АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

А.Э.Еременко , М.Ю. Любич

СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Препринт 29-84

Харьков-1984

УДК 517.535.4

А. Э. Ерёменко,
М. Ю. Любич

СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются некоторые конечнопараметрические семейства M целых функций. Доказано, что периодические точки функции $f \in M$ непрерывно зависят от параметров. Функция общего положения $f \in M$ является структурно устойчивой, то есть для любой функции $g \in M$ близкой к f, существует квазиконформный гомеоморфизм плоскости φ такой, что $\varphi f = g \varphi$. В качестве примера подробно рассматривается семейство $f_c(z) = exp\, z + c$, для которого доказан аналог одной теоремы Дуади - Хаббарда.

Препринт Физико-технического института низких температур АН УССР, 1984, № 29

A. E. Eremenko,
M. Yu. Ljubic

STRUCTURAL STABILITY IN SOME FAMILIES OF ENTIRE FUNCTIONS

Some finite dimensional parametric families M of entire functions are considered. The periodic points of the function $f \in M$ depend continuously of the parameters. The function $f \in M$ in general position is structuraly stable: for every $g \in M$ near f there exists a quasiconformal homeomorphism $\varphi : C \to C$ with the property $\varphi f = g \varphi$. The family $f_c(z) = \exp z + c$ is treated as an example. An analog of a theorem by Douady - Hubbard is proved for this family.

The preprint of the Physico-Technical Institute
of Low Temperatures,
UkrSSR Academy of Sciences, Kharkov,
1984, No 29

I. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является развитием работ [1-3], в которых показано, что динамика рационального отображения общего положения является в определенном смысле устойчивой относительно возмущений. Мы получаем аналогичные результаты для некоторых семейств целых функций, простейшим из которых является семейство $f_a(z) = exp\, z + a$. Кроме того, для этого семейства доказываем аналог одной теоремы Дуади-Хаббарда [4].

Пусть f - целая или рациональная функция. Максимальное открытое множество $R(f)$, на котором семейство $\{f^m\}$ нормально в смысле Монтеля, называется множеством нормальности функции f, а его дополнение $\mathcal{J}(f)$ - множеством Жюлиа. Свойства множества $\mathcal{J}(f)$ для рациональных функций исследованы в классических работах Жюлиа [5] и Фату [6], а для целых функций - Фату [7]. Множество $\mathcal{J}(f)$ непустое и совершенное. Оно либо нигде не плотно, либо совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$ (сферой $\overline{\mathbb{C}}$ в случае рациональных функций). Кроме того, множество $\mathcal{J}(f)$ вполне инвариантно (множество E называется вполне инвариантным, если $f^{-1}E = E$).

Недавно Д.Сулливан [8] дал полное описание динамики рационального отображения f на множестве $R(f)$. Компонента $\mathcal{D}$ множества $R(f)$ называется блуждающей, если $f^m\mathcal{D} \cap f^n\mathcal{D} = \phi$ для всех $m > n > 0$. Основной результат Д.Сулливана состоит в том, что рациональные функции не имеют блуждающих компонент множества нормальности. Целые трансцендентные функции могут иметь блуждающие компоненты, что впервые показал И.Бэйкер [9] (см.также [10,11]). В работе [11] выделен некоторый класс S целых функций, для которых сохраняются результаты Д.Сулливана.

Целая функция f принадлежит классу S_q, если существует конечный набор точек $a_1,\dots,a_q$ такой, что сужение $f:\mathbb{C}\setminus f^{-1}\{a_1,\dots,a_q\} \to \mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_q\}$ является неразветвленным накрытием. Считаем, что $\{a_1,\dots,a_q\}$ – минимальная система с этим свойством. При этом $a_i=a_i(f)$ называются базисными точками функции f. Очевидно, что полином степени n принадлежит $\bigcup_{q=1}^{n-1} S_q$. Положим $S=\bigcup_{q=1} S_q$. Класс S замкнут относительно суперпозиции. Следующие функции являются примерами целых функций класса S:

$$f(z)=\int^{z} P(\zeta)\exp Q(\zeta)\,d\zeta, \quad g(z)=R(\exp z), \qquad (1.1)$$

где P, Q – многочлены, R – рациональная функция с полюсами в точках 0, ∞. Функции класса S и аналогичные мероморфные функции играют важную роль в общей теории мероморфных функций [12]. (Впервые их рассмотрел Р.Неванлинна в 1932 году).

Чтобы дать описание динамики функции $f\in S$ на множестве $R(f)$ напомним следующие определения. Компонента $\mathcal{D}$ множества нормальности $R(f)$ называется периодической периода p, если $f^p\mathcal{D}\subset\mathcal{D}$, при этом $\bigcup_{k=0}^{p-1} f^k\mathcal{D}$ называется циклом компонент. Точка $\alpha\in\mathbb{C}$ называется периодической периода p, если $f^p\alpha=\alpha$, при этом $\{f^k\alpha\}_{k=0}^{p-1}$ называется циклом (точки α). Порядок p периодической точки или компоненты есть наименьший из периодов; мультипликатор периодической точки α – это $(f^p)'(\alpha)=\lambda$. Цикл называется притягивающим, если $|\lambda|<1$; нейтральным рациональным, если λ есть корень из 1; нейтральным иррациональным, если $\lambda=\exp(2\pi i\theta)$, θ иррационально, и отталкивающим, если $|\lambda|>1$.

Периодическая компонента $\mathcal{D}$ называется областью Фату, если все траектории, начинающиеся в $\mathcal{D}$, сходятся к притягивающему или нейтральному рациональному циклу $\{\alpha_k\}_{k=0}^{p-1}$. В этом случае цикл компонент $\bigcup f^k\mathcal{D}$ называется областью непосредственного притяжения цикла $\{\alpha_k\}$. Периодическая компонента $\mathcal{D}$ называется областью Зигеля, если отображение $f^p|\mathcal{D}$,

где p – порядок компоненты, аналитически сопряжено с иррациональным вращением круга.

Следующая теорема полностью описывает поведение итераций f^n функции f на множестве $R(f)$.

ТЕОРЕМА А. Пусть $f\in S_q$ и $\mathcal{D}$ – компонента множества $R(f)$. Тогда найдется натуральное n такое, что $f^n\mathcal{D}$ – область Фату или Зигеля. Если k, m – количество циклов Фату и Зигеля, соответственно, то $k+m/2\le q$.

Для полиномов эту теорему доказал Д.Сулливан [8] (как частный случай соответствующей теоремы о рациональных функциях). Для трансцендентных целых функций класса S теорема А доказана в [11]. И.Бэйкер [10] независимо установил часть теоремы А – отсутствие блуждающих компонент у функций вида (1.1).

Опишем теперь конечнопараметрические семейства целых функций класса S, которые являются предметом исследования в этой работе. При этом нам понадобятся некоторые сведения о квазиконформных отображениях, которые содержатся, например, в [13, 14].

Целые функции f и g называются эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы ψ и φ, такие что

$$\psi\circ g=f\circ\varphi. \qquad (1.2)$$

Зафиксируем $g\in S_q$. Наше семейство $M=M_g$ состоит из целых функций, эквивалентных g. Пусть $a_1(f),\dots,a_q(f)$ – базисные точки функции f, $a_i^\circ=a_i(g)$. Зафиксируем такие точки β,γ, для которых $g(\beta), g(\gamma)$ различны и не равны a_i°, $1\le i\le q$. Рассмотрим множество $M_g^{\beta,\gamma}$ таких функций $f\in M_g$, для которых в определении (1.2) гомеоморфизмы ψ, φ могут быть выбраны так, что $\varphi(\beta)=\beta$, $\varphi(\gamma)=\gamma$. Через $a_{q+1}(f), a_{q+2}(f)$ будем обозначать $f(\beta)$ и $f(\gamma)$, соответственно, $a_{q+1}^\circ=a_{q+1}(g)$, $a_{q+2}^\circ=a_{q+2}(g)$. Нам потребуется следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\psi_0\circ g=f_0\circ\varphi_0$ и $\psi_1\circ g=f_1\circ\varphi_1$, причем $\varphi_i(\beta)=\beta$, $\varphi_i(\gamma)=\gamma$. Предположим, что гомеоморфизмы ψ_0, ψ_1 связаны такой гомотопией ψ_t, $0\le t\le 1$, что $\psi_t(a_i^\circ)=\psi_0(a_i^\circ)$, $i=1,\dots,q+2$. Тогда $f_0=f_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о накрывающей гомотопии существует семейство гомеоморфизмов h_t, для которых $h_1 = \varphi_1$ и $\psi_t \circ g = f_1 \circ h_t$, $0 \le t \le 1$. Так как $h_t(\beta), h_t(\gamma)$ непрерывны по t и принимают дискретное множество значений, то h_t оставляет точки β, γ неподвижными при всех $t \in [0,1]$. Полагая $t=0$, получаем $f_0 = f_1 \circ H$, где $H = h_0 \circ \varphi_0^{-1}$. Гомеоморфизм H аналитичен вне дискретного подмножества $f_1^{-1}(a_i(f_0))$, $1 \le i \le q$. По теореме Римана об устранимых особенностях H аналитичен в $\mathbb{C}$ и, следовательно, является аффинным преобразованием. Поскольку H имеет две неподвижные точки, то $H = id$ и $f_0 = f_1$, что и требовалось.

