой среднего движения[2]) в работах Вейля, Винтнера и Гартмана и Иессена.

---

[1]) B. Jessen, Über die Nullstellen einer analytischen fastperiodischen Funktion, Mathematische Annalen, Bd. 108 (1933).

[2]) Проблема среднего движения заключается в том, чтобы доказать представимость аргумента $\varphi(t)$ почти периодического полинома $P(t) = P(\sigma+it) = r(t)\,e^{i\varphi(t)}$ в виде $\varphi(t) = \mu_0 t + 0(t)$, где $\frac{0(t)}{t} \to 0$ при $t \to \infty$ и вычислить костанту μ_σ. Для случая линейно независимых λ_k решена Вейлем. Для случая произвольных показателей Гартман показал существование μ_σ для всех σ за исключением, быть может, конечного числа значений σ. Вопрос о существовании μ_σ для этих значений окончательно решен в работе Jessen and Tornehave, Mean motion, Acta Math. 77 (1946).

Однако во всех этих работах не изучается следующий основной вопрос теории распределения нулей целых почти периодических функций. По теореме Вейерштрасса, каждая целая функция $f(z)$ определяется, с точностью до экспоненциального множителя, каноническим произведедением, составленным по нулям a_k функции $f(z)$.

Спрашивается, каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы точечное множество $\{a_k\}$ было множеством нулей целой почти периодической функции?

Теорема Иессена, очевидно, дает лишь необходимые условия.

Вопрос этот в полном объеме, повидимому, весьма труден и решен в работе Крейна и Левина лишь для одного частного класса почти периодических целых функций. С другой стороны, получаемые здесь мной результаты указывают как будто на то, что изучению трансцендентных почти периодических функций должно предшествовать изучение почти периодических полиномов аналогично тому, как изучению обыкновенных трансцендентных функций предшествует изучение полиномов.

После этих вступительных замечаний перейдем к изложению необходимых нам в дальнейшем фактов, относящихся к теории целых почти периодических функций.

Совокупность показателей Фурье почти периодической функции $f(z)$ мы будем называть спектром.

Без труда устанавливается:

Теорема 1. Для того, чтобы почти периодическая функция имела ограниченный спектр, необходимо и достаточно, чтобы она была целой функцией экспоненциального типа.

Рассматривая в дальнейшем функции с ограниченным спектром, мы будем считать, что концы спектра, т.е.

$$\inf \lambda_k, \quad \sup \lambda_k$$

являются числами, противоположными по знаку, ибо этого можно добиться умножением функции $f(z)$ на множитель вида e^{iaz}.

Столь же прозрачна и

Теорема 2[1]). Для того, чтобы все корни почти периодической функции с ограниченным спектром располагались в некоторой полосе $|y| \leqslant h$, необходимо и достаточно, чтобы концы спектра Δ и $-\Delta$ входили в спектр.

Почти периодическую функцию $f(x)$ мы будем называть функцией класса $[\Delta]$, если концы спектра $-\Delta$, Δ входят в спектр.

Фундаментальную роль в дальнейшем играет понятие почти периодического множества. Мы дадим следующее

---

[1]) Необходимость — тривиальна. Достаточность вытекает из теоремы H. Bohr'a „Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen", Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-Fysiske Meddeleser. См. также Безикович, цит. произв., стр. 163.

Определение. Число τ назовем ε-смещением точечного множества $\{a\}$, если точки множества $\{a+\tau\}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие точкам множества $\{a\}$, так что расстояние между соответствующими точками будет меньше ε.

Множество $\{a\}$ мы назовем точечным почти периодическим множеством, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает относительно плотное множество его ε-смещений.

Перейдем теперь к основной теореме теории М. Г. Крейна и Б. Я. Левина, которая установит необходимые и достаточные условия, характеризующие распределение нулей почти периодической функции класса $[\Delta]$.

Теорема 3. Для того чтобы $f(z)$ была почти периодической функцией класса $[\Delta]$, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

1. Функция $f(z)$ представляется в виде:

$$f(z) = \lim_{n \to -\infty} \prod_{k=-n}^{k=n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

2. Корни a_k функции образуют точечное почти периодическое множество и представляются в форме

$$a_k = \frac{\pi}{\Delta} k + \Psi(k),$$

где $\Psi(k)$ — комплекснозначная ограниченная функция.

3. При любом целом τ существует $M > 0$, не зависящее от τ, такое, что

$$\left| \sum_{-\infty}^{+\infty} [\Psi(k+\tau) - \Psi(k)] \frac{k}{k^2 + h^2} \right| < M$$ [1].

Заметим, наконец, что, если $\Psi(k)$ является почти периодической функцией целочисленного аргумента k и разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье, то условие 3 заведомо выполняется и сверх того сама функция

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=-n}^{k=n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$$

разлагается в абсолютно сходящийся ряд.

В нашей работе мы будем постоянно опираться именно на этот последний факт.

---

[1]) Доказательство этой теоремы, а также и двух предыдущих теорем читатель найдет в следующем выпуске этого журнала в статье М. Г. Крейна и Б. Я. Левина.

√ это не так. См. Б.Я.

Перейдем теперь к вопросу делимости почти периодических функций. Дадим следующее

Определение. Целая почти периодическая функция $g(z)$ называется делителем целой почти периодической функции $f(z)$, если корень функции $g(z)$ кратности n является корнем функции $f(z)$ той же или большей кратности.

Это определение может быть оправдано тем обстоятельством, что частное $\frac{f(z)}{g(z)}$ является снова целой почти периодической функцией.

Теорема. Если $g(z)$ делитель функции $f(z)$, то $\frac{f(z)}{g(z)}$ является целой почти периодической функцией[1]).

Действительно, пусть $|y| \leqslant h$ произвольная полоса, а τ является ε-смещением, общим для функций $f(z)$ и $g(z)$ в полосе $|y| \leqslant h+1$.

Окружим каждый из корней функции $g(z)$ малым кружком радиуса δ. Может случиться, что некоторые из этих кружков пересекутся, образуя „гроздь", но мы всегда в состоянии выбрать δ так, чтобы гроздь, пересекающая прямую $|y| = h$, не пересекала прямой $|y| = h + \frac{1}{2}$, а гроздь, пересекающая прямую $|y| = h + \frac{1}{2}$, не пересекала прямой $|y| = h+1$. Действительно, каждый квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ и основанием, лежащим на прямой $y = h + \frac{1}{2}$, содержит не более K корней, где $K > 0$ — некоторая постоянная. К множеству гроздей $\mathfrak{M}$ присоединим множество, получающихся из $\mathfrak{M}$ сдвигом на $-\tau$. При этом, возможно, некоторые из гроздей укрупнятся. В дополнительном множестве в полосе $|y| \leqslant h+1$ каждая из функций $g(z)$ и $g(z+\tau)$ ограничена снизу числом $m > 0$, которое не зависит от τ.

Рассмотрим теперь область, ограниченную отрезками прямых $y = \pm h$ и внешними, по отношению к полосе $|y| \leqslant h$, частями контуров гроздей, пересекающих эти прямые. Так как на контуре

$$\left|\frac{f(z+\tau)}{g(z+\tau)} - \frac{f(z)}{g(z)}\right| \leqslant \frac{|f(z+\tau) - f(z)| \cdot |g(z)|}{|g(z+\tau)| \cdot |g(z)|} +$$

$$+ \frac{|g(z) - g(z+\tau)| \cdot |f(z)|}{|g(z+\tau)| \cdot |g(z)|} \leqslant \frac{M_g + M_f}{m^2} \varepsilon,$$

то то же верно, по принципу максимума, и для всех точек полосы $|y| \leqslant h$. Теорема доказана.

Отправным пунктом настоящей работы явилась следующая теорема, принадлежащая Ритту и обобщенная впоследствии Бором.

---

[1]) Теорема эта уже упоминается Бором в одной из его работ из цикла „Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodische Funktionen".

Теорема. Если почти периодический полином $g(z)$ является делителем почти периодического полинома $f(z)$, то частное $\frac{f(z)}{g(z)}$ также есть почти периодический полином.

Мы приведем здесь совершенно элементарное доказательство этой теоремы. Прежде всего частное $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ является функцией экспоненциального типа и имеет, следовательно, ограниченный спектр. Мы докажем, что $h(z)$ — полином, если установим, что спектр $h(z)$ состоит из конечного числа показателей ν_k, причем последнее эквивалентно, очевидно, тому, что спектр $h(z)$ не имеет точек сгущения.

Предположим, что множество $\{\nu_k\}$ показателей Фурье функции $h(z)$ имеет точки сгущения и пусть ν_0 — наибольшая из них.

Тогда, если $\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_m$ — показатели Фурье делителя $g(z)$, то спектр делимого $f(z)$ должен содержать бесконечное множество показателей вида $\mu_1+\nu_k$, лежащих в окрестности точки $\mu_1+\nu_0$ радиуса $\mu_1-\mu_2$, что невозможно, так как $f(z)$ — полином. Теорема доказана.

Несмотря на свой тривиальный характер, теорема Ритта сразу же наводит на следующий важный вопрос:

Существуют ли вообще не полиномиальные делители почти периодического полинома или каждый делитель обязательно является полиномом, и далее — сколько их? как их перечислить?

Заметим, что отчасти связанный с предыдущим вопрос: имеет ли каждый полином нетривиальные[1]) полиномиальные делители? легко решается в отрицательном смысле, как это будет показано в дальнейшем.

Для того чтобы наметить основные положения делимости произвольных почти периодических полиномов, рассмотрим прежде всего тривиальный случай полинома с одночленным базисом, т. е. обыкновенного тригонометрического полинома $P(e^{iz})$.

Мы заменяем e^{iz} на ζ и полученный полином от ζ разлагаем на линейные множители. Составляя всевозможные произведения этих множителей и сделав обратную замену аргумента ζ на e^{iz}, мы получим делители полинома, которые являются периодическими функциями (полиномами) вида $\sum a_k e^{ikz}$. Таких делителей — конечное число. Будем говорить, что такой делитель принадлежит классу $R(1)$. Но мы могли бы поступить и иначе. Пусть $m>0$ — целое число. Записав полином $P(e^{iz})$ в виде $P\left[\left(e^{i\frac{z}{m}}\right)^m\right]$, сделаем сейчас замену $e^{i\frac{z}{m}}$ на ζ.

---

[1] Тривиальные делители полинома $F(z)$ это $P(z)$ и функция вида $Ae^{i\lambda z}$.

Проводя аналогичные рассуждения, мы получим делители вида $\Sigma b_k e^{i\frac{k}{m}z}$. Такой делитель, мы скажем, принадлежит классу $R\left(\frac{1}{m}\right)$.

Таким образом, класс $R\left(\frac{1}{m}\right)$ характеризуется базисом $\frac{1}{m}$ модуля показателей Фурье делителя. Классов бесконечное множество и каждый из них содержит конечное число делителей.

Остается показать, что этим процессом исчерпаны все делители полинома $P(e^{iz})$.

Пусть $F(z)$ — произвольный почти периодический делитель полинома $P(e^{iz})$. Мы можем выбрать столь малое δ, чтобы кружки радиуса δ с центрами в корнях полинома попарно не пересекались и затем выбрать ε-смещение τ для функции $F(z)$ так, чтобы множество корней $\mathfrak{N}$ функции $F(z)$ при сдвиге на τ переходило в δ-окрестность множества $\mathfrak{N}$. Более того, мы вправе считать, что ε-смещение функции $F(z)$ является целым кратным 2π, т. е. $\tau = 2\pi m$[1]). Но тогда множество $\mathfrak{N}$ само является периодическим, т. е. вместе с каждым корнем c_j функции $F(z)$ из полосы $0 \leqslant x < \tau$ в $\mathfrak{N}$ входят также все корни $P(e^{iz})$ вида $c_j + \tau n = c_j + 2\pi m n$. Корней c_j конечное число, и $c_j + n\tau$ исчерпывают все корни функции $F(z)$. Функция

$$f(z) = \prod_j \left(e^{i\frac{z-c_j}{m}} - 1\right)$$

имеет те же нули, что и $F(z)$ и, следовательно,

$$F(z) = e^{\varphi(z)} f(z),$$

где $\varphi(z)$ — целая функция. Таким образом, $F(z)$ с точностью до несущественного множителя является полиномом класса $R\left(\frac{1}{m}\right)$.

Основной целью настоящей работы является установление того факта, что намеченные здесь закономерности для тривиального случая периодического полинома сохраняются и для общего случая произвольного почти периодического полинома.

Именно, мы покажем, что существует бесконечное множество классов делителей и что каждый класс содержит лишь конечное число их. Отличие общего случая от частного случая периодического полинома заключается лишь в том, что делители уже будут, вообще говоря, не периодическими полиномами, а целыми функциями экспоненциального типа (класса $[\Delta]$) с абсолютно сходящимися рядами Фурье.

Как побочный результат мы получим правило для наиболее естественной нумерации корней почти периодического полинома, которая, как оказывается, не всегда является нумерацией в порядке возрастания вещественных частей корней полинома.

---

[1]) См. Безикович, цит. произв., стр. 54—56.

Кроме этого, мы покажем, что корни полинома распадаются на группы, каждая из которых представляется в виде

$$a_k = ck + \Psi(k),$$

где $\Psi(k)$ являются комплекснозначной почти периодической функцией — факт, не вытекающий из теории Крейна-Левина.

Заканчивая на этом введение, я хочу выразить здесь искреннюю благодарность моему дорогому учителю профессору Б. Я. Левину, познакомившему меня с кругом этих идей и неоднократно помогавшему мне ценными советами, а также профессору М. Г. Крейну, сделавшему мне ряд важных указаний, использованных мною при составлении этой работы.

Торообразное пространство

Пусть дан почти периодический полином с целым двучленным базисом λ, μ (мы будем часто считать, что $\lambda^2 + \mu^2 = 1$[1]),

$$P(z) = \sum_{m,n} a_{mn} e^{i(m\lambda + n\mu)z} = \sum_{m,n} a_{mn} e^{im\lambda z} \cdot e^{in\mu z}.$$

Найдем, как расположены его нули в z-плоскости. Пусть

$$z = \xi + i\eta.$$

Фиксируя η, т.е. рассматривая изменение z на прямой, параллельной вещественной оси, мы получим почти периодическую функцию вещественной переменной ξ

$$P(\xi + i\eta) = \sum_{m,n} a_{mn} (e^{-\lambda\eta})^m e^{im\lambda\xi} (e^{-\mu\eta})^n e^{in\mu\xi},$$

которую нам будет удобно рассматривать на винтовой линии

$$u = \lambda\xi, \quad v = \mu\xi$$

тора $0 \leqslant u < 2\pi$, $0 \leqslant v < 2\pi$. Так как шаг винта этой винтовой линии иррационален, то множество ее точек всюду плотно на торе, и, как известно[2]), замыкание множества значений почти периодической функции $P(\xi + i\eta)$ даст непрерывную на торе функцию

$$F(\eta, u, v) = \sum_{m,n} a_{mn} (e^{-\lambda\eta})^m e^{imu} (e^{-\mu\eta})^n e^{inv}.$$

Представляя себе, что это сделано для каждого значения η, и что торы вложены друг в друга соответственно значениям η, мы получим множество точек $[\eta, u, v]$, которое назовем торообразным простран-

---

[1]) Предположение это не нарушает общности, так как заменяя z на $\frac{\zeta}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$; $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$, $\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$ на $\bar\lambda, \bar\mu$ соответственно, мы приходим к почти периодическому полиному от ζ, базис которого $\bar\lambda, \bar\mu$ удовлетворяет условию $\bar\lambda^2 + \bar\mu^2 = 1$.

[2]) Безикович, цит. произв., стр. 34—36.

