FORMULES ET PROPOSITIONS

POUR L'EMPLOI

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Elliptic functions

FORMULES ET PROPOSITIONS

POUR L'EMPLOI

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

D'APRÈS DES LEÇONS ET DES NOTES MANUSCRITES DE

Theodor

M. K. WEIERSTRASS

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BERLIN.

RÉDIGÉES ET PUBLIÉES

PAR

M. H. A. SCHWARZ

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BERLIN.

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR

M. HENRI PADÉ

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE

CONTENANT LES FEUILLES 1—12.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1894.

IMPRIMERIE DIETERICH,
W. FR. KAESTNER,
GŒTTINGUE.

A M. CHARLES HERMITE

HOMMAGE

PRÉSENTÉ

LE JOUR DU 70ME ANNIVERSAIRE DE SA NAISSANCE

A L'ÉMINENT SAVANT ET A L'HOMME VÉNÉRABLE

EN TÉMOIGNAGE D'ADMIRATION ET DE DÉVOUEMENT

PAR

L'AUTEUR

(RECAP)

PRÉFACE DU TRADUCTEUR.

Le recueil de formules et de propositions relatives aux fonctions elliptiques de M. Schwarz est trop connu du public français pour qu'il soit nécessaire de le lui présenter.

La première édition a paru à Gœttingue, en 1885; elle a été rapidement épuisée. C'est sur la seconde, d'ailleurs peu différente de la première, qu'a été faite notre traduction. Venant peu après la grande et belle œuvre d'Halphen, au moment où MM. J. Tannery et Molk font paraître un de ces ouvrages qui consacrent la forme définitive d'une partie de la science, nous pouvons penser qu'elle arrive alors que les fonctions elliptiques acquièrent véritablement droit de cité dans la partie élémentaire des Mathématiques, et qu'elle pourra rendre de réels services.

La qualité la plus essentielle d'une telle publication est, sans contredit, une parfaite correction des formules qu'elle renferme: les personnes compétentes jugeront sans doute que ce n'est pas non plus celle qu'il est le plus aisé d'obtenir. A ce point de vue, il est permis d'affirmer que l'œuvre de M. Schwarz est tout à fait remarquable; il semble difficile de faire mieux, si l'on songe au nombre des formules reproduites, à leur complication et aux difficultés de composition typographique qui en sont la conséquence, à leur variété, enfin, qui fait de la correction des épreuves un travail véritablement minutieux et pénible. Je puis dire que l'éminent Géomètre de Berlin ne s'est épargné aucune peine pour faire de son recueil l'un de ceux en lesquels tout calculateur peut avoir la confiance la plus entière. Omettrai-je de témoigner aussi du souci qu'il a montré de la beauté des caractères d'imprimerie employés et de sa recherche heureuse de toute élégance.

Au point de vue de la correction des formules, l'édition française n'est pas inférieure à l'édition allemande, et c'est, assurément, la meilleure de ses qualités. La même composition typographique a servi, en effet, dans les deux éditions, allemande et française, à l'impression de toutes les formules; le texte français a été fait de telle manière qu'il a pu être simplement substitué au texte allemand; la pagination des deux éditions est la même, et la même aussi que celle de l'édition de 1885; les mêmes formules, dans les trois éditions, se retrouvent aux mêmes pages; les numéros des paragraphes n'ont pas été changés.

La nouvelle édition allemande et, par suite, l'édition française renferment cependant quelques formules nouvelles; en outre, de légers changements de notations sont intervenus: je signalerai ici les principaux, dans le but de faciliter les renvois d'une édition à l'autre.

La fonction $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ a été désignée plus simplement par $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$.

Les quantités h_0, h_1, h_2, h_3 des paragraphes 32 et 33 sont devenues H_0, H_1, H_2, H_3, parce qu'elles prenaient une signification différente aux paragraphes 45 et 46.

Dans le Tableau du paragraphe 33, les cas V et VI ont été échangés entre eux.

Enfin, les quantités $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \cdots$ du paragraphe 40 ont acquis une signification nouvelle: elles ne diffèrent plus des quantités $\mathfrak{L}_{0,1}, \mathfrak{L}_{0,2}, \mathfrak{L}_{0,3}, \cdots$ du paragraphe 48, qu'en ce que k^2 y remplace l^4.

Nous exprimerons maintenant un regret qui appelle naturellement un vœu: il est regrettable que le travail de M. Schwarz ne soit pas encore entièrement achevé. Nous savons que les matériaux nécessaires à cet achèvement sont déjà rassemblés, et que le temps seul fait défaut à l'éminent membre de l'Académie des Sciences de Berlin pour les mettre en œuvre; nous espérons, avec lui, que le jour viendra bientôt où, en complétant son recueil, il donnera son entière perfection à une œuvre déjà si bonne à tous les autres points de vue.

Cette première partie suffit, néanmoins, à elle seule, comme on peut s'en convaincre à la seule inspection de la table des matières, pour le plus grand nombre des applications, et elle sera d'autant plus utile aux mathématiciens qu'aucun travail analogue n'a été publié jusqu'à ce jour.

Lille, Janvier 1894. HENRI PADÉ.

TABLE DES MATIÈRES.

Fin de la table des matières de la première partie.

Propositions générales concernant les fonctions analytiques qui ont un théorème d'addition algébrique.

1.

Si une fonction analytique $\varphi(u)$ de l'argument u jouit de cette propriété que les valeurs

$$\varphi(u), \qquad \varphi(v), \qquad \varphi(u+v)$$

de la fonction, qui correspondent respectivement aux trois valeurs

$$u, \qquad v, \qquad u+v$$

de l'argument, soient liées par une équation algébrique à coefficients indépendants de u et de v, on dit que, pour cette fonction, il existe un **théorème d'addition algébrique**, ou bien que cette fonction a un théorème d'addition algébrique.

Toute fonction analytique $\varphi(u)$, qui a un théorème d'addition algébrique, jouit de cette propriété qu'il existe une équation algébrique à coefficients indépendants de l'argument u, entre la fonction et sa dérivée première $\varphi'(u)$, prise par rapport à l'argument u.

Le champ de l'argument d'une telle fonction peut toujours être étendu à toutes les valeurs finies sans que la fonction cesse d'avoir le caractère d'une fonction algébrique; toute fonction analytique $\varphi(u)$, en effet, qui a un théorème d'addition algébrique, est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions uniformes de l'argument u, et ont, pour toutes les valeurs finies de celui-ci, le caractère de fonctions rationnelles. Il ne saurait donc y avoir qu'une valeur de l'argument qu'il ne soit pas possible d'atteindre en continuant analytiquement la fonction; cette valeur est l'infini.

Une fonction analytique $\varphi(u)$ pour laquelle il existe un théorème d'addition algébrique est:

I. Soit une fonction algébrique de u,

II. Soit, en désignant par ω une constante convenablement choisie, une fonction algébrique de l'exponentielle $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$,

III. Soit une fonction algébrique d'une fonction $\wp u = s$, qui, en désignant par g_2 et g_3 deux constantes convenablement choisies, peut être définie par l'équation différentielle

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

avec la condition $\wp(0) = \infty$.

Les deux premiers cas sont contenus, comme cas particuliers, dans le troisième: le premier quand g_2 et g_3 sont séparément nuls, le second quand $g_2^3 - 27g_3^2$ est nul.

2.

Parmi les fonctions analytiques d'un argument u, qui ont un théorème d'addition algébrique, il faut particulièrement remarquer celles qui, pour toutes les valeurs finies de l'argument, ont le caractère des fonctions entières ou fractionnaires, qui, par conséquent, sont des fonctions u n i f o r m e s de leur argument, variable sans limitation.

Toutes les fonctions analytiques uniformes, qui ont un théorème d'addition algébrique, jouissent de cette propriété que $\varphi(u+v)$ est exprimable rationnellement en fonction des valeurs $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ et de celles des dérivées premières $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$.

Si une fonction analytique $\varphi(u)$ jouit de la propriété que $\varphi(u+v)$ soit exprimable rationnellement en fonction de $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$, c'est une fonction uniforme de son argument, variable sans limitation, qui, pour toutes les valeurs finies de celui-ci, a le caractère d'une fonction entière ou fractionnaire.

On a encore ce théorème: Si une fonction analytique u n i f o r m e $\varphi(u)$ jouit de la propriété qu'il y ait entre la fonction et sa dérivée première $\varphi'(u)$ une équation algébrique dont les coefficients ne dépendent pas de l'argument, cette fonction a un théorème d'addition algébrique.

Une fonction analytique uniforme $\varphi(u)$, qui a un théorème d'addition algébrique, est:

I. Soit une fonction rationnelle de u,

II. Soit une fonction rationnelle d'une exponentielle $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$,

III. Soit une fonction rationnelle d'une fonction $\wp u$ et de sa dérivée première $\wp' u$.

Les deux premiers cas sont encore contenus, comme cas particuliers, dans le troisième.

3.

Toute fonction analytique uniforme transcendante, qui a un théorème d'addition algébrique, est nécessairement une fonction périodique; c'est une fonction simplement ou doublement périodique.

1° Quand toutes les périodes de l'argument de la fonction peuvent être représentées par des multiples entiers, positifs ou négatifs, d'une seule et même période 2ω, la fonction est dite simplement périodique. La quantité 2ω se nomme une période primitive.

2° Si une fonction analytique uniforme périodique n'est pas simplement périodique au sens que nous venons d'expliquer, et si elle ne se réduit pas à une constante, on peut, d'une infinité de manières, choisir deux périodes 2ω et $2\omega'$ de l'argument de la fonction, de telle sorte que toutes les autres périodes puissent être composées avec celles-ci par addition et soustraction. Dans ce cas, la fonction est dite doublement périodique, et chaque système de deux périodes $2\omega, 2\omega'$, qui a la propriété indiquée, se nomme un couple primitif de périodes.

La partie imaginaire du quotient $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ des deux périodes $2\omega'$ et 2ω d'un couple primitif $(2\omega, 2\omega')$ de périodes est toujours différente de zéro; on peut, sans que cela restreigne essentiellement la généralité des recherches, supposer que la partie réelle du quotient $\frac{\omega'}{\omega i}$, que nous désignerons, dans la suite, par $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$, a une valeur positive.

Deux couples de périodes $(2\omega, 2\omega')$ et $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ seront dits équivalents, quand l'ensemble des quantités déduites par addition et soustraction des périodes de l'un des couples sera identique à l'ensemble des quantités déduites de la même manière des périodes de l'autre couple.

Pour que deux couples de périodes $(2\omega, 2\omega')$ et $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ soient équivalents, il faut et il suffit qu'entre leurs périodes il existe des équations de la forme

$$2\tilde{\omega} = 2p\omega + 2q\omega', \qquad 2\tilde{\omega}' = 2p'\omega + 2q'\omega'$$

où p, q, p', q' désignent des nombres entiers positifs ou négatifs, ou encore zéro, satisfaisant à la condition

$$pq' - qp' = \pm 1.$$

Les deux quantités

$$\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}\right) \quad \text{et} \quad (pq' - qp')\,\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$$

ont le même signe.

En déterminant convenablement les nombres p, q, p', q' on peut toujours faire en sorte que, si l'on pose $\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right) = \alpha$, $\Re\left(\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}i}\right) = \beta$, on ait

$$\alpha^2 + \beta^2 \geqq 1, \qquad -\tfrac{1}{2} \leqq \alpha \underset{<}{=} \tfrac{1}{2}.$$

4.

Le cas le plus général des fonctions analytiques uniformes pour lesquelles il existe un théorème d'addition algébrique est formé par les fonctions uniformes doublement périodiques qui, pour toutes les valeurs finies de l'argument, ont le caractère des fonctions rationnelles, pour l'argument desquelles, par conséquent, il n'y a qu'un point essentiellement singulier, situé à l'infini. Ces fonctions sont, dans un sens étendu, appelées fonctions elliptiques.

Quand, dans ce qui suit, il sera question d'une fonction elliptique, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit d'une fonction elliptique uniforme.

Si $(2\omega, 2\omega')$ est un couple primitif de périodes de l'argument d'une fonction elliptique, toutes les périodes de l'argument de cette fonction sont comprises dans la formule $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, dans laquelle il faut attribuer à chacun des deux nombres μ, μ' toutes les valeurs entières positives et négatives, et encore la valeur zéro. C'est improprement que zéro est compté parmi les périodes.

Deux valeurs de l'argument sont dites congruentes ou non congruentes suivant que leur différence est ou n'est pas une période.

Un parallélogramme des périodes de l'argument u d'une fonction elliptique pour lequel $(2\omega, 2\omega')$ est un couple primitif de périodes, est défini analytiquement par l'ensemble des valeurs contenues dans la formule

$$u = u_0 + 2t\omega + 2t'\omega'$$

quand on attribue à chacune des deux quantités variables t, t' toutes les valeurs réelles de 0 à 1, (0 inclus, 1 exclu).

Par ordre d'une fonction elliptique on entend le nombre de fois que cette fonction devient infinie dans un parallélogramme des périodes; il faut, en cela, compter chaque point où la fonction devient infinie, un nombre de fois égal au degré de cet infini.

Il n'existe aucune fonction elliptique du premier ordre.

La fonction σu.

5.

La fonction analytique la plus simple qui ait le caractère d'une fonction entière pour toutes les valeurs finies de l'argument u, et la propriété de devenir infiniment petite du premier ordre pour $u = 0$ et pour toutes les valeurs $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ congruentes à celle-ci, est la fonction sigma $\sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma u$, qui correspond au couple de périodes $(2\omega, 2\omega')$. Cette fonction est donnée par la formule

$$(1.)\qquad \sigma u = u \prod_w{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \qquad \left\{\begin{matrix} \mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \pm \infty \\ w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ w = 0 \text{ exclu} \end{matrix}\right\}$$

dans laquelle il faut, pour former le produit infini, attribuer à la quantité w toutes les valeurs contenues dans l'expression $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, à l'exception*) de la valeur $w = 0$. Comme nous le ferons toujours dans la suite, nous supposons ici que la partie réelle de la quantité $\frac{\omega'}{\omega i}$ n'est pas nulle, et de plus qu'elle est positive.

---

*) Quand cette exception doit être observée dans une formule, nous le rappelons en faisant suivre d'un accent (′) la caractéristique du produit ou de la somme.

De la définition précédente il résulte que $\sigma(-u) = -\sigma(u)$; la fonction σu est donc une fonction impaire de l'argument u.

On a, en outre, les égalités:

$$(2.)\qquad \sigma(0) = 0,\quad \sigma'(0) = 1,\quad \sigma''(0) = 0,\quad \sigma'''(0) = 0.$$

La fonction σu peut être représentée par une série procédant suivant les puissances entières et positives de la quantité u, convergente pour toutes les valeurs finies de u.