Введем на $M_g^{\beta,\gamma}$ структуру комплексного аналитического многообразия. Для этого рассмотрим пространство $У$ гомеоморфизмов плоскости $\mathbb{C}$, профакторизованное по следующему отношению эквивалентности: $\psi_0 \sim \psi_1$, если существует гомотопия ψ_t, $0 \le t \le 1$ при которой

$$\psi_t(a_i^\circ) = \psi_0(a_i^\circ), \quad i = 1, \dots, q+2.$$

Пространство гомеоморфизмов снабдим топологией равномерной сходимости на сфере $\overline{\mathbb{C}}$. При этом на $У$ индуцируется фактор-топология. Отображение $\psi \mapsto \{\psi(a_i^\circ)\}_{i+1}^{q+2}$ является накрытием $У$ над $\mathbb{C}^{q+2}$ с выброшенными гиперплоскостями $a_i = a_j$, $i \ne j$. Это накрытие индуцирует на $У$ структуру комплексного аналитического многообразия. Локальными координатами на $У$ являются $\{\psi(a_i^\circ)\}_{i=1}^{q+2}$.

Построим отображение $\pi: У \to M_g^{\beta,\gamma}$. Для этого заметим, что каждый класс из $У$ имеет квазиконформный представитель. Рассмотрим отображение $\psi \circ g$, где ψ – квазиконформный представитель некоторого элемента из $У$. Из основной теоремы существования для квазиконформных отображений вытекает, что существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(\beta)=\beta$, $\varphi(\gamma)=\gamma$ и целая функция f, для которых $\psi \circ g = f \circ \varphi$. Определим отображение π, которое классу гомеоморфизма ψ сопоставляет эту целую функцию $f \in M_g^{\beta,\gamma}$.

В силу доказанного Предложения I отображение π определено корректно и является сюръективным. Это отображение индуцирует топологию и аналитическую структуру на пространстве $M_g^{\beta,\gamma}$,

после чего π превращается в неразветвленное аналитическое накрытие [15].

Локальными параметрами в $M_g^{\beta,\gamma}$ являются $\{a_i(f)\}_{i=1}^{q+2}$. Легко проверить, что все семейство M_g покрывается множествами $M_g^{\beta,\gamma}$. Следовательно, M_g также снабжается структурой аналитического многообразия. Очевидно, что топология в M_g локально эквивалентна топологии равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{C}$.

Заметим, что $f_a(z)$ – аналитическая функция по совокупности переменных. Действительно, гомеоморфизм ψ_a может быть выбран так, что $\psi_a(z)$ – аналитическая функция от a.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Многообразие M в теории мероморфных функций обычно задается при помощи некоторого графа, называемого комплексом отрезков и введенного А.Шпайзером и Р.Неванлинной [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известно, что все рациональные функции общего положения фиксированной степени эквивалентны в смысле (I.2).

В ряде вопросов удобнее работать не с семейством M, а с редуцированным семейством $M_\#$ – фактором по действию аффинной группы на M сопряжениями. Семейство $M_\#$ является q-мерным многообразием, в котором локальными координатами служат базисные точки $(a_1(f), \dots, a_q(f))$.

Пусть X_1, X_2 – топологические пространства. Преобразования $f: X_1 \to X_1$ и $g: X_2 \to X_2$ называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $h: X_1 \to X_2$, такой, что $hf = gh$.

Функция $f_0 \in M$ называется $\mathcal{J}$ – устойчивой (в семействе M), если для всех функций $f \in M$, достаточно близких к f_0, преобразования $f_0: \mathcal{J}(f_0) \to \mathcal{J}(f_0)$ и $f: \mathcal{J}(f) \to \mathcal{J}(f)$ топологически сопряжены.

Функция $f_0 \in M$ называется структурно устойчивой (в семействе M), если для всех функций $f \in M$, достаточно близких к f_0, преобразования $f_0: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ топологически сопряжены.

План дальнейшего изложения таков.
В разделе II доказаны некоторые утверждения аналитического характера, на которых основано изучение структурной устойчивости в семействе M. Эти утверждения представляют и самостоятельный интерес (см., например, Предложение 2).

Изучение структурной устойчивости в классе M проводится в разделе III. Теоремы I и 2 раздела III показывают, что в семействе M функция общего положения $\mathcal{J}$ - устойчива. Множество Σ $\mathcal{J}$ - устойчивых функций является внутренностью множества таких функций $f \in M$, которые не имеют нейтральных циклов. Сопрягающий гомеоморфизм $h : \mathcal{J}(f_0) \to \mathcal{J}(f)$ строится так же, как и в работах [I-3]. Однако в случае целых трансцендентных функций необходимо предварительно доказать, что периодические точки как функции локальных координат в M имеют лишь алгебраические особые точки. Это утверждение (лемма 4) и является основной целью раздела II.

Большой орбитой точки x называется $\{y : \exists\, m,n \;\; f^m x = f^n y\}$. Будем говорить, что орбита точки x поглощается циклом, если существуют такие $m > n \geqslant 0$, что $f^m x = f^n x$. Через Λ обозначим множество таких функций $f \in M$, у которых орбита некоторой базисной точки поглощается циклом или две базисные точки лежат в одной большой орбите. В теоремах 3 и 4 доказано, что $\Sigma \setminus \Lambda$ - плотное открытое подмножество в M, состоящее из структурно устойчивых функций. Таким образом, структурная устойчивость - свойство общего положения в M.

Согласно лемме 6 (раздел II) нейтральные периодические точки и, в частности, области Зигеля могут быть уничтожены малым шевелением функции в семействе M. Поэтому сопрягающий гомеоморфизм достаточно строить на множестве Жюлиа и на областях притяжения притягивающих циклов. Это реализуется в теореме 4 по схеме работы [3], а также при помощи некоторой аналитической подготовки (лемма 5).

В разделе IV рассматриваем простейшее из семейств M, состоящее из функций, эквивалентных $\exp z$. Очевидно, что эти функции имеют вид $b \exp wz + a$. Редуцированное семейство $M_{\#}$ можно реализовать, например, в виде $\exp wz$, $w \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это семейство интенсивно изучалось в последнее время ([II,I6,I7]). Для того чтобы параметр не имел особых точек в комплексной плоскости, мы рассматриваем семейство $f_a(z) = \exp z + a$. Бифуркационная диаграмма семейства f_a преобразуется в диаграмму семейства $\exp wz$ при отображении $w = \exp a$.

Пусть $W_{p,n}$ - некоторая гиперболическая область для семейства f_a. При $a \in W_{p,n}$ функция f_a имеет единственный притягивающий цикл порядка p, мультипликатор которого обозначим через $\lambda_{p,n}(a)$.

ТЕОРЕМА 5. Функция $\lambda_{p,n}(a)$ является универсальным накрывающим отображением области $W_{p,n}$ над единичным кругом с проколом в нуле $\mathcal{U}^*$.

Таким образом, $\lambda_{p,n}(a) = \exp ih(a)$, где h - однолистное конформное отображение области $W_{p,n}$ на полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Эта полуплоскость, естественно, интерпретируется как пространство Тейхмюллера для тора с проколом. Теорема 5 аналогична результату Дуади-Хаббарда [4] для семейства $z^2 + c$.

II. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При исследовании функций класса S очень полезна логарифмическая замена переменной в окрестности ∞ [II], которую сейчас опишем. По-видимому, впервые аналогичная замена применялась Тейхмюллером в связи с другими вопросами. Пусть $R > |a_i(f)|$, $i = 1, \ldots, q$, $R > |f(0)|$. Положим $H = \{z : |z| > R\}$, и пусть G – полный прообраз множества H. Для любой компоненты V множества G $f: V \to H$ – накрытие. Легко видеть, что область V односвязна и ограничена одной простой аналитической кривой, уходящей обоими концами в ∞. Функция $\varphi = \ln f$ конформно и однолистно отображает область V на полуплоскость $P = \{z : Re\, z > \ln R\}$. Поскольку $0 \notin G$, функция exp однолистна на каждой компоненте множества $\Pi = \ln G$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "F"] \arrow[d, "exp"'] & P \arrow[d, "exp"] \\ G \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & H \end{tikzcd} \qquad (2.1)$$

Функция $F = \varphi \circ exp$ конформно и однолистно отображает каждую компоненту W множества Π на полуплоскость P. Рассмотрим отображение $\Phi : P \to W$, правое обратное к F. Пусть $z \in W$. Круг радиауса $Re\, F(z) - \ln R$ с центром в точке $F(z)$ содержится в полуплоскости P. Из классической теоремы об 1/4 [12] следует, что множество W содержит круг радиуса $\frac{1}{4}|\Phi'(F(z))|(Re\, F(z) - \ln R)$. С другой стороны, поскольку функция exp однолистна на W, то W не содержит вертикальных отрезков длины 2π. Следовательно,

$$|F'(z)| \geq \frac{1}{4\pi}(Re\, F(z) - \ln R). \qquad (2.2)$$

Кроме того, из (2.1) следует, что

$$f'(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta} F'(z), \quad \zeta = exp\, z. \qquad (2.3)$$

Пусть V – область, не содержащая нуля и ограниченная простой кривой, уходящей обоими концами на ∞; $b \in \partial V$. Пусть $z \in V$. Рассмотрим окружность $L = \{\omega : |\omega| = |z|\}$ и интервал (b_3, b_4) множества $L \cap V$, содержащий точку z. Будем говорить, что точка z содержится в <u>заливе</u>, если точка b не лежит между точками b_3, b_4 на кривой ∂V. Заливы образуют замкнутые ограниченные подмножества области V. Дополнение в области V ко всем заливам является неограниченной областью. Если точку b заменить на $b' \in \partial V$, то понятие залива изменится лишь в ограниченной части плоскости. Поэтому далее не будем подчеркивать зависимость от точки b.

Понятие залива далее будет существенным ввиду следующего обстоятельства: если $b_1, b_2 \in \partial V$, точка $z \in V$ не лежит в заливе и $|z|$ достаточно велик, то три ограниченные дуги кривой ∂V с концами в точках b_1, b_2, b_3, b_4 и дуга $L = (b_3, b_4)$ окружности образуют криволинейный четырехугольник $[b_1\ b_2\ b_3\ b_4]$.