ством $R(\lambda, \mu)$ и определенную на нем функцию $F(\eta, u, v)$ трех вещественных переменных. Рассматривая $F(\eta,u,v)$ на винтовой поверхности — геликоиде

$$\lambda v = \mu u, \tag{1}$$

мы возвращаемся к первоначально заданной функции $P(z)$.

Функция $F(\eta, u, v)$, как мы увидим, обращается в нуль на некоторых замкнутых кривых в торообразном пространстве; пересечение этих кривых с винтовой поверхностью (1) и даст нам распределение нулей полинома $P(z)$.

Для установления вышесказанного рассмотрим уравнение

$$\sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n = 0, \tag{2}$$

определяющее y как алгебраическую функцию x. Точки (η, u, v) торообразного пространства, в которых $F(\eta, u, v)$ обращается в нуль, могут быть получены следующим образом: найдем пары значений x, y, удовлетворяющих уравнению (2) и допускающих представление

$$x = e^{-\lambda\eta} e^{iu}, \quad y = e^{-\mu\eta} e^{iv},$$

т. е. такие, что

$$\lambda \ln |y(x)| = \mu \ln |x|, \tag{3}$$

где $y(x)$ — алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению (2).

На римановой поверхности функции $y(x)$ найдем систему кривых $\{l_x\}$, на которых выполняется равенство (3), и рассмотрим соответствующую систему кривых $\{l_y\}$ на римановой поверхности обратной функции $x(y)$. Задавая точку x на кривой l_x, мы найдем соответствующее значение y на кривой l_y и таким образом определим тройку чисел — точку торообразного пространства $M(\eta, u, v)$, где

$$\eta = -\frac{\ln |x|}{\lambda}; \quad u = \arg x, \quad v = \arg y,$$

в которой

$$F(\eta, u, v) = 0.$$

Когда x пробегает кривую l_x, M опишет некоторую кривую в торообразном пространстве, l-кривую.

Значения x, удовлетворяющие условию (3), можно получить, рассматривая пересечение двух поверхностей

$$\zeta = \ln |y(x)|^{\lambda}, \quad \zeta = \ln |x|^{\mu},$$

расположенных над римановой поверхностью функции $y(x)$.

Вторая из них является поверхностью вращения логарифмики.

Первая — многолистна над x-плоскостью, но однолистна над римановой поверхностью функции $y(x)$. Так как в нулях функции $y(x)$, $\zeta = -\infty$, в полосах — $\zeta = +\infty$, то в окрестности этих точек поверхность $\zeta = \ln |y(x)|^{\lambda}$ имеет вид бесконечного логарифмического веретена.

Очевидны следующие свойства строения поверхности в малом:

1°. Над обыкновенной точкой римановой поверхности функции $y(x)$ лежит обыкновенная точка поверхности $\zeta = \ln|y(x)|^\lambda$.

2°. Над точкой ветвления лежит также точка ветвления с той лишь разницей, что листы окрестности последней действительно пересекаются.

3°. Над нулем или полюсом находится логарифмическое веретено, которое может быть многолистным.

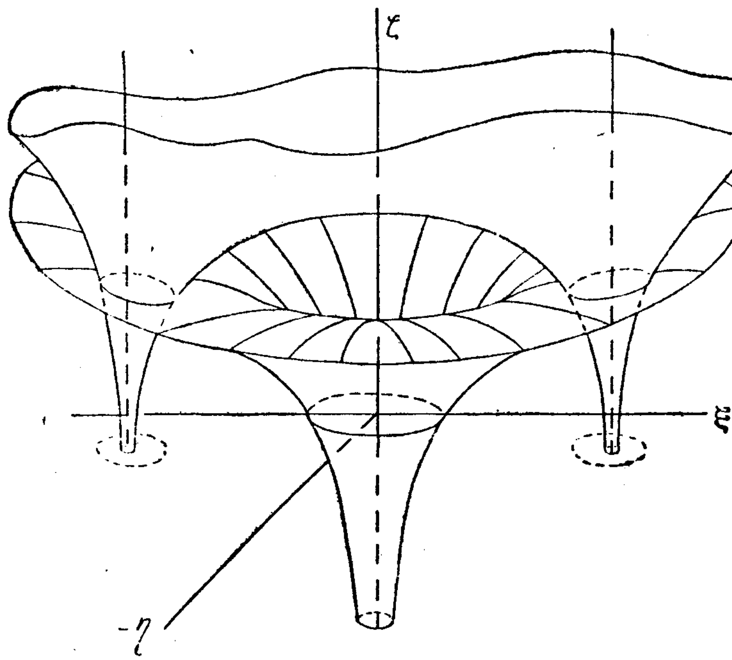

Рис. 1.

О системе l_x-кривых можно составить наглядное представление, рассматривая (рис. 1) пересечение поверхностей

$$\zeta = \mu \ln|x|, \quad \zeta = \lambda \ln|y(x)|$$

при достаточно малых

$$\sigma = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Тогда $\zeta = \mu \ln|x|$ отсечет концы логарифмических веретен, соответствующих нулям функции $y(x)$. При бóльших значениях σ эта интерпретация значительно усложняется, в силу чего мы будем ее использовать исключительно для иллюстративных целей, прибегая в общем случае к более сложному методу построения l-кривых. Однако сейчас уже ясно, что число l-кривых не превосходит числа нулей алгебраической функции $y(x)$. Более точных выводов сделать нельзя, так как над точкой $x = 0$ может находиться нуль функции $y(x)$ столь малой кратности, что соответствующее логарифмическое веретено вовсе не пересечет поверхности $\zeta = \ln|x|^\mu$. Далее, концу логарифмического веретена, отсекаемого поверхностью $\zeta = \ln|x|^{\prime}$, соответствует на римановой поверхности обратной функции $x(y)$ окрестность точки $y=0$. Следовательно, при обходе l_y-кривой $\arg y$ получает приращение, равное целому кратному 2π. Это означает, что в торообразном пространстве, соответствующая l-кривая не будет гомологична нулю. Интересно также отметить то обстоятельство, что при изменении иррационального параметра $\sigma = \frac{\mu}{\lambda}$ распределение корней полинома $P(z)$ изменяется не только количественно, но и качественно. Отдельные l-кривые могут слиться в одну, и обратно, одна l-кривая может распадаться на несколько отдельных связных частей.

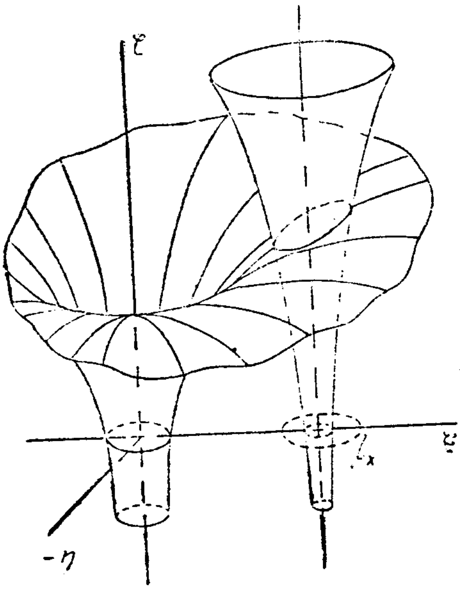

Рис. 2.

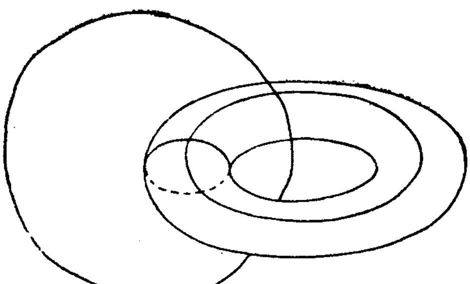

Рис. 3.

Пример. Пусть $P(z) = e^{i\lambda z} + e^{i\mu z} - A$, где $A > 0$ некоторое достаточно большое число. Тогда

$$P(x, y) \equiv x + y - A = 0$$

и для того, чтобы построить l-кривые, следует рассмотреть пересечение двух поверхностей

$$\zeta = \frac{1}{\mu}\ln|A - x|; \quad \zeta = \frac{1}{\lambda}\ln|x|,$$

расположенных над комплексной x-плоскостью (рис. 2). Приняв для определенности, что $\lambda > \mu$, мы видим, что $u = \arg x$ колеблется в окрестности нуля, $v = \arg y$ монотонно возрастает и испытывает приращение 2π при обходе, $\eta = -\zeta$ колеблется около значения $\eta_0 = -\frac{1}{\lambda}\ln A$. В торообразном пространстве l-кривая гомологична меридиану $u=0$ тора $\eta = 0$ (рис. 3). Корни полинома $P(z)$ изображаются точками встречи винтового геликоида $\lambda v = \mu u$ с построенной l-кривой.

Свойства l-кривых

В этом разделе мы докажем строго, не прибегая уже к наглядным представлениям, необходимые нам свойства l-кривых.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ точек римановой поверхности функции $y(x)$, в которых выполняется равенство

$$\text{(A)} \qquad \lambda \ln|y(x)| = \mu \ln|x|.$$

1°. Множество $\mathfrak{M}$ лежит в кольце

$$r < |x| < R$$[1].

Действительно, так как функция $y(x)$ алгебраическая, то в окрестности точек $x=0$, $x=\infty$

$$\ln|y(x)| = \frac{m}{n}\ln x + C + \varepsilon,$$

где m, n — целые числа, $n \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$. Равенство (A) для достаточно больших или малый $|x|$ невозможно, так как $\lambda\frac{m}{n} \neq \mu$.

2°. $\mathfrak{M}$ не содержит изолированных точек

Действительно, если x_0 такая точка, то можно указать на римановой поверхности такую окрестность точки x_0, в которой выполняется неравенство

$$\lambda \ln|y(x)| - \mu \ln|x| < 0 \qquad x \neq x_0 \tag{4}$$

либо неравенство, противоположное по смыслу, где $y(x)$ алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению (2). Но левая часть неравенства (4) является гармонической функцией x или, если x_0 является точкой ветвления функции $y(x)$, гармонической функцией униформизующей переменной t. Неравенство (4) невозможно, так как оно противоречит принципу максимума для однозначных гармонических функций.

3°. Множество $\mathfrak{M}$ не пусто[2])

Докажем, что неравенства

$$|y(x)| > |x|^{\sigma}, \quad |y(x)| < |x|^{\sigma} \qquad \left(\sigma = \frac{\mu}{\lambda}\right)$$

не могут выполняться для всех $x \neq 0$.

В самом деле, если положить

$$r_1(x) = -y_1(x) - y_2(x) - \ldots - y_n(x); \qquad r_1(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$$

$$r_n(x) = (-1)^n y_1(x) \cdot y_2(x) \ldots y_n(x); \qquad r_n(x) = \frac{p_n(x)}{p_0(x)},$$

где $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — все ветви алгебраической функции; $y(x)$, $r_1(x)$, $r_n(x)$ — рациональные функции; $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_n(x)$ — полиномы, то: в первом случае

$$|r_n(x)| > |x|^{n\sigma} \quad (x \neq 0)$$

и, следовательно, $p_n(x)$, не обращаясь в нуль при $x \neq 0$, имеет вид

$$p_n(x) = Ax^m.$$

Тогда из предыдущего неравенства следует

$$|p_0(x)| = |b_0 + b_1 x + \ldots b_j x^j| < A|x|^{m-n\sigma}.$$

---

[1]) Это свойство соответствует теореме II введения.

[2]) Это свойство означает, что $P(z)$ имеет хотя бы один корень.

Сравнивая при больших $|x|$, мы получим, в силу иррациональности σ, неравенство

$$j < m - n\sigma,$$

в то время как сравнение при малых $|x|$ последовательно дает

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_j = 0,$$

что невозможно.

Во втором случае

$$|r_1(x)| < n|x|^{\sigma}$$

и, следовательно, $p_0(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Таким образом, $p_0(x) = Cx^m$ и так как

$$|p_1(x)| < |c|n|x|^{\sigma+n}.$$

то, как прежде, $p_1(x) \equiv 0$. Точно так же мы получим, что и остальные коэфициенты уравнения

$$y^n + r_1(x)\,y^{n-1} + r_2(x)\,y^{n-2} + \ldots + r_n(x) = 0$$

тождественно равны нулю и, следовательно, $y(x) \equiv 0$.

Таким образом, всегда на римановой поверхности функции $y(x)$ найдутся точки x_1, x_2, для которых выполняются противоположные неравенства

$$\left|\frac{y^{\lambda}(x_1)}{x_1^{\mu}}\right| > 1, \qquad \left|\frac{y^{\lambda}(x_2)}{x_2^{\mu}}\right| < 1.$$

Соединив их непрерывным путем, мы найдем на нем такую точку x_0, в которой, в силу непрерывности модуля аналитической функции, выполняется равенство:

$$\lambda \ln|y(x_0)| = \mu \ln|x_0|.$$

4°. Множество $\mathfrak{M}$ состоит из конечного числа кусочко-аналитических кривых

Мы можем, очевидно, считать, что найденная в конце предыдущего параграфа точка x_0 не является точкой ветвления функции $y(x)$ и, кроме того,

$$\lambda \frac{y'(x_0)}{y(x_0)} - \frac{\mu}{x_0} \neq 0, \infty \tag{5}$$

[впрочем, это выражение может обращаться в бесконечность лишь в тех точках множества $\mathfrak{M}$, которые являются точками ветвления функции $y(x)$, так как в точках $\mathfrak{M}$ x_0, $y(x_0) \neq \infty$].

Действительно, так как точек ветвления функции $y(x)$ конечное число и уравнение (5) имеет конечное число корней, то мы всегда могли бы соединить точки x_1, x_2 путем, не проходящим ни через одну из этих критических точек.

Рассмотрим значение какой-нибудь определенной ветви функции

$$t = \ln \frac{y^{\lambda}(x)}{x^{\mu}}$$

в точке x_0. Заметим, что бесконечное множество ветвей функции $t(x)$ при продолжении по любому фиксированному пути на римановой поверхности $y(x)$ отличаются друг от друга на аддитивную мнимую постоянную

$$2\pi(k\lambda + l\mu)\, i.$$

Пусть

$$t_0 = \ln \frac{y^\lambda(x_0)}{x_0^\mu} = i \arg \frac{y^\lambda(x_0)}{x_0^\mu} = i\alpha.$$

Так как $t(x)$ голоморфна в окрестности x_0 и вследствие (5) $t'(x_0) \neq 0$ то $t(x)$ можно обратить и она отображает взаимно однозначно окрестность x_0 на окрестности точки $i\alpha$ мнимой оси t-плоскости.

Элемент обратной функции $x(t)$ мы будем продолжать вдоль мнимой оси и, так как при продолжении могут встретиться особые точки, то мы условимся обходить их в левой полуплоскости так, что при продолжении центр элемента будет перемещаться по левому берегу мнимой оси. Точки, соответствующие точкам прямой функции $t(x)$, в которых либо $y(x)$ имеет точку ветвления, либо в которых

$$\lambda \frac{y'(x)}{y(x)} - \frac{\mu}{x} = 0 \qquad (6)$$

являются особыми точками $x(t)$; в этих точках $x(t)$ имеет алгебраический характер. Однако, еще не ясно, не могут ли эти особенности сгущаться.