Les coefficients de chacun des termes de cette série sont des fonctions entières des deux quantités g_2 et g_3 déterminées par les équations

$$(3.)\qquad g_2 = 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot \sum\nolimits_w' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 2^2\cdot 5\cdot 7\cdot \sum\nolimits_w' \frac{1}{w^6}\cdot$$

Dans ces équations, il faut aussi attribuer à la quantité w toutes les valeurs contenues dans l'expression $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, à l'exception de la valeur zéro.

Les quantités g_2, g_3 se nomment les invariants correspondant à la fonction σu considérée

$$(4.)\qquad \sigma u = \sigma(u\,|\,\omega, \omega') = \sigma(u; g_2, g_3).$$

Si l'on désigne par m une quantité réelle ou complexe quelconque, différente de zéro, on a les égalités

$$(5.)\qquad \sigma(u\,|\,\omega, \omega') = \sigma(u; g_2, g_3) = m\sigma\left(\frac{u}{m}\,\Big|\,\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = m\sigma\left(\frac{u}{m}; m^4 g_2, m^6 g_3\right).$$

Pour toutes les valeurs finies de l'argument u et des invariants g_2 et g_3 la fonction $\sigma(u; g_2, g_3)$ considérée comme fonction des trois quantités u, g_2, g_3, variables sans limitation, a le caractère d'une fonction entière.

On a

$$(6.)\qquad \sigma u = u + * - \frac{g_2 u^5}{2^4\cdot 3\cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11} - \cdots$$

La fonction $\sigma(u; g_2, g_3)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(7.)\qquad \frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} = 12 g_3 \frac{\partial\sigma}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial\sigma}{\partial g_3} - \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma,$$

d'où, en posant

$$(8.)\qquad \sigma u = \sum\nolimits_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \left(\tfrac{1}{2} g_2\right)^{\mathfrak{m}} (2 g_3)^{\mathfrak{n}} \frac{u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}}{(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1)!} \qquad (\mathfrak{m}, \mathfrak{n} = 0, 1, 2, 3, \cdots\infty)$$

on déduit, pour le calcul des coefficients $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, qui sont des entiers, la formule récurrente

$$(9.)\qquad a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = 3(\mathfrak{m}+1)\,a_{\mathfrak{m}+1,\mathfrak{n}-1} + \frac{16}{3}(\mathfrak{n}+1)\,a_{\mathfrak{m}-2,\mathfrak{n}+1} - \frac{1}{3}(2\mathfrak{m}+3\mathfrak{n}-1)(4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}-1)\,a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}}.$$

Il faut attribuer au coefficient $a_{0,0}$ la valeur 1, et aux coefficients où l'un des deux indices a une valeur négative la valeur zéro.

Les valeurs des coefficients $a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ pour lesquels la somme $4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1$ ne dépasse pas 35 sont contenues dans le tableau suivant:

$u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{n}$	$a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$
u^1	0	0	+1
u^5	1	0	−1
u^7	0	1	−3
u^9	2	0	−9
u^{11}	1	1	−18
u^{13}	0	2	−54
	3	0	+69
u^{15}	2	1	+513
u^{17}	4	0	+321
	1	2	+4 968
u^{19}	0	3	+14 904
	3	1	+33 588
u^{21}	2	2	+257 580
	5	0	+160 839
u^{23}	1	3	+502 200
	4	1	+2 808 945

$u^{4\mathfrak{m}+6\mathfrak{n}+1}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{n}$	$a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$
u^{25}	0	4	+1 506 600
	3	2	+20 019 960
	6	0	+1 416 951
u^{27}	2	3	+162 100 440
	5	1	−41 843 142
u^{29}	1	4	+796 330 440
	4	2	−376 375 410
	7	0	−388 946 691
u^{31}	0	5	+2 388 991 320
	3	3	−9 465 715 080
	6	1	−6 519 779 667
u^{33}	2	4	−144 916 218 720
	5	2	−210 469 286 736
	8	0	+25 514 578 881
u^{35}	1	5	−1 289 959 784 640
	4	3	−4 582 619 446 320
	7	1	−485 174 610 648

Représentation de la fonction σu par un produit simplement infini.

6.

Pour les valeurs infiniment grandes de $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ on a

$$(1.)\qquad \sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega};$$

en attribuant*), en effet, pour former les produits infinis Π_n, au nombre n toutes les valeurs entières positives, on a l'égalité

*) Cette convention subsiste pour tous les produits Π_n et toutes les sommes Σ_n qui s'offrent dans ce qui suit.

$$(2.)\qquad \sin\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right) = \frac{\pi}{2\omega}u\prod_n\left(1-\frac{u}{2n\omega}\right)e^{\frac{u}{2n\omega}}\prod_n\left(1+\frac{u}{2n\omega}\right)e^{-\frac{u}{2n\omega}}.$$

Au moyen de la fonction sinus, on peut représenter la fonction σu, de différentes façons, par un produit simplement infini.

Pour abréger, nous ferons dans ce qui suit emploi des notations

$$(3.)\qquad \frac{u}{2\omega} = v,\qquad e^{v\pi i} = z;\qquad \frac{\omega'}{\omega} = \tau,\qquad e^{\tau\pi i} = h,$$

où il est entendu qu'il faut toujours attribuer à la puissance h^m, quelle que soit la valeur de l'exposant m, la valeur $e^{m\tau\pi i}$. Par suite de la convention faite relativement au signe de la quantité $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$, la partie réelle de la quantité $\tau\pi i$ est négative; le module de h est, par conséquent, plus petit que 1.

En employant ces notations, on a l'égalité

$$(4.)\qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\cdot e^{\frac{1}{6}v^2\pi^2}\prod_n\left\{\frac{\sin(n\tau-v)\pi\cdot\sin(n\tau+v)\pi}{\sin^2 n\tau\pi}\,e^{\frac{v^2\pi^2}{\sin^2 n\tau\pi}}\right\}$$

et, en désignant par η la quantité

$$(5.)\qquad \eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left\{\frac{1}{6}+\sum_n\frac{1}{\sin^2 n\tau\pi}\right\},$$

l'égalité

$$(6.)\qquad \sigma u = e^{2\eta\omega v^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\prod_n\left(1-\frac{\sin^2 v\pi}{\sin^2 n\tau\pi}\right).$$

On a, en outre, les égalités

$$(7.)\qquad \sigma u = e^{2\eta\omega v^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\prod_n\frac{\sin(n\tau-v)\pi}{\sin n\tau\pi}\,e^{-v\pi i}\prod_n\frac{\sin(n\tau+v)\pi}{\sin n\tau\pi}\,e^{v\pi i}$$

$$(8.)\qquad = e^{2\eta\omega v^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i}\prod_n\frac{1-h^{2n}z^{-2}}{1-h^{2n}}\prod_n\frac{1-h^{2n}z^2}{1-h^{2n}}$$

$$(9.)\qquad = e^{2\eta\omega v^2}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\sin v\pi\prod_n\frac{1-2h^{2n}\cos 2v\pi+h^{4n}}{(1-h^{2n})^2}.$$

$$(10.)\qquad 2\eta\omega = \pi^2\left[\frac{1}{6}-\sum_n\frac{4h^{2n}}{(1-h^{2n})^2}\right].$$

Addition d'une période à l'argument de la fonction σu.

7.

Entre σu et $\sigma(u \pm 2\omega)$ existe la relation

(1.) $$\sigma(u \pm 2\omega) = -e^{\pm 2\eta(u \pm \omega)}\sigma(u), \quad \text{d'où l'on déduit} \quad \eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}.$$

Si l'on remplace le couple de périodes $(2\omega, 2\omega')$ par le couple $(2\omega', -2\omega)$, la fonction σu reste inaltérée; on en conclut ces relations analogues aux précédentes:

(2.) $$\sigma(u \pm 2\omega') = -e^{\pm 2\eta'(u \pm \omega')}\sigma(u), \qquad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}.$$

Pour un accroissement de l'argument égal à une période quelconque, on a la relation

(3.) $$\sigma(u + 2p\omega + 2q\omega') = (-1)^{pq+p+q} e^{2(p\eta + q\eta')(u + p\omega + q\omega')}\sigma(u),$$

ou, en posant $p\omega + q\omega' = \tilde{\omega}$, $p\eta + q\eta' = \tilde{\eta}$:

(4.) $$\sigma(u + 2\tilde{\omega}) = \mp e^{2\tilde{\eta}(u + \tilde{\omega})}\sigma(u);$$

il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que la quantité $\sigma(\tilde{\omega})$ a une valeur différente de zéro, ou égale à zéro.

Quand $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ a une valeur **positive**, les quatre quantités $\omega, \omega', \eta, \eta'$ satisfont à l'égalité

(5.) $$\eta\omega' - \omega\eta' = +\tfrac{1}{2}\pi i;$$

si, ce qui est contraire à notre convention, $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ avait une valeur **négative**, on aurait:

(5*) $$\eta\omega' - \omega\eta' = -\tfrac{1}{2}\pi i.$$

La fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$.

8.

La fonction $\frac{d}{du}\log\sigma(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$, que, pour abréger, nous représenterons par $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$, donne lieu aux égalités

(1.) $$\frac{\sigma'}{\sigma}(u \pm 2\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) \pm 2\eta, \quad \frac{\sigma'}{\sigma}(u \pm 2\omega') = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) \pm 2\eta', \quad \frac{\sigma'}{\sigma}(u \pm 2\tilde{\omega}) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) \pm 2\tilde{\eta}.$$

Si l'on pose $\omega+\omega'=\omega''$, $\eta+\eta'=\eta''$, on obtient:

$$(2.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega)=\eta,\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega')=\eta',\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'')=\eta''.$$

Pour les valeurs de u voisines de zéro, on a le développement en série

$$(3.)\quad \frac{\sigma'}{\sigma}(u)=\frac{1}{u}+*-\frac{g_2}{2^2\cdot3\cdot5}u^3-\frac{g_3}{2^2\cdot5\cdot7}u^5-\frac{g_2^2}{2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7}u^7-\frac{g_2g_3}{2^4\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11}u^9-\cdots,$$

tandis que les expressions

$$(4.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u)=\frac{1}{u}+\sum_w{}'\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right)\qquad\begin{pmatrix}w=2\mu\omega+2\mu'\omega'\\ w=0\ \text{excepté}\end{pmatrix}$$

$$(5.)\qquad =\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\left\{\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega}+\sum_n\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')-i\right)+\sum_n\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')+i\right)\right\}$$

$$(6.)\qquad =\frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi i}{2\omega}\left\{\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}}+\sum_n\frac{2h^{2n}z^{-2}}{1-h^{2n}z^{-2}}-\sum_n\frac{2h^{2n}z^2}{1-h^{2n}z^2}\right\}$$

sont valables pour toutes les valeurs finies de l'argument u.

La fonction $\wp u$.

9.

La fonction*) $\wp u=\wp(u\mid\omega,\omega')=\wp(u;g_2,g_3)$ est liée à la fonction σu par la relation

$$(1.)\qquad \wp u=-\frac{d^2}{du^2}\log\sigma u=\frac{(\sigma' u)^2-\sigma u\,\sigma'' u}{\sigma^2 u}.$$

On a par suite la relation $\wp(-u)=\wp(u)$, et les égalités

$$(2.)\qquad \wp u=\frac{1}{u^2}+\sum_w{}'\left(\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right)\qquad\begin{pmatrix}w=2\mu\omega+2\mu'\omega'\\ w=0\ \text{excepté}\end{pmatrix}$$

$$(3.)\qquad =-\frac{\eta}{\omega}+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)}+\sum_n\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega}(u-2n\omega')}+\sum_n\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2\omega}(u+2n\omega')}\right\}$$

$$(4.)\qquad =-\frac{\eta}{\omega}-\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left\{\frac{1}{(z-z^{-1})^2}+\sum_n\frac{h^{2n}z^{-2}}{(1-h^{2n}z^{-2})^2}+\sum_n\frac{h^{2n}z^2}{(1-h^{2n}z^2)^2}\right\},$$

$$(5.)\qquad \wp(u\mid\omega,\omega')=\wp(u;g_2,g_3)=\frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m}\,\middle|\,\frac{\omega}{m},\frac{\omega'}{m}\right)=\frac{1}{m^2}\wp\left(\frac{u}{m};\,m^4g_2,\,m^6g_3\right).$$

Pour les valeurs de u voisines de zéro, on a le développement en série

$$(6.)\qquad \wp u=\frac{1}{u^2}+*+\frac{g_2}{2^2\cdot5}u^2+\frac{g_3}{2^2\cdot7}u^4+\frac{g_2^2}{2^4\cdot3\cdot5^2}u^6+\frac{3g_2g_3}{2^4\cdot5\cdot7\cdot11}u^8+\cdots,$$

*) On prononce séparément les deux lettres p, u.

et, si l'on pose

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + * + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \cdots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \cdots, \tag{7.}$$

on a, pour λ plus grand que 3, la formule récurrente

$$c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda+1)(\lambda-3)} \Sigma_\nu c_\nu c_{\lambda-\nu}, \qquad (\nu = 2, 3, \cdots (\lambda-2)). \tag{8.}$$

La fonction $\wp u$ est une fonction doublement périodique pour l'argument de laquelle $(2\omega, 2\omega')$ est un couple primitif de périodes; dans un parallélogramme quelconque des périodes, elle ne devient infinie que pour la valeur de l'argument congruente à zéro, et l'ordre de cet infini est égal à 2.

La fonction $\wp u$ est donc une fonction elliptique du second ordre. Dans le développement en série procédant suivant les puissances de l'argument et valable pour les valeurs de u voisines de zéro:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + * + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \cdots, \tag{9.}$$

$\frac{1}{u^2}$ est le seul terme à exposant négatif; le terme constant, dans ce développement, a la valeur zéro.

Par ces propriétés la fonction $\wp u$ est déterminée sans ambiguïté. Parmi toutes les fonctions doublement périodiques, la fonction $\wp u$ est donc la plus simple possible. C'est une fonction paire de l'argument u.

La dérivée première $\wp' u$ de la fonction $\wp u$ est une fonction elliptique du troisième ordre, qui ne devient infinie que pour les valeurs de l'argument congruentes à zéro.

On a

$$\wp'(-u) = -\wp'(u), \tag{10.}$$

$$\wp' u = -2 \sum_w \frac{1}{(u-w)^3}, \qquad (w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'). \tag{11.}$$

Pour $u = \omega, \omega', \omega''$, la dernière équation donne

$$\wp'(\omega) = 0, \quad \wp'(\omega') = 0, \quad \wp'(\omega'') = 0. \tag{12.}$$

Pour les valeurs de u voisines de zéro, on a le développement en série

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + * + \frac{g_2}{2\cdot 5} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \frac{g_2^2}{2^3\cdot 5^2} u^5 + \frac{3 g_2 g_3}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 11} u^7 + \cdots \tag{13.}$$

Entre la fonction $\wp u$ et sa dérivée première $\wp' u$ existe la relation

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3, \tag{14.}$$

d'où l'on déduit

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \tfrac{1}{2} g_2, \quad \wp''' u = 12 \wp u \cdot \wp' u. \tag{15.}$$

Toutes les dérivées d'ordre pair de la fonction $\wp u$ sont des fonctions entières de l'argument $\wp u$.