Заметим, наконец, что если Γ – кривая, уходящая на ∞ и содержащаяся в V, то на Γ как угодно далеко есть точки, не лежащие в заливах.

Следующая лемма является модификацией одной теоремы Альфорса [18].

ЛЕММА I. Пусть V – компонента множества $G = \{z : |f(z)| > R\}$ из диаграммы (2.1). Зафиксируем в области V однозначную ветвь аргумента. Предположим, что точка $z \in V$ не содержится в заливе.
Тогда

$$\ln^2|f(z)| + \arg^2 f(z) \geq A|z| \exp \frac{\arg^2 z}{\ln|z|},$$

где константа A не зависит от z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi : G \to P$ – отображение, фигурирующее в диаграмме (2.1). Положим $P_0 = P \setminus \{z : |z - \ln R| < 1\}$, $V_0 = \varphi^{-1} P_0 \cap V$. Рассмотрим коммутативную диаграмму, состоящую из однолистных конформных отображений:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "exp"'] & E \arrow[d, "exp + \ln R"] \\ V_0 \arrow[r, "\varphi"'] & P_0 \end{tikzcd} \qquad (2.4)$$

Здесь T – некоторая криволинейная полуполоса, которая с каждой вертикальной прямой пересекается по конечному объединению интервалов общей длиной $\leq 2\pi$; $E = \{s : Re\, s > 0,\ -\frac{\pi}{2} < Im\, s < \frac{\pi}{2}\}$ – прямолинейная полуполоса.

Пусть $z = re^{i\theta} \in V$ (где $\theta = \arg z$ – выбранная заранее ветвь аргумента), $\varsigma = \ln z \in T$. Рассмотрим связную компоненту (d_3, d_4) пересечения $\{t : \operatorname{Re} t = \ln r\} \cap T$, содержащую точку ς. Обозначим $d_1 = \Phi^{-1}(-i\frac{\pi}{2}), d_2 = \Phi^{-1}(i\frac{\pi}{2})$. Если z не лежит в заливе области V и $|z|$ достаточно велик, то определен криволинейный четырехугольник $\Delta = [d_1 d_2 d_3 d_4]$, ограниченный тремя дугами $[d_1 d_2]$, $[d_2 d_3]$, $[d_1 d_4]$ кривой ∂T и отрезком $[d_3 d_4]$.

Оценим снизу экстремальную длину l семейства кривых в Δ, соединяющих стороны $[d_1 d_2]$ и $[d_3 d_4]$. Рассмотрим метрику, совпадающую с евклидовой на множестве $\Delta_0 = \Delta \cap \{t : \operatorname{Re} t < \ln r\}$, а в остальной части плоскости равную нулю. Пусть γ – кривая нашего семейства, $\gamma_0 = \gamma \cap \Delta_0$. Горизонтальная проекция кривой γ_0 имеет длину, не меньшую $\ln r + O(1)$, $r \to \infty$. Вертикальная проекция кривой γ_0 имеет длину, не меньшую $\theta + O(1)$ (кривая γ должна набрать высоту θ; при этом вне множества Δ_0 она может набрать высоту, не превосходящую 2π). Таким образом, евклидова длина кривой γ_0 не меньше, чем

$$\sqrt{\ln^2 r + \theta^2} + O(1), \quad r \to \infty.$$

Евклидова площадь множества Δ_0 не превосходит $2\pi \ln r + O(1)$. Следовательно,

$$l \geq \frac{1}{2\pi}\left(\ln r + \frac{\theta^2}{\ln r}\right) + O(1), \quad r \to \infty. \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь криволинейный четырехугольник $\Phi(\Delta) = [-i\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}, b_3, b_4]$, где $b_i = \Phi(d_i)$. Экстремальная длина семейства кривых, соединяющих горизонтальные стороны $[-i\frac{\pi}{2}, b_4]$ и $[i\frac{\pi}{2}, b_3]$ этого четырехугольника, равна $1/l$. В силу известной оценки Альфорса [19]

$$\frac{1}{l} \geq \frac{\pi}{\tau + \pi}, \tag{2.6}$$

где $\tau = \inf\{\operatorname{Re} s : s \in [b_3, b_4]\}$.

Из (2.5), (2.6) следует, что

$$\tau \geq \frac{1}{2}\left(\ln r + \frac{\theta^2}{\ln r}\right) + O(1), \quad r \to \infty. \tag{2.7}$$

Из диаграммы (2.4) и того, что $\Phi(\varsigma) \in [b_3, b_4]$ вытекает, что

$$\ln|\varphi(z)| - \ln R| = \operatorname{Re}\Phi(\varsigma) \geq \tau. \tag{2.8}$$

Из (2.7), (2.8) следует

$|\varphi(z)| \geq \sqrt{Ar}\, \exp\frac{\theta^2}{2\ln r}$, где A не зависит от z. Так как $\ln^2|f(z)| + \arg^2 f(z) = |\varphi(z)|^2$, то лемма I доказана.

ЛЕММА 2. Пусть ψ есть K – квазиконформный гомеоморфизм сферы $\overline{\mathbb{C}}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(\infty) = \infty$. Пусть $\arg\psi(z) - \arg z$ – однозначная в $\mathbb{C}^*$ ветвь разности аргументов. Предположим, что для некоторой точки $z_0 \in \mathbb{C}^*$

$$B^{-1} \leq |\psi(z_0)| \leq B, \quad |\arg\psi(z_0) - \arg z_0| \leq B.$$

Тогда при $|z| > |z_0|$ имеют место неравенства

$$C^{-1}|z|^{K^{-1}} \leq |\psi(z)| \leq C|z|^{K}, \tag{2.9}$$

$$|\arg\psi(z) - \arg z| \leq K_1 \ln|z| + C, \tag{2.10}$$

где K_1, C зависят от z_0, K, B, но не зависят от ψ, z.

Для полноты докажем эту лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу одного из определений квазиконформности [I4] если $|z| = |\varsigma| > 0$, то

$$\left|\frac{\psi(z)}{\psi(\varsigma)}\right| \leq L = L(K). \tag{2.11}$$

Через $R(r_0, r)$ обозначим кольцо $\{z : r_0 < |z| < r\}$, а через $M(G)$ – модуль двусвязной области G, $M(R(r_0, r)) = \frac{1}{2\pi}\ln(r/r_0)$.

Рассмотрим кольцо $X = R(|z_0|, |z|)$. Из условий леммы и (2.II) вытекает, что $R(LB, L^{-1}|\psi(z)|) \subset \psi X \subset R(L^{-1}B^{-1}, L|\psi(z)|)$.

Следовательно, $\ln|\psi(z)| - \ln L^2 B \leqslant 2\pi M(\psi X) \leqslant \ln|\psi(z)| + \ln L^2 B$.

Но $K^{-1}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right| \leqslant 2\pi M(\psi X) \leqslant K \ln\left|\frac{z}{z_0}\right|$.

Из двух последних оценок следует (2.9).

Далее, рассмотрим K – квазиконформный гомеоморфизм $\varphi = \exp^{-1}\psi\ \exp$ плоскости $\mathbb{C}$. Чтобы задать φ, нужно выбрать ветвь $\arg\psi(z) - \arg z$. Возьмем ветвь, зафиксированную в условии леммы.
Геомеоморфизм φ преобразует горизонтальную полосу $E = \{x + iy : -\pi < y < \pi\}$ в криволинейную полосу T, которая имеет ширину 2π в каждом вертикальном сечении.

Рассмотрим сечение полосы T двумя вертикальными прямыми $x = \ln|\psi(z_0)|$ и $x = \ln|\psi(z)|$. Рассмотрим семейство Γ кривых в T, соединяющих эти прямые. Легко видеть,что экстремальная длина

$$\ell(\Gamma) \geqslant \frac{(|\arg\psi(z) - \arg z| - B - 2\pi)^2}{2\pi \ln\left|\frac{\psi(z)}{\psi(z_0)}\right|}. \qquad (2.I2)$$

С другой стороны, из (2.II) вытекает, что

$$\ell(\varphi^{-1}\Gamma) \leqslant \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z}{z_0}\right| + \frac{1}{\pi}\ln L. \qquad (2.I3)$$

Наконец, $\ell(\Gamma) \leqslant K\ell(\varphi^{-1}\Gamma)$. (2.I4)

Из (2.9), (2.I2) - (2.I4) следует неравенство (2.I0).

ЛЕММА 3. Рассмотрим кривую $z = \gamma(t)$, $0 \leqslant t < 1$ такую, что $\gamma(t) \to \infty$ и функцию $f \in S$ такую, что $f(\gamma(t)) \to \infty$ при $t \to 1$. Пусть $\{h_t\}_{0 \leqslant t < 1}$ - непрерывное семейство K - квазиконформных гомеоморфизмов сферы $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих условиям леммы 2. Тогда существует такая кривая $z = \gamma_1(t)$, что

$$f(\gamma_1(t)) = h_t f(\gamma(t)), \qquad (2.I5)$$

$$\begin{cases} \ln|\gamma_1(t)| = \ln|\gamma(t)| + O(1), \\ \arg\gamma_1(t) = \arg\gamma(t) + O(1), \quad t \to 1. \end{cases} \qquad (2.I6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 $h_t f(\gamma(t)) \to \infty$, $t \to 1$. Так как f - накрытие над $H = \{z : |z| > R\}$, то найдется кривая $z = \gamma_1(t)$, для которой выполняется (2.I5). Воспользуемся коммутативной диаграммой (2.I)

$$F(\alpha_1(t)) = H_t F(\alpha(t)), \qquad (2.I7)$$

где $\alpha(t) = \ln\gamma(t)$, $\alpha_1(t) = \ln\gamma_1(t)$, $H_t = \exp^{-1} h_t \exp$.