Пусть

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_k,\ x_{k+1}, \ldots,\ x_s.$$

точки ветвления $y(x)$ и корни уравнения (6) перенумерованы так, что

$$\ln\left|\frac{y^\lambda(x_1)}{x_1^\mu}\right| \leqslant \ln\left|\frac{y^\lambda(x_2)}{x_2^\mu}\right| \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \ln\left|\frac{y^\lambda(x_k)}{x_k^\mu}\right| \leqslant \ln\left|\frac{y^\lambda(x_{k+1})}{x_{k+1}^\mu}\right| \leqslant \ldots \leqslant \ln\left|\frac{y^\lambda(x_s)}{x_s^\mu}\right|$$

и

$$\ln\left|\frac{y^\lambda(x_k)}{x_k^\mu}\right| = \beta < 0 \leqslant \ln\left|\frac{y^\lambda(x_{k+1})}{x_{k+1}^\mu}\right|.$$

В полосе $(\beta, 0)$ функция $x(t)$ будет неограниченно продолжаема и, следовательно, однозначна. Рассмотрим $\mathrm{Re}\{t\} = \gamma$ — прямую полосы $\beta < \gamma < 0$. Образом этой прямой на римановой поверхности функции $y(x)$ будет некоторая кривая l_γ. Так как на прямой

$$t = \gamma + i \arg \frac{y^\lambda(x)}{x^\mu},$$

то l_γ обходит бесконечное число раз либо точку $x=0$, либо один из корней функции $y(x)$. Кривая l_γ лежит на конечном куске римановой поверхности и, если она не замкнута, то должна существовать точка $\bar{x}$ римановой поверхности, в каждой окрестности которой лежит бесконечное множество отрезков l_γ-кривой. Хотя эти отрезки и соответствуют различным ветвям функции $t(x)$ в окрестности точки $\bar{x}$, но все они имеют, как и произвольная ветвь функции $t = \ln \frac{y^\lambda(x)}{x^\mu}$, вещественную часть, равную на этих отрезках также γ и в точке $\bar{x}$ имеют не более чем алгебраическую особенность. Выбрав какую-нибудь ветвь функции $t_0(x)$, мы видим, что $t_0(x)$ отображает окрестность точки $\bar{x}$ на окрестность некоторой точки прямой $\operatorname{Re}\{t\} = \gamma$ и точкам прямой соответствуют в достаточно малой окрестности $\bar{x}$ лишь конечное число пересекающихся в $\bar{x}$ кривых, так что во всех остальных точках окрестности $\bar{x}$ $\ln\left|\frac{y^\lambda(x)}{x^\mu}\right| \neq \gamma$. Таким образом, l_γ замкнута и на прямой $\gamma + it$ $x(t)$ является периодической функцией t с периодом

$$iT = 2\pi(k\lambda - l\mu)\,i.$$

Здесь $2k\pi$, $2l\pi$ — приращения $\arg y(x)$, $\arg x$ при обходе по l_γ-кривой соответственно.

Но тогда во всей полосе $(\beta, 0)$ функция $x(t)$ имеет тот же период iT. В самом деле, аналитическая функция

$$x(t + iT) - x(t),$$

обращаясь в нуль на прямой $\operatorname{Re}\{t\} = \gamma$ полосы $(\beta, 0)$, тождественно равна нулю.

5°. Продолжим теперь элемент $x(t)$ по отрезку прямой, параллельной вещественной оси t-плоскости из какой-нибудь точки полосы $(\beta, 0)$ к мнимой оси. Докажем, что на римановой поверхности точка x должна стремиться к некоторому предельному положению.

Если бы это не выполнялось, то существовали бы две последовательности $t_n \to i\alpha$; $t'_n \to i\alpha$ точек отрезка, для которых последовательности $x_n = x(t_n)$, $x'_n = x(t'_n)$ стремятся к двум различным точкам римановой поверхности: $\bar{x}$ и $\bar{x}'$. Рассмотрим в точке $\bar{x}$ произвольную ветвь $t_1(x)$ функции $t(x)$. В этой точке $t_1(x)$ имеет алгебраический характер и когда $x_n \to \bar{x}$, $t_1(x_n)$ стремится к некоторому пределу. Так как вещественная часть функции $t(x)$ однозначна и $t_n \to i\alpha$, то $t_1(x_n) = \tau_n$ стремится к некоторой точке мнимой оси $i\bar{\alpha}$. Мы всегда можем выбрать такую окрестность точки $\bar{x}$, чтобы она не содержала точки $\bar{x}'$, и чтобы образ границы ее при отображении с помощью функции $t = t_1(x)$ не проходил через точку $i\alpha$. На исходном отрезке будем изменять t от значения t_n до первого значения $\bar{t}_n$, при котором $x(t)$ пересечет контур окрестности точки $\bar{x}$, в сторону возрастания $\operatorname{Re}\{t\}$. Так как при этом x не выходит за пределы окрестности $\bar{x}$ и $\operatorname{Im}\{t_n\} = \operatorname{Im}\{\bar{t}_n\}$, то же справедливо и для соответствующих значений $t_1(x)$, т. е.

$$\operatorname{Im}\{\tau_n\} = \operatorname{Im}\{\bar{\tau}_n\}, \quad \operatorname{Re}\{\tau_n\} < \operatorname{Re}\{\bar{\tau}_n\}. \tag{7}$$

Отсюда следует, что $\overline{\tau}_n$ также стремится к $i\overline{\alpha}$, что однако невозможно, так как соответствующие при отображении $t_1(x)$ точки не стремятся к $\overline{x}$, а лежат на контуре окрестности.

Отсюда следует, что $x(t)$ продолжаема по отрезку, параллельному вещественной оси, в точку $i\alpha$ и имеет в ней алгебраический характер.

Каждой точке t_0 сегмента $(i\alpha,\ i(\alpha+T))$ соответствует кружок, в котором $x(t)$ разлагается в ряд

$$\sum c_m(t-t_0)^{\frac{m}{n}}.$$

По лемме Гейне-Бореля можно выделить конечное число кружков, покрывающих сегмент и, следовательно, в нем имеется лишь конечное число алгебраических особенностей. Из изложенного выше вытекает возможность продолжения $x(t)$ по левому берегу мнимой оси. Вместе с этим мы получаем параметрическое представление l_x-кривой, как функции параметра t. Эта функция — кусочно-аналитическая, с периодом $iT = 2\pi(k\lambda - l\mu)\,i$.

Заметим, что при движении по левому берегу мнимой оси, l_x-кривая себя не пересекает. В самом деле пусть $\overline{x}$ — точка самопересечения l-кривой на римановой поверхности. В интервале длины T мнимой оси найдутся точки t_1, t_2 такие, что

$$x(t_1) = x(t_2) = \overline{x}.$$

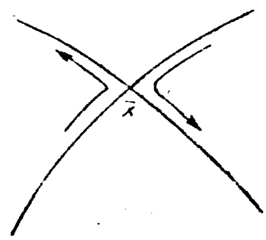

Рис. 4.

Элементы прямой функции

$$t_1(x),\quad t_2(x),$$

отличаясь на аддитивную мнимую постоянную, одинаково отображают окрестность $\overline{x}$ на окрестности t_1, t_2, переводя все точки l_x-кривой в окрестности $\overline{x}$ в точки мнимой оси. Обходу по левой полуокружности вокруг точки t_1 (или t_2) соответствует кривая, не имеющая, кроме концов, общих точек с l_x-кривой. Точка $\overline{x}$ соответствует точкам ветвления t_1, t_2; в ней l_x-кривая имеет угловую точку с углом $\frac{\pi}{p}$ между касательными и ее следует считать не точкой самопересечения, а точкой „самоприкасания“ (рис. 4).

Построенной l_x-кривой, вообще говоря, не исчерпываются все точки множества $\mathfrak{M}$ и мы можем для точки $\mathfrak{M}$, не лежащей на этой кривой, повторить описанный выше процесс, и получить новую l_x-кривую. Вследствие того, что каждая l_x-кривая лежит на конечном куске римановой поверхности и на расстоянии больше некоторого $\delta > 0$ от начала и от нулей функции $y(x)$, обходя при этом некоторые из упомянутых точек, число их необходимо конечно.

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно снова рассмотреть точку $\bar{x}$, в окрестности которой лежит бесконечное множество отрезков l_x-кривых и произвольную ветвь функции $t(x)$.

6°. По l_x-кривой на римановой поверхности функции $y(x)$ построим l-кривую в торообразном пространстве, находя координаты η, u, v из равенств

$$x = e^{-\lambda\eta} e^{iu}\ ; \quad y = e^{-\mu\eta} e^{iv}.$$

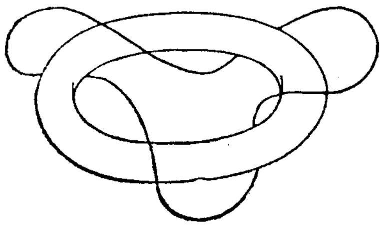

Рис. 5.

Так как x, y являются кусочно-аналитическими функциями от t, и когда x меняется по l_x-кривой, x и y отличны от 0 и ∞, то

$$\eta = -\frac{1}{\lambda}\ln|x|\ ; \quad u_0 \arg x\ ; \quad v = \arg y$$

являются также кусочно-аналитическими функциями параметра t и, следовательно, l-кривая в торообразном пространстве является кусочно-аналитической кривой. Так как либо x, либо y обходят точку нуль и аргумент по крайней мере одного из переменных должен испытывать приращение, равное целому кратному 2π, то l-кривая навивается на тор (рис. 5) так, что в торообразном пространстве она не может быть непрерывно деформируемой в точку.

Распределение нулей

Мы предположим сейчас, что образующие базиса показателей полинома нормированы так, что

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1\,.$$

Вообразим нормаль к поверхности тора (рис. 6), движущуюся вдоль винтовой линии

$$u = \lambda\xi\ ; \quad v = \mu\xi$$

тора $\eta = 0$. При своем движении нормаль пересекает l-кривую. Расстояние от начала координат до основания нормали по винтовой линии равно вещественной части корня, а длина нормали, взятая с соответствующим знаком, равна мнимой части его. Координаты η, u, v точек l-кривой мы будем считать сейчас функциями параметра $\theta = \frac{t}{i}$. Если

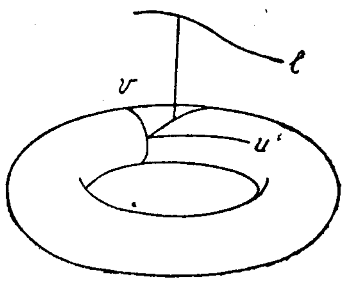

Рис. 6.

при обходе по l-кривой u испытывает приращение $2l\pi$, а $v - 2k\pi$, то период l-кривой будет

$$T = 2\pi(k\lambda - l\mu)\,.$$

Для выяснения геометрического смысла параметра θ поступим следующим образом. Пусть M_0 — первая (или одна из первых) точка кривой, которую встречает нормаль, двигаясь из начала координат в сторону возрастания ξ, а M— произвольная точка l-кривой. Через основание нормали, проходящей через M, проведем винтовую линию с угловым коэфициентом $\varrho = \frac{\mu}{\lambda}$. Ее уравнение будет

$$-\mu u + \lambda v - p = 0. \tag{8}$$

Здесь p —расстояние от начала координат может быть выбрано бесчисленным множеством способов; мы условимся выбирать его так, чтобы при непрерывном перемещении от M до M_0 по l-кривой выбранные значения p непрерывно изменялись от начального значения до нуля. Очевидно, p является одним из отрезков, отсекаемых кривой (8), на винтовой линии

$$\lambda u + \mu v = 0,$$

ортогональной ко всем винтовым линиям семейства (8). (Все эти соотношения удобно проследить в плоскости u, v, в которой тору отвечает сеть квадратов с вершинами в точках $2\pi m$, $2\pi n$, где m и n — целые числа). Далее

$$p = \lambda v - \mu u = \arg \frac{y^{\lambda}_{(x)}}{x^{\mu}} = \frac{t}{i} = \theta$$

и, по предыдущему, $p = \theta$ монотонно возрастает, когда M обходит l-кривую.

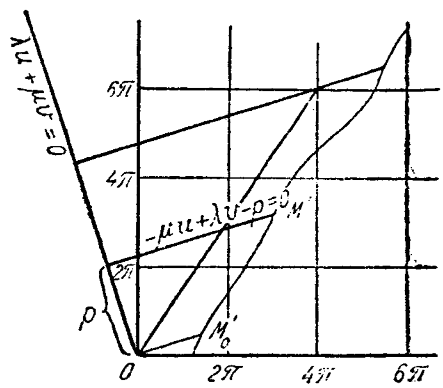

Рис. 7.

Для внесения порядка в следование нулей на винтовой линии

$$u = \lambda \xi, \; v = \mu \xi$$

мы рассмотрим на торе (рис. 7) кривую

$$v = \frac{k}{l} u,$$

которую назовем ординатором l-кривой. Эта кривая замкнута и при ее обходе u, v испытывают приращение $2l\pi$, $2k\pi$ соответственно. При взаимно простых k и l $(k, l) = 1$ ординатор является максимально упрощенным топологическим эквивалентом l-кривой. В том же случае, когда k и l имеют общий делитель d, l-кривая гомологична ординатору, взятому d раз или, как мы будем говорить, — d-кратному ординатору. С помощью винтовых линий (8), точно так же как и для l-кривой, мы установим соответствие между точками ординатора и значениями параметра θ.

Тогда отрезок AM' винтовой линии (8) между ординатором и l'-кривой (проекцией l-кривой на тор $\eta = 0$) является периодической функцией параметра θ с периодом

$$T = 2\pi (k\lambda - l\mu).$$

Витками винтовой линии назовем отрезки, на которые ординатор рассекает винтовую линию

$$u = \lambda\xi, \quad v = \mu\xi.$$

Вещественная часть α_p корня a_p состоит из p витков плюс поправка

$$AM' = \varphi(\theta_p).$$

Для вычисления длины витка и значения поправки AM' удобно перейти к плоскости u, v (рис. 8). Ординатору $v = \frac{k}{l} u$ на плоскости соответствует сеть параллельных прямых, проходящих через точки $(2\pi m, 2\pi n)$:

$$v - 2\pi n = \frac{k}{l}(u - 2\pi m). \tag{9}$$

Винтовой линии $u = \lambda\xi$, $v = \mu\xi$ соответствует прямая

$$\mu u - \lambda v = 0,$$

пересекающая прямые (9) последовательно в точках

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p, \ldots$$

Прямые системы (9) отсекают на оси абсцисс отрезки

$$u = \frac{2\pi(mk - nl)}{k}$$

и если d — общий наибольший делитель чисел k и l, $(k, l) = d$, то разность $mk - nl$ представляется в форме pd и, следовательно, уравнениям прямых (9) можно придать более удобную форму:

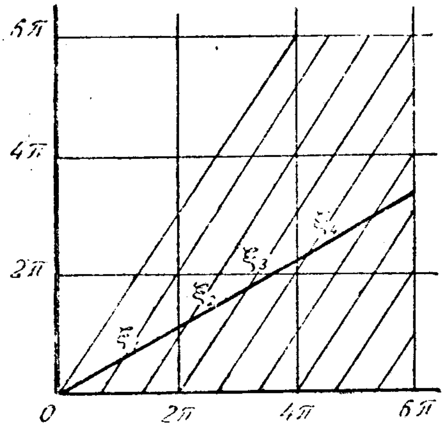

Рис. 8.

$$v = \frac{k}{l}\left(u - \frac{2\pi d}{k} p\right).$$

Положив здесь $p = 1$, найдем точку пересечения, с $\mu u - \lambda v = 0$ и далее ξ_1 — длину отрезка $0\xi_1$, т. е. длину витка

$$\xi_1 = \frac{2\pi d}{k\lambda - l\mu}.$$

Для определения поправки AM' необходимо найти значение параметра θ_p, соответствующее точке ξ_p пересечения ординатора и винтовой линии. Очевидно, что точке A (или, что то же самое, точке M) соответствует бесконечное множество значений θ, отличающихся друг от друга на целое кратное периода T. На прямой

$$v = \frac{k}{l}\left(u - \frac{2\pi d}{k} p\right)$$

возьмем точку P с координатами $(2\pi m, 2\pi n)$. Легко видеть, что m, n удовлетворяют равенству

$$km - ln = pd.$$

Через точку P проведем прямую с угловым коэфициентом $\sigma = \frac{\mu}{\lambda}$

$$\lambda(v - 2\pi n) = \mu(u - 2\pi m).$$

Отрезки, отсекаемые прямыми с угловым коэфициентом σ, проходящими через точки ξ_p и P, на прямой $\lambda u + \mu v = 0$ (т. е. их расстояния от начала координат) это 0 и

$$-2\pi m\mu + 2\pi n\lambda,$$

их разность, равная $0 - (-2\pi m\mu + 2\pi n\lambda) = 2\pi(m\mu - n\lambda)$, равна, очевидно, разности значений параметра θ для точек ξ_p и P, и так как точке P соответствует значение θ, кратное периоду T, то

$$2\pi(m\mu - n\lambda) = \theta_p$$

является одним из значений параметра θ для точки ξ_p.