Quand les deux périodes $2\omega, 2\omega'$ du couple primitif de périodes ont des valeurs finies, les trois quantités

$$\wp\omega = e_1, \quad \wp\omega'' = e_2, \quad \wp\omega' = e_3 \tag{16.}$$

sont inégales, et l'on a

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u - \wp\omega)(\wp u - \wp\omega'')(\wp u - \wp\omega') = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3). \tag{17.}$$

On en conclut les relations

$$\begin{gathered} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\tfrac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = -\tfrac{1}{4} g_2, \\ e_1 e_2 e_3 = \tfrac{1}{4} g_3. \end{gathered} \tag{18.}$$

La quantité $(e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_3^2)$ sera représentée par la lettre G.

10.

Dans le cas particulier où, 2ω conservant une valeur finie différente de zéro, la partie réelle de la quantité $\frac{\omega'}{\omega i}$ devient infinie, les deux quantités e_2 et e_3 deviennent égales. Dans cette hypothèse, on obtient les relations

$$\wp u = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{\frac{9g_3}{2g_2}}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}} \cdot u\right)} - \frac{3g_3}{2g_2}, \tag{1.}$$

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9g_3}{2g_2}, \quad e_1 = \frac{3g_3}{g_2}, \quad e_2 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2}, \quad g_2^3 - 27g_3^2 = 0, \tag{2.}$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u) = \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{u\pi}{2\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u, \quad 2\eta\omega = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2} \cdot \frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{u\pi}{2\omega}. \tag{3.}$$

Enfin lorsque 2ω et $2\omega'$ deviennent l'une et l'autre infiniment grandes, tandis que $\lim \Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ est différente de zéro, les trois quantités e_1, e_2, e_3 deviennent égales, et l'on a

(4.) $$\wp u = \frac{1}{u^2}, \quad \frac{\sigma'}{\sigma}(u) = \frac{1}{u}, \quad \sigma u = u; \quad e_1 = e_2 = e_3 = 0, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = 0.$$

Théorème d'addition de la fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$.

11.

Entre la fonction $\wp u$ et la fonction σu existe la relation

(1.) $$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques, on en déduit

(2.) $$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) + \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(u) = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v},$$

(3.) $$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(v) = \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

On en conclut ce théorème d'addition:

(4.) $$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) + \frac{\sigma'}{\sigma}(v) + \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

(5.) $$\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) - \frac{\sigma'}{\sigma}(v) + \frac{1}{2}\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

Théorème d'addition de la fonction $\wp u$.

12.

Du théorème d'addition de la fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ se déduit, par différentiation, le théorème d'addition de la fonction $\wp u$

(1.) $$\wp(u \pm v) = \wp u - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v}\right) = \wp v \mp \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)$$

(2.) $$= \wp u + \frac{(6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2)(\wp v - \wp u) + 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 \mp \wp' u \wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2}$$

(3.) $$= \wp v + \frac{(6\wp^2 v - \frac{1}{2}g_2)(\wp u - \wp v) + 4\wp^3 v - g_2 \wp v - g_3 \mp \wp' u \wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2},$$

(4.) $$\wp(u\pm v) = \frac{2(\wp u\wp v-\frac{1}{4}g_2)(\wp u+\wp v)-g_3\mp\wp' u\wp' v}{2(\wp u-\wp v)^2}$$

(5.) $$= \frac{1}{4}\left[\frac{\wp' u\mp\wp' v}{\wp u-\wp v}\right]^2-\wp u-\wp v.$$

De ces formules se déduisent les suivantes:

(6.) $$\frac{1}{\wp(u\pm v)} = \frac{2(\wp u\wp v-\frac{1}{4}g_2)(\wp u+\wp v)-g_3\pm\wp' u\wp' v}{2(\wp u\wp v+\frac{1}{4}g_2)^2+2g_3(\wp u+\wp v)},$$

(7.) $$\wp(u+v)+\wp(u-v) = \frac{2(\wp u\wp v-\frac{1}{4}g_2)(\wp u+\wp v)-g_3}{(\wp u-\wp v)^2}$$

(8.) $$= 2\wp u-\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log(\wp u-\wp v) = 2\wp v-\frac{\partial^2}{\partial v^2}\log(\wp u-\wp v),$$

(9.) $$\wp(u+v)-\wp(u-v) = -\frac{\wp' u\wp' v}{(\wp u-\wp v)^2} = -\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log(\wp u-\wp v),$$

(10.) $$\wp(u+v)\cdot\wp(u-v) = \frac{(\wp u\wp v+\frac{1}{4}g_2)^2+g_3(\wp u+\wp v)}{(\wp u-\wp v)^2},$$

(11.) $$\wp'(u\pm v) = \left(\frac{(\wp' v)^2}{(\wp v-\wp u)^3}-\frac{1}{2}\frac{\wp'' v}{(\wp v-\wp u)^2}\right)\wp' u\pm\left(\frac{(\wp' u)^2}{(\wp u-\wp v)^3}-\frac{1}{2}\frac{\wp'' u}{(\wp u-\wp v)^2}\right)\wp' v,$$

(12.) $$4(\wp(u)+\wp(v)+\wp(u+v)) = \left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)^2 = \left(\frac{\wp'(u+v)+\wp'(v)}{\wp(u+v)-\wp(v)}\right)^2,$$

(13.) $$\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v} = \frac{-\wp'(u+v)-\wp'(v)}{\wp(u+v)-\wp(v)},$$

(14.) $$\begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp v & \wp' v \\ 1 & \wp(u+v) & -\wp'(u+v) \end{vmatrix} = 0.$$

(15.) $$\wp(2u) = \frac{(\wp^2 u+\frac{1}{4}g_2)^2+2g_3\wp u}{4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3} = \wp u-\frac{1}{4}\frac{d^2}{du^2}\log\wp' u = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{du}\log\wp' u\right)^2-2\wp u.$$

De la dernière de ces formules on déduit, en intégrant,

(16.) $$\frac{\sigma'}{\sigma}(2u) = 2\frac{\sigma'}{\sigma}(u)+\frac{1}{2}\frac{\wp'' u}{\wp' u}, \quad \frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u} = -\wp' u,$$
$$\sigma(2u) = \sigma^4 u\frac{d^3\log\sigma u}{du^3} = 2\sigma u(\sigma' u)^3-3\sigma^2 u\,\sigma' u\,\sigma'' u+\sigma^3 u\,\sigma''' u.$$

Représentation, au moyen des fonctions $\sigma(u|\omega,\omega')$ et $\wp(u|\omega,\omega')$, d'une fonction elliptique d'ordre quelconque.

13.

Soient $\varphi(u)$ une fonction elliptique d'ordre r, $(2\omega, 2\omega')$ un couple de périodes de son argument, et $\sigma(u)$ la fonction $\sigma(u|\omega,\omega')$ qui correspond à ce couple de périodes. Il est toujours possible de déterminer $2r+1$ quantités

$$u_1, u_2, \cdots u_r; \quad v_1, v_2, \cdots v_r; \quad C,$$

de telle sorte qu'on ait la relation

$$\varphi(u) = C\cdot\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\cdots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_r)}; \tag{1.}$$

entre les quantités $u_1, u_2, \cdots u_r$; $v_1, v_2, \cdots v_r$ existe en outre la relation

$$u_1+u_2+\cdots+u_r = v_1+v_2+\cdots+v_r. \tag{2.}$$

La réciproque de ce théorème consiste en ce que:

Si les quantités $u_1, u_2, \cdots u_r$; $v_1, v_2, \cdots v_r$ satisfont à l'égalité (2.), et si aucune des différences

$$u_\lambda - v_\mu \qquad (\lambda \lesseqgtr \mu, \quad \lambda, \mu = 1, 2, 3, \cdots r)$$

n'est congruente à zéro, la fonction $\varphi(u)$ déterminée par l'équation (1.) est une fonction elliptique d'ordre r correspondant au couple de périodes $(2\omega, 2\omega')$.

Si parmi les r quantités $u_1, u_2, \cdots u_r$, il n'y en a pas deux qui soient congruentes, non plus que parmi les r quantités $v_1, v_2, \cdots v_r$, toutes les racines de l'équation $\varphi(u) = 0$ sont s i m p l e s, ainsi que celles de l'équation $\varphi(u) = \infty$. Au contraire, si quelques-unes des quantités $u_1, u_2, \cdots u_r$ d'une part, ou quelques-unes des quantités $v_1, v_2, \cdots v_r$ d'autre part, sont congruentes, les racines correspondantes de l'équation $\varphi(u) = 0$ dans le premier cas, de l'équation $\varphi(u) = \infty$ dans le second cas, sont des racines m u l t i p l e s.

14.

Soient

$$u_0, u_1, u_2, \cdots u_n$$

$(n+1)$ quantités variables sans limitation et indépendamment les unes des autres. La fonction

$$(1.)\qquad \varphi(u_0, u_1, u_2, \cdots u_n) = \begin{vmatrix} 1 & \wp(u_0) & \wp'(u_0) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u_0) \\ 1 & \wp(u_1) & \wp'(u_1) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u_1) \\ 1 & \wp(u_2) & \wp'(u_2) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \wp(u_n) & \wp'(u_n) & \cdots & \wp^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix}$$

est, relativement à chacun de ses arguments, une fonction elliptique d'ordre $(n+1)$. Considérée comme fonction de u_0, elle ne devient infinie que pour la valeur $u_0 = 0$ et les valeurs congruentes; elle est au contraire infiniment petite pour

$$u_0 = u_1, u_2, \cdots u_n, \; -(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

et les valeurs congruentes.

Nous supposerons qu'aucune des quantités

$$u_1, u_2, \cdots u_n, \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

n'est congruente à zéro, et en outre, que parmi les quantités

$$u_1, u_2, \cdots u_n$$

il n'y en a pas deux congruentes l'une à l'autre.

On a d'abord

$$(2.)\quad \varphi(u_0, u_1, u_2, \cdots u_n) = C_n \cdot \frac{\sigma(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\,\sigma(u_0 - u_1)\,\sigma(u_0 - u_2) \cdots \sigma(u_0 - u_n)}{\sigma^{n+1}(u_0)},$$

où le facteur C_n ne dépend que des quantités $u_1, u_2, \cdots u_n$.

Ce facteur est déterminé par l'équation

$$C_n = (-1)^{n-1} n! \frac{\varphi(u_1, u_2, \cdots u_n)}{\sigma(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\,\sigma(u_1)\,\sigma(u_2) \cdots \sigma(u_n)}.$$

Si l'on suppose maintenant qu'aucune des sommes

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \quad u_3 + u_4 + \cdots + u_n, \quad \cdots \quad u_{n-1} + u_n$$

n'est congruente à zéro, l'application répétée de la même formule donne

$$(3.)\quad \varphi(u_0, u_1, u_2, \cdots u_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} 1!2!3!\cdots n! \frac{\sigma(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n)\prod_{\lambda,\mu}\sigma(u_\lambda-u_\mu)}{\sigma^{n+1}(u_0)\sigma^{n+1}(u_1)\sigma^{n+1}(u_2)\cdots\sigma^{n+1}(u_n)},$$

$$(\lambda < \mu, \quad \lambda, \mu = 0, 1, 2, \cdots n).$$

Comme le montre la considération de la continuité, cette formule est valable sous la seule condition qu'aucune des quantités u_λ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots n)$ ne soit congruente à zéro.

On obtient ainsi pour la fonction elliptique $\varphi(u)$ considérée dans l'art. 13 cette expression

$$(4.)\quad \varphi(u) = C' \cdot \frac{\varphi(u, u_1, u_2, \cdots u_r)}{\varphi(u, v_1, v_2, \cdots v_r)},$$

où le facteur C' ne dépend que des quantités $u_1, u_2, \cdots u_r; v_1, v_2, \cdots v_r$. Il faut supposer qu'aucune de ces $2r$ quantités n'est congruente à zéro et qu'il n'y en a pas deux qui soient congruentes l'une à l'autre. Il n'y a aucune difficulté, par un passage à la limite convenable, à déduire de cette formule d'autres formules relatives à ces cas exceptionnels.

On a ces théorèmes généraux:

Toute fonction elliptique (uniforme) $\varphi(u)$ dont l'argument a les deux périodes $2\omega, 2\omega'$ est exprimable rationnellement au moyen de la fonction $\wp(u|\omega,\omega') = \wp u$ qui correspond au couple $(2\omega, 2\omega')$ de périodes et de sa dérivée première $\wp' u$ prise par rapport à la variable u. Réciproquement ces fonctions $\wp u$ et $\wp' u$ sont exprimables rationnellement au moyen de la fonction $\varphi(u)$ et de sa dérivée première $\varphi'(u)$, si toutefois $(2\omega, 2\omega')$ est un couple primitif de périodes de l'argument de la fonction $\varphi(u)$.

Si la fonction $\varphi(u)$ considérée est une fonction paire de son argument, c'est une fonction rationnelle de $\wp u$; si, au contraire, la fonction $\varphi(u)$ est une fonction impaire de son argument, $\frac{\varphi(u)}{\wp' u}$ est une fonction rationnelle de $\wp u$.

Si la fonction $\varphi(u)$ considérée n'est infinie que pour $u = 0$ et les valeurs congruentes, c'est une fonction entière de $\wp u$ et $\wp' u$.

La fonction $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)}$.

15.

Supposons n plus grand que 1, et considérons le cas limite où

$$u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_n = v;$$

en posant

$$(1.)\qquad \varphi(u) = (-1)^n \frac{\sigma^n(u-v)\,\sigma(u+nv)}{\sigma^{n+1}(u)\,\sigma^n(v)\,\sigma(nv)}, \qquad P_n(v) = \begin{vmatrix} \wp' v & \wp'' v & \cdot\cdot & \wp^{(n-1)} v \\ \wp'' v & \wp''' v & \cdot\cdot & \wp^{(n)} v \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \wp^{(n-1)} v & \wp^{(n)} v & \cdot\cdot & \wp^{(2n-3)} v \end{vmatrix},$$

on a la formule

$$(2.)\qquad P_n(v)\cdot\varphi(u) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \wp u - \wp v & \wp' u - \wp' v & \cdot\cdot & \wp^{(n-1)} u - \wp^{(n-1)} v \\ \wp' v & \wp'' v & \cdot\cdot & \wp^{(n)} v \\ \wp'' v & \wp''' v & \cdot\cdot & \wp^{(n+1)} v \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \wp^{(n-1)} v & \wp^{(n)} v & \cdot\cdot & \wp^{(2n-2)} v \end{vmatrix}.$$

Si maintenant on développe chaque membre suivant les puissances de la quantité $u-v$, et que l'on égale les coefficients des termes en $(u-v)^n$ de part et d'autre, on en conclut

$$(3.)\qquad \frac{\sigma((n+1)v)}{\sigma(nv)\,\sigma^{2n+1}(v)} = -\frac{1}{n!\,n!}\cdot\frac{P_{n+1}(v)}{P_n(v)}.$$

D'un autre côté, la quantité c_n étant définie par l'équation

$$(4.)\qquad \sigma(nv) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot c_n}{(1!\,2!\,3!\cdots(n-1)!)^2}\,P_n(v)\cdot\sigma^{nn}(v),$$

on a

$$(5.)\qquad \frac{\sigma((n+1)v)}{\sigma(nv)\,\sigma^{2n+1}(v)} = -\frac{1}{n!\,n!}\cdot\frac{c_{n+1}}{c_n}\cdot\frac{P_{n+1}(v)}{P_n(v)}.$$

Le quotient $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ a donc, pour chacune des valeurs de n considérées, la valeur 1. Pour $n=2$ on a

$$\sigma(2v) = -c_2\cdot\wp' v\cdot\sigma^4(v);$$

par suite de l'égalité (16.) de l'art. 12, c_2 est donc égal à 1.