Из (2.I7) и леммы 2 следует

$$|F(\alpha_1(t)) - F(\alpha(t))| = O(\operatorname{Re} F(\alpha(t))), \ t \to 1; \qquad (2.I8)$$

$$\operatorname{Re} F(\alpha_1(t)) \geqslant K^{-1} \operatorname{Re} F(\alpha(t)) - \ln C. \qquad (2.I9)$$

Из неравенств (2.2) и (2.I9) следует, что

$$|\alpha_1(t) - \alpha(t)| \leqslant \frac{Q}{\operatorname{Re} F(\alpha(t))} |F(\alpha_1(t)) - F(\alpha(t))|.$$

Последняя оценка и (2.I8) дают требуемые неравенства (2.I6). Теперь мы можем доказать основной результат этого раздела.

ЛЕММА 4. Периодическая точка преобразования $f \in M$ как многозначная функция на многообразии M может иметь лишь алгебраические особенности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение относительно z

$$f^p z = z. \qquad (2.20)$$

Пусть в окрестности точки f_0 задан элемент аналитической функции $z = \alpha(f)$, удовлетворяющий уравнению (2.20). Рассмотрим кривую f_t, $0 \le t \le 1$. Предположим, что элемент $\alpha(f)$ аналитически продолжается вдоль кривой f_t, $0 \le t < 1$. Возможны два случая.

I) Существует последовательность $t_n \to 1$, такая, что $\alpha(f_{t_n}) \to \alpha_1 \ne \infty, n \to \infty$. В этом случае если $(f^p)'(\alpha_1) \ne 1$, то согласно теореме о неявной функции элемент $\alpha(f)$ аналитически продолжается через точку f_1. Если $(f^p)'(\alpha_1) = 1$, то функция $\alpha(f)$ имеет алгебраическую особенность при $f = f_1$.

2) $\alpha(t) \equiv \alpha(f_t) \to \infty$ при $t \to 1$.

Имеем $f_t = \psi_t f_0 \varphi_t$, где ψ_t, φ_t – непрерывные семейства K – квазиконформных гомеоморфизмов, причем можно считать, что $\psi_t(0) = 0$, $\varphi_t(0) = 0$. Применив несколько раз леммы 2,3, найдем такую кривую $z = \beta(t)$, что при $t > t_0$.

$$f_0^p(\beta(t)) = f_t^p(\alpha(t)) = \alpha(t),$$

$$\ln|\alpha(t)| \le Q \ln|\beta(t)|,$$

$$|\arg\alpha(t) - \arg\beta(t)| \le Q \ln|\beta(t)|.$$

Отсюда следует, что

$$\ln^2|f_0^p(\beta(t))| + \arg^2 f_0^p(\beta(t)) \le 3Q^2 \ln^2|\beta(t)| + 2\arg^2\beta(t).$$

Легко видеть, что последнее неравенство противоречит лемме I.

ЛЕММА 5. Пусть f_t, $0 \le t \le 1$ – кривая в семействе M, $\gamma(t)$, $0 \le t < 1$ – кривая на плоскости. Предположим, что $\gamma(t) \to \infty$, а $f_t(\gamma(t)) \to b$ при $t \to 1$. Тогда b – асимптотическое значение функции f_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $f_t = \psi_t f_1 \varphi_t$, где $\psi_t, \varphi_t \to id$ при $t \to$ I. По лемме 2 $\varphi_t(\gamma(t)) \to \infty$, $t \to$ I. При этом $\lim_{t\to 1} f_1(\varphi_t \gamma(t)) = b$. Лемма доказана.

Теперь исследуем мультипликатор $\lambda(f) = (f^p)'(\alpha(f))$ периодической точки $\alpha(f)$ как функцию на M (ср. [II]).

ЛЕММА 6. Функция $\lambda(f)$ непостоянна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in M$. Рассмотрим "прямую" $f_w = wf$, $w \in \mathbb{C}^*$. Достаточно показать, что функция $\lambda(w) = \lambda(wf)$ непостоянна.

Положим $\alpha_k(w) = f_w^k(\alpha(w))$, $k = 0, \dots, p-1$. Тогда

$$\lambda(w) = w^p \prod_{k=0}^{p-1} f'(\alpha_k(w)). \qquad (2.2I)$$

Предположим, что $\lambda(w) \equiv \lambda$. Если $\lambda = 0$, то некоторая функция $\alpha_k(w)$ тождественно равна некоторой критической точке c функции f. Следовательно, $f_w^p c \equiv c$. Функцию $f_w^k c$ обозначим через $\tilde{g}_{c,k}(w)$. Из рекуррентного соотношения

$$\tilde{g}_{c,k+1}(w) = wf(\tilde{g}_{c,k}(w))$$

легко следует, что при $k \ge$ I функции $\tilde{g}_{c,k}$ непостоянны. Таким образом, $\lambda \ne 0$.

Из леммы 4 вытекает, что существует кривая $w = \gamma(t)$, $0 \le t < 1$, не проходящая через 0, $\gamma(t) \to 0$ при $t \to$ I, вдоль которой аналитически продолжается функция $\alpha(w)$. На этой кривой выполняется соотношение (2.2I).

Предположим, что существует такое $C > 0$ и такая последовательность $w_j \to 0$ на кривой γ, что $|\alpha(w_j)| \le C$. Тогда

$$\left|\prod_{k=0}^{p-1} f'(f_{w_j}^k \alpha(w_j))\right| \le C_1$$

и из (2.2I) следует, что $\lambda(w_j) \to 0$. Противоречие. Следовательно, $\alpha(w) \to \infty$ вдоль кривой γ и аналогично $\alpha_k(w) \to \infty$ вдоль γ, $k =$ I, . . ., $p -$ I. Воспользуемся теперь равенством (2.3)

$$f'(\alpha_k(w)) = F'(z_k(w)) \frac{f(\alpha_k(w))}{\alpha_k(w)},$$

где $z_k(w)=\ln\alpha_k(w)$. Отсюда и из (2.2I) вытекает, что

$$\lambda = \prod_{k=0}^{p-1} F'(z_k(w)) \prod_{k=0}^{p-1} \frac{wf(\alpha_k(w))}{\alpha_k(w)} = \prod_{k=0}^{p-1} F'(z_k(w)).$$

Но последнее произведение стремится к ∞ в силу (2.2) и того, что $\mathrm{Re}\, z_k(w)\to+\infty$ вдоль γ. Противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим целую функцию $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ (не обязательно класса S) и включим ее в однопараметрическое семейство $f_w(z)=f(wz)$, $w\in\mathbb{C}^*$. Рассмотрим некоторую точку $z=b$ и последовательность голоморфных функций

$$\tilde g_{b,m}(w) = f_w^m(b), \quad m=1,2,\dots \qquad (2.22)$$

ЛЕММА 7. При $d_0\ne b, d_1\ne 0$ функции $\tilde g_{b,m}$ попарно различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde g_{b,m}(w)=\sum_{0\le k<\infty}^{b,m} e_k(b,m)\,w^k$.

Нетрудно видеть, что

$$e_k(b,m) = \begin{cases} d_1^k b + s_k, & k=m \\ d_1^k d_0 + s_k, & k<m \end{cases}$$

где s_k не зависит от b,m. Следовательно, если $(b,m)\ne(b',m')$ и $m'\geqslant m$, то $e_m(b,m)\ne e_m(b',m')$. Что и требовалось.

Рассмотрим теперь на многообразии M последовательность голоморфных функций

$$g_{i,m}(f)=f^m(a_i(f)), \quad i=1,\dots,q, \quad m=1,2,\dots, \qquad (2.23)$$

где $a_i(f)$ – базисные точки функции f.

ЛЕММА 8. Функции $g_{i,m}$ попарно различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f\in M$. Сопрягая f при помощи подходящего аффинного преобразования, добьемся того, что $f(0)\ne a_i(f)$, $i=1,\dots,q$ и $f'(0)\ne 0$. Тогда для последовательности

$\tilde g_{a_i,m}(w)$, построенной по функции f при помощи равенства (2.22), применима лемма 7. Но $\tilde g_{a_i,m}(w)=g_{i,m}(f_w)$, где $f_w(z)=f(wz)$. Что и требовалось.

В заключение этого раздела докажем одно следствие леммы I, представляющее самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Трансцендентные функции класса S имеют бесконечное множество отталкивающих неподвижных точек.

Достаточно доказать, что множество всех неподвижных точек бесконечно, так как в силу теоремы 2 из [II] множество притягивающих и нейтральных неподвижных точек конечно. Если бы множество неподвижных точек было конечным, то уравнение $f(z)-z=0$ имело бы конечное множество корней и по теореме Иверсена ([I2], гл. УII) существовала бы кривая Γ, уходящая на ∞ такая, что $f(z)-z\to 0$, $z\to\infty$, $z\in\Gamma$. Последнее невозможно в силу леммы I.

III. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

В этом разделе следуем работам [I-3]. Основным средством при доказательстве устойчивости является возможность продолжения сопрягающего гомеоморфизма с некоторого множества на его замыкание. Следуя работе [3], называем это утверждение λ – леммой.

ЛЕММА 9. (λ – лемма). Пусть в области $W\subset\mathbb{C}^k$ задано семейство голоморфных функций $\varphi_z(w)$, зависящих, как от параметра, от точки z некоторого подмножества $X\subset\mathbb{C}$, $\varphi_z(w_0)\equiv z$ для некоторого $w_0\in W$. Предположим, что при $z_1\ne z_2$, $z_i\in X$ для всех $w\in W$ справедливо $\varphi_{z_1}(w)\ne\varphi_{z_2}(w)$. Тогда существует семейство квазиконформных гомеоморфизмов множества $\bar X$ на образ, таких что $h_w(z)=\varphi_z(w)$, $z\in\bar X$, $w\in W$.