Далее, если

$$k = k'd\,; \quad l = l'd,$$

то числа k' и l' будут уже взаимно простыми: $(k', l') = 1$ и, следовательно, существуют целые числа g и h такие, что

$$k'g - l'h = 1, \quad 0 < g < l', \quad 0 < h < k'.$$

Теперь из равенств:

$$k'm - l'n = p; \quad k'gp - l'hp = p$$

следует

$$\frac{m - gp}{l'} = \frac{n - hp}{k'} = \alpha,$$

где α — целое, и значит

$$\theta_p = 2\pi[(gp + \alpha l')\mu - (hp + \alpha k')\lambda] = 2\pi(g\mu - h\lambda)p + \alpha 2\pi(k'\lambda - l'\mu)$$

и, учитывая периодичность поправки φ и точки ординатора с периодом $T = 2\pi(k\lambda - l\mu)$, окончательно получим

$$\theta_p = 2\pi(g\mu - h\lambda)p + 2\pi(k\lambda - l\mu)\frac{r}{d} \quad 0 \leqslant r < d.$$

Таким образом, на каждую точку ξ_p приходится d, вообще говоря, различных поправок.

Полная поправка на корень

$$\Psi(\theta) = \varphi(\theta) + i\eta(\theta),$$

где $\eta(\theta)$—длина нормали, проходящей через точку M l-кривой, является также периодической функцией θ с периодом T.

Отсюда для корней, соответствующих одной l-кривой, имеем выражение

$$a_n = a_{md+r} = \frac{2\pi d}{k\lambda - l\mu}m + \Psi\left[2\pi(g\mu - h\lambda)m + 2\pi(k\lambda - l\mu)\cdot\frac{r}{d}\right],$$

которое для взаимно простых k и l $(d = 1)$ переходит в более простое

$$a_n = \frac{2\pi}{k\lambda - l\mu}\cdot n + \Psi[2\pi(g\mu - h\lambda)n].$$

Свойства поправки $\Psi(\theta)$

Из изложенного выше следует, что $\Psi(\theta)$ является периодической кусочно-аналитической функцией θ в интервале $(0, T)$. Действительно, находя абсциссу u_0 точки A пересечения ординатора и прямой (8), получим

$$u_0 = \frac{\theta l}{k\lambda - l\mu}$$

и, следовательно,

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{\lambda}(u - u_0) = \frac{1}{\lambda}\left\{\arg x(\theta) - \frac{\theta l}{k\lambda - l\mu}\right\}.$$

Кроме того,

$$\eta(\theta) = -\frac{1}{\lambda}\ln|x(\theta)|.$$

Таким образом, исключение могут составлять лишь точки

$$c_1,\ c_2, \ldots, c_k,$$

в которых не голоморфна функция $x(\theta)$. В этих точках $x(\theta)$, а значит и $\varphi(\theta)$, имеет разложение вида

$$P\left[\left(\theta - c_\nu\right)^{\frac{1}{n}}\right],$$

однако не одинаковое для $\varphi(\theta)$ справа и слева от точки c_ν, потому что при обходе θ вокруг c_ν по левому берегу вещественной θ-оси коэфициенты ряда $\ln x(\theta)$ умножаются на множители $e^{\frac{\pi}{n}i}$, в силу чего изменяется разложение для $\operatorname{Im}\{\ln x\}$.

В точках c_ν функция $\varphi(\theta)$ непрерывна, касательная же к кривой $y = \varphi(\theta)$ либо изменяется непрерывно, либо параллельна оси y (наиболее характерный случай), либо стремится к различным предельным положениям. В последнем случае мы можем, однако, утверждать, что одно из предельных положений параллельно оси ординат. В самом деле, если производная справа конечна, то в разложении

$$\operatorname{Im}\{\ln x(\theta)\} = \arg x(\theta) = \operatorname{Im}\{a_0 + a_1(\theta - c)^{\frac{1}{n}} + a_2(\theta - c)^{\frac{2}{n}} + \ldots + a_n(\theta - c) + \ldots\}$$

необходимо

$$\operatorname{Im} a_1 = \operatorname{Im} a_2 = \ldots = \operatorname{Im} a_{n-1} = 0,$$

и если справа $\theta - c = \varrho$, то слева $\theta - c = \varrho e^{i\pi}$ и

$$\operatorname{Im}\{\ln x(\theta)\} = \operatorname{Im}\left\{a_0 + a_1\varrho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\pi}{n}} + a_2\varrho^{\frac{2}{n}} e^{2i\frac{\pi}{n}} + \ldots + a_n\varrho e^{\pi i} + \ldots\right\}$$

и тогда, если производная слева конечна, то и

$$\operatorname{Im} a_1 e^{i\frac{\pi}{n}} = \operatorname{Im} a_2 e^{2i\frac{\pi}{n}} = \ldots = \operatorname{Im} a_{n-1} e^{(n-1)i\frac{\pi}{n}} = 0,$$

но это возможно лишь тогда, когда

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0.$$

В этом случае производные равны и точка c не является угловой. Заметим, что на торе $\eta=0$ обращение $\varphi'(\theta)$ в ∞ означает, что направление касательной совпадает с направлением σ винтовой линии так, что соответствующая точка проекции l-кривой на тор $\eta=0$ является точкой перегиба.

Заметим, что все сказанное относительно функции

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{\lambda}\left\{\operatorname{Im}\{\ln x\}-\frac{\theta l}{k\lambda-l\mu}\right\}$$

справедливо также и для функции

$$\eta(\theta)=\frac{1}{\lambda}\ln|x|=-\frac{1}{\lambda}\operatorname{Re}\{\ln x\}.$$

Рассмотрим теперь поведение функций $\varphi(\theta)$, $\eta(\theta)$ вблизи исключительных точек c_k. Из разложения в ряд $\ln x(\theta)$ мы получаем:

$$\varphi(\theta)=\varphi(c_k)+a_1(\theta-c_k)^{\frac{1}{n_k}}+a_2(\theta-c_k)^{\frac{2}{n_k}}+\ldots$$

$$\eta(\theta)=\eta(c_k)+b_1(\theta-c_k)^{\frac{1}{n_k}}+b_2(\theta-c_k)^{\frac{2}{n_k}}+\ldots$$

причем разложения справа и слева от точки c_k, вообще говоря, различны. Отсюда, очевидно, следует неравенства:

$$|\varphi(\theta)-\varphi(c_k)|<A|\theta-c_k|^{\alpha_k};\qquad|\varphi'(\theta)|<\alpha_k A|\theta-c_k|^{\alpha_k-1}$$

$$|\eta(\theta)-\eta(c_k)|<B|\theta-c_k|^{\alpha_k};\qquad|\eta'(\theta)|<\alpha_k B|\theta-c_k|^{\alpha_k-1},$$

где

$$\alpha_k=\frac{1}{n_k}\quad\text{и}\quad|\theta-c_k|<h_k.$$

1°. Докажем теперь, что функции $\varphi(\theta)$, $\eta(\theta)$ удовлетворяют условию Липшица в интервале $(0, T)$ с показателем $a=\min\alpha_k$, т. е.

$$|z(\theta_1)-z(\theta_2)|<A|\theta_1-\theta_2|^{\alpha},$$

где через $z(\theta)$ обозначена любая из функций $\varphi(\theta)$, $\eta(\theta)$.

Прежде всего покажем, что условие Липшица имеет место в каждой из исключительных окрестностей

$$|\theta-c_k|\leqslant h,\quad h=\min h_k.$$

(Вне этих окрестностей $z(\theta)$ имеет ограниченную производную и выполнение условия Липшица очевидно). Доказательство приведем для правой половины окрестности, т. е. для сегмента $[c, c+h]$.

Очевидно, при $\theta_1\leqslant\theta_2$

$$|z(\theta_1)-z(\theta_2)|=\left|\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}z'(\theta)\,d\theta\right|\leqslant\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}|z'(\theta)|\,d\theta<\alpha A\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}(\theta-c)^{\alpha-1}\,d\theta.$$

Таким образом,

$$|z(\theta_1)-z(\theta_2)|<A\left[(\theta_2-c)^{\alpha}-(\theta_1-c)^{\alpha}\right].$$

Положим далее

$$f(\theta)=[(\theta-c)^{\alpha}-(\theta_1-c)^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}$$

и применим формулу конечных приращений Лагранжа

$$f(\theta_2)-f(\theta_1)=f'(\theta_0)(\theta_2-\theta_1),$$

где $\theta_1<\theta_0<\theta_2$. Легко видеть, что

$$f'(\theta_0)=\left[1-\left(\frac{\theta_1-c}{\theta_0-c}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}<1$$

и, следовательно,

$$|z(\theta_2)-z(\theta_1)|<A|\theta_2-\theta_1|^{\alpha}.$$

Теперь сегмент $[0,T]$ можно разбить на $3p+1$ сегментов

$$[0,c_1-h],\quad [c_1-h,c_1],\quad [c_1,c_1+h],\ldots [c_p+h,T],$$

в каждом из которых выполняется условие Липшица. Обозначим их через $[\alpha_\nu,\alpha_{\nu+1}]$. Если теперь

$$\alpha_\nu<\theta_1\leqslant\alpha_{\nu+1}<\alpha_{\nu+2}<\ldots<\alpha_{\nu+r-1}<\theta_2\leqslant\alpha_{\nu+r},$$

то выполняемость условий Липшица следует из неравенства

$$|z(\theta_1)-z(\theta_2)|\leqslant|z(\theta_1)-z(\alpha_{\nu+1})|+\ldots+|z(\alpha_{\nu+r-1})-z(\theta_2)|<3pM|\theta_1-\theta_2|^{\alpha}.$$

2°. Докажем теперь, что $\varphi(\theta)$ и $\eta(\theta)$ являются функциями с ограниченной вариацией на сегменте $[0,T]$.

Ограниченность вариации также достаточно показать в сегменте $[c,c+h]$. Мы имеем

$$|z(\theta_{k+1})-z(\theta_k)|\leqslant\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}|z'(\theta)|\,d\theta$$

и, следовательно,

$$\operatorname*{var}_{(c,\,c+h)} z(\theta)\leqslant\int_c^{c+h}|z'(\theta)|\,d\theta\leqslant\alpha M\int_c^{c+h}(\theta-c)^{\alpha-1}\,d\theta=Mh^{\alpha}.$$

3°. Из 1° и 2° вытекает, что функция

$$\Psi(\theta)=\varphi(\theta)+i\eta(\theta)$$

разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье (см., например, Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, стр. 138).

4°. Но, как мы уже знаем (см. введение, теорема III), функция $\Psi(\theta)$, разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, удовлетворяет условию Крейна-Левина: сумма

$$\left|\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(k+\tau)-\Psi(k)}{k^2+a^2}\cdot k\right|<M$$

равномерно ограничена для всех целых τ.

Разложение на множители

1°. Из изложенного выше следует, что каждой l-кривой соответствует класс (B) нулей почти периодического полинома и, если $\mathfrak{M}$ разбивается на N l-кривых, то все множество нулей разбивается на N классов $\{\alpha_\nu\}$, каждый со своей функцией Ψ, удовлетворяющей условию Крейна-Левина. В силу этого, бесконечное произведение, составленное по нулям $\{\alpha_\nu\}$, порожденными одной l-кривой,

$$f(z) = \text{v.p.} \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{1)}$$

представляет собой целую почти периодическую функцию класса $[\Delta]$, являющуюся делителем почти периодического полинома $P(z)$. Такой делитель мы будем называть примарным множителем в пространстве $R(\lambda, \mu)$. Возможно, что, l-кривая исчерпывает все множество $\mathfrak{M}$. Если при этом l-кривая не распадается на отдельные связные части, то мы назовем полином $P(z)$ неприводимым в пространстве $R(\lambda, \mu)$.

2°. Докажем теперь, что примарный множитель $f(z)$ в $R(\lambda, \mu)$ принадлежит к целому базису λ, μ. Положим

$$\overline{\Psi}(\theta) = \Psi[2\pi(g\mu - h\lambda)\theta]$$

и заметим, что, если $\overline{\Psi}(\theta)$ периодическая функция, разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, то функцию переменного τ

$$L_\tau(\overline{\Psi}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\Psi}(k+\tau) - \overline{\Psi}(k)}{k^2 + a^2} \cdot k = \chi(\tau),$$

определенную с помощью ряда для целых значений τ и значений, сравнимых с целым числом по модулю $\dfrac{T}{\theta_1} = \dfrac{k\lambda - l\mu}{g\mu - h\lambda}$ (т.е. для плотного множества значений τ), можно доопределить как непрерывную функции для всех вещественных чисел τ.

В самом деле, функционал

$$L_\tau(\overline{\Psi}) = \lim \sum_{-n}^{n} \frac{\overline{\Psi}(k+\tau) - \overline{\Psi}(k)}{k^2 + a^2} k = \lim L_\tau^{(n)}(\overline{\Psi}),$$

являясь слабым пределом последовательности непрерывных функционалов $L_\tau^{(n)}(\overline{\Psi})$ в пространстве функций $\overline{\Psi}_k$ с нормой $\|\overline{\Psi}\| = \max|\overline{\Psi}|$ будет, в силу известной теоремы функционального анализа, также непрерывным функционалом, и поэтому, если

$$\overline{\Psi}(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k\theta}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty,$$

то

$$L_\tau(\overline{\Psi}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k L_\tau(e^{i\lambda_k\theta}).$$

---

[1] $\text{v.p.} \prod_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=-n}^{k=+n}$.

Выполняя несложные преобразования, получим:

$$\vartheta(\lambda) = L(e^{i\lambda\theta}) = (e^{i\lambda\tau}-1)\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{k\sin k\lambda}{k^2+a^2} = \begin{cases} \dfrac{\pi\,\mathrm{sh}\,a(\pi-\lambda)}{\mathrm{sh}\,a}(e^{i\lambda\tau}-1) & (0\leqslant\lambda\leqslant\pi) \\ \dfrac{-\pi\,\mathrm{sh}\,a(\pi+\lambda)}{\mathrm{sh}\,a}(e^{i\lambda\tau}-1) & (0\geqslant\lambda\geqslant-\pi), \end{cases}$$

где значение λ приводится по модулю 2π к значению $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$.