Par conséquent c_n est aussi égal à 1, et, en remplaçant v par u, on en conclut l'égalité

$$(6.)\qquad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(1!2!3!\cdots(n-1)!)^2}\begin{vmatrix} \wp'u & \wp''u & \cdots & \wp^{(n-1)}u \\ \wp''u & \wp'''u & \cdots & \wp^{(n)}u \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \wp^{(n-1)}u & \wp^{(n)}u & \cdots & \wp^{(2n-3)}u \end{vmatrix}.$$

Par suite des égalités (14.) et (15.) de l'art. 9 toutes les dérivées de la fonction $\wp u$ sont représentables par des fonctions entières à coefficients entiers des quantités $\wp u$, $\wp' u$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3. Le déterminant $P_n(u)$ par lequel est exprimée la fonction $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)}$ est donc aussi une fonction entière de ces quantités.

Si maintenant n est impair, $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)}$ est une fonction paire de l'argument u, et est par suite une fonction entière des quantités $\wp u$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3; si, au contraire, n est pair, $\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)}$ est une fonction impaire de l'argument u, et c'est $\frac{1}{\wp' u}\cdot\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)}$ qui est une fonction entière des quantités $\wp u$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3.

On a donc, pour toutes les valeurs impaires de n une égalité de la forme

$$(7.)\qquad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)} = \frac{1}{(1!2!3!\cdots(n-1)!)^2}\,G(\wp u, \tfrac{1}{2}g_2, g_3)_{\frac{1}{2}(n^2-1)},$$

et, pour toutes les valeurs paires une égalité de la forme

$$(8.)\qquad \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)} = \frac{-\wp' u}{(1!2!3!\cdots(n-1)!)^2}\,G(\wp u, \tfrac{1}{2}g_2, g_3)_{\frac{1}{2}(n^2-4)}.$$

Dans ces égalités $G(\wp u, \frac{1}{2}g_2, g_3)_N$ représente une fonction entière à coefficients entiers des trois quantités $\wp u$, $\frac{1}{2}g_2$, g_3, et l'indice N est le degré de cette fonction relativement à l'argument $\wp u$.

Comme

$$(9.)\qquad \frac{d^2}{du^2}\log\frac{\sigma(nu)}{\sigma^{nn}(u)} = n^2(\wp u - \wp(nu)),$$

les égalités précédentes peuvent servir à exprimer rationnellement $\wp(nu)$ au moyen de $\wp(u)$.

Représentation d'une fonction elliptique d'ordre quelconque au moyen de la fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ et de ses dérivées.

Intégration d'une fonction elliptique d'ordre quelconque.

16.

L'ensemble des valeurs pour lesquelles une fonction elliptique d'ordre r

$$\varphi(u) = C\cdot\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\cdots\sigma(u-u_r)}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_r)} \tag{1.}$$

devient infinie se compose d'un certain nombre m de classes ne contenant chacune que des valeurs congruentes entre elles; soient

$$v_1,\, v_2,\, \cdots v_m$$

des valeurs quelconques appartenant respectivement à chacune de ces classes; soit, pour $\mu = 1, 2, \cdots m$,

$$C_\mu(u-v_\mu)^{-1} + C'_\mu(u-v_\mu)^{-2} + C''_\mu(u-v_\mu)^{-3} + \cdots + C_\mu^{(r_\mu-1)}(u-v_\mu)^{-r_\mu}$$

la somme de tous les termes à exposants **négatifs** qui s'offrent dans le développement en série de la fonction $\varphi(u)$, procédant suivant les puissances de la quantité $u-v_\mu$ et valable dans le voisinage de la valeur v_μ.

Sous ces conditions, on a les égalités

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = r, \qquad C_1 + C_2 + \cdots + C_m = 0, \tag{2.}$$

$$\varphi(u) = C_0 + \sum_\mu C_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu) + \sum_\mu \sum_\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\, C_\mu^{(\lambda)} \frac{d^\lambda}{du^\lambda}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu), \tag{3.}$$

$$(\lambda = 1, 2, \cdots (r_\mu - 1);\quad \mu = 1, 2, \cdots m).$$

On peut déterminer la constante C_0 quand la valeur de la fonction $\varphi(u)$ est connue pour une valeur de l'argument non singulière, c'est-à-dire qui n'est congruente à aucune des valeurs $v_1, v_2, \cdots v_m$, ou quand, outre les termes à exposants **négatifs**, dans le développement en série de la fonction $\varphi(u)$, procédant suivant les puissances de $u-v_\mu$, et valable dans le voisinage de cette valeur v_μ, le terme **constant** est aussi donné.

17.

De l'expression donnée dans l'art. précédent pour la fonction $\varphi(u)$, on déduit pour l'intégrale de cette fonction l'expression suivante où C_0' désigne la constante d'intégration:

$$\begin{aligned}\int\varphi(u)\,du = {} & \sum_\mu C_\mu \log\sigma(u-v_\mu)+C_0 u+C_0' \\ & -\sum_\mu C_\mu' \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu)+\sum_\mu\sum_\lambda(-1)^{\lambda-1}\frac{1}{\lambda!}C_\mu^{(\lambda)}\wp^{(\lambda-2)}(u-v_\mu), \\ & (\lambda=2,3,\cdots(r_\mu-1);\quad \mu=1,2,\cdots m).\end{aligned}$$

Dans la seconde ligne de cette formule $\wp^{(\nu)}(u-v_\mu)$ représente $\frac{d^\nu}{du^\nu}\wp(u-v_\mu)$ quand ν est différent de zéro, et $\wp(u-v_\mu)$ quand $\nu=0$. Il faut en outre remarquer que, en raison des hypothèses faites, tous les termes de l'intégrale qui figurent dans cette ligne disparaissent, lorsque chacun des nombres r_1, r_2, $\cdots r_m$ est égal à l'unité.

Les fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$.

18.

Les équations

$$(1.)\qquad \begin{aligned}\sigma_1 u &= \frac{e^{-\eta u}\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega} = \frac{e^{\eta u}\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega} = \sigma_1(u\,|\,\omega,\omega'),\\ \sigma_2 u &= \frac{e^{-\eta'' u}\sigma(\omega''+u)}{\sigma\omega''} = \frac{e^{\eta'' u}\sigma(\omega''-u)}{\sigma\omega''} = \sigma_2(u\,|\,\omega,\omega'),\\ \sigma_3 u &= \frac{e^{-\eta' u}\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'} = \frac{e^{\eta' u}\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'} = \sigma_3(u\,|\,\omega,\omega')\end{aligned}$$

définissent trois fonctions uniformes $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ de la quantité complexe u variable sans limitation. Pour toutes les valeurs finies de l'argument u, elles ont le caractère des fonctions entières.

Chacune des trois fonctions $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ est une fonction paire de son argument u. A la valeur $u=0$ correspond pour la fonction la valeur 1.

Si dans la formule (1.) de l'art. 11 on attribue à v successivement les valeurs ω, ω'', ω', on obtient les relations

$$2.)\qquad \wp u-e_1=\left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2,\qquad \wp u-e_2=\left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2,\qquad \wp u-e_3=\left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2,$$

qui montrent que chacune des trois différences $\wp u - e_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, 3$) est le carré d'une fonction uniforme de l'argument u.

On a les égalités

$$\wp' u = -2\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma u\,\sigma u\,\sigma u}, \qquad \sigma(2u) = 2\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u. \tag{3.}$$

Pour chacune des valeurs 1, 2, 3 de l'indice λ, on a le développement en série

$$\sigma_\lambda u = 1 - \tfrac{1}{2} e_\lambda u^2 - \tfrac{1}{48}(6e_\lambda^2 - g_2)u^4 - \cdots \tag{4.}$$

Il résulte de l'art. 9 (18.) que, en désignant par λ, μ, ν les trois nombres 1, 2, 3 dans un ordre quelconque, la quantité g_2 est égale à

$$g_2 = -4(e_\mu e_\nu + e_\nu e_\lambda + e_\lambda e_\mu) = -4((e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) - 3e_\lambda^2). \tag{5.}$$

Relativement à l'addition d'une période à l'argument, on a les formules

$$\begin{array}{l|l|l}
\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u & \sigma(u+2\omega'') = -e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma u & \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u \\
\sigma_1(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_1 u & \sigma_1(u+2\omega'') = +e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma_1 u & \sigma_1(u+2\omega') = +e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma_1 u \\
\sigma_2(u+2\omega) = +e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_2 u & \sigma_2(u+2\omega'') = -e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma_2 u & \sigma_2(u+2\omega') = +e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma_2 u \\
\sigma_3(u+2\omega) = +e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_3 u & \sigma_3(u+2\omega'') = +e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma_3 u & \sigma_3(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma_3 u.
\end{array} \tag{6.}$$

Ces formules sont des cas particuliers des suivantes, dans lesquelles p, q désignent des nombres entiers positifs ou négatifs quelconques, ou zéro:

$$\begin{aligned}
2\tilde\omega &= 2p\omega + 2q\omega', \qquad 2\tilde\eta = 2p\eta + 2q\eta', \\
\sigma(u + 2\tilde\omega) &= (-1)^{pq+p+q} e^{2\tilde\eta(u+\tilde\omega)}\sigma u, \\
\sigma_1(u + 2\tilde\omega) &= (-1)^{pq+p} e^{2\tilde\eta(u+\tilde\omega)}\sigma_1 u, \\
\sigma_2(u + 2\tilde\omega) &= (-1)^{pq} e^{2\tilde\eta(u+\tilde\omega)}\sigma_2 u, \\
\sigma_3(u + 2\tilde\omega) &= (-1)^{pq+q} e^{2\tilde\eta(u+\tilde\omega)}\sigma_3 u.
\end{aligned} \tag{7.}$$

Pour toute valeur de m différente de zéro et pour chacune des valeurs 1, 2, 3 de l'indice λ, on a l'égalité

$$\sigma_\lambda(u\,|\,\omega, \omega') = \sigma_\lambda\left(\frac{u}{m}\,\Big|\,\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right). \tag{8.}$$

19.

Soit maintenant

$$\tilde{\omega} = p\omega + q\omega'$$

une demi-période, autrement dit, supposons que les deux nombres entiers p et q ne soient pas simultanément pairs.

Si conformément au mode de notation expliqué dans l'art. 7, on pose

$$\tilde{\eta} = p\eta + q\eta' = \frac{\sigma'}{\sigma}(\tilde{\omega}),$$

la fonction

$$\frac{e^{-\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \frac{e^{\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma\tilde{\omega}}$$

n'est autre que la fonction $\sigma_\lambda u$, où l'indice λ a la valeur $1, 2, 3$, suivant que $\wp\tilde{\omega}$ est égal à e_1, à e_2, à e_3.

Or on a

$$(1.)\qquad \begin{aligned} \wp\tilde{\omega} &= e_1, \text{ et par suite } \lambda = 1, \text{ si } p \equiv 1, \; q \equiv 0 \pmod{2};\\ \wp\tilde{\omega} &= e_2, \text{ et par suite } \lambda = 2, \text{ si } p \equiv 1, \; q \equiv 1 \pmod{2};\\ \wp\tilde{\omega} &= e_3, \text{ et par suite } \lambda = 3, \text{ si } p \equiv 0, \; q \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

En supposant la valeur de λ déterminée conformément à ces conditions, on a les relations

$$(2.)\qquad \wp\tilde{\omega} = e_\lambda,$$

$$(3.)\qquad \frac{e^{-\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}+u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \frac{e^{\tilde{\eta}u}\sigma(\tilde{\omega}-u)}{\sigma\tilde{\omega}} = \sigma_\lambda u,$$

$$(4.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u \pm \tilde{\omega}) \mp \tilde{\eta} = \frac{\sigma'_\lambda u}{\sigma_\lambda u} = \frac{\sigma'_\lambda}{\sigma_\lambda}(u), \qquad \frac{\sigma'_\lambda}{\sigma_\lambda}(u \pm \tilde{\omega}) = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) \pm \tilde{\eta}.$$

Si, dans les expressions de $\wp(u \pm v)$, on attribue à la quantité v la valeur $\tilde{\omega}$, on obtient

$$(5.)\qquad \wp(u \pm \tilde{\omega}) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda}.$$

20.

Pour le premier des cas limites $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) = \infty$ considérés dans l'art. 10, on a:

$$(1.)\qquad \sigma_1 u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}\cos\frac{u\pi}{2\omega},\qquad \sigma_2 u = \sigma_3 u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\right)^2}.$$

Mais si 2ω, aussi bien que $2\omega'$, devient infini, $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right)$ ayant une valeur finie différente de zéro, il faut poser

$$(2.)\qquad \sigma_1 u = \sigma_2 u = \sigma_3 u = 1.$$

21.

Les égalités

$$(1.)\qquad \sqrt{\wp u - e_1} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u},\qquad \sqrt{\wp u - e_2} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u},\qquad \sqrt{\wp u - e_3} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

définissent les valeurs des trois racines carrées comme fonctions **uniformes** de l'argument u.

Si l'on attribue successivement à l'argument u les valeurs

$$\omega_1 = \omega,\qquad \omega_2 = \omega + \omega' = \omega'',\qquad \omega_3 = \omega',$$

on obtient les égalités suivantes,

$$(2.)\qquad \begin{aligned}
\sqrt{e_1 - e_2} &= \frac{\sigma_2\omega}{\sigma\omega} = \frac{e^{\eta''\omega}\sigma\omega'}{\sigma\omega\,\sigma\omega''}, & \sqrt{e_1 - e_3} &= \frac{\sigma_3\omega}{\sigma\omega} = \frac{e^{-\eta'\omega}\sigma\omega''}{\sigma\omega\,\sigma\omega'},\\
\sqrt{e_2 - e_1} &= \frac{\sigma_1\omega''}{\sigma\omega''} = -\frac{e^{\eta\omega''}\sigma\omega'}{\sigma\omega\,\sigma\omega''}, & \sqrt{e_2 - e_3} &= \frac{\sigma_3\omega''}{\sigma\omega''} = -\frac{e^{\eta'\omega''}\sigma\omega}{\sigma\omega'\,\sigma\omega''},\\
\sqrt{e_3 - e_1} &= \frac{\sigma_1\omega'}{\sigma\omega'} = \frac{e^{-\eta\omega'}\sigma\omega''}{\sigma\omega\,\sigma\omega'}, & \sqrt{e_3 - e_2} &= \frac{\sigma_2\omega'}{\sigma\omega'} = \frac{e^{\eta''\omega'}\sigma\omega}{\sigma\omega'\,\sigma\omega''},
\end{aligned}$$

par lesquelles les valeurs des six racines carrées sont déterminées **sans ambiguïté**.