Квазиконформность гомеоморфизмов h_w является очень важным свойством, обнаруженным в [3]. Заметим, что h_w, как правило, не являются гладкими. Доказательство λ – леммы см. в [3, I5]. В [I, 2] λ – лемма явно не формулируется, но несколько раз применяется в конкретных ситуациях.

Обозначим через N_p множество таких функций $f\in M$ которые имеют хотя бы один цикл $\{\alpha_k\}_{k=0}^{p-1}$ периода p, такой что $(f^p)'(\alpha_k) = I$. Пусть $N = \overline{\bigcup_{1\le p<\infty} N_p}$, $\Sigma = M \setminus N$.

ТЕОРЕМА I. Функция $f \in \Sigma$ является J - устойчивой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим односвязную окрестность W точки $f_0 \in \Sigma$. В области W функция $z = \alpha^{[p]}(f)$, заданная неявно уравнением $f^p z = z$, не имеет особых точек. Действительно, согласно лемме 4 все особые точки этой функции алгебраические, а в алгебраической особой точке должно выполняться $(f^p)'(\alpha^{[p]}(f)) = 1$. Следовательно, все ветви $\alpha_k^{[p]}$ являются однозначными аналитическими функциями в W. Семейство функций $\alpha_k^{[p]}(f)$ удовлетворяет условиям λ -леммы. В самом деле, если $\alpha_k^{[p]}(f_1) = \alpha_j^{[s]}(f_1) = z_1$ и $\alpha_k^{[p]} \not\equiv \alpha_j^{[s]}$, то уравнение $f^{ps}(z) = z$ имеет в точке f_1 кратный корень z_1. Следовательно, $(f_1^{ps})'(z_1) = I$, т.е. $f_1 \in N$. Противоречие.

Воспользовавшись λ - леммой, строим гомеоморфизм $h_f : \overline{Per\, f_0} \to \overline{Per\, f}$, сопрягающий сужения $f_0 | \overline{Per\, f_0}$ и $f | \overline{Per\, f}$. Здесь $Per\, f$ - множество периодических точек функции f. Но множество Жюлиа $J(f)$ содержится в $\overline{Per\, f}$ и выделяется из $\overline{Per\, f}$ чисто топологическим свойством: точки из $J(f)$ не изолированы в $\overline{Per\, f}$. Следовательно, гомеоморфизм h_f преобразует $J(f_0)$ в $J(f)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Множество Σ - открытое и всюду плотное подмножество в M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $s(f)$ количество притягивающих циклов функции $f \in M$. Пусть $f_0 \in N$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\tilde{f} \in N_p$ такая, что $dist(f_0, \tilde{f}) < \varepsilon/2$. Пусть $\lambda(f)$ - ветвь мультипликатора периодической точки $\alpha(f)$, для которой $\lambda(\tilde{f}) = I$. По лемме 6 функция λ непостоянна и следовательно, существует такая точка f_1, что $|\lambda(f_1)| < 1$, $dist(\tilde{f}, f_1) < \varepsilon$. Так как притягивающие циклы устойчивы относительно возмущения функции, то $s(f_1) > s(f_0)$ при достаточно малом ε. Если $f_1 \in N$, то процесс можно повторить, еще раз увеличив количество притягивающих циклов. Но количество притягивающих циклов функции $f \in M \subset S_q$ не превосходит q. Таким образом, процесс оборвется не позднее, чем на q -ом шаге, и в результате получится функция $f \in \Sigma$, $dist(f_0, f') < q\varepsilon$. Теорема доказана.

Обозначим через Λ множество таких функций $f \in M$, что $f^m a_i = f^\ell a_j$ для некоторых различных пар (m,i), (ℓ,j), $1 \le i,j \le q$, $m, \ell \ge 0$, где $a_k = a_k(f)$ - базисные точки функции f.

ТЕОРЕМА 3. Множество $\Sigma \setminus \Lambda$ открыто и всюду плотно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Ср. [2], теорема 3.I). Пусть $g_{i,m}(f)$ - аналитическая функция в M, заданная формулой (2.23). Через Λ_k обозначим множество корней уравнения

$$g_{i,m}(f) = g_{j,n}(f), \quad 1 \le m, \ n \le k, \tag{3.I}$$

где пары (i, m), (j, n) различны. В силу леммы 8 $\Lambda_k \neq M$. Так как Λ_k - аналитическое подмножество в M, то Λ_k нигде не плотно в M.

Пусть $f_0 \in \Sigma$. Можно считать, что все притягивающие периодические точки $\alpha_1(f_0), \dots, \alpha_\ell(f_0)$ функции f_0 являются неподвижными. Набор индексов $\{1, \dots, q\}$ разбивается на $\ell + I$ классов $A_1, \dots, A_{\ell+1}$ следующим образом.

Если $g_{im}(f_0) \to \alpha_t(f_0), m \to \infty$, то $i \in A_t$, $1 \le t \le \ell$. Тогда $g_{i,m}(f) \to \alpha_t(f)$ равномерно в некоторой окрестности W_0 точки f_0. Окрестность выберем так, чтобы $\overline{W_0} \subset \Sigma$.

Если $a_i(f_0) \in J(f_0)$, то $i \in A_{\ell+1}$. Из J - устойчивости следует, что в этом случае $a_i(f) \in J(f)$ при $f \in W_0$.

Если i, j принадлежат разным классам A_t, то очевидно, что уравнения (3.I) не имеют решений в W_0. Из J - устойчивости вытекает также, что если $i, j \in A_{\ell+1}$, $i \neq j$, то уравнения (3.I) не имеют решений в W_0. Действительно, в противном случае равенство (3.I) выполнялось бы тождественно в W_0, что противоречит лемме 8.

Займемся теперь случаем $i,j\in A_t$, $1\leqslant t\leqslant \ell$. Пусть Λ^t_k – множество корней уравнения (3.I) при $i,j\in A_t$, $\Lambda^t=\bigcup\limits_{k\geqslant 0}\Lambda^t_k$. В силу сказанного выше $W_0\cap\Lambda = \bigcup (W_0\cap \Lambda^t)$. Через Z^t_0 обозначим множество функций $f\in W_0$, для которых мультипликатор $\lambda_t(f)$ неподвижной точки $\alpha_t(f)$ равен нулю. Z^t_0 –собственное аналитическое подмножество в W_0. Поэтому достаточно показать, что Λ^t нигде не плотно в окрестности точки $f_1\in W_0\setminus Z^t_0$.

Рассмотрим такую окрестность W_1 точки f_1, что $\overline{W}_1\cap Z^t_0=\phi$. Существует такое $\varepsilon>0$, что все преобразования $f\in W_1$ однолистно отображают круг $\{z:|z-\alpha_t(f)|<\varepsilon\}$ в себя. Тогда тем же свойством обладают и все итерации f^m, $f\in W_1$.

Так как последовательность функций $\{g_{i,m}(f)\}_{m=0}^{\infty}$, $i\in A_t$ равномерно сходится к $\alpha_t(f)$ в W_1, то найдется такое k, что

$$|g_{i,n}(f)-\alpha_t(f)|<\varepsilon,\quad i\in A_t,\quad n\geqslant k.$$

Следовательно, каждый корень уравнения $g_{i,k+s}(f)=g_{j,n+s}(f), n\geqslant k$ является также корнем уравнения

$$g_{i,k}(f)=g_{j,n}(f),\quad n\geqslant k. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим теперь множество Z^t_k корней уравнения $g_{i,k}(f)= =\alpha_t(f)$, $i\in A_t$. Это собственное аналитическое подмножество в M, следовательно, нигде не плотное. Поэтому достаточно, показать, что множество Λ^t нигде не плотно в любой окрестности $W_2\subset W_1$ такой, что $\overline{W}_2\cap Z^t_k=\phi$. Но $\inf\{|g_{i,k}(f)-\alpha_t(f)|:f\in W_2\}>0$, а последовательность функций $\{g_{j,n}(f)\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно стремится к $\alpha_t(f)$ при $n\to\infty$. Следовательно, существует такое m, что при $n\geqslant m$ уравнения (3.2) не имеют решений в W_2. Иными словами, $W_2\cap\Lambda^t=W_2\cap\Lambda^t_m$. Так как Λ^t_m – собственное аналитическое подмножество в M, то $W_2\cap\Lambda^t$ нигде не плотно в W_2. Что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. В действительности, это рассуждение показывает, что множество $\Lambda\cap\Sigma$ является объединением трех тонких подмножеств в Σ.

ТЕОРЕМА 4. Функция $f\in\Sigma\setminus\Lambda$ является структурно устойчивой. Сопрягающие гомеоморфизмы могут быть выбраны квазиконформными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0\in\Sigma\setminus\Lambda$. Тогда f_0 не имеет нейтральных рациональных циклов. Следовательно, в областях Фату функции f_0 все траектории сходятся к притягивающим циклам. Из J - устойчивости функции f_0 и леммы 6 следует, что f_0 не имеет и иррациональных нейтральных циклов ([2] , с.8I), в частности, дисков Зигеля. В силу [II] все траектории в множестве нормальности $R(f_0)$ сходятся к притягивающим циклам. Сопрягающий гомеоморфизм в областях притяжения этих циклов строится так же; как и в работе [3] , с использованием леммы 5. Воспроизведем эту конструкцию. Пусть $\{\alpha_k(f_0)\}_{k=0}^{p-1}$ – притягивающий цикл функции f_0. Если f близка к f_0, то f имеет притягивающий цикл $\{\alpha_k(f)\}_{k=0}^{p-1}$ близкий к $\{\alpha_k(f_0)\}$. Мультипликатор этого цикла обозначим через $\lambda(f)$. Пусть среди базисных точек $a_1(f_0),\dots,a_q(f_0)$ первые ν (и только они) лежат в области притяжения цикла $\{\alpha_k(f_0)\}$. Из J - устойчивости функции f_0 следует, что если f близка к f_0, то среди точек $\{a_i(f)\}_{i=1}^{q}$ первые ν (и только они) лежат в области притяжения цикла $\{\alpha_k(f)\}_{k=0}^{p-1}$.