Таким образом,

$$L_\tau(\overline{\Psi}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\vartheta(\lambda_k) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k(e^{i\lambda_k\tau}-1),$$

где снова

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|a_k| < \infty,$$

в силу чего ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k(e^{i\lambda_k\tau}-1)$$

сходится равномерно и является непрерывной функцией, совпадающей с $L_\tau(\overline{\Psi})$ на плотном множестве точек. Следовательно, если $\tau\to n\dfrac{T}{\theta_1}$, то

$$\chi(\tau) = \sum\frac{\overline{\Psi}(k+\tau)-\overline{\Psi}(k)}{k^2+a^2}\cdot k\to 0.$$

Установим теперь связь между целыми числами τ, для которых $|\chi(\tau)|<\delta$, и ε-смещениями функции $f(z)$. С этой целью положим

$$\theta(x+ia) = \ln f(z)e^{i\frac{\pi}{\xi_1}x}; \quad z = x+ia; \quad \xi_1 = \frac{2\pi}{k\lambda-l\mu}$$

и рассмотрим при достаточно больших a модуль разности

$$\theta(x+\xi_1\tau+ia)-\theta(x+ia) =$$

$$= \text{v.p.}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\Psi}(k+\tau)-\overline{\Psi}(k)}{\xi_1 k+\overline{\Psi}(k)-x-ia} - \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\overline{\Psi}(k+\tau)-\Psi(k)}{\xi_1 k+\overline{\Psi}(k)-x-ia}\right)^2 + \ldots$$

откуда получаем:

$$|\theta(x+\xi_1\tau+ia)-\theta(x+ia)| \leqslant$$

$$\leqslant A\left|\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\Psi}(k+\tau)-\overline{\Psi}(k)}{k^2+a^2}\cdot k\right| + B\sup|\overline{\Psi}(k+\tau)-\overline{\Psi}(k)|.$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что, если целое число τ является δ-смещением функции $\overline{\Psi}(\theta)$, то $\xi_1\tau$ является ε-смещением функции $f(z)$. Пусть

$$f(z)\sim\sum c_n e^{i\lambda_n z}.$$

По известным свойствам почти периодических функций для этих τ удовлетворяются неравенства

$$\left|\lambda_n\frac{\tau}{\xi_1}\right| < \varepsilon_1 \qquad (\mathrm{mod}\,2\pi)$$

для каждого фиксированного n (см., например, Безикович, цит. произв.). Таким образом, для целых τ из неравенства

$$\left|\frac{g\mu - h\lambda}{k\lambda - l\mu}\tau\right| < \delta \qquad (\text{mod } 1) \tag{10}$$

вытекает неравенство

$$\left|\frac{\lambda_n}{k\lambda - l\mu}\tau\right| < \varepsilon \qquad (\text{mod } 1). \tag{11}$$

Отсюда, как сейчас будет показано, вытекает, что

$$\lambda_n = (g\mu - h\lambda)s_n + (k\lambda - l\mu)r_n, \tag{12}$$

где s_n и r_n — целые числа.

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{g\mu - h\lambda}{k\lambda - l\mu}; \qquad \beta = \frac{\lambda_n}{k\lambda - l\mu}$$

и докажем, что три числа: 1, α, β линейно зависимы. В самом деле, в противном случае, по известной теореме Кронекера, существует число ξ такое, что

$$|\xi| < \varepsilon (\text{mod } 1); \quad |\alpha\xi| < \varepsilon (\text{mod } 1); \quad \left|\beta\xi + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad (\text{mod } 1).$$

Отсюда вытекает существование такого целого τ, что

$$|\xi - \tau| < \varepsilon \ (\text{mod } 1); \quad |\alpha\tau| < \varepsilon_1 (\text{mod } 1); \quad \left|\beta\tau + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad (\text{mod } 1)$$

и два последних неравенства противоречат тому, что из (10) следует (11). Таким образом,

$$\beta = \frac{p}{q}\alpha + \frac{p_1}{q_1},$$

где p, q, p_1, q_1 — целые числа, q, $q_1 > 0$. Докажем, что $q = q_1 = 1$. Предположим, например, что $q > 1$. По теореме Кронекера существуют целые числа n_1, n

$$\left|\alpha\frac{q_1}{q}n_1 - \frac{1}{q} - n\right| < \delta.$$

Положим $n_1 q_1 = \tau$. Тогда

$$|\alpha\tau - (qn + 1)| < \delta_1$$

$$\left|\left(\frac{p}{q}\alpha + \frac{p_1}{q_1}\right)\tau - \frac{p}{q} - (n_1 p_1 - np)\right| =$$

$$= \left|\frac{p}{q}\alpha\tau + \frac{p_1}{q_1}\tau - n_1 p_1 - np - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p}{q}\alpha\tau - \frac{p}{q} - np\right| < \delta_1 \frac{p}{q},$$

а это противоречит тому, что

$$\left|\left(\frac{p}{q}\alpha + \frac{p_1}{q_1}\right)\tau\right| < \varepsilon \quad (\text{mod } 1).$$

Таким образом, утверждение 2° полностью доказано. Заметим еще, что так как $kg - lh = 1$, то $g\mu - h\lambda$, $k\lambda - l\mu$ линейно независимы.

3°. Для того, чтобы получить почти периодический делитель, принадлежащий не к целому базису, поступаем следующим образом:

Заменим базис λ, μ базисом

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{M}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{N},$$

где M и N — целые положительные числа. Алгебраическое уравнение, соответствующее полиному (1) с преобразованным базисом

$$\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

получается из уравнения

$$P(x, y) = 0$$

заменой x, y на $\bar{x}^M$, $\bar{y}^N$ соответственно так, что

$$\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = P(\bar{x}^M, \bar{y}^N).$$

Так как l-кривую мы получаем, выбирая из решений $P(x, y) = 0$ те, которые удовлетворяют условию

$$|x|^\mu = |y|^\lambda,$$

и, строя в торообразном пространстве $R(\lambda, \mu)$ точки с координатами

$$u = \arg x; \quad v = \arg y; \quad \eta = -\frac{\ln|x|}{\lambda},$$

то для $\bar{l}$-кривой в пространстве $R(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ мы должны выбрать аналогично те решения $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, для которых

$$|\bar{x}|^{\bar{\mu}} = |\bar{y}|^{\bar{\lambda}}, \tag{13}$$

и построить точки с координатами

$$\bar{u} = \arg \bar{x}, \quad \bar{v} = \arg \bar{y}; \quad \bar{\eta} = -\frac{\ln|\bar{x}|}{\bar{\lambda}}.$$

Возводя соотношение (13) в степень MN, получаем

$$|\bar{x}^M|^\mu = |\bar{y}^N|^\lambda,$$

и так как $\bar{x}^M$, $\bar{y}^N$ удовлетворяют соотношению

$$P(\bar{x}^M, \bar{y}^N) = 0,$$

то на римановых поверхностях x, $\bar{x}$ координаты точек кривых $\bar{l}$ и l связаны соотношениями

$$\bar{x}^M = x, \quad \bar{y}^N = y,$$

а в торообразных пространствах $\bar{R}$ и R соотношениями:

$$M\bar{u} = u; \quad N\bar{v} = v; \quad \bar{\eta} = \eta$$

(последнее в силу того, что

$$\bar{\eta} = -\frac{\ln|\bar{x}|}{\bar{\lambda}} = -\frac{\ln|\bar{x}^M|}{\lambda} = -\frac{\ln|x|}{\lambda} = \eta.$$

Кроме точки $\bar{x}, \bar{y}$ $\bar{l}$-кривой, в точку x, y l-кривой переходят еще точки

$$\bar{x}e^{\frac{2\pi\alpha}{M}i}, \quad \bar{y}e^{\frac{2\pi\beta}{N}i} \qquad 0 \leqslant \alpha < M; \quad 0 \leqslant \beta < N, \tag{14}$$

где α, β — целые, а в точку u, v, η — точки

$$\bar{u} + \frac{2\pi\alpha}{M}, \quad \bar{v} + \frac{2\pi\beta}{N}, \eta,$$

которые могут и не принадлежать различным $\bar{l}$-кривым (например, при некоторых сдвигах на $\frac{2\pi\alpha}{M}$, $\frac{2\pi\beta}{N}$ вдоль осей $\bar{u}, \bar{v}$ $\bar{l}$-кривая может переходить в самое себя). При обходе точкой $(\bar{\eta}, \bar{u}, \bar{v})$ по $\bar{l}$-кривой, соответствующая точка (η, u, v) описывает l-кривую. Пусть при полном обходе $\bar{l}$-кривой $\arg \bar{x}$ и $\arg \bar{y}$ испытывают приращения $2\pi\bar{l}$ и $2\pi\bar{k}$ соответственно, а однократному обходу $\bar{l}$-кривой отвечает P-кратный обход l-кривой. Предположим, что точка x, y l-кривой и ни одна из точек (14) не являются точками самосоприкасания. При одном обходе по l-кривой точка $(\bar{x}, \bar{y})$ переходит в одну из точек (14). После P обходов l-кривой точка $(\bar{x}, \bar{y})$ возвращается в исходное положение. Таким образом, $\bar{l}$-кривая проходит через P точек (14). Все эти точки различны и кроме этих P точек $\bar{l}$-кривая не содержит точек (14). Рассматривая $\bar{l}$-кривые, проходящие через точки (14), мы убеждаемся, что точки (14) лежат на $Q = \frac{MN}{P}$ различных $\bar{l}$-кривых. MN, следовательно, делится на P и

$$MN = PQ.$$

Эти Q $\bar{l}$-кривые переходят друг в друга при упомянутых сдвигах в пространстве $\bar{R}$, а при преобразовании

$$M\bar{u} = u; \quad N\bar{v} = v; \quad \bar{\eta} = \eta, \tag{15}$$

в $\bar{l}$-кривую пространства R.

Возникает вопрос: как на l-кривой выделить корни, соответствующие одному экземпляру $\bar{l}$-кривой, и как аналитически выделить из класса (B), соответствующего l-кривой, корни делителя $\bar{f}(z)$?

Преобразование (15) распространим на все пространство $\bar{R}$. Тогда (a) точки $\bar{l}$-кривой переходят в точки l-кривой:

(b) $$\bar{\lambda}\bar{v} = \bar{\mu}\bar{u}, \quad \frac{\lambda}{\mu}\bar{v} = \frac{\mu}{N}\bar{u}; \quad \frac{\lambda v}{MN} = \frac{\mu u}{MN},$$

т. е. винтовая линия $\bar{R}$ переходит в винтовую линию R.

(c) $\bar{v} = \frac{\bar{k}}{\bar{l}}\bar{u}$; $\frac{v}{N} = \frac{\bar{k}}{\bar{l}}\frac{u}{M}$, но так как числа $\bar{k}$, $\bar{l}$, k l, M, N, P связаны основными соотношениями

$$\bar{k}N = kP; \quad \bar{l}M = lP, \tag{16}$$

то ординатор $\bar{R}$ переходит в ординатор R.

(d) Найдем связь между периодами $\bar{T}$, T

$$\bar{T} = 2\pi(\bar{k}\bar{\lambda} - \bar{l}\bar{\mu}) = 2\pi\left(\bar{k}\frac{\lambda}{M} - \bar{l}\frac{\mu}{N}\right) =$$

$$= 2\pi\frac{\bar{k}N\lambda - \bar{l}M\mu}{MN} = 2\pi(k\lambda - \mu l) : Q = T : Q$$

(e) $$\bar{\theta} = \bar{\lambda}\arg\bar{y} - \bar{\mu}\arg\bar{x} = \frac{\lambda}{M}\cdot\frac{\arg y}{N} - \frac{\mu}{N}\cdot\frac{\arg x}{M} = \frac{\theta}{MN}.$$

Из (a), (b), (c) следует, что поправке $\bar{\varphi}$ соответствует отрезок винтовой линии между ординатором и l-кривой, состоящий из нескольких витков ξ_1 и поправки φ. Таким образом,

(f) $$\bar{\Psi}(\bar{\theta}) = \xi_1 R + \Psi[\theta + 2\pi(g\mu - h\lambda)R].$$

Предположим сначала, что k, l — взаимно простые. Тогда, как мы увидим в дальнейшем, $\bar{k}$, $\bar{l}$ будет также взаимно просты. Пусть

$$\bar{k}\bar{g} - \bar{l}\bar{h} = 1, \quad kg - lh = 1.$$

Используя основное соотношение (16), мы получим

$$\bar{k}gN = \bar{l}hM = kgP - lhP = P; \quad \bar{k}\bar{g}P - \bar{l}\bar{h}P = P.$$

Отсюда получаем пропорцию

$$\frac{-gN + \bar{g}P}{\bar{l}} = \frac{-hM + \bar{h}P}{\bar{k}} = \alpha$$

и следовательно,

$$2\pi(\bar{g}\bar{\mu} - \bar{h}\bar{\lambda}) = 2\pi\frac{\bar{g}M\mu - \bar{h}N\lambda}{MN\cdot P}\cdot P =$$

$$= 2\pi\frac{M\mu(gN + \alpha\bar{l}) - N\lambda(hM + \alpha\bar{k})}{MNP} = 2\pi\frac{\mu g - \lambda h}{P} - \frac{\alpha T}{MN}.$$

Таким образом, используя (e), (f), мы получим

$$\bar{\Psi}[2\pi(\bar{g}\bar{\mu} - \bar{h}\bar{\lambda})n] = \bar{\Psi}\left[2\pi\frac{g\mu - h\lambda}{P}n - \frac{\alpha T}{MN}\cdot n\right] =$$

$$= \Psi[2\pi(g\mu - h\lambda)(Qn + R)] + \xi_1 R.$$

Далее

$$\bar{\xi}_n = \frac{2\pi}{\bar{k}\bar{\lambda} - \bar{l}\bar{\mu}}\cdot n = \frac{2\pi MN}{kP\lambda - lP\mu}\cdot n = \frac{2\pi Q}{kl - l\mu}\cdot n = \xi_1 Qn = \xi_{Qn}$$

и окончательно

$$\bar{a}_n = \bar{\xi}_n + \bar{\Psi}[2\pi(\bar{g}\bar{\mu} - \bar{h}\bar{\lambda})n] = \xi_{Qn+R} + \Psi[2\pi(g\mu - h\lambda)(Qn + R)] = a_{Qn+R}.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $(\bar{k}, \bar{l}) = \bar{d}$; $(k, l) = d$; т. е.

$$\bar{k} = \bar{k}'\bar{d}; \quad \bar{l} = \bar{l}'\bar{d}; \qquad k = k'd; \quad l = l'd.$$

Тогда из основного соотношения (16) следует

$$\bar{k}'\bar{d}N = k'dP; \quad \bar{l}'\bar{d}M = l'dP. \tag{16'}$$

Из того, что $(k', l') = 1$, вытекает, что

$$\frac{dP}{\bar{d}} = P_1$$

есть целое число. Записав основные соотношения в виде

$$\bar{k}'\bar{d}MN = k'MdP\,; \quad \bar{l}'\bar{d}MN = l'NdP$$

и учитывая, что $(\bar{k}', \bar{l}') = 1$, мы получим, что

$$\frac{\bar{d}MN}{dP} = Q_1 \tag{17}$$

есть также целое число, причем

$$MN = P_1 Q. \tag{18}$$

Определив $\bar{g}$, $\bar{h}$, g, h из равенств

$$k'g - l'h = 1, \quad \bar{k}'\bar{g} - \bar{l}'\bar{h} = 1,$$

мы умножим первое соотношение на dP

$$k'dPg - l'dPh = dP$$

и заменим $k'dP$, $l'dP$ по формулам (16′)

$$\bar{k}'\bar{d}Ng - \bar{l}'\bar{d}Mh = dP.$$

Разделив на $\bar{d}$, получим

$$\bar{k}'Ng - \bar{l}'Mh = P_1$$

и сопоставляя с

$$\bar{k}'\bar{g}P_1 - \bar{l}'\bar{h}P_1 = P_1$$

найдем пропорцию

$$\frac{\bar{g}P_1 - gN}{\bar{l}'} = \frac{\bar{h}P_1 - hM}{\bar{k}'} = \alpha, \tag{19}$$

где α — целое число.