En raison de l'hypothèse $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$, ces radicaux satisfont aux relations

$$(3.)\qquad \sqrt{e_3 - e_2} = -i\sqrt{e_2 - e_3},\qquad \sqrt{e_3 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_3},\qquad \sqrt{e_2 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_2}.$$

Relations entre les fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$.

22.

Des égalités (2.) de l'art. 21 se déduisent les expressions suivantes des quantités $\sigma\omega$, $\sigma\omega''$, $\sigma\omega'$:

$$(1.)\qquad \sigma\omega = \frac{e^{\frac{1}{2}\eta\omega}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}},\qquad \sigma\omega'' = \frac{\sqrt{i}\; e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2}},\qquad \sigma\omega' = \frac{i\,e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}}.$$

Les trois radicaux

$$\sqrt[4]{e_2-e_3},\qquad \sqrt[4]{e_1-e_3},\qquad \sqrt[4]{e_1-e_2}$$

ne doivent prendre que les valeurs dont les carrés sont respectivement égaux aux quantités

$$\sqrt{e_2-e_3},\qquad \sqrt{e_1-e_3},\qquad \sqrt{e_1-e_2}$$

déterminées **sans ambiguïté** par les égalités (2.) de l'art. 21. Chacune des trois racines quatrièmes ne peut donc avoir que **deux** valeurs, et non pas **quatre**; mais dès que l'on a fait choix de la valeur d'**une** de ces trois quantités, les valeurs des deux autres sont déterminées **sans ambiguïté**.

On peut aussi, pour déterminer la valeur du produit de deux quelconques des trois racines quatrièmes, se servir des égalités

$$(1^*)\qquad \sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2} = \frac{\sigma_1(\frac{1}{2}\omega)}{\sigma(\frac{1}{2}\omega)},\qquad \sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt{i}\,\frac{\sigma_2(\frac{1}{2}\omega'')}{\sigma(\frac{1}{2}\omega'')},\qquad \sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_3} = i\,\frac{\sigma_3(\frac{1}{2}\omega')}{\sigma(\frac{1}{2}\omega')}.$$

Il faut attribuer à la quantité $\sqrt{i}$ la valeur $e^{\frac{1}{4}\pi i}$.

En supposant que l'on fixe comme il vient d'être expliqué les valeurs des racines carrées et quatrièmes, le tableau de formules de la page suivante fait connaître les relations auxquelles donnent lieu l'addition et la soustraction d'une **demi-période** à l'argument des quatre fonctions σ.

$$
(2.)\quad
\begin{aligned}
\sigma(u\pm\omega) &= \pm e^{\pm\eta u}\,\sigma\omega\,\sigma_1 u = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_1-e_3}}\,e^{\pm\eta(u\pm\frac{1}{2}\omega)}\sigma_1 u\\
\sigma_1(u\pm\omega) &= \mp\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,e^{\pm\eta u}\,\sigma\omega\,\sigma u = \mp\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,e^{\pm\eta(u\pm\frac{1}{2}\omega)}\sigma u\\
\sigma_2(u\pm\omega) &= \sqrt{e_1-e_2}\cdot e^{\pm\eta u}\,\sigma\omega\,\sigma_3 u = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\cdot e^{\pm\eta(u\pm\frac{1}{2}\omega)}\sigma_3 u\\
\sigma_3(u\pm\omega) &= \sqrt{e_1-e_3}\cdot e^{\pm\eta u}\,\sigma\omega\,\sigma_2 u = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}\cdot e^{\pm\eta(u\pm\frac{1}{2}\omega)}\sigma_2 u
\end{aligned}
$$

$$
(3.)\quad
\begin{aligned}
\sigma(u\pm\omega'') &= \pm e^{\pm\eta'' u}\,\sigma\omega''\sigma_2 u = \pm\frac{\sqrt{i}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_2-e_3}}\,e^{\pm\eta''(u\pm\frac{1}{2}\omega'')}\sigma_2 u\\
\sigma_1(u\pm\omega'') &= \sqrt{e_2-e_1}\cdot e^{\pm\eta'' u}\,\sigma\omega''\sigma_3 u = \frac{1}{\sqrt{i}}\,\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}}\,e^{\pm\eta''(u\pm\frac{1}{2}\omega'')}\sigma_3 u\\
\sigma_2(u\pm\omega'') &= \mp\sqrt{e_2-e_1}\sqrt{e_2-e_3}\,e^{\pm\eta'' u}\,\sigma\omega''\sigma u = \mp\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt{i}}\,e^{\pm\eta''(u\pm\frac{1}{2}\omega'')}\sigma u\\
\sigma_3(u\pm\omega'') &= \sqrt{e_2-e_3}\cdot e^{\pm\eta'' u}\,\sigma\omega''\sigma_1 u = \sqrt{i}\,\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}}\cdot e^{\pm\eta''(u\pm\frac{1}{2}\omega'')}\sigma_1 u
\end{aligned}
$$

$$
(4.)\quad
\begin{aligned}
\sigma(u\pm\omega') &= \pm e^{\pm\eta' u}\,\sigma\omega'\sigma_3 u = \pm\frac{i}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}}\,e^{\pm\eta'(u\pm\frac{1}{2}\omega')}\sigma_3 u\\
\sigma_1(u\pm\omega') &= \sqrt{e_3-e_1}\cdot e^{\pm\eta' u}\,\sigma\omega'\sigma_2 u = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}}\cdot e^{\pm\eta'(u\pm\frac{1}{2}\omega')}\sigma_2 u\\
\sigma_2(u\pm\omega') &= \sqrt{e_3-e_2}\cdot e^{\pm\eta' u}\,\sigma\omega'\sigma_1 u = \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}}\cdot e^{\pm\eta'(u\pm\frac{1}{2}\omega')}\sigma_1 u\\
\sigma_3(u\pm\omega') &= \mp\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}\,e^{\pm\eta' u}\,\sigma\omega'\sigma u = \pm i\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,e^{\pm\eta'(u\pm\frac{1}{2}\omega')}\sigma u.
\end{aligned}
$$

Relations entre les quotients de deux fonctions σ.

23.

Entre les quotients de deux fonctions σ ont lieu les relations

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\sigma(u\pm\omega)}{\sigma_1(u\pm\omega)} = \dfrac{-1}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u} &
\dfrac{\sigma_1(u\pm\omega)}{\sigma_2(u\pm\omega)} = \mp\sqrt{e_1-e_3}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_3 u} \\[2ex]
\dfrac{\sigma(u\pm\omega'')}{\sigma_1(u\pm\omega'')} = \pm\dfrac{i}{\sqrt{e_1-e_2}}\cdot\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} &
\dfrac{\sigma_1(u\pm\omega'')}{\sigma_2(u\pm\omega'')} = \mp\dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u} \\[2ex]
\dfrac{\sigma(u\pm\omega')}{\sigma_1(u\pm\omega')} = \pm\dfrac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\cdot\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} &
\dfrac{\sigma_1(u\pm\omega')}{\sigma_2(u\pm\omega')} = \dfrac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u}
\end{array}
$$

$$
(1.)\quad
\begin{array}{ll}
\dfrac{\sigma(u\pm\omega)}{\sigma_2(u\pm\omega)} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\cdot\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} &
\dfrac{\sigma_1(u\pm\omega)}{\sigma_3(u\pm\omega)} = \mp\sqrt{e_1-e_2}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u} \\[2ex]
\dfrac{\sigma(u\pm\omega'')}{\sigma_2(u\pm\omega'')} = \dfrac{-i}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u} &
\dfrac{\sigma_1(u\pm\omega'')}{\sigma_3(u\pm\omega'')} = -i\,\dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u} \\[2ex]
\dfrac{\sigma(u\pm\omega')}{\sigma_2(u\pm\omega')} = \pm\dfrac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u} &
\dfrac{\sigma_1(u\pm\omega')}{\sigma_3(u\pm\omega')} = \mp\dfrac{i}{\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\sigma(u\pm\omega)}{\sigma_3(u\pm\omega)} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\cdot\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u} &
\dfrac{\sigma_2(u\pm\omega)}{\sigma_3(u\pm\omega)} = \dfrac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} \\[2ex]
\dfrac{\sigma(u\pm\omega'')}{\sigma_3(u\pm\omega'')} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\cdot\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u} &
\dfrac{\sigma_2(u\pm\omega'')}{\sigma_3(u\pm\omega'')} = \pm i\sqrt{e_1-e_2}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_1 u} \\[2ex]
\dfrac{\sigma(u\pm\omega')}{\sigma_3(u\pm\omega')} = \dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3}}\,\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u} &
\dfrac{\sigma_2(u\pm\omega')}{\sigma_3(u\pm\omega')} = \mp\dfrac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u}.
\end{array}
$$

$$
(2.)\quad
\begin{array}{ll}
\dfrac{\sigma(u\pm 2\omega_\lambda)}{\sigma_\lambda(u\pm 2\omega_\lambda)} = \dfrac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} &
\dfrac{\sigma_\mu(u\pm 2\omega_\lambda)}{\sigma_\nu(u\pm 2\omega_\lambda)} = \dfrac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} \\[2ex]
\dfrac{\sigma(u\pm 2\omega_\mu)}{\sigma_\lambda(u\pm 2\omega_\mu)} = -\dfrac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} &
\dfrac{\sigma_\mu(u\pm 2\omega_\mu)}{\sigma_\nu(u\pm 2\omega_\mu)} = -\dfrac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}.
\end{array}
$$

Il résulte de ces formules que les fonctions $\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}$ et $\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$ sont des fonctions uniformes doublement périodiques pour l'argument desquelles $(2\omega_\lambda, 4\omega_\mu)$ est un couple primitif de périodes.

Relations entre les carrés de trois quelconques des fonctions σ.

24.

Si entre les équations

$$\wp u - e_\lambda = \frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

on élimine $\wp u$, on obtient les relations suivantes entre les carrés de trois quelconques des fonctions σ:

$$\sigma_2^2 u - \sigma_3^2 u + (e_2 - e_3)\,\sigma^2 u = 0,$$

$$\sigma_3^2 u - \sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\,\sigma^2 u = 0,$$

$$\sigma_1^2 u - \sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\,\sigma^2 u = 0,$$

$$(e_2 - e_3)\,\sigma_1^2 u + (e_3 - e_1)\,\sigma_2^2 u + (e_1 - e_2)\,\sigma_3^2 u = 0.$$

Équations différentielles des quotients σ.

25.

De l'égalité

$$(1.) \qquad \wp' u = -2\,\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_\mu u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_\nu u}{\sigma u}$$

se déduisent, pour les fonctions

$$\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}, \qquad \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}, \qquad \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$

les équations différentielles suivantes:

$$(2.) \quad \frac{d}{du}\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} = \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u}\,\frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u}, \quad \frac{d}{du}\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} = -(e_\mu - e_\nu)\,\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma_\nu u}\,\frac{\sigma u}{\sigma_\nu u}, \quad \frac{d}{du}\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = -\frac{\sigma_\mu u}{\sigma u}\,\frac{\sigma_\nu u}{\sigma u},$$

et les fonctions $\dfrac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}$, $\dfrac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$, $\dfrac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}$ satisfont, pour $u = 0$, aux conditions:

$$(3.)\quad \frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} = 0, \quad \frac{d}{du}\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} = 1; \quad \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} = 1; \quad \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = \infty, \quad \lim \frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}\frac{d}{du}\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = -1.$$

Par suite des relations qui existent entre les carrés de trois quelconques des fonctions σ (art. 24), ces équations différentielles peuvent se mettre sous la forme:

$$(4.)\quad \left[\frac{d}{du}\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}\right]^2 = \left[1-(e_\mu - e_\lambda)\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}\right]\left[1-(e_\nu - e_\lambda)\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u}\right],$$

$$(5.)\quad \left[\frac{d}{du}\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}\right]^2 = \left[1-\frac{\sigma_\mu^2 u}{\sigma_\nu^2 u}\right]\left[e_\mu - e_\lambda + (e_\lambda - e_\nu)\frac{\sigma_\mu^2 u}{\sigma_\nu^2 u}\right],$$

$$(6.)\quad \left[\frac{d}{du}\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}\right]^2 = \left[\frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u} + e_\lambda - e_\mu\right]\left[\frac{\sigma_\lambda^2 u}{\sigma^2 u} + e_\lambda - e_\nu\right].$$

On conclut de là que, ξ désignant l'une quelconque des quatre fonctions

$$\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{e_\mu - e_\lambda}}\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{e_\nu - e_\lambda}}\frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\mu u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{e_\mu - e_\lambda}\sqrt{e_\nu - e_\lambda}}\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$

on a

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = (1-(e_\mu - e_\lambda)\xi^2)(1-(e_\nu - e_\lambda)\xi^2).$$

Notons encore les égalités

$$(7.)\quad \frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(u) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u) = \frac{d}{du}\log\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = \frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u - e_\lambda} = -\frac{\sigma_\mu u \cdot \sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u \cdot \sigma u},$$

$$(8.)\quad \frac{\sigma_\mu'}{\sigma_\mu}(u) - \frac{\sigma_\nu'}{\sigma_\nu}(u) = \frac{d}{du}\log\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} = \frac{1}{2}\frac{(e_\mu - e_\nu)\wp' u}{(\wp u - e_\mu)(\wp u - e_\nu)} = -(e_\mu - e_\nu)\frac{\sigma_\lambda u \cdot \sigma u}{\sigma_\mu u \cdot \sigma_\nu u},$$

$$(9.)\quad \frac{d}{du}\frac{\sigma_\lambda'}{\sigma_\lambda}(u) = \frac{d^2}{du^2}\log\sigma_\lambda u = -\frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda} - e_\lambda = -(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\frac{\sigma^2 u}{\sigma_\lambda^2 u} - e_\lambda$$

$$= -(e_\lambda - e_\nu)\frac{\sigma_\mu^2 u}{\sigma_\lambda^2 u} - e_\nu = -(e_\lambda - e_\mu)\frac{\sigma_\nu^2 u}{\sigma_\lambda^2 u} - e_\mu.$$

$$(10.)\quad \frac{d}{du}\left(\frac{1}{e_\lambda - e_\mu}\frac{\sigma_\mu'}{\sigma_\mu}(u) + \frac{1}{e_\lambda - e_\nu}\frac{\sigma_\nu'}{\sigma_\nu}(u)\right) = \frac{(e_\mu - e_\nu)^2}{(\wp u - e_\mu)(\wp u - e_\nu)} - \frac{e_\mu}{e_\lambda - e_\mu} - \frac{e_\nu}{e_\lambda - e_\nu}.$$

Comparaison des quotients σ aux fonctions elliptiques de Jacobi.