Если Ω - область в $M\times\mathbb{C}$, то через Ω_f обозначим сечение $\{z:(f,z)\in\Omega\}$. Таким образом, $\Omega=\bigcup\limits_{f\in W}\Omega_f$, где W - проекция Ω на M.

ЛЕММА I0. (о зависимости функции Кёнигса от параметров). Пусть $\lambda(f_0)\neq 0$. Существуют окрестности $\Omega^k\subset M\times\mathbb{C}$ точек $(f_0,\alpha_k(f_0))$ и аналитическое отображение ($(f,z)\mapsto H_f(z)$) множества $\Omega=\bigcup\limits_{0\leqslant k\leqslant p-1}\Omega_k$ на единичный круг, такие что

I) $f\Omega^k_f=\Omega^{k+1}_f$, $k=0,\dots,p-2$, $f\Omega^{p-1}_f\subset\Omega^0_f$;

2) H_f однолистно отображает Ω^k_f на единичный круг ;

3) H_f удовлетворяет уравнению Шрёдера

$$H_f(f^p z) = \lambda(f) H_f(z); \qquad (3.3)$$

4) $H_f(fz) = H_f(z),\ z\in \Omega_f^k,\ k=0,\dots,p-2;$

5) траектория $\{f^m a_i(f)\}_{m=0}^\infty$ не проходит через $\partial\Omega_f$.

Для формулировки последнего, шестого условия нужно ввести некоторые обозначения. Через $\varkappa_i$ обозначим первый момент попадания траектории $\{f^m a_i(f)\}_{m=0}^\infty$ в Ω_f. В силу последнего требования $\varkappa_i$ не зависит от f. Положим

$$b_i(f) = H_f(f^{\varkappa_i} a_i(f)),\quad i=1,\dots,\nu. \qquad (3.4)$$

Теперь наложим нормировочное условие

6) $b_\nu(f) \equiv b_\nu = const.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что достаточно построить функцию $H_f(z)$ на окрестности Ω^0 точки $(f_0,\alpha_0(f_0))$, а затем продолжить ее на окрестность цикла с помощью соотношений I) и 4). Таким образом, дело сводится к случаю, когда цикл состоит из единственной точки $\alpha(f)$.

Положим $\tilde H_f(z) = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{f^m z - \alpha(f)}{\lambda(f)^m}$. Так же, как при построении обычной функции Кёнигса [20], проверяется, что в некоторой окрестности Ω точки $(f_0,\alpha(f_0))$ написанный предел существует и определяет аналитическую функцию $\tilde H_f(z)$, удовлетворяющую уравнению (3.3) и однолистную на каждом сечении Ω_f. Чтобы удовлетворить требованиям 2,5,6 достаточно рассмотреть функцию

$$H_f(z) = \sigma(f)\tilde H_f(z),$$

где σ – подходящая аналитическая функция, и сузить область $\tilde\Omega$.

ЛЕММА II. Пусть $f\in\Sigma\setminus\Lambda$, Ω_f – семейство областей, построенное в предыдущей лемме. В окрестности точки f_0 существует семейство отображений

$$h_f^{loc}: \Omega_{f_0} \to \Omega_f,$$

обладающее следующими свойствами:

I) h_f^{loc} – квазиконформный гомеоморфизм при каждом f;

2) $h_f^{loc}(z)$ – аналитичен по f при каждом z;

3) $h_f^{loc}\circ f_0 = f\circ h_f^{loc}$;

4) $h_{f_0}^{loc} = id$;

5) $h_1^{loc}(f_0^{\varkappa_i} a_i(f_0)) = f^{\varkappa_i} a_i(f)$, где $\varkappa_i$ определены в лемме I0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же как и при доказательстве предыдущей леммы, достаточно ограничиться случаем неподвижной точки. Через $R[z_0, z_1]$ будем обозначать замкнутое кольцо $\{z: z_0\leqslant|z|\leqslant z_1\}$. Рассмотрим кольцо $R[z_0, 1]$, где $z_0=|\lambda(f_0)|$. Пусть $\mathcal{D}_0$ – окрестность внутренней границы этого кольца, $\mathcal{D}_i$ – окрестность точки $b_i(f_0)$, определенной по формуле (3.4), $i=1,\dots,\nu-1$. Точки $b_i(f_0)$ лежат внутри кольца $R[z_0, 1]$ в силу требования 5 леммы I0 и попарно различны, так как $f_0\notin\Lambda$. Следовательно, окрестности $\mathcal{D}_i$ можно выбрать попарно не пересекающимися и не содержащими точку $b_{\nu-1}$. Рассмотрим гладкую функцию $\omega: \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ с носителем в $\bigcup\limits_{i=0} \mathcal{D}_i$, равную I на внутренней границе $\{z:|z|=z_0\}$ кольца и в точках $b_i(f_0)$, $i=1,\dots,\nu-1$. Далее определим отображение

$$\tilde g_f: R[z_0, 1]\to R[|\lambda(f)|, 1]$$

следующим образом

$$\tilde{g}_f(z)=\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda(f)}{\lambda(f_0)}\right)^{\omega(z)} z\,, & z\in\mathcal{D}_0\\[2ex] \left(\dfrac{b_i(f)}{b_i(f_0)}\right)^{\omega(z)} z\,, & z\in\mathcal{D}_i\,,\quad i=1,\dots,\nu-1\,,\\[2ex] z\,, & z\notin\bigcup\limits_{i=0}^{\nu-1}\mathcal{D}_i\end{cases}$$

где $\zeta^{\omega}=1$ при $\zeta=1$.

Продолжим отображение $\tilde{g}_f$ с кольца $R[r_0,1]$ на единичный круг $\mathcal{U}$ с помощью соотношения

$$g_f(\lambda(f_0)^m z) = \lambda(f)^m\, \tilde{g}_f(z).$$

Теперь требуемое семейство h_f^{loc} строится следующим образом

$$h_f^{loc} = H_f^{-1}\, g_f\, H_f\,,$$

где H_f – семейство функций Кёнигса, построенное в лемме 10. Все свойства проверяются непосредственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 (окончание).

Пусть $z\in\Omega_0\equiv\Omega_{f_0}$ и

$$z \neq f_0^{\,m} a_i(f_0)\,,\quad i=1,\dots,\nu\,,\quad m=0,1,\dots\,. \tag{3.5}$$

Рассмотрим уравнение

$$f^k\zeta = h_f^{loc}(z)\,. \tag{3.6}$$

Пусть $f_0^k\zeta = z$. Тогда $(f_0^k)'(\zeta_0)\neq 0$, и, следовательно, существует аналитический элемент $\zeta=\varphi_{k,z}(f)$ в окрестности точки f_0 , удовлетворяющий уравнению (3.6) и $\varphi_{k,z}(f_0)=\zeta_0$.

Пусть W – односвязная окрестность точки f_0 , в которой определены гомеоморфизмы h_f^{loc} . Тогда элемент $\varphi_{k,z}$ аналитически продолжается в окрестность W . Действительно, пусть f_t , $0\leqslant t\leqslant 1$ – путь в W , и функция $\varphi_{k,z}$ аналитически продолжается вдоль пути f_t , $0\leqslant t<1$. Если f_1 – алгебраическая особая точка функции $\varphi_{k,z}$ то $\zeta_1=\varphi_{k,z}(f_1)$ – критическая точка функции f_1^k . Следовательно,

$$f_1^k\zeta_i = f_1^m a_i(f_1) \tag{3.7}$$

при некоторых $m\in[0,k-1]$, $i\in[1,\nu]$.

В силу уравнения (3.6) $h_{f_1}^{loc}(z)=f_1^m a_i(f_1)$. Воспользовавшись свойством 5 гомеоморфизмов h_f^{loc} (лемма II), получаем $z=f_0^m a_i(f_0)$ вопреки (3.5).

Предположим теперь, что $\varphi_{k,z}(f_t)\to\infty$, $t\to 1$. В силу леммы 5 $h_{f_1}^{loc}(z)$ является асимптотическим значением функции f_1^k , т.е. снова выполняется (3.7), что невозможно, как только что показано.

Таким образом, мы проверили, что $\varphi_{k,z}(f)$ является аналитической функцией во всей области W ($k=1,2,\dots$, $z\in\Omega_0\setminus\{f_0^m a_i(f_0):\ 0\leqslant m<\infty, 1\leqslant i\leqslant\nu\}$). Легко видеть, что семейство функций $\{\varphi_{k,z}\}$ удовлетворяет условиям λ -леммы. При этом множество $X=\{\varphi_{k,z}(f_0)\}_{k,z}$ совпадает с областью притяжения цикла $\{\alpha_k(f_0)\}_{k=0}^{p-1}$, из которой удалены большие орбиты базисных точек $a_i(f_0)$. По λ – лемме сопрягающий гомеоморфизм продолжается на всю область притяжения цикла $\{\alpha_k(f_0)\}_{k=0}^{p-1}$. Таким образом, сопрягающее преобразование h_f построено на множестве Жюлиа $\mathcal{J}(f_0)$ и на областях притяжения притягивающих циклов, т.е. на всей плоскости $\mathbb{C}$. В силу λ – леммы h_f является квазиконформным гомеоморфизмом плоскости $\mathbb{C}$. Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathcal{J}(f_0) \neq \mathbb{C}$ и $f_0 \in \Sigma \setminus \Lambda$, то объединение областей притяжения притягивающих циклов функции f_0 плотно в $\mathbb{C}$. Несмотря на это, построение сопрягающих гомеоморфизмов следует начинать с множества Жюлиа. Действительно, без проверки $\mathcal{J}$ - устойчивости не ясно, не возникнут ли при возмущении f_0 новые базисные точки в областях притяжения циклов.