С помощью формул (17), (18), (19) преобразуем выражение для $\bar{\vartheta}_m$ аргумента поправки $\bar{\psi}$ на m-ый корень делителя $\overline{f(z)}$.

$$\bar{\theta}_m = \bar{\theta}_{n\bar{d}+r} = 2\pi(\bar{g}\mu - \bar{h}\lambda)\,n + 2\pi(\bar{k}'\lambda - \bar{l}'\mu)\cdot \bar{r}.$$

Мы имеем

$$\bar{\theta}_m = 2\pi\frac{\bar{g}M\mu - \bar{h}N\lambda}{MN}\cdot n + 2\pi\frac{\bar{k}'N\lambda - \bar{l}'M\mu}{MN}\cdot r =$$

$$= 2\pi\frac{M(gN + \alpha\bar{l}')\mu - N(hM + \alpha\bar{k}')\lambda}{MNP_1}\cdot n +$$

$$+ 2\pi\frac{k'\lambda - l'\mu}{MN\bar{d}}\,dPr = 2\pi\frac{g\mu - h\lambda}{MN}\,Q_1 n + 2\pi\frac{\left(\bar{l}'\frac{M}{N} - \bar{k}'\frac{\lambda}{M}\right)}{P_1}\,\alpha\cdot n +$$

$$+ 2\pi\frac{k'\lambda - l'\mu}{MN}\cdot P_1 r = 2\pi\frac{g\mu - h\lambda}{MN}\,Q_1 n + 2\pi\frac{k'\lambda - l'\mu}{MN}(\alpha n + P_1 r).$$

Учитывая соотношение между поправками (d), мы получим

$$\bar{a}_{n\bar{d}+r} = \frac{2\pi}{\bar{k}'\bar{\lambda} - \bar{l}'\bar{\mu}} \cdot n + \bar{\Psi}[2\pi(\bar{g}\bar{\mu} - \bar{h}\bar{\lambda})n + 2\pi(\bar{k}'\bar{\lambda} - \bar{l}'\bar{\mu})r] =$$

$$= \frac{2\pi}{k'\lambda - l'\mu}(Q_1 n + R) + \Psi[2\pi(g\mu - h\lambda)(Q_1 n + R) + 2\pi(k'\lambda - l'\mu)(\alpha n + P_1 r)]. \quad (e)$$

Здесь возникает следующий вопрос: будет ли Ψ при $r = 0,1 \ldots d$ принимать различные значения? Что это действительно так, показывает следующее рассуждение:

$\bar{l}$-кривая, P-точками $A_0, A_1 \ldots A_{P-1}$, где u, v — координаты точки A_r

$$\bar{u} + \frac{2\pi}{M}\alpha_r, \quad v + \frac{2\pi}{N}\beta_r; \qquad 0 \leqslant \beta_r < N; \quad 0 \leqslant \alpha_r < M$$

разбивается на P отрезков. Пусть эти точки перенумерованы в порядке их следования на $\bar{l}$-кривой. Участкам $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{P-1}A_0$ отвечает в R l-кривая. Так как при их обходе обходится в R, l-кривая и, следовательно, координата u возрастает на $2\pi l$, v на $2\pi k$, то координаты A_r могут быть записаны в виде:

$$\bar{u} + \frac{2\pi lr}{M}; \quad \bar{v} + \frac{2\pi kr}{N}$$

и для значений r от 0 до $P-1$ эти точки различны. При обходе всей $\bar{l}$-кривой мы возвращаемся в точку A_0 с возросшими значениями $\bar{u}$, $\bar{v}$ на $2\pi\bar{l}$, $2\pi\bar{k}$ соответственно. Таким образом,

$$\frac{2\pi lP}{M} = 2\pi\bar{l}; \qquad \frac{2\pi kP}{N} = 2\pi\bar{k}.$$

Отсюда следует, что числа P и $\bar{d}$ взаимно простые. В самом деле, если $\delta = (P, \bar{d}) > 1$, то, разделив последнее соотношение на δ, мы имеем:

$$2\pi\frac{lP}{M\delta} = 2\pi\frac{\bar{l}}{\delta}; \quad 2\pi\frac{kP}{N\delta} = 2\pi\frac{\bar{k}}{\delta},$$

так что A_0, $A_{\frac{P}{\delta}}$ изображают одну и ту же точку на торе, что невозможно. Из соотношения $\bar{d}P_1 = dP$ следует, что d делится на $\bar{d}$ [в частности, если $(k, l) = 1$, то и $(\bar{k}, \bar{l}) = 1$].

Кроме того, при $0 < r < d$ $P_1 r$ не делится на d, так как если $P_1 r = dq$, то $\bar{d}P_1 r = \bar{d}dq = dPr$ или

$$\bar{d}q = Pr,$$

что невозможно, так как

$$(\bar{d}, P) = 1 \quad \text{и} \quad 0 < r < \bar{d}.$$

Таким образом, при фиксированном n и $r = 0, 1, \ldots, d-1$,

$$2\pi(k'\lambda - l'\mu)(\alpha n + P_1 r) \neq 0 \qquad (\text{mod } T),$$

т. е. при различных r в формуле (e) поправка принимает различные значения.

Результаты этого параграфа говорят о том, что делители в пространстве $R\left(\frac{\lambda}{M}, \frac{\mu}{N}\right)$ могут быть получены с помощью правильног просеивания нулей делителя $R(\lambda, \mu)$. Из изложенного выше ясно, какой смысл следует придавать термину „правильное просеивание".

4°. Рассмотрим теперь обратную задачу. Нули, принадлежащие одной l-кривой основного пространства $R(\lambda, \mu)$, разобьем на группы, выпуская из последовательности нулей $Q-1$ следующих друг за другом в порядке их нумерации, т.е. на группы

$$a_{nQ+R}.$$

Канонические произведения, составленные по этим нулям, являются снова целыми почти периодическими функциями класса $[\Delta]$, так как для новых поправок Ψ также, очевидно, удовлетворяется условие Крейна-Левина.

Найдем, к какому базису принадлежит каждый из этих Q делителей. Для простоты рассмотрим случай $(k, l)=1$.

Положим

$$\bar{\Psi}_R(n) = \Psi[2\pi(g\mu - h\lambda)(Qn+R)] + \frac{2\pi}{k\lambda - l\mu}\cdot R.$$

Тогда

$$\bar{a}_n = a_{nQ+R} = \frac{2\pi}{k\frac{\lambda}{Q} - l\frac{\mu}{Q}}\cdot n + \bar{\Psi}_R(n)$$

и, как в параграфе 2°, получим для показателей делителя

$$\bar{A}_n = \left(g\frac{\mu}{Q} - h\frac{\lambda}{Q}\right)s_n + \left(k\frac{\lambda}{Q} - l\frac{\mu}{Q}\right)r_n. \tag{20}$$

Таким образом, делители принадлежат к базису $\frac{\lambda}{Q}, \frac{\mu}{Q}$. Их нули интерпретируются точками торообразного пространства $R\left(\frac{\lambda}{Q}, \frac{\mu}{Q}\right)$. Заметим, что формула (16) сейчас принимает вид:

$$\bar{k}Q = kP; \quad \bar{l}Q = lP.$$

P делится на Q и так как $\bar{k}$ и $\bar{l}$ также должны быть взаимно простые, то

$$\bar{k} = k, \quad \bar{l} = l,$$

что вполне согласуется с формулой (20), которую мы могли бы получить, рассматривая связь между торообразными пространствами $R\left(\frac{\lambda}{Q}, \frac{\mu}{Q}\right)$ и R.

5°. Заметим еще, что по теореме III введения все делители, получаемые описанным процессом, разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье.

6°. Канонические произведения, составленные по нулям, соответствующим отдельным l-кривым, и их произведения во всевозможных сочетаниях еще не исчерпывают всех делителей класса $R(\lambda, \mu)$, т. е. делителей, разлагающихся в ряды Фурье с показателями, принадлежащими к целому модулю с базисом λ, μ.

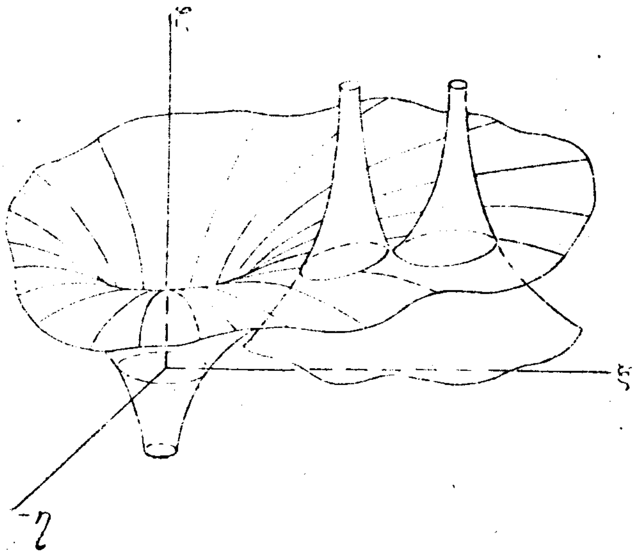

Рис. 9.

Причины этого коренятся в следующем:

Во-первых, l-кривая может распадаться на отдельные замкнутые кривые, негомологичные нулю. Что это может иметь место, легко увидеть на следующем примере (рис. 9). Пусть x_0, $x_0+\varepsilon$ — два близких друг другу полюса на римановой поверхности функции $y(x)$. При больших $\sigma = \frac{\mu}{\lambda}$ пересечение двух поверхностей $\zeta = \lambda \ln |y(x)|$; $\zeta = \mu \ln |x|$ дает две отдельные l_x- ривые и есть такое меньшее первое значение $\sigma = \sigma_0$, при котором эти две кривые сольются в одну.

Отдельные части этой кривой снова порождают делители класса $R(\lambda, \mu)$.

Во-вторых, если полином $P(x, y)$ приводим и является произведением двух полиномов: $P(x, y) = P_1(x, y) \cdot P_2(x, y)$, то l-кривая $P_1(x, y)$ может пересекаться с l-кривой полинома P_2 в q точках A_s $s=1, 2 \ldots q$ и мы можем, комбинируя отрезки A_sA_{s+1} этих кривых, составить такие замкнутые „ломаные“ кривые, которые определят новые делители класса $R(\lambda, \mu)$ (рис. 10).

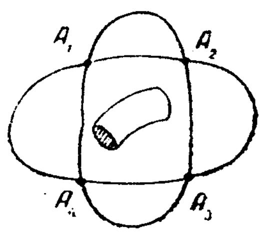

Рис. 10.

В связи с этим для того, чтобы перечислить все делители класса $R(\lambda, \mu)$, необходимо уточнить понятие примарного множителя. Мы будем пользоваться здесь терминами топологии ввиду того, что они охватывают случай любого числа измерений, т. е. любого почти периодического полинома.

Пусть l-произвольный цикл из $\mathfrak{M}$, негомологичный нулю. L — ординатор — простейший топологический эквивалент. Цикл l назовем правильным, если при проектировании цикла l на ординатор L винтовыми геликоидами индекс покрытия имеет постоянное значение d.

Примарным множителем в пространстве $R(\lambda, \mu)$ (или класса $R(\lambda, \mu)$) мы назовем каноническое произведение

$$E(z) = \text{v. p.} \prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \left(1 - \frac{z}{a_m}\right),$$

составленное по нулям, порожденным правильным циклом.

Для того, чтобы получить теперь все возможные делители класса $R(\lambda, \mu)$, достаточно образовать все возможные произведения примарных множителей. Число примарных множителей данного класса конечно, так как l-кривых конечное число и они пересекаются лишь в конечном числе точек в силу их аналитичности.

Произвольный делитель

В этом разделе мы докажем, что любой почти периодический делитель полинома экспоненциального типа принадлежит к некоторому классу $R\left(\frac{\lambda}{M}, \frac{\mu}{N}\right)$ и может быть получен перемножением примарных множителей пространства. Этим самым будет доказано, что l-кривые дают исчерпывающую картину распределения нулей почти периодических делителей $f(z)$ полинома $P(z)$.

Доказательство этого фундаментального факта довольно сложно и разбивается на три последовательных этапа. Прежде всего мы покажем, что показатели произвольного почти периодического делителя экспоненциального типа $f(z)$ необходимо принадлежат к рациональному модулю с базисом $[\lambda, \mu]$, т. е. представляются линейными комбинациями чисел λ, μ с рациональными коэфициентами; затем, что показатели $f(z)$ принадлежат к целому модулю с базисом $\left[\frac{\lambda}{M}, \frac{\mu}{N}\right]$, где M, N целые числа, и, наконец, что корни $f(z)$ порождаются циклами в пространстве $R\left[\frac{\lambda}{M}, \frac{\mu}{N}\right]$.

1°. Докажем, что $f(z)$ принадлежит к рациональному модулю $[\lambda, \mu]$. Предположим, что это не имеет места. Тогда, во всяком случае, каждый из показателей трех функций

$$P(z),\ f(z),\ g(z), \quad \text{где} \quad P(z) = f(z) \cdot g(z),$$

представляется в виде конечной линейной комбинации с рациональными коэфициентами линейно независимых чисел

$$\lambda,\ \mu,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n, \ldots \tag{21}$$

Кроме того, мы вправе считать, что $f(z)$ имеет в разложении в ряд Фурье член с показателем $r_1\lambda + r_2\mu + \lambda_1$. В самом деле, по предположению $f(z)$ имеет показатель вида

$$r_1\lambda + r_2\mu + \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j;\quad \sum_{j=1}^{n} a_j\lambda_j \neq 0$$

и числа $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ в (21) могут быть так перенумерованы, что коэфициент $\alpha_1 \neq 0$. Обозначив $\bar{\lambda}_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j$ вместо (21) рассмотрим

$$\lambda, \mu, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

Рассмотрим первые σ членов разложения $f(z)$ в ряд Фурье. Каждый показатель Λ_α этих членов является линейной комбинацией $l_\sigma + 2$ чисел

$$\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{l_\sigma}$$

и, следовательно, представляется в форме

$$\Lambda_\alpha = r_\alpha^{(-1)} \lambda + r_\alpha^{(0)} \mu + r_\alpha^{(1)} \lambda_1 + \ldots + r_\alpha^{(l_\sigma)} \lambda_{l_\sigma} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Пусть далее

$$P(z) = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} a_{mn} e^{i(n\lambda + m\mu) z}.$$

Рациональные числа $r_\alpha^{(j)}$ приведем к общему знаменателю s

$$r_\alpha^{(j)} = \frac{m_\alpha^{(j)}}{n^{(j)}} = \frac{t_\alpha^{(j)}}{s}$$

и положим $T = \max(|t_\alpha^{(j)}|, sM, sN)$. Так как

$$\frac{\lambda}{s}, \frac{\mu}{s}, \frac{\bar{\lambda}_1}{s} \ldots \frac{\lambda_{l_\sigma}}{s}$$

линейно независимые числа, то, по теореме Кронекера, существует такое целое число p, что для заданного произвольного вещественного числа γ выполняются неравенства.

$$\left|\frac{\lambda}{s} p - 2k_{-1}\pi\right| < \frac{\varepsilon}{T}, \quad \left|\frac{\mu}{s} p - 2\pi k_0\right| < \frac{\varepsilon}{T}; \quad \left|\frac{\bar{\lambda}_1}{s} p - \frac{\gamma}{s} - 2\pi k_1\right| < \frac{\varepsilon}{T};$$

$$\left|\frac{\lambda_i}{s} - 2k_i\pi\right| < \frac{\varepsilon}{T} \quad (2 \leqslant i \leqslant l_\sigma).$$

Умножая полученные неравенства на

$$ns, \ t_\alpha^{(-1)}; \quad ms, \ t_\alpha^{(0)}; \quad t_\alpha^{(1)}, \ t_\alpha^{(i)},$$

соответственно мы получим неравенства

$$|n\lambda p - 2k_{-1} ns\pi| < \varepsilon \qquad |r_\alpha^{(-1)}\lambda p - 2k_{-1} t_\alpha^{(-1)}\pi| < \varepsilon$$

$$|m\mu p - 2k_0 ms\pi| < \varepsilon \qquad |r_\alpha^{(0)}\mu p - 2k_0 t_\alpha^{(0)}\pi| < \varepsilon$$

$$|r_\alpha^{(1)}\bar{\lambda}_1 p - r_\alpha^{(1)}\gamma - 2k_1 t_\alpha^{(1)}\pi| < \varepsilon \qquad |r_\alpha^{(i)}\lambda_i p - 2k_i t_\alpha^{(i)}\pi| < \varepsilon.$$

Выбирая последовательность $\varepsilon_\nu \to 0$, получим последовательность $p_\nu \to \infty$, для которой $P(z + p_\nu) \Rightarrow P(z)$, а $f(z + p_\nu)$ — компактное семейство.