26.

En déterminant le module k des fonctions elliptiques de Jacobi par l'équation

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \tag{1.}$$

les quotients σ s'expriment au moyen de ces fonctions elliptiques comme il suit:

$$
\begin{array}{ll|ll}
\dfrac{\sigma u}{\sigma_3 u} = & \dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \sin \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_1 u}{\sigma u} = & \sqrt{e_1-e_3}\,\dfrac{\cos \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k)}{\sin \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k)} \\[2ex]
\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} = & \cos \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma u} = & \sqrt{e_1-e_3}\,\dfrac{\Delta \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k)}{\sin \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k)} \\[2ex]
\dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} = & \Delta \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_3 u}{\sigma u} = & \sqrt{e_1-e_3}\,\dfrac{1}{\sin \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k)} \\[2ex]
\hline
\dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u} = & \sin \operatorname{coam}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma u}{\sigma_1 u} = & \dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \operatorname{tg} \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k) \\[2ex]
\dfrac{\sigma u}{\sigma_2 u} = & \dfrac{1}{\sqrt{e_1-e_2}} \cos \operatorname{coam}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u} = & \dfrac{1}{\sin \operatorname{coam}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k)} \\[2ex]
\dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = & \dfrac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_1-e_2}}\, \Delta \operatorname{coam}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k) & \dfrac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u} = & \dfrac{1}{\cos \operatorname{am}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k)}
\end{array} \tag{2.}
$$

$$\operatorname{coam}(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k) = \operatorname{am}(K - \sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k).$$

Dans ces formules on peut attribuer au radical carré $\sqrt{e_1-e_3}$ l'une quelconque de ses deux valeurs; pour savoir, au contraire, quelle valeur attribuer au radical carré $\sqrt{e_1-e_2}$, il faut se reporter à la convention faite pour la détermination de la quantité K qui sert à la définition de coam $(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, k)$.

La quantité que Jacobi représente par K peut, en effet, avoir l'une quelconque des valeurs contenues dans l'expression

$$\sqrt{e_1 - e_3}\,(\omega + 4p\omega + 2q\omega'),$$

où p et q sont des nombres entiers quelconques.**) La valeur qu'il faut attribuer au radical $\sqrt{e_1 - e_3}$ qui figure dans les formules précédentes est celle fixée dans l'art. 21 ou la valeur égale et de signe contraire, suivant que le nombre q est pair ou impair.

Détermination d'un couple primitif de périodes de l'argument de la fonction $\wp u$ au moyen de deux quantités K et K' déterminées sans ambiguïté.

27.

Considérons l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, et supposons $g_2^3 - 27g_3^2$ différent de zéro. Nous appellerons e_1, e_2, e_3 les trois racines avec cette seule convention que, au cas où les trois points qui représentent géométriquement ces racines sont sur une même droite, e_2 représente la racine intermédiaire.

Les quantités

$$(1.)\qquad \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2, \qquad \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = k'^2$$

sont alors telles qu'aucune d'elles n'a une valeur réelle négative ni une valeur réelle positive supérieure ou égale à 1.

Nous représenterons par k et k' celles des racines carrées de $\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ et $\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$ dont la partie réelle est positive. Alors la partie réelle du quotient $\frac{k'}{k}$ est également positive.

Nous désignerons par K et K' les valeurs des intégrales définies

$$(2.)\qquad K = {\int_0^1}' \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}, \qquad K' = {\int_0^1}' \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k'^2t^2}}$$

où l'intégration est supposée faite*) suivant la droite $(0 - 1)$ et où il faut attribuer aux radicaux celles de leurs valeurs dont la partie réelle est positive.

*) Cette convention que l'intégration est effectuée suivant une droite est rappelée dans les formules où elle intervient par un accent placé près du signe d'intégration ($\int'$).

** Il faut attribuer au radical $\sqrt{e_1 - e_3}$ la valeur $\frac{\sigma_3 \omega}{\sigma \omega}$, les deux entiers p et q sont soumis à la condition que les deux entiers $4p+1$ et q soient premiers entre eux.

Si maintenant nous déterminons deux quantités ω_1 et ω_3 par les équations

$$(3.)\qquad \omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}}, \qquad \omega_3 = \frac{K'i}{\sqrt{e_1-e_3}},$$

où l'on donne à $\sqrt{e_1-e_3}$ l'une quelconque de ses valeurs, $(2\omega_1, 2\omega_3)$ est un couple primitif de périodes de l'argument de la fonction $\wp(u; g_2, g_3)$ qui correspond aux invariants g_2 et g_3, et en posant

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_3,$$

on a les égalités

$$\wp\omega_1 = e_1, \qquad \wp\omega_2 = e_2, \qquad \wp\omega_3 = e_3.$$

Les parties réelles des deux quantités K, K' et la partie réelle du quotient

$$\frac{\omega_3}{\omega_1 i} = \frac{K'}{K}$$

sont positives.

Si la quantité $\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = k^2$ est réelle, K et K' ont des valeurs positives. Le triangle qui a pour sommets les points qui représentent géométriquement les quantités $0, 2\omega_1, 2\omega_3$ est alors un triangle rectangle, et le sommet de l'angle droit correspond à la valeur zéro.

Les angles de ce même triangle sont aigus si k^2 est une quantité complexe dont la partie imaginaire est positive; l'un deux est obtus si k^2 est une quantité complexe dont la partie imaginaire est négative et son sommet correspond alors à la valeur zéro. Dans ce dernier cas les points qui représentent géométriquement les quantités $0, 2\omega_3, -2\omega_1$ sont les sommets d'un triangle dont tous les angles sont aigus.

Le parallélogramme des périodes dont les côtés sont les droites qui représentent géométriquement les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ déterminées par les formules précédentes est donc un rectangle si k^2 est réel; si k^2 n'est pas réel il a la propriété d'être décomposé par sa plus courte diagonale en deux triangles n'ayant que des angles aigus.

Cette propriété est caractéristique pour le couple primitif de périodes $(2\omega_1, 2\omega_3)$ déterminé comme il vient d'être expliqué, si l'on adjoint cette condition que $\wp\omega_1 = e_1$, $\wp\omega_3 = e_3$ et que la partie réelle du quotient $\frac{\omega_3}{\omega_1 i}$ soit positive. Il n'existe, en effet, aucun couple primitif de périodes équivalent aux deux couples primitifs $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(-2\omega_1, -2\omega_3)$, qui possède avec eux cette propriété.

Détermination, pour un couple spécial de périodes, des radicaux qui figurent dans les relations entre les fonctions σ.

28.

Supposons que les périodes $2\omega, 2\omega'', 2\omega'$, auxquelles se rapportent les formules des art. 21 et 22, soient déterminées par les équations

$$(1.)\qquad 2\omega = 2\omega_1, \qquad 2\omega'' = 2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3, \qquad 2\omega' = 2\omega_3,$$

où ω_1 et ω_3 ont les valeurs déterminées dans l'art. 27; la valeur du radical carré $\sqrt{e_1 - e_3}$ fixée dans l'art. 21 est alors précisément la même que celle qui a été employée pour déterminer les quantités ω_1 et ω_3, et qui pouvait être prise arbitrairement parmi les deux valeurs de ce radical.

En conservant les notations définies dans l'art. 27, les valeurs des autres radicaux carrés qui se présentent dans les art. 21 et 22 sont déterminées par les équations:

$$(2.)\qquad \begin{gathered} \frac{\sigma_3\omega}{\sigma\omega} = \sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \frac{\sigma_2\omega}{\sigma_3\omega} = k', \qquad \frac{\sigma_1\omega'}{\sigma_2\omega'} = \frac{1}{k}, \qquad \frac{\sigma_1\omega''}{\sigma_3\omega''} = -\frac{k'i}{k}, \\ \sqrt{e_2 - e_3} = k\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \sqrt{e_1 - e_2} = k'\sqrt{e_1 - e_3}, \\ \sqrt{e_3 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \sqrt{e_3 - e_2} = -ik\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \sqrt{e_2 - e_1} = -ik'\sqrt{e_1 - e_3}. \end{gathered}$$

Après avoir choisi arbitrairement l'une des valeurs du radical $\sqrt[4]{e_1 - e_3} = \sqrt{\sqrt{e_1 - e_3}}$, si l'on désigne par $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ celles des valeurs de ces racines carrées dont la partie réelle est positive, on a les égalités

$$(3.)\qquad \sqrt[4]{e_2 - e_3} = \sqrt{k}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3}, \qquad \sqrt[4]{e_1 - e_2} = \sqrt{k'}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3}.$$

Expression des quantités $\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_1)$ et $\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_3)$ au moyen de deux quantités E et E' déterminées sans ambiguïté.

29.

En employant les notations expliquées dans l'art. 27, nous représenterons par E et E' les valeurs des intégrales definies

$$(1.)\qquad \begin{aligned} E &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{1-k^2t^2}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}\,dt, \\ E' &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{1-k'^2t^2}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k'^2t^2}}\,dt; \end{aligned}$$

les intégrations sont supposées*) effectuées suivant la droite $(0 — 1)$ et l'on prend pour les racines carrées celles de leurs valeurs dont la partie réelle est positive.

Les quantités $\eta_1 = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_1)$, $\eta_3 = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_3)$ sont alors déterminées par les équations

$$(2.)\qquad \eta_1 = \sqrt{e_1-e_3}\left\{E - \frac{e_1}{e_1-e_3}K\right\}, \qquad \eta_3 = -i\sqrt{e_1-e_3}\left\{E' + \frac{e_3}{e_1-e_3}K'\right\},$$

d'où l'on déduit

$$(3.)\qquad E = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}(\eta_1 + e_1\omega_1), \qquad E' = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}(\eta_3 + e_3\omega_3).$$

De l'art. 7 (5.), il résulte que les quantités ω_1, ω_3, η_1, η_3 sont liées par l'égalité

$$(4.)\qquad \eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \tfrac{1}{2}\pi i,$$

qui correspond à la relation $EK' + E'K - KK' = \frac{1}{2}\pi$ de Legendre.

---

*) Voir la note de la page 31.

Représentation des fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ par des produits infinis.

30.

Comme la fonction σu, la fonction $\sigma_\lambda u$ peut être représentée par un produit infini à double entrée.

Si l'on pose, en effet,

$$(1.)\quad w_1 = (2\mu+1)\omega + 2\mu'\omega', \qquad w_2 = (2\mu+1)\omega + (2\mu'+1)\omega', \qquad w_3 = 2\mu\omega + (2\mu'+1)\omega',$$

on a, pour chacune des valeurs 1, 2, 3 de λ,

$$(2.)\qquad \sigma_\lambda u = \sigma_\lambda(u\,|\,\omega, \omega') = e^{-\frac{1}{2}e_\lambda u^2} \prod_{w_\lambda} \left(1 - \frac{u}{w_\lambda}\right) e^{\frac{u}{w_\lambda} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w_\lambda^2}},$$

où le produit infini s'obtient en attribuant à chacun des deux nombres μ, μ' toutes les valeurs entières positives et négatives, et la valeur zéro.

31.

Le Tableau suivant fait connaître les valeurs que prennent les quantités

$$\frac{u}{2\omega} = v, \qquad e^{v\pi i} = z, \qquad 2\eta_1\omega v^2, \qquad e^{2\eta_1\omega v^2},$$

quand on attribue successivement à l'argument u les valeurs

$$u+\omega, \qquad u+\omega', \qquad u+\omega'';$$

les notations $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$, $h = e^{\tau\pi i}$ sont celles définies dans l'art. 6:

(1.)

u	$u+\omega$	$u+\omega'$	$u+\omega''$
v	$v+\frac{1}{2}$	$v+\frac{1}{2}\tau$	$v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$
z	iz	$h^{\frac{1}{2}}z$	$ih^{\frac{1}{2}}z$
$2\eta\omega v^2$	$2\eta_1\omega v^2+\eta_1 u+\frac{1}{2}\eta_1\omega$	$2\eta_1\omega v^2+\eta_1' u+\frac{1}{2}\eta_1'\omega'+\frac{1}{4}\tau\pi i+v\pi i$	$2\eta_1\omega v^2+\eta_1'' u+\frac{1}{2}\eta_1''\omega''+\frac{1}{4}\pi i+\frac{1}{4}\tau\pi i+v\pi i$
$e^{2\eta_1\omega v^2}$	$e^{2\eta_1\omega v^2}\,e^{\eta_1 u}\,e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega}$	$e^{2\eta_1\omega v^2}\,e^{\eta_1' u}\,e^{\frac{1}{2}\eta_1'\omega'}\,h^{\frac{1}{4}}z$	$e^{2\eta_1\omega v^2}\,e^{\eta_1'' u}\,e^{\frac{1}{2}\eta_1''\omega''}\sqrt{i}\,h^{\frac{1}{4}}z$

Il faut attribuer au radical $\sqrt{i}$ la valeur $e^{\frac{1}{4}\pi i}$.