IV. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО

Рассмотрим теперь в качестве иллюстрации семейство функций, эквивалентных $\exp z$. Эти функции имеют вид $b \exp wz + a$. Факторизация по действию аффинной группы сопряжениями приводит к редуцированному семейству $\exp wz$, $w \in \mathbb{C}^*$. Чтобы параметр не имел особых точек в комплексной плоскости, мы рассмотрим семейство $f_a(z) = \exp z + a$. Если функция f_a аффинно сопряжена с $f_{a'}$, то $a' = a + 2\pi i n$. Проекция семейства f_a на редуцированное семейство $\exp wz$ имеет вид $w = \exp a$.

ТЕОРЕМА В [II, I6]. Для функции $f_a(z) = \exp z + a$ имеет место одна из следующих возможностей:

I) Функция f_a имеет единственный притягивающий цикл $\{\alpha_k\}_{k=0}^{p-1}$. Множество нормальности $R(f_a)$ совпадает с областью притяжения цикла $\{\alpha_k\}$. Лебегова мера множества Жюлиа $\mathcal{J}(f_a)$ равна 0. Базисная точка a содержится в области непосредственного притяжения цикла $\{\alpha_k\}$, но ее орбита не поглощается этим циклом. Функция f_a не имеет нейтральных циклов.

2) Функция f_a имеет единственный нейтральный рациональный цикл $\{\alpha_k\}_{k=0}^{p-1}$. Остальные свойства у функции f_a такие же, как и в случае I).

3) Функция f_a имеет цикл областей Зигеля.

4) Множество Жюлиа $\mathcal{J}(f_a)$ совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$.

Если a вещественно, то при $a < -1$ имеет место случай I), при $a > -1$ - случай 4), при $a = -1$ - случай 2). Тот факт, что при $a = 0$ $\mathcal{J}(f_a) = \mathbb{C}$ впервые доказан М.Мисюревичем [2I].

Через W обозначим множество таких значений параметра, при которых функция f_a имеет притягивающий цикл. Очевидно, что W открыто. Таким образом, имеем открытое множество функций без нейтральных циклов. По теореме I эти функции $\mathcal{J}$ - устойчивы. Кроме того, орбита единственной базисной точки a не поглощается циклом. По теореме 4 функция f_a структурно устойчива при $a \in W$.

В случаях 2) и 3) функция f_a не является $\mathcal{J}$ - устойчивой, поскольку она имеет нейтральный цикл.

Неизвестно, может ли быть $\mathcal{J}$ -устойчивой (или, что то же в этом случае, структурно устойчивой) функция f_a, для которой $\mathcal{J}(f_a) = \mathbb{C}$. Как показал Р.Девани [22], при $a = 0$ функции f_a не являются структурно устойчивыми. Следующий факт сразу следует из теоремы В: множество значений параметра a, для которых функция f_a имеет притягивающий цикл или $\mathcal{J}(f_a) = \mathbb{C}$ плотно в a - плоскости. Теорема 4 показывает, что на внутренности этого множества значений параметра динамика функции f_a устойчива. Является очень правдоподобной следующая

ГИПОТЕЗА I. Множество W значений параметра a, при которых функция f_a имеет притягивающий цикл, плотно в a -плоскости. Гипотеза I является аналогом знаменитой гипотезы Фату, которая в современных терминах звучит так: рациональная функция общего положения удовлетворяет аксиоме А Смейла. Теорема 4 сводит доказательство гипотезы I к упомянутой выше проблеме: показать, что если $\mathcal{J}(f_a) = \mathbb{C}$, то функция f_a не является структурно устойчивой.

Изучим более детально множество W. Через W_p обозначим множество таких значений параметра $a \in W$, для которых функция f_a имеет притягивающий цикл порядка p; $W_{p,n}$ - связные компоненты множества W.

Покажем, что область $W_{p,n}$ односвязна. Для этого рассмотрим последовательность целых функций $g_m(a) = f_a^m(a)$, $m = 0, 1, \dots$. Пусть $\{\alpha_k(a)\}_{k=0}^{p-1}$ - притягивающий цикл функции f_a, $a \in W_{p,n}$. Имеем $g_{mp+k}(a) \to \alpha_k(a), m \to \infty$, равномерно на компактных подмножествах области $W_{p,n}$. Пусть γ - простая жорданова кривая, целиком лежащая в $W_{p,n}$. Тогда если a лежит внутри γ, то по принципу максимума

$$|g_{mp+k}(a) - g_{np+k}(a)| \leq \max_{b \in \gamma} |g_{mp+k}(b) - g_{np+k}(b)| \to 0; \; m, n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{g_{mp+k}(a)\}_m$ внутри кривой γ равномерно сходится к функции $\tilde{\alpha}_k(a)$ - аналитическому продолжению функции $\alpha_k(a)$ из области $W_{p,n}$. Легко видеть, что $\{\tilde{\alpha}_k(a)\}_{k=0}^{p-1}$ притягивающий цикл функции f_a. Следовательно, внутренность γ содержится в $W_{p,n}$, что и требовалось.

Пусть $\Lambda_{p,n}(a)$ - мультипликатор притягивающего цикла $\{\alpha_k(a)\}$, $a\in W_{p,n}$. Из леммы 4 следует, что аналитическое продолжение функции $\Lambda_{p,n}$ может иметь только алгебраические особые точки (аналитическое продолжение будем по-прежнему обозначать $\Lambda_{p,n}$). Отсюда легко вывести, что граница области $W_{p,n}$ кусочно аналитична и

$$|\Lambda_{p,n}(a)| = 1, \quad a\in\partial W_{p,n}. \tag{4.I}$$

Таким образом, при $a\in\partial W_{p,n}$ функция f_a имеет нейтральный цикл с периодом p. Порядок этого цикла может быть меньше p. При этом необходимо, чтобы $\Lambda_{p,n}(a)=1$.

Хорошо известно, что если $a\in\partial W_{p,n}$ и $\Lambda(a)$ - корень s -ой степени из I, то существует компонента множества W_{p_1,n_1}, $p_1 = ps$, которая зацеплена за компоненту $W_{p,n}$ в точке a ([23, 24]). При переходе из области $W_{p,n}$ в область W_{p_1,n_1} через точку a происходит "бифуркация рождения притягивающего цикла порядка p_1 из притягивающего цикла порядка p". В действительности, происходит не рождение нового цикла, а вклеивание отталкивающего цикла порядка p_1 в притягивающий цикл порядка p. При прохождении точки бифуркации a снова происходит их распадение, но при этом цикл порядка p становится отталкивающим, а цикл порядка p_1 - притягивающим.

Если, далее, $a\in\partial W_{p_1,n_1}$ и $\Lambda_{p_1,n_1}(a)$ - корень s_1 -ой степени из I, то $a\in\partial W_{p_2,n_2}$, где $p_2 = p_1 s_1$. Мы имеем счетное число областей, которые получаются из первоначальной области $W_{p,n}$ через последовательность бифуркаций. Объединение всех этих областей будем называть деревом гиперболических областей. В дереве к каждой области по плотному множеству точек на ее границе цепляется счетное множество областей.

ГИПОТЕЗА 2. Существует счетное число деревьев гиперболических областей.

Покажем, что область $W_{p,n}$ неограничена. Действительно, в противном случае из (4.I) и принципа минимума следовало бы, что функция $\Lambda_{p,n}$ имеет корень в области $W_{p,n}$. Но $\Lambda_{p,n}(a)=\prod_{k=0}^{p-1} \exp\alpha_k(a)\neq 0$. Противоречие.

Далее, все компоненты множества $\mathbb{C}\setminus\overline{W}_{p,n}$ неограничены. Действительно, каждая такая компонента содержит некоторую гиперболическую область W_{p_1,n_1}, зацепленную за границу области $W_{p,n}$. Так как область W_{p_1,n_1} неограничена, то и компонента множества $\mathbb{C}\setminus\overline{W}_{p,n}$ также неограничена. Следовательно, кривые, ограничивающие области $W_{p,n}$, не имеют самопересечений.

ГИПОТЕЗА 3. Граница области $W_{p,n}$ является простой кусочно аналитической кривой, уходящей обоими концами на ∞.

Опишем явно множества W_1 и W_2.

На границе множества W_1 функция f_a имеет нейтральную неподвижную точку $\alpha=\alpha(a)$. Имеем $e^{\alpha}+a=\alpha$, $|e^{\alpha}|=1$. Из второго уравнения находим $\alpha=i\theta, -\infty<\theta<\infty$. Подставляя в первое, получаем $a=i\theta-e^{i\theta}, -\infty<\theta<\infty$. Это параметрическое задание границы $\partial W_1 = \Gamma_1$. Таким образом, граница Γ_1 является циклоидой с полукубическими особенностями при $a=-1+2\pi i n$, $n\in\mathbb{Z}$. Множество W_1 совпадает с областью, лежащей слева от этой циклоиды.

На лучах $\{a: \mathrm{Re}\, a>-1, \mathrm{Im}\,a=2\pi i n\}, n\in\mathbb{Z}$ имеем $J(f_a)=\mathbb{C}$. Следовательно, области $W_{p,n}$, $p\geqslant 2$ лежат в полосах $\Pi_n = \{a: 2\pi i n<\mathrm{Im}\,a<2\pi i(n+1)\}, n\in\mathbb{Z}$ справа от волны циклоиды Γ_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. В полосе Π_n содержится ровно одна компонента $W_{2,n}$ множества W_2, которая ограничена кусочно аналитической кривой $\Gamma_{2,n}$, уходящей обоими концами на ∞. Кривая $\Gamma_{2,n}$ является гладкой в точке $a_n=1+i\pi(2n+1)$ и касается в ней циклоиды $\Gamma_1=\partial W_1$.