Выбрав подпоследовательность p_{ν_k}, для которой

$$f(z + p_{\nu_k}) \Rightarrow f_\sigma, \quad g(z + p_{\nu_k}) \Rightarrow g_\sigma,$$

мы получим, что f_σ снова является почти периодическим делителем полинома $P(z)$ и что первые σ членов разложения $f_\sigma(z)$ в ряд Фурье отличаются от соответствующих членов разложения $f(z)$ лишь множителями $e^{ir_a^{(1)}\gamma}$. В самом деле, если $f_k(z) \to f_\sigma(z)$, то $b_a^{(k)} \to b_a^{(\sigma)}$; здесь b_a — коэфициенты Фурье, так как

$$|b_a^{(\sigma)} - b_a^{(k)}| \leqslant \lim \frac{1}{T}\int_0^T |f_k(x) - f_\sigma(x)|\,dx\,.$$

Для каждого натурального $\sigma = 1, 2 \ldots$ функция $f_\sigma(z)$ принадлежит к замыканию компактного семейства функций $f(z+p)$. Но замыкание компактного семейства является в свою очередь компактным и из последовательности $f_\sigma(z)$ $\sigma = 1, 2 \ldots$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к функции

$$f_\gamma(z) \sim \sum e^{ir_k^{(1)}\gamma} b_k e^{i(r_k^{(-1)}\lambda + r_k^{(0)}\mu + r_k^{(1)}\lambda_1 + \ldots + r_k^{(l_k)}\lambda_{l_k})z},$$

ряд Фурье которой отличается от ряда функции $f(z)$ множителями $e^{i\gamma r_k^{(1)}}$. Очевидно, что при любом γ $f_\gamma(z)$ является также почти периодическим делителем полинома $P(z)$.

Докажем теперь, что при $\gamma \to \gamma_0$, $f_\gamma(z) \to f_{\gamma_0}(z)$ $(f_0(z) \equiv f(z))$.

Допустим, что существуют исключительное $\bar{\varepsilon} > 0$ и последовательность $\gamma_n \to \gamma_0$ такие, что для каждого γ_n выполняется неравенство

$$\sup|f_{\gamma_n}(z) - f_{\gamma_0}(z)| \geqslant \bar{\varepsilon} \tag{22}$$

в какой-нибудь фиксированной полосе. Выбирая сходящуюся подпоследовательность $f_{\gamma_{n_k}}(z)$, мы видим, что она должна сходиться к $f_{\gamma_0}(z)$, так как коэфициенты Фурье функции $f_{\gamma_{n_k}}(z)$ сходятся к коэфициентам Фурье функции $f_{\gamma_0}(z)$. Таким образом, неравенство (22) невозможно.

Рассмотрим теперь какой-нибудь нуль z_0 функции $f(z)$ и отделим от остальных нулей $P(z)$ малым кружком. Так как при $\gamma \to 0$, $f_\gamma(z) \to f(z)$, то при малых γ $f_\gamma(z)$ имеет нуль в этом же кружке, но так как $f_\gamma(z)$ является почти периодическим делителем полинома $P(z)$, то $f_\gamma(z)$ имеет тот же нуль z_0. Отсюда следует, что для всех γ $f_\gamma(z_0) = 0$. Действительно, множество значений γ, для которых $f_\gamma(z_0)$, являясь одновременно и замкнутым и открытым, состоит из всех вещественных чисел. Отсюда следует, что для всех γ нули делителя $f_\gamma(z)$ совпадают с нулями $f(z)$. Но тогда частное $\frac{f_\gamma}{f}$ есть постоянная $\Psi(\gamma)$, как это следует из разложения в каноническое произведение Вейерштрасса и того факта, что f_γ и f имеют один и тот же конечный спектр.

Сравнение коэфициентов даст

$$e^{ir_k^{(1)}\gamma} = \Psi(\gamma)\,,$$

т. е. что $r_k^{(1)}$ не зависит от k и, принимая во внимание член

$$be^{i(r\lambda+r_0\mu+\lambda_1)z}$$

в разложении $f(z)$ мы получим, что $r_k^{(1)}=1$, $k=1,2,\ldots$, т. е., что

$$f(z)=e^{i\lambda_1 z}\hat{f}(z),$$

где базис $\hat{f}(z)$ уже не содержит μ. В силу того, что $\check{f}(z)$ имеет в разложении член $be^{i(\lambda r+\mu r_0)z}$, аналогичные рассуждения показывают, что $\tilde{f}(z)$ вовсе не содержит членов с показателями λ_2, $\lambda_3\ldots$ и, таким образом, базис $\tilde{f}(z)$ состоит лишь из чисел λ, μ, что и требовалось доказать.

2°. Докажем теперь, что $f(z)$ принадлежит к целому модулю с базисом $\frac{\lambda}{M}$, $\frac{\mu}{N}$, где M, N целые числа.

Предположим, что это не имеет места. Тогда показатели $f(z)$ представляются в виде:

$$\lambda_\alpha=r_\alpha^{(1)}\lambda+r_\alpha^{(2)}\mu$$

$$r_\alpha^{(1)}=\frac{m_\alpha^{(1)}}{n_\alpha^{(1)}}\,;\quad r_\alpha^{(2)}=\frac{m_\alpha^{(2)}}{n_\alpha^{(2)}},$$

где $r_\alpha^{(i)}$ — рациональные числа, представленные в виде несократимых дробей, причем, очевидно, можно считать, что знаменатели упорядочены так, что $n_\alpha^{(1)}$ образуют неубывающую неограниченную последовательность. Пусть s общее наименьшее кратное чисел

$$n_1^{(1)},\quad n_2^{(1)},\ldots,n_\rho^{(1)},$$

а $n_{\alpha_s}^{(1)}>s$ — один из знаменателей; S_i — общее наименьшее кратное чисел

$$n_1^{(i)},\ n_2^{(i)},\ldots,\ n_\rho^{(i)},\ n_{\alpha_s}^{(i)}\qquad(i=1,\ 2).$$

Приводя $r_1^{(i)},\ldots,\ r_\rho^{(i)},\ r_{\alpha_s}^{(i)}$ к общему знаменателю S_i, получим:

$$r_\alpha^{(i)}=\frac{t_\alpha^{(i)}}{S_i}.$$

В силу выбора $n_{\alpha_s}^{(1)}$

$$r_{\alpha_s}^{(1)}s=\frac{m_{\alpha_s}^{(1)}\cdot s}{n_{\alpha_s}^{(1)}}=P+R_s,$$

где P — целое число, а R_s — правильная дробь, отличная от нуля.

Как и раньше, положим

$$T=\max(|t_\alpha^{(i)}|,\ MS_1,\ NS_2)$$

и снова по теореме Кронекера для любого $\varepsilon>0$ найдутся целые числа p, k_1, k_2 такие, что

$$\left|\frac{\lambda}{S_1}p-2\pi\frac{s}{S_1}-2\pi k_1\right|<\frac{\varepsilon}{T},\quad\left|\frac{\mu}{S_2}p-2\pi k_2\right|<\frac{\varepsilon}{T}.$$

Умножая первое неравенство на

$$|mS_1|, \quad |t_\alpha^{(1)}| \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma) \quad |t_{\alpha_s}^{(1)}|,$$

получаем ряд неравенств:

$$|m\lambda p - 2\pi P| < \varepsilon, \quad |r_\alpha^{(1)}\lambda p - 2\pi P_\alpha| < \varepsilon \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma), \quad |r_{\alpha_s}^{(1)} - 2\pi R_s - 2\pi P_s| < \varepsilon$$

и после умножения второго на

$$|nS_2|, \quad |t_\alpha^{(2)}| \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma) \quad |t_{\alpha_s}^{(2)}|$$

аналогичные неравенства:

$$|n\mu p - 2\pi Q| < \varepsilon, \quad |r_\alpha^{(2)}\mu p - 2\pi Q_\alpha| < \varepsilon, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

$$|r_{\alpha_s}^{(2)}\mu p - 2\pi Q_s| < \varepsilon,$$

где P и Q целые числа. Заметим, что R_s не зависит от ε и рассмотрим последовательность $\varepsilon_\nu \to 0$. Тогда $P(z + p_\nu) \to P(z)$, σ первых членов разложения $f(z+p_\nu)$ в ряд Фурье сходятся к σ первым членам разложения $f(z)$, а α_s-ый коэфициент $f(z+p_\nu)$ сходится к α_s-ому коэфициенту $f(z)$, умноженному на $e^{2\pi R_s i}$. Так как последовательность $f(z + p_\nu)$ компактна, то существует почти периодический делитель полинома $P(z)$, у которого первые σ членов разложения совпадают с соответственными членами $f(z)$, а α_s-ый отличается множителем $e^{2\pi R_s i}$. Обозначим его через $f_{\sigma, \alpha_s}(z)$. Тогда

$$f_{\sigma, \alpha_s}(z) = \lim_{\nu \to \infty} f(z + p_\nu). \tag{23}$$

Легко видеть, что описанным процессом можно построить бесчисленное множество делителей полинома $P(z)$, отличающихся от $f(z)$ и друг от друга. Например, чтобы получить делитель, отличный от $f(z)$ и $f_{\sigma, \alpha_s}(z)$, достаточно взять $\sigma_1 = \alpha_s$ и повторить изложенные здесь рассуждения для этого σ_1.

Каждый из этих делителей получается из семейства $f(z + p)$ с помощью предельного перехода (23). Наличие бесконечного множества таких делителей у полинома $P(z)$ приводит, как мы увидим, к противоречию.

Прежде всего заметим, что множество нулей функции $f(z + p_\nu)$ получается из множества нулей функции $f(z)$ сдвигом на $-p_\nu$ в z-плоскости или сдвигом на $-\lambda p_\nu$, $-\mu p_\nu$ вдоль винтовой линии торообразного пространства. Торообразное пространство нам сейчас будет удобно интерпретировать как совокупность бесконечного числа призматических полос

$$2n\pi \leqslant u \leqslant 2(n+1)\pi, \quad 2m\pi \leqslant v \leqslant 2(m+1)\pi \quad -\infty < \eta < +\infty$$

в эвклидовом пространстве $R(u, v, \eta)$. Одной точке z-плоскости $z = \xi + i\eta$ соответствует сейчас счетное множество точек с координатами $(\lambda\xi + 2k\pi, \ \mu\xi + 2l\pi, \ \eta)$. Тогда смещение в z-плоскости на $-p_\nu$

можно представить как смещение в пределах одной полосы на вектор $(\lambda p_r + 2k_0\pi,\ \mu p_r + 2l_0\pi,\ 0)$, где

$$0 \leqslant \lambda p_r + 2k_0\pi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \mu p_r + 2l_0\pi < 2\pi$$

или же как такое же движение в торообразном пространстве.

Так как каждый раз для функции $f(z+p_r)$ множество нулей перемещается поступательно, как твердое тело в торообразном пространстве, то это же верно и для предельной функции $f_{0,\alpha_s}(z)$, т. е. множество нулей $f_{0,\alpha_s}(z)$ получается из множества нулей $f(z)$ сдвигом в торообразном пространстве на некоторый вектор конечной длины. Множество нулей $f_{0,\alpha_s}(z)$ не совпадает с множеством нулей $f(z)$, так как в противном случае их разложения в ряды Фурье отличались бы лишь множителем $e^{i\alpha}$. Следовательно, этот предельный сдвиг u_s, v_s не сводится к покою.

Вместе с этим, однако, множество нулей полинома $P(z)$ переходит в самое себя, так как

$$\lim P(z + p_r) = P(z).$$

Таким образом, допущение о возрастании знаменателей $n_k^{(1)}$ ведет к существованию бесконечного множества сдвигов, по отношению к которым множество нулей $P(z)$ остается инвариантным. При этом и множество $\mathfrak{M}$ l-кривых в целом переходит в самое себя. Однако этим свойством обладают лишь ординаторы на различных торах $(-\infty < \eta < +\infty)$. Действительно, если существует бесконечное множество сдвигов u_k, v_k, при которых l-кривая переходит в l_1-кривую и, если их уравнения это:

$$v = \varphi(u) \qquad v = \varphi_1(u)$$
$$\eta = \Psi(u) \qquad \eta = \Psi_1(u),$$

то тогда

$$\varphi_1(u) + v_k = \varphi(u + u_k)$$
$$\Psi_1(u) = \Psi(u + u_k).$$

Диференцируя первое соотношение, получим

$$\varphi_1'(u) = \varphi'(u + u_k).$$

Так как $0 \leqslant u_k < 2\pi$ и их бесконечное множество, то $\varphi'(u)$, $\Psi(u)$ имеют сколь угодно малые периоды. Отсюда следует, что на плотном множестве точек $\varphi'(u)$, $\Psi(u)$ сохраняют постоянные значения. В силу непрерывности они тождественно равны постоянным. Этот вывод справедлив для координаты $\eta = \Psi(u)$ вдоль всей l-кривой и для $\varphi'(u)$ на участке между двумя угловыми точками. Таким образом, участки l-кривых между угловыми точками задаются уравнениями:

$$\eta = c, \quad v = c_1 u.$$

По принципу перманентности для аналитических функций соотношение

$$F(c,\ u,\ c_1 u) = 0$$

выполняется для всех u тождественно. Отсюда следует, что постоянная c_1 необходимо рациональна и, следовательно, множество состоит из конечного числа ординаторов. Так как разность двух сдвигов системы (u_k, v_k) является снова сдвигом, оставляющим инвариантным множество l-кривых и точки (u_k, v_k) имеют точку накопления (u_0, v_0), то существуют бесконечно малые сдвиги, оставляющие инвариантным $\mathfrak{M}$. Эти сдвиги являются скольжением вдоль ординаторов и отсюда необходимо следует, что коэфициенты c_1 всех ординаторов одинаковы. Корни, соответствующие ординаторам, даются формулой

$$a_n^{(p)} = \xi_1 n + b_p,$$

где ξ_1 — длина витка — одинакова для всех ординаторов. Каноническое произведение, составленное по корням $a_n^{(p)}$, является периодическим полиномом. Но делитель $f(z)$ периодического полинома в свою очередь является периодическим полиномом, как это было ранее показано (см. замечание о почти периодическом делителе периодического полинома в конце введения), т. е. ряд Фурье для $f(z)$ содержит конечное число членов, что противоречит допущению о возрастании чисел $n_\alpha^{(1)}$. Утверждение 2° полностью доказано.

Таким образом, показатели $f(z)$ принадлежат к целому модулю с базисом $\left[\frac{\lambda}{M}, \frac{\mu}{N}\right]$, и мы только сейчас получаем возможность интерпретировать ε-смещения делителя $f(z)$ как бесконечно малые сдвиги на основном торе $\eta=0$ торообразного пространства $R\left[\frac{\lambda}{M}, \frac{\mu}{N}\right]$.

3° Докажем, наконец, что $f(z)$ является произведением примарных множителей пространства $R\left[\frac{\lambda}{M}, \frac{\mu}{N}\right]$.

По делителю $f(z)$ можно построить в торообразном пространстве функцию $f(\eta, u, v)$, аналогично тому, как в первом разделе по полиному $P(z)$ мы построили функцию $F(\eta, u, v)$. Непрерывность функции $f(\eta, u, v)$ от трех переменных (η, u, v)-точки торообразного пространства легко следует из того, что неравенство

$$|f(z+\alpha) - f(z)| < \varepsilon$$

выполняется для всех z любой полосы $|\operatorname{Im} z| \leqslant h$ при достаточно малых α.