Au moyen de ce Tableau, on déduit des formules (7.), (8.), (9.) données dans l'art. 6 et relatives à la fonction σu, les expressions suivantes, par des produits infinis simples, des fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$:

$$\sigma_1 u = e^{2\eta\omega v^2} \cos v\pi \prod_n \frac{\cos(n\tau - v)\pi}{\cos n\tau\pi} e^{-v\pi i} \prod_n \frac{\cos(n\tau + v)\pi}{\cos n\tau\pi} e^{v\pi i} \tag{2.}$$

$$= e^{2\eta\omega v^2} \tfrac{1}{2}(z + z^{-1}) \prod_n \frac{1 + h^{2n} z^{-2}}{1 + h^{2n}} \prod_n \frac{1 + h^{2n} z^2}{1 + h^{2n}} \tag{3.}$$

$$= e^{2\eta\omega v^2} \cos v\pi \prod_n \frac{1 + 2h^{2n} \cos 2v\pi + h^{4n}}{(1 + h^{2n})^2}. \tag{4.}$$

$$\sigma_2 u = e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{\cos((n - \frac{1}{2})\tau - v)\pi}{\cos(n - \frac{1}{2})\tau\pi} e^{-v\pi i} \prod_n \frac{\cos((n - \frac{1}{2})\tau + v)\pi}{\cos(n - \frac{1}{2})\tau\pi} e^{v\pi i} \tag{5.}$$

$$= e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{1 + h^{2n-1} z^{-2}}{1 + h^{2n-1}} \prod_n \frac{1 + h^{2n-1} z^2}{1 + h^{2n-1}} \tag{6.}$$

$$= e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{1 + 2h^{2n-1} \cos 2v\pi + h^{4n-2}}{(1 + h^{2n-1})^2}. \tag{7.}$$

$$\sigma_3 u = e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{\sin((n - \frac{1}{2})\tau - v)\pi}{\sin(n - \frac{1}{2})\tau\pi} e^{-v\pi i} \prod_n \frac{\sin((n - \frac{1}{2})\tau + v)\pi}{\sin(n - \frac{1}{2})\tau\pi} e^{v\pi i} \tag{8.}$$

$$= e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{1 - h^{2n-1} z^{-2}}{1 - h^{2n-1}} \prod_n \frac{1 - h^{2n-1} z^2}{1 - h^{2n-1}} \tag{9.}$$

$$= e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{1 - 2h^{2n-1} \cos 2v\pi + h^{4n-2}}{(1 - h^{2n-1})^2}. \tag{10.}$$

En développant suivant les puissances de la quantité v et égalant les coefficients des termes en v^2, on obtient les égalités

$$2\eta\omega = -2e_1\omega^2 + \pi^2 \left\{ \frac{1}{2} + \sum_n \frac{4h^{2n}}{(1 + h^{2n})^2} \right\}, \tag{11.}$$

$$2\eta\omega = -2e_2\omega^2 + \pi^2 \sum_n \frac{4h^{2n-1}}{(1 + h^{2n-1})^2}, \tag{12.}$$

$$2\eta\omega = -2e_3\omega^2 - \pi^2 \sum_n \frac{4h^{2n-1}}{(1 - h^{2n-1})^2}, \tag{13.}$$

analogues à l'égalité (10.) de l'art. 6.

Expression, par des produits infinis simples, des radicaux qui figurent dans les relations entre les fonctions σ.

32.

Les quantités H_0, H_1, H_2, H_3 étant définies par les égalités

$$(1.)\quad \begin{aligned} H_0 &= (1-h^2)(1-h^4)(1-h^6)\cdots, & H_1 &= (1+h^2)(1+h^4)(1+h^6)\cdots, \\ H_2 &= (1+h)\,(1+h^3)(1+h^5)\cdots, & H_3 &= (1-h)\,(1-h^3)(1-h^5)\cdots, \end{aligned}$$

où la quantité h a la signification expliquée dans l'art. 6, on a

$$(2.)\qquad H_0 = H_0 H_1 H_2 H_3, \qquad H_1 H_2 H_3 = 1,$$

et il en résulte

$$(3.)\quad \sigma\omega = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta\omega} \cdot \frac{H_1^2}{H_0^2}, \quad \sigma\omega'' = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''} \sqrt{i}\, \frac{H_2^2}{2h^{\frac{1}{4}} H_0^2}, \quad \sigma\omega' = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'} i\, \frac{H_3^2}{2h^{\frac{1}{4}} H_0^2}.$$

Les radicaux déterminés sans ambiguïté dans l'art. 21

$$\sqrt{e_2-e_3}, \qquad \sqrt{e_1-e_3}, \qquad \sqrt{e_1-e_2}$$

sont ainsi donnés par les égalités

$$(4.)\quad \sqrt{e_2-e_3} = \frac{\pi}{2\omega} \cdot 4h^{\frac{1}{2}} H_0^2 H_1^4, \qquad \sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2\omega} H_0^2 H_2^4, \qquad \sqrt{e_1-e_2} = \frac{\pi}{2\omega} H_0^2 H_3^4;$$

par conséquent l'on a relativement aux radicaux $\sqrt[4]{e_2-e_3}$, $\sqrt[4]{e_1-e_3}$, $\sqrt[4]{e_1-e_2}$ qui se présentent dans les relations de l'art. 22, les égalités

$$(5.)\quad \begin{gathered} \sqrt[4]{e_2-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\, 2h^{\frac{1}{4}} H_0 H_1^2, \qquad \sqrt[4]{e_1-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\, H_0 H_2^2, \qquad \sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\, H_0 H_3^2, \\ \sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt[8]{G} = \frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\, 2h^{\frac{1}{4}} H_0^3; \end{gathered}$$

on y peut adopter l'une ou l'autre des deux valeurs du radical $\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}$.

On a ainsi

$$(6.)\quad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = 16h \left\{ \frac{(1+h^2)(1+h^4)(1+h^6)\cdots}{(1+h)\,(1+h^3)(1+h^5)\cdots} \right\}^8, \qquad k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = \left\{ \frac{(1-h)(1-h^3)(1-h^5)\cdots}{(1+h)(1+h^3)(1+h^5)\cdots} \right\}^8.$$

Passage d'un couple primitif de périodes $(2\omega, 2\omega')$ à un couple équivalent $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$.

33.

Si, à la place du couple primitif de périodes $(2\omega, 2\omega')$ auquel se rapportent les formules des articles qui précèdent, on introduit un couple de périodes équivalent $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$:

$$(1.)\qquad \tilde{\omega} = p\omega + q\omega', \qquad \tilde{\omega}' = p'\omega + q'\omega', \qquad pq' - qp' = 1,$$

il faut, dans ces formules, remplacer les quantités

$$\begin{matrix} \omega,\ \omega',\ \omega'' = \omega + \omega' \\ \eta,\ \eta',\ \eta'' = \eta + \eta' \end{matrix} \quad \text{respectivement par} \quad \begin{matrix} \tilde{\omega},\ \tilde{\omega}',\ \tilde{\omega}'' = \tilde{\omega} + \tilde{\omega}' \\ \tilde{\eta},\ \tilde{\eta}',\ \tilde{\eta}'' = \tilde{\eta} + \tilde{\eta}' \end{matrix}$$

où $\tilde{\eta} = p\eta + q\eta'$, $\tilde{\eta}' = p'\eta + q'\eta'$.

Cette substitution n'altère pas les invariants g_2, g_3, non plus que les fonctions σu et $\wp u$, comme il résulte des égalités

$$(2.)\qquad \sigma(u\,|\,\omega, \omega') = \sigma(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \qquad \wp(u\,|\,\omega, \omega') = \wp(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}').$$

Il résulte alors de l'identité (17.) de l'art. 9 que cette substitution n'altère pas l'ensemble formé par les trois quantités e_1, e_2, e_3, et, par suite, en raison des égalités (2.) de l'art. 18, l'ensemble formé par les trois fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$; mais les indices des trois quantités e_1, e_2, e_3 et les indices, qui leur correspondent, des trois fonctions $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ peuvent se trouver permutés.

En remplaçant dans les formules des articles 6, 8, 9, 18, 21, 22, 23, 26, 31, 32 les quantités

$$(3.)\qquad \begin{matrix} \omega, & \omega'', & \omega' \\ \eta, & \eta'', & \eta' \\ e_1, & e_2, & e_3 \\ \sigma_1 u, & \sigma_2 u, & \sigma_3 u \\ v = \dfrac{u}{2\omega}, & \tau = \dfrac{\omega'}{\omega} & \end{matrix} \quad \text{respectivement par les quantités} \quad \begin{matrix} \tilde{\omega}, & \tilde{\omega}'', & \tilde{\omega}' \\ \tilde{\eta}, & \tilde{\eta}'', & \tilde{\eta}' \\ e_\lambda, & e_\mu, & e_\nu \\ \sigma_\lambda u, & \sigma_\mu u, & \sigma_\nu u \\ v = \dfrac{u}{2\tilde{\omega}}, & \tau = \dfrac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}, & \end{matrix}$$

on en déduit toute une nouvelle série de formules, où z et h acquièrent la nouvelle signification qui correspond à cette substitution.

Les indices λ, μ, ν, qui doivent être fixés conformément aux égalités

$$(4.)\qquad \begin{array}{lll} \wp\omega = e_1, & \wp\omega'' = e_2, & \wp\omega' = e_3 \\ \wp\tilde{\omega} = e_\lambda, & \wp\tilde{\omega}'' = e_\mu, & \wp\tilde{\omega}' = e_\nu \end{array}$$

dépendent des résidus des nombres p, q, p', q' relativement au module 2. Le Tableau suivant contient les valeurs de ces indices pour chacun des six cas distincts qui peuvent se présenter; chaque file horizontale correspond à l'un de ces cas, et contient d'abord les résidus, mod. 2, des nombres p, q, p', q', puis les valeurs des indices λ, μ, ν.

(5.)

	p	q	p'	q'	λ	μ	ν
I	1	0	0	1	1	2	3
II	1	0	1	1	1	3	2
III	1	1	0	1	2	1	3
IV	1	1	1	0	2	3	1
V	0	1	1	1	3	1	2
VI	0	1	1	0	3	2	1

En attribuant à λ, μ, ν les valeurs obtenues au moyen de ce Tableau, on a les égalités

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \sigma_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\lambda u = \sigma_\lambda(u\,|\,\omega, \omega'), \\ \sigma_2(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\mu u = \sigma_\mu(u\,|\,\omega, \omega'), \\ \sigma_3(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\nu u = \sigma_\nu(u\,|\,\omega, \omega'). \end{aligned}$$

Sous cette même hypothèse, les égalités (5.) de l'art. précédent, quand on y effectue la substitution (3.), donnent les égalités suivantes où l'on a $h = e^{\tau\pi i}$, $\tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$, et où H_0, H_1, H_2, H_3 sont les fonctions de la quantité h définies dans ce même art.:

$$(7.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu} = 2h^{\frac{1}{4}}H_0H_1^2 = 2h^{\frac{1}{4}}\prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n})^2,$$

$$(8.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} = H_0H_2^2 = \prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n-1})^2,$$

$$(9.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu} = H_0H_3^2 = \prod_n(1-h^{2n})(1-h^{2n-1})^2,$$

$$(10.)\qquad \frac{2\tilde{\omega}}{\pi}\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G} = 2h^{\frac{1}{4}}H_0^3 = 2h^{\frac{1}{4}}\prod_n(1-h^{2n})^3;$$

il faut attribuer au radical $\sqrt[8]{G}$ la valeur $\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\cdot\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\cdot\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$. On peut adopter l'une ou l'autre des deux valeurs du radical $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$.

En supposant les radicaux déterminés par les égalités (7—10.), on a les égalités:

$$\text{(11.)}\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\cdot\frac{1}{i}h^{\frac{1}{4}}(z-z^{-1})\prod_n(1-h^{2n})(1-h^{2n}z^{-2})(1-h^{2n}z^2),$$

$$\text{(12.)}\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}\,\sigma_\lambda u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\cdot h^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})\prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^{-2})(1+h^{2n}z^2),$$

$$\text{(13.)}\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^{-2})(1+h^{2n-1}z^2),$$

$$\text{(14.)}\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\prod_n(1-h^{2n})(1-h^{2n-1}z^{-2})(1-h^{2n-1}z^2),$$

$$v = \frac{u}{2\tilde{\omega}},\quad z = e^{v\pi i},\qquad \tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}},\quad h = e^{\tau\pi i}.$$

On peut déterminer la quantité $2\tilde{\eta}\tilde{\omega}$ au moyen de l'égalité (10.) de l'art. 6, ou des égalités (11—13.) de l'art. 31, après avoir effectué, dans ces égalités, la substitution (3.).

Introduction des fonctions théta. Expression des quatre fonctions σ au moyen des fonctions $\vartheta(v|\tau)$ et $\Theta(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}')$.

34.

On peut représenter la valeur du produit infini

$$\text{(1.)}\qquad F(z) = \prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^{-2})(1+h^{2n-1}z^2)$$

par une série procédant suivant les puissances de la quantité z^2 absolument convergente pour toute valeur finie de z, excepté pour $z=0$. Pour toutes les valeurs de la quantité h dont le module est plus petit que 1, on a, en effet, l'égalité

$$\text{(2.)}\quad \prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^{-2})(1+h^{2n-1}z^2) = 1+h(z^2+z^{-2})+h^4(z^4+z^{-4})+h^9(z^6+z^{-6})+\cdots$$
$$= 1+\sum_n h^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}).$$

Par cette transformation du produit infini en une série, les égalités (11—14.) de l'art. précédent donnent ces expressions des quatre fonctions σ:

$$(3.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G}\;\sigma u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\cdot\frac{1}{i}h^{\frac14}z\,F(h^{\frac12}zi) = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\frac{1}{i}\sum_m(-1)^m h^{\frac14(2m+1)^2}z^{2m+1},$$

$$(4.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\,\sigma_\lambda u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\cdot h^{\frac14}z\,F(h^{\frac12}z) = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\sum_m h^{\frac14(2m+1)^2}z^{2m+1},$$

$$(5.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\cdot F(z) = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\sum_m h^{m^2}z^{2m},$$

$$(6.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\cdot F(zi) = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\sum_m(-1)^m h^{m^2}z^{2m}.$$

Il faut, pour obtenir les sommes indiquées, donner au nombre m toutes les valeurs entières positives et négatives, et la valeur zéro; on a, en outre, $z = e^{v\pi i}$.

Les équations

$$(7.)\quad \frac{1}{i}\sum_m(-1)^m h^{\frac14(2m+1)^2}z^{2m+1} = 2h^{\frac14}\sin v\pi - 2h^{\frac94}\sin 3v\pi + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5v\pi - \cdots = \vartheta_1(v),$$

$$(8.)\quad \sum_m h^{\frac14(2m+1)^2}z^{2m+1} = 2h^{\frac14}\cos v\pi + 2h^{\frac94}\cos 3v\pi + 2h^{\frac{25}{4}}\cos 5v\pi + \cdots = \vartheta_2(v),$$

$$(9.)\quad \sum_m h^{m^2}z^{2m} = 1 + 2h\cos 2v\pi + 2h^4\cos 4v\pi + 2h^9\cos 6v\pi + \cdots = \vartheta_3(v),$$

$$(10.)\quad \sum_m(-1)^m h^{m^2}z^{2m} = 1 - 2h\cos 2v\pi + 2h^4\cos 4v\pi - 2h^9\cos 6v\pi + \cdots = \vartheta_0(v)$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm\infty)$$

définissent les fonctions $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_0(v)$ qui, pour $v\pi = x$, coïncident respectivement avec les fonctions de Jacobi $\vartheta_1(x, q)$, $\vartheta_2(x, q)$, $\vartheta_3(x, q)$, $\vartheta(x, q)$ telles qu'il les a définies et employées dans ses leçons (Gesammelte Werke, t. I, p. 501). La quantité que Jacobi désigne par q n'est autre que celle qui, dans ce qui précède, est représentée par h.