Кривая $\Gamma_{2,n}$ может быть задана параметрически

$$a=i(\theta+u)-e^{i(\theta-u)}, \quad -\infty<\theta<\infty. \tag{4.2}$$

где $u = u(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sin u}{u} = -e^{i\theta}, \qquad (4.3)$$

причем $\operatorname{Im} u \geqslant 0$, $u(\pi(2n+1))=0$. $\qquad$ (4.4)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a \in \partial W_2$, то функция f_a имеет нейтральный цикл $\{\alpha_1(a), \alpha_2(a)\}$ периода 2. Имеем:

$$e^{\alpha_1}+a=\alpha_2, \quad e^{\alpha_2}+a=\alpha_1, \quad |e^{\alpha_1+\alpha_2}|=1.$$

Следовательно, $\alpha_1+\alpha_2 = 2i\theta$, $-\infty<\theta<\infty$,

$$e^{\alpha_2}-e^{\alpha_1} = \alpha_1-\alpha_2 \equiv 2iu.$$

Из этих уравнений вытекает

$$-2iu = e^{\alpha_1}-e^{\alpha_2} = e^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}\left(e^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}} - e^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}\right) = 2ie^{i\theta}\sin u.$$

Таким образом, θ, u связаны уравнением (4.3).

Обратно, прямая выкладка показывает, что если θ, u связаны уравнением (4.3), то точки

$$\alpha_1 = i(\theta+u), \quad \alpha_2 = i(\theta-u) \qquad (4.5)$$

образуют нейтральный цикл с периодом 2 для f_a, где a находится по формуле (4.2).

Исследуем кривую $\left\{u : \left|\frac{\sin u}{u}\right|=1\right\}$. Она состоит из четырех аналитических ветвей γ_i. Ветвь γ_i находится в i-ом квадранте и входит в нуль под углом $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(i-1)$, i = I, ..., 4. Асимптотика ветви γ_i на бесконечности $|x| \sim e^{|y|}$. Кривые γ_1 и γ_3 (γ_2 и γ_4) центрально симметричны. Заметим, что замена пары (θ, u) на $(\theta, -u)$ сохраняет уравнение (4.3) и соответствующее значение параметра a (4.2), переставляя точки цикла $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ (4.5). Следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением двух ветвей γ_1, γ_2, т.е. считать, что $\operatorname{Im} u \geqslant 0$.

При движении вдоль кривой $\gamma_1(\gamma_2)$ от 0 к ∞ функция $\frac{\sin u}{u}$, начиная от I, счетное число раз пробегает единичную окружность по часовой стрелке (против часовой стрелки). Следовательно, функция $\frac{\sin u}{u}$ является счетнократным топологическим накрытием кривой $\gamma_1 \cup \gamma_2$ над единичной окружностью. Но аналогичным свойством обладает функция $\theta \mapsto -e^{i\theta}$. Таким образом, множество решений уравнения (4.3) с $\operatorname{Im} u>0$ распадается на счетное число непрерывных взаимно однозначных ветвей

$$u=u_n(\theta) = u_0(\theta-2\pi n), \quad n=0,\pm1,\dots .$$

Ветвь u_0 выберем так, чтобы $u_0(\pi)=0$. Рассмотрим кривую $a=a_0(\theta)$, соответствующую функции u_0 по формуле (4.2). Так как $a(0)=1+i\pi\in\Pi_0$, то вся кривая $a(\theta)$ лежит в полосе Π_0. Замена функции u_0 на u_n эквивалентна преобразованию $(\theta,u)\mapsto(\theta+2\pi n, u)$, которое в (4.2) приводит к замене a на $a+2\pi i n$. Следовательно, кривая $a_n(\theta)$ содержится в полосе Π_n. Мы проверили что $\Gamma_{2,n}=\partial W_2\cap\Pi_n$ является кривой. Кривая $\Gamma_{2,n}$ имеет общую точку с циклоидой Γ_1, именно, $a_n=1+i\pi(2n+1)$. При этом значении параметра точки цикла α_1,α_2 сливаются в одну неподвижную точку с мультипликатором, равным -I. При переходе из области W_1 в область $W_{2,n}$ в точке a_n происходит бифуркация удвоения периода.

Кривая $\Gamma_{2,n}$ является гладкой в точке a_n. Достаточно это проверить для $\Gamma_{2,0}$. В окрестности точки $u=0, \theta=\pi$ уравнение (4.3) имеет аналитическое решение $\theta=\theta(u)$. Подставляя в (4.2), найдем $a=\omega(u)=1+i\pi-\frac{1}{2}u^2\dots$. Так как угол между ветвями γ_1,γ_2 равен $\frac{\pi}{2}$, то угол между кривыми $\omega(\gamma_1)$, $\omega(\gamma_2)$ в точке $1+i\pi=a_0$ равен π, что и требовалось.

В силу сказанного выше $\Gamma_{2,n}$ – простая кусочно аналитическая кривая, уходящая обоими концами на ∞. Что и требовалось доказать.

Повторяя рассуждения из [25] и учитывая односвязность областей $W_{p,n}$, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Функция $\Lambda_{p,n}(a)$ является универсальным накрытием области $W_{p,n}$ над проколотым в нуле кругом $\mathcal{U}^*$.

Таким образом, $\lambda(a) = \exp ih(a)$, где $h(a)$ - конформное отображение области $W_{p,k}$ на верхнюю полуплоскость. Эта полуплоскость интерпретируется как пространство Тейхмюллера тора с одним проколом.

Весной 1984 года И.Бэйкер сообщил авторам о том, что он получил доказательство Гипотезы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любич М.Ю. Некоторые типичные свойства динамики рациональных отображений. Успехи мат.наук, 1983, т.38, вып.5, с.197-198.
2. Любич М.Ю. Исследование устойчивости динамики рациональных функций .- В сб.: Теория функций, функц.анализ и их приложения, Харьков: Вищ.шк.1984, вып.42, с.72-91.
3. Mané R., Sad P., Sullivan D. On the dynamics of rational maps.- Ann.sci.de l'école normale supér.Ser.4;1983, v.16, No2, p.193-217.
4. Douady A., Hubbard H. Itération des polynômes quadratiques complexes.-C.R.Acad.sci. Ser I, 1982, v.294, No3, p.123-126.
5. Julia G. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles.- J.Math.pures et appl., 1918, v.8, p.47-245.
6. Fatou P. Sur les équations fonctionnelles.-Bull.Soc.Math. France, 1919, v.47, p.161-271; 1920, v.48, p.33-94, 208-314.
7. Fatou P. Sur l'itération des fonctions transcendantes entières. Acta math., 1926, v.47, p.333-370.
8. Sullivan D. Itération des fonctions analitiques complexes.- C.R.Acad.sci., Ser.I;1982; v.294, No9, p.301-304.

9. Baker I.N. An entire function which has wandering domains.- J.Australian Math.Soc., Ser.A;1976, v.22, p.173-176.
10. Baker I.N. Wandering domains in the iteration of entire functions.-Djursholm, 1983.-29p.(Preprint/Inst.Mittag-Leffler : No20).
11. Еременко А.Э., Любич М.Ю. Итерации целых функций. Харьков, 1984.- 37 с.(Препринт ФТИНТ АН УССР: 6-84).
12. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции.-М.-Л.: ГИТТЛ, 1941.-388 с.
13. Альфорс Л. Лекции о квазиконформных отображениях.-М.: Мир, 1969.-133с.
14. Крушкаль С.Л. Квазиконформные отображения и римановы поверхности.- Новосибирск: Наука, 1975.- 195 с.
15. Bers L., Royden H.L. Holomorphic families of injections.- New York, 1984.-48p.(Preprint / Columbia University).
16. Baker I.N., Rippon P. Iteration of exponential functions.- London, 1984.-49p.(Preprint / Imperial College).
17. Devaney R. Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps.-Boston, 1984.-9p.(Preprint / Boston University).
18. Ahlfors L. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen.-Acta soc.sci.fenn., N. S.I, 1930, No9, p.1-40.
19. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции.- М.: Наука, 1979. - 320с.
20. Валирон Ж. Аналитические функции.-М.: ГИТТЛ, 1957.- 235 с.
21. Misiurewicz M. On iterates of e^z .- Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1981, v.1, No1, p.103-106.
22. Devaney R.L. Structural instability of exp z.- Boston, 1984. -38p.(Preprint / Boston University).
23. Mandelbrot B. Fractal aspects of the iteration of $\lambda z(1-z)$ for complex z and λ .-Ann.N.-Y.Acad.of Sci., 1980, v.357, p.249-259.

24. Левин Г.М. О последовательности бифуркаций однопараметрического семейства отображений.- Успехи мат.наук,1982, т.36. № 3, с.189-190.
25. Douady A. Systèmes dynamiques holomophes.-Séminaire Bourbaki, 35e année,1982/83,No599,p.39-63.

Рукопись представлена 06.07.1984г.

ЕРЕМЕНКО Александр Эммануилович

ЛЮБИЧ Михаил Юрьевич

Ответственный за выпуск Кисуленко И.А.

БЦ № 17401 . Подписано к печати 14.12.84г. Физ.п.л.2,25.
Уч.-изд.л.2,25 . Заказ № 40. . Тираж 200 экз. Цена 23 коп.

Ротапринт ФТИНТ АН УССР ,Харьков-166, пр.Ленина,47