Точки торообразного пространства $R\left[\frac{\lambda}{M}, \frac{\mu}{N}\right]$, принадлежащие винтовой поверхности, для которых $P(z)$, $f(z)$, $g(z)$ непосредственно определены, назовем собственными, остальные, т. е. те, для которых $P(x)$, $f(z)$, $g(z)$ доопределяются как непрерывные — несобственными.

l-кривые, как мы видели, могут пересекаться; точками пересечения они разбиваются на конечное число простых дуг A_kB_k (рис. 11).

Прежде всего докажем, что если в какой-нибудь внутренней точке дуги A_kB_k $f(\eta, u, v) = 0$, то все остальные собственные точки этой дуги являются корнями делителя $f(z)$.

δ-окрестности множества корней полинома $P(z)$ в z-плоскости, т. е. совокупности кружков радиуса δ с центрами в корнях a_k, в торообразном пространстве соответствуют цилиндрические трубки, заключающие внутри себя l-кривые. Пересечение такой трубки с винтовой поверхностью есть кружок радиуса δ с центром в точке l-кривой. Пусть M_0 — внутренняя точка дуги A_kB_k, в которой $f(\eta, u, v) = 0$. Рассмотрим на дуге A_kB_k столь малую окрестность Δ точки M_0, чтобы ее концы были снова внутренними точками дуги A_kB_k. Теперь можно выбрать δ так, чтобы кусок трубки, лежащей над Δ, не имел общих точек с остальными трубками. Все собственные точки дуги A_kB_k, лежащие в достаточно малой окрестности точки M_0, являются корнями делителя $f(z)$. Действительно, в противном случае существует последовательность собственных точек дуги A_kB_k, сходящаяся к M_0 и во всех этих точках $f(z) \neq 0$.

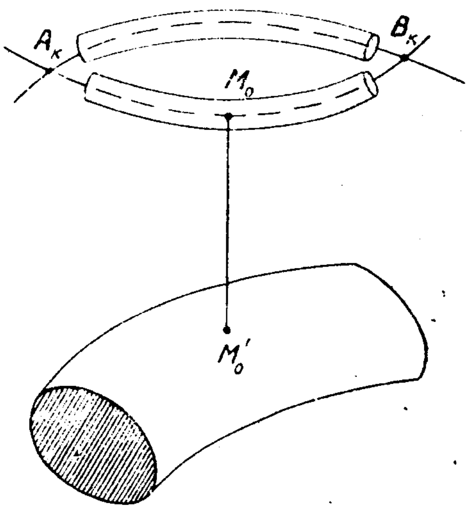

Рис. 11.

Более того, так как эти точки лежат вне δ-окрестности корней делителя $f(z)$, то

$$\operatorname{Inf} |f(z)| > m(\delta),$$

а это противоречит тому, что $f(\eta, u, v)$ непрерывна и обращается в нуль в точке M_0.

Являясь одновременно и замкнутым и открытым, множество точек дуги A_kB_k, в которых $f(\eta, u, v)$ обращается в нуль, заполняет всю дугу A_kB_k. Утверждение доказано.

Если A_k совпадает с B_k, то A_kB_k — цикл и процесс закончен. В противном случае малый δ-кружок с центром в A_k делит сферическую δ-окрестность точки A_k на две части так, что только в одной из них, скажем в первой, лежат точки дуги A_kB_k. В самом деле, дуга A_kB_k входит как часть в некоторую l-кривую и при определенном направлении обхода по l-кривой точки $M(\eta_0, u_0, v_0)$ проходящая через M винтовая поверхность

$$\lambda(v - v_0) = \mu(u - u_0)$$

движется в одном и том же направлении, отсекая на прямой

$$\lambda u + \mu v = 0, \quad \eta = 0$$

монотонно изменяющийся отрезок длины θ (см. распределение нулей).

δ-кружок и есть как раз пересечение винтовой поверхности, проходящей через A_k с δ-окрестностью точки A_k.

Допущение, что вторая часть окрестности не содержит корней делителя $f(z)$, ведет, как и раньше, к противоречию. Таким образом, и во второй части δ-окрестности имеется дуга A_kB_k, собственные точки которой отвечают корням делителя $f(z)$.

Процесс этот можно продолжить до тех пор, пока дуги B_kA_k, $A_kB_k\dots$ не сомкнутся, образуя цикл. Ввиду того, что винтовая поверхность, проходящая через точку цикла, движется при обходе цикла в одном направлении, этот цикл будет правильным. Ему соответствует примарный множитель $E_1(z)$. Частное $\dfrac{f(z)}{E_1(z)}$ снова является почти периодическим делителем полинома $P(z)$ и процесс выделения примарного множителя может быть продолжен, если только делитель $f_1(z)=\dfrac{f(z)}{E_1(z)}$ имеет хотя бы один нуль. После конечного числа шагов, мы приходим к почти периодическому делителю, не имеющему нулей, т. е. к постоянной. Таким образом,

$$f(z)=E_1(z)\,E_2(z)\dots E_p(z)\,e^{i\kappa z}.$$

Теорема доказана.

Следствия и примеры

1°. Пусть корни полинома $P(z)$ в z-плоскости разделяются на два непустых подмножества $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ „коридором", т. е. существует прямая $\operatorname{Im} z=a$, находящаяся на конечном расстоянии от $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ и отделяющая $\mathfrak{N}_1$ от $\mathfrak{N}_2$ (этому условию удовлетворяют корни вещественного почти периодического полинома, inf которого больше нуля на вещественной оси) или, общее, пусть существует почти периодическая функция $\eta=\chi(\xi)$, показатели которой принадлежат к целому модулю с базисом $\left|\dfrac{\lambda}{M},\ \dfrac{\mu}{N}\right|$, график которой разбивает множество нулей $P(z)$ на части $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$, находящиеся на конечном расстоянии от кривой $\eta=\chi(\xi)$. Канонические произведения, составленные по нулям $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, являются почти периодическими делителями $P(z)$.

Действительно, в торообразном пространстве $R\left[\dfrac{\lambda}{M},\ \dfrac{\mu}{N}\right]$, функция доопределяется как поверхность, разделяющая семейство l-кривых на две части, лежащие над и под поверхностью и канонические произведения равны произведению нескольких примарных множителей пространства $R\left[\dfrac{\lambda}{M},\ \dfrac{\mu}{N}\right]$.

2°. Если полином $P(z)$ имеет бесконечное множество вещественных корней, то это множество имеет положительную плотность

$$\Delta=\lim_{t\to\infty}\frac{n(t)}{t}>0.$$

В самом деле, из того, что $\eta(\theta)$ обращается в нуль для бесконечного множества значений параметра θ, в силу кусочной аналитичности $\eta(\theta)$, следует, что $\eta(\theta)\equiv 0$ на некотором интервале $2\pi\alpha\leqslant\theta\leqslant 2\pi\beta$ и, следовательно, одна из дуг l-кривой лежит на торе $\eta=0$. Легко убедиться в том, что нули, отвечающие этой дуге, имеют плотность Δ и

$$\Delta=\frac{\beta-\alpha}{2\pi}.$$

3°. В предыдущих разделах мы показали, что каждый почти периодический полином имеет бесконечное множество почти периодических делителей. Предположение, что все эти множители являются также почти периодическими полиномами, опровергается следующим примером:

Полином с линейно независимыми показателями не разлагается на произведение почти периодических полиномов, если число показателей не менее трех.

В самом деле, пусть

$$P(t)=Q(t)\cdot R(t),$$

где

$$P(t)=\sum_{k=1}^{p}a_k e^{i\lambda_k t};\qquad Q(t)=\sum b_k e^{i\mu_k t},\qquad R(t)=\sum c_k e^{i\nu_k t}$$

и показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $p\geqslant 3$ линейно независимы. Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_m \tag{24}$$

базис показателей полиномов P, Q, R. Тогда каждый из показателей μ_k, ν_k представляется в виде линейной комбинации чисел (24) с рациональными коэфициентами r_l. Приведя все дроби r_l к общему знаменателю n, заменим λ_i, $i=1, 2,\ldots, m$ на $\Delta_i=\frac{\lambda_i}{n}$. Тогда каждый из показателей полиномов P, Q, R выражается в виде линейной комбинации чисел Δ_i с целыми коэфициентами, причем показатели P это $n\Delta_i$. Если теперь в каждом из полиномов P, Q, R $e^{i\Delta_j t}$ заменить на z_j, то мы получим полиномы от m переменных z_j, причем каждое z_j может входить в Q и R в целых отрицательных степенях. В силу того, что $P(t)=Q(t)\cdot R(t)$, для этих полиномов удовлетворяется аналогичное соотношение

$$P(z_1,\ldots,z_p)=Q_1(z_1,\ldots,z_p, z_{p+1},\ldots,z_m)\cdot R(z_1,\ldots,z_p, z_{p+1},\ldots,z_m).$$

Приводя полиномы Q и R к общему знаменателю, мы видим, что переменные $z_{p+1},\ldots,z_m$ входят в каждый из них лишь в качестве множителей вида z_q^S, z_q^{-S}. Произведя сокращение, мы получим разложение

$$\sum_{k=1}^{p}a_k z_k^n=Q(z_1,\ldots,z_p)\,R(z_1,\ldots,z_p). \tag{25}$$

Заменив здесь z_k на $z_k t$, мы легко убеждаемся, что Q и R являются формами, и для того, чтобы доказать невозможность представления $P(t) = Q(t) \cdot R(t)$, достаточно показать, что степень одной из форм $Q(z_1, \ldots, z_p)$, $R(z_1, \ldots, z_p)$ равна n-степени левой части (25). Пусть q, r — соответственно степени Q, R.

Положим в (25) для простоты $z_4 = z_5 = \ldots = z_p = 0$, $a_1 z_1^n = x^n$, $a_2 z_2^n = y^n$, $a_3 z_3^n = z^n$. Пусть далее Q и R записаны в порядке убывания степеней x. Так как произведение старших коэфициентов должно дать единицу, то мы вправе считать, что сами старшие коэфициенты в Q и R равны единице. Тогда

$$x^n + y^n + z^n = (x^q + A_1(y, z) x^{q-1} + \ldots) \quad (x^r + B_1(y, z) x^{r-1} + \ldots),$$

где $A_k(y, z)$, $B_k(y, z)$ — формы степени k:

$$A_k(y, z) = \alpha_0 z^k + \alpha_1 z^{k-1} y + \ldots + \alpha_k y^k.$$

Положим теперь в этом тождестве $y = \eta_i z$, где η_i корни уравнения

$$\eta_i^n + 1 = 0.$$

Тогда получим n тождеств:

$$x^n = (x^q + A_1(\eta_i z, z) x^{q-1} + \ldots) \quad (x^r + B_1(\eta_i z, z) x^{r-1} + \ldots), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что возможно лишь в том случае, если

$$A_k(\eta_i z, z) \equiv 0 \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Но $A_k(\eta z, z)$ есть z^k, умноженное на полином степени k от η:

$$A_k(\eta_i z, z) = z^k(\alpha_0 + \alpha_1 \eta_i + \ldots + \alpha_k \eta_i^k)$$

и так как $k \leqslant q < n$, то полином от η в скобках, обращаясь в n точках η_i в нуль, тождественно равен нулю. Таким образом, полином $Q(x, y, z)$ сводится к x^q, а это невозможно, так как $x^n + y^n + z^n$ не делится на x^q. Утверждение доказано.

Из полученного результата, в частности, следует, что почти периодический полином

$$e^{i\lambda z} + e^{i\mu z} + 1,$$

где λ, μ — линейно независимые числа, не имеет полиномиальных делителей.

Таким образом, понятие почти периодического делителя, ничего не давшее для тригонометрического полинома, является для более сложного случая почти периодического полинома вполне уместным.

4°. Результаты изложенной здесь теории делимости почти периодических полиномов с двучленным базисом непосредственно переносятся на обыкновенные полиномы $P(x, y)$ двух независимых переменных x, y. Заменив x, y на $e^{i\lambda z}$, $e^{i\mu z}$, где λ, μ какие-нибудь линейно независимые числа, разлагаем $P(e^{i\lambda z}, e^{i\mu z})$, например в пространстве $R(\lambda, \mu)$, на множители. Ряды Фурье для делителей сходятся абсолютно. Для полинома $P(x, y)$ это означает, что его можно разложить в произведение рядов

$$P(x, y)=\sum{}' a_{mn}x^m y^n \cdot \sum{}' b_{mn}x^m y^n .$$

Ряды эти сходятся абсолютно на парах окружностей

$$|x|=\varrho^{\lambda}, \quad |y|=\varrho^{\mu}$$

для любого $\varrho>0$, а показатели m, n являются целочисленными координатами точек полосы

$$-\frac{A}{2}\leqslant\lambda X+\mu Y\leqslant\frac{A}{2},$$

где $A=\sup(m\lambda+n\mu)$ для показателей m, n полинома $P(x)y$.

5°. В заключение рассмотрим делители полинома $P(z)=$ $=\sin z\cdot\sin\lambda z$, где λ — иррационально, класса $R[1, \lambda]$. Очевидно, что

$$F(\eta, u, v)=\sin(u+i\eta)\sin(v+i\eta)$$

обращается в нуль на кривых

$$u=0 \qquad u=\pi$$
$$v=0 \qquad v=\pi$$

тора $\eta=0$. Изображая тор в виде квадрата с отождествленными сторонами, мы легко найдем все правильные циклы (рис. 12). Это будут прежде всего

$$AH,\ BF,\ AC,\ ID$$

и затем

$$HAC,\ HIDC,\ HIKBC,\ HFKDC,\ HFBC.$$

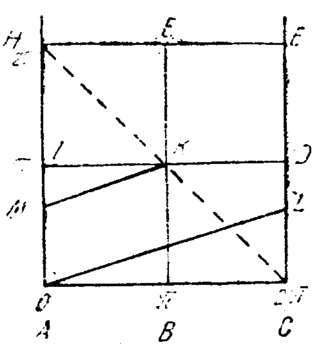

Рис. 12.

Пять последних циклов имеют своим ординатором прямую HC.

Цикл $HFKIA$ дает пример неправильного цикла, так как ординатор HA при проектировании винтовыми линиями, параллельными AL, покрывается не одинаково: для отрезка AM ординатора индекс покрытия равен 1, для MI — 3, для IH снова 1.

Первые четыре правильных цикла порождают периодические делители $\sin z$ или $\sin\lambda z$. Циклы

$$HAC,\ HIDC,\ HFBC$$

соответствуют произведению периодических делителей. Наконец, циклы $HIKBC$, $HFKDC$ порождают делители, не являющиеся произведением делителей полиномов $\sin z$ и $\sin\lambda z$.

Для доказательства этого факта, не имеющего аналога в теории делимости чисел и обыкновенных полиномов, мы перенумеруем корни полинома $P(z)$ в порядке их возрастания и заметим, что циклу $HFKDC$ соответствуют корни $P(z)$ с четными индексами. Предположим теперь, что делитель $f(z)$, отвечающий циклу $HFKDC$, равен произведению

$g(z) \cdot h(z)$, где $g(z)$ и $h(z)$ — делители $\sin z$, $\sin \lambda z$ с периодами $2\pi n$, $\frac{2\pi}{\lambda} m$ соответственно. Рассмотрим какой-нибудь корень z_0 функции $g(z)$. В последовательности нулей a_k полинома $P(z)$ z_0 и все корни вида $z_0 + 2\pi n \cdot p$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ должны иметь четные индексы. Следовательно, в каждом интервале

$$(z_0 + 2\pi np, \quad z_0 + 2\pi n (p+1))$$

лежит нечетное число корней a_k полинома $P(z)$. Но это невозможно, потому что число корней $\sin z$ в этом интервале не изменяется, в то время как число корней $\sin \lambda z$ колеблется то уменьшаясь, то увеличиваясь на единицу в силу иррациональности λ. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Поступило 25. VI 1948 г.