M. Hermite désigne par $\theta_{\mu,\nu}(x)$ (Journal de Liouville, 2ième série, tome III, p. 26), μ, ν pouvant prendre chacune l'une quelconque des valeurs 0, 1, la valeur de la série infinie

$$\sum_m(-1)^{m\nu}e^{i\pi[(2m+\mu)x + \frac14\omega(2m+\mu)^2]}$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm\infty).$$

Entre les quatre fonctions $\vartheta_\varrho(v)$ ($\varrho = 1, 2, 3, 0$) telles qu'elles sont définies par les égalités (7—10.) et ces fonctions considérées par M. Hermite, on a donc, en posant $\omega = \tau$, les relations exprimées par les égalités

$$\theta_{0,0}(x) = \vartheta_3(x), \qquad \theta_{0,1}(x) = \vartheta_0(x), \qquad \theta_{1,0}(x) = \vartheta_2(x), \qquad \theta_{1,1}(x) = i\vartheta_1(x).$$

Quand il sera nécessaire d'indiquer dans la notation à quel couple de périodes $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ se rapportent les fonctions $\vartheta_\varrho(v)$, elles seront représentées par

$$\vartheta_\varrho\left(v\,\Big|\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right) = \vartheta_\varrho(v\,|\,\tau) \qquad (\varrho = 1, 2, 3, 0). \tag{11.}$$

Le second argument des fonctions $\vartheta_\varrho(v\,|\,\tau)$ se nomme encore le **paramètre**.

De la définition même il résulte que

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau) + \vartheta_0(v\,|\,\tau) = 2\vartheta_3(2v\,|\,4\tau), \qquad \vartheta_3(v\,|\,\tau) - \vartheta_0(v\,|\,\tau) = 2\vartheta_2(2v\,|\,4\tau). \tag{12.}$$

Les quatre fonctions $\vartheta_\varrho(v\,|\,\tau)$ satisfont, ainsi que toutes leurs dérivées, à l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}. \tag{13.}$$

Il résulte de ce qui précède que, si l'on définit par les égalités

$$\Theta_\varrho(u) = \Theta_\varrho(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\vartheta_\varrho\left(v\,\Big|\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right), \qquad u = 2\tilde{\omega}v, \tag{14.}$$

pour $\varrho = 1, 2, 3, 0$, quatre fonctions homogènes relativement aux arguments $u, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$, on a les égalités

$$v = \frac{u}{2\tilde{\omega}}, \qquad \tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}, \qquad h = e^{\tau\pi i},$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\vartheta_1(v\,|\,\tau) = \Theta_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \tag{15.}$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\,\sigma_\lambda u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\vartheta_2(v\,|\,\tau) = \Theta_2(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \tag{16.}$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\vartheta_3(v\,|\,\tau) = \Theta_3(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \tag{17.}$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\vartheta_0(v\,|\,\tau) = \Theta_0(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'). \tag{18.}$$

35.

Si l'on développe suivant les puissances de la quantité v et que l'on égale les premiers termes, on déduit des égalités (15—18.) de l'art. qui précède, les expressions suivantes des radicaux déterminés dans l'art. 33 (7—10.):

$$(1.)\qquad \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G} = \frac{1}{2\bar{\omega}}\vartheta_1'(0) = \frac{\pi}{\bar{\omega}}h^{\frac{1}{4}}(1-3h^{1\cdot 2}+5h^{2\cdot 3}-7h^{3\cdot 4}+\cdots),$$

$$(2.)\qquad \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu} = \vartheta_2(0) = 2h^{\frac{1}{4}}(1+h^{1\cdot 2}+h^{2\cdot 3}+h^{3\cdot 4}+\cdots),$$

$$(3.)\qquad \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu} = \vartheta_3(0) = 1+2h+2h^4+2h^9+\cdots,$$

$$(4.)\qquad \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu} = \vartheta_0(0) = 1-2h+2h^4-2h^9+\cdots.$$

On en déduit ce système d'égalités

$$(5.)\qquad \vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0), \qquad \vartheta_0^4(0)+\vartheta_2^4(0) = \vartheta_3^4(0),$$

$$(6.)\quad e_\lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\bar{\omega}}\right)^2(\vartheta_3^4(0)+\vartheta_0^4(0)),\quad e_\mu = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\bar{\omega}}\right)^2(\vartheta_2^4(0)-\vartheta_0^4(0)),\quad e_\nu = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\bar{\omega}}\right)^2(\vartheta_2^4(0)+\vartheta_3^4(0)),$$

$$(7.)\qquad \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}} = \frac{2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}+\cdots}{\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}-\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}(2h+2h^9+2h^{25}+\cdots),$$

$$(8.)\qquad \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}} = \frac{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}+\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}(1+2h^4+2h^{16}+\cdots),$$

$$(9.)\qquad \sqrt{k} = \frac{\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \frac{2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}+\cdots}{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots},$$

$$(10.)\qquad \sqrt{k'} = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}} = \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \frac{1-2h+2h^4-2h^9+\cdots}{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots}.$$

On a donc entre la quantité

$$(11.)\qquad l = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}-\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}+\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}} = \frac{2h+2h^9+\cdots}{1+2h^4+2h^{16}+\cdots} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,4\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,4\tau)}$$

et la quantité 4τ la même relation qu'entre $\sqrt{k}$ et τ.

L'égalité (11.) est un cas particulier de l'égalité

$$(12.)\qquad \frac{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}\,\sigma_\mu u-\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\,\sigma_\nu u}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}\,\sigma_\mu u+\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\,\sigma_\nu u} = \frac{\vartheta_2(2v\,|\,4\tau)}{\vartheta_3(2v\,|\,4\tau)} = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}-\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}+\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}\,\frac{\sigma_1(2u\,|\,\tilde\omega,\,4\tilde\omega')}{\sigma_2(2u\,|\,\tilde\omega,\,4\tilde\omega')},$$

qui se déduit des égalités (12.) de l'art. précédent.

Si l'on développe suivant les puissances de la quantité v et que l'on égale suivant le cas les coefficients des termes en v^3 ou des termes en v^2, on déduit des égalités (15—18.) de l'art. précédent ces égalités, analogues à celles (10.) de l'art. 6 et (11—13.) de l'art. 31:

$$(13.)\qquad 2\tilde\eta_I\tilde\omega = -\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h^{1\cdot 2}+5^3h^{2\cdot 3}-\cdots}{1-3h^{1\cdot 2}+5h^{2\cdot 3}-\cdots},$$

$$(14.)\qquad 2\tilde\eta_I\tilde\omega = -2e_\lambda\tilde\omega^2-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} = -2e_\lambda\tilde\omega^2+\frac{\pi^2}{2}\,\frac{1+3^2h^{1\cdot 2}+5^2h^{2\cdot 3}+\cdots}{1+h^{1\cdot 2}+h^{2\cdot 3}+\cdots},$$

$$(15.)\qquad 2\tilde\eta_I\tilde\omega = -2e_\mu\tilde\omega^2-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} = -2e_\mu\tilde\omega^2+4\pi^2\,\frac{h+4h^4+9h^9+\cdots}{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots},$$

$$(16.)\qquad 2\tilde\eta_I\tilde\omega = -2e_\nu\tilde\omega^2-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)} = -2e_\nu\tilde\omega^2-4\pi^2\,\frac{h-4h^4+9h^9-\cdots}{1-2h+2h^4-2h^9+\cdots}.$$

Relations entre les fonctions ϑ.

36.

Si l'on ajoute à l'argument v des fonctions $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ successivement les quantités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\tau$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$, 1, τ, $1+\tau$, et enfin la quantité $p+q\tau$, où p et q sont des entiers positifs, nuls ou négatifs, on obtient ces formules:

$$\begin{array}{ll|ll}
\vartheta_0(v+\frac{1}{2}) = & \vartheta_3(v) & \vartheta_0(v+1) = & \vartheta_0(v)\\
\vartheta_1(v+\frac{1}{2}) = & \vartheta_2(v) & \vartheta_1(v+1) = & -\vartheta_1(v)\\
\vartheta_2(v+\frac{1}{2}) = & -\vartheta_1(v) & \vartheta_2(v+1) = & -\vartheta_2(v)\\
\vartheta_3(v+\frac{1}{2}) = & \vartheta_0(v) & \vartheta_3(v+1) = & \vartheta_3(v)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll}
\vartheta_0(v+\frac{1}{2}\tau) = & ih^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_1(v) & \vartheta_0(v+\tau) = & -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_0(v) \\
\vartheta_1(v+\frac{1}{2}\tau) = & ih^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_0(v) & \vartheta_1(v+\tau) = & -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_1(v) \\
\vartheta_2(v+\frac{1}{2}\tau) = & h^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_3(v) & \vartheta_2(v+\tau) = & h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_2(v) \\
\vartheta_3(v+\frac{1}{2}\tau) = & h^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_2(v) & \vartheta_3(v+\tau) = & h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_3(v) \\
\hline
\vartheta_0(v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau) = & h^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_2(v) & \vartheta_0(v+1+\tau) = & -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_0(v) \\
\vartheta_1(v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau) = & h^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_3(v) & \vartheta_1(v+1+\tau) = & h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_1(v) \\
\vartheta_2(v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau) = & -ih^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_0(v) & \vartheta_2(v+1+\tau) = & -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_2(v) \\
\vartheta_3(v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau) = & ih^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_1(v) & \vartheta_3(v+1+\tau) = & h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_3(v)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(v+p+q\tau) &= (-1)^q h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}\vartheta_0(v) \\
\vartheta_1(v+p+q\tau) &= (-1)^{p+q} h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}\vartheta_1(v) \\
\vartheta_2(v+p+q\tau) &= (-1)^p h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}\vartheta_2(v) \\
\vartheta_3(v+p+q\tau) &= h^{-q^2}e^{-2qv\pi i}\vartheta_3(v).
\end{aligned}$$

Formules fondamentales de la transformation linéaire des fonctions théta.

37.

Des égalités (2.) et (6.) de l'art. 33 se déduisent, en raison des égalités (15—18.) de l'art. 34, les formules suivantes, relatives à la transformation linéaire des fonctions Θ:

$$(1.)\quad \begin{aligned}
\Theta_1(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}') &= \varepsilon_1\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\,\Theta_1(u|\omega,\omega'), &\quad \Theta_2(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}') &= \varepsilon_2\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\,\Theta_\alpha(u|\omega,\omega'), \\
\Theta_3(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}') &= \varepsilon_3\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\,\Theta_\beta(u|\omega,\omega'), &\quad \Theta_0(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}') &= \varepsilon_0\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\,\Theta_\gamma(u|\omega,\omega').
\end{aligned}$$

Dans ces formules α, β, γ représentent les trois nombres $2, 3, 0$ de telle sorte que l'on ait $\alpha \equiv \lambda+1$, $\beta \equiv \mu+1$, $\gamma \equiv \nu+1$ (mod. 4). Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_0$ sont des racines huitièmes de l'unité.

Les transformations linéaires les plus simples, au moyen desquelles toutes les autres transformations linéaires $\begin{bmatrix} p, q \\ p', q' \end{bmatrix}$ peuvent être composées, sont les transformations $\begin{bmatrix} 1, 0 \\ 1, 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0, 1 \\ -1, 0 \end{bmatrix}$. La première de ces transformations remplace τ par $\tau+1$, la seconde τ par $-\frac{1}{\tau}=\tau_1$. Ces transformations particulières donnent lieu aux formules fondamentales suivantes:

$$
(2.)\quad
\begin{array}{ll|ll}
\Theta_1(u\,|\,\omega,\omega') = & i^{-\frac{1}{4}}\Theta_1(u\,|\,\omega,\omega'+\omega) & \Theta_1(u\,|\,\omega,\omega') = & i\sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,\Theta_1(u\,|\,\omega',-\omega) \\
\Theta_2(u\,|\,\omega,\omega') = & i^{-\frac{1}{4}}\Theta_2(u\,|\,\omega,\omega'+\omega) & \Theta_2(u\,|\,\omega,\omega') = & \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,\Theta_0(u\,|\,\omega',-\omega) \\
\Theta_3(u\,|\,\omega,\omega') = & \Theta_0(u\,|\,\omega,\omega'+\omega) & \Theta_3(u\,|\,\omega,\omega') = & \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,\Theta_3(u\,|\,\omega',-\omega) \\
\Theta_0(u\,|\,\omega,\omega') = & \Theta_3(u\,|\,\omega,\omega'+\omega) & \Theta_0(u\,|\,\omega,\omega') = & \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,\Theta_2(u\,|\,\omega',-\omega).
\end{array}
$$

$$
(3.)\quad
\begin{array}{ll|ll}
\vartheta_1(v\,|\,\tau) = & i^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1(v\,|\,\tau+1) & \vartheta_1(v\,|\,\tau) = & -i\sqrt{-\tau_1 i}\;e^{\tau_1\pi i v^2}\vartheta_1(\tau_1 v\,|\,\tau_1) \\
\vartheta_2(v\,|\,\tau) = & i^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(v\,|\,\tau+1) & \vartheta_2(v\,|\,\tau) = & \sqrt{-\tau_1 i}\;e^{\tau_1\pi i v^2}\vartheta_0(\tau_1 v\,|\,\tau_1) \\
\vartheta_3(v\,|\,\tau) = & \vartheta_0(v\,|\,\tau+1) & \vartheta_3(v\,|\,\tau) = & \sqrt{-\tau_1 i}\;e^{\tau_1\pi i v^2}\vartheta_3(\tau_1 v\,|\,\tau_1) \\
\vartheta_0(v\,|\,\tau) = & \vartheta_3(v\,|\,\tau+1) & \vartheta_0(v\,|\,\tau) = & \sqrt{-\tau_1 i}\;e^{\tau_1\pi i v^2}\vartheta_2(\tau_1 v\,|\,\tau_1).
\end{array}
$$

Il faut attribuer à la racine carrée $\sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} = \sqrt{\frac{i}{\tau}} = \sqrt{-\tau_1 i}$ celle de ses deux valeurs dont la partie réelle est positive, et à la quantité $i^{-\frac{1}{4}}$ la valeur $e^{-\frac{1}{8}\pi i}$.

De ces formules se déduisent les expressions analytiques suivantes des quatre fonctions $\vartheta_\varrho(v\,|\,\tau)$:

$$
(4.)\quad
\begin{array}{l|l}
\vartheta_1(v\,|\,\tau) = \sqrt{-\tau_1 i}\,\sum_m (-1)^m e^{\tau_1\pi i(v-\frac{1}{2}+m)^2} & \vartheta_3(v\,|\,\tau) = \sqrt{-\tau_1 i}\,\sum_m e^{\tau_1\pi i(v+m)^2} \\
\vartheta_2(v\,|\,\tau) = \sqrt{-\tau_1 i}\,\sum_m (-1)^m e^{\tau_1\pi i(v+m)^2} & \vartheta_0(v\,|\,\tau) = \sqrt{-\tau_1 i}\,\sum_m e^{\tau_1\pi i(v-\frac{1}{2}+m)^2}
\end{array}
$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm\infty).$$

Théorèmes d'addition des fonctions σ et Θ.

38.

Soient u, u_1, u_2, u_3 quatre quantités quelconques; de l'identité

$$(\wp u-\wp u_1)(\wp u_2-\wp u_3)+(\wp u-\wp u_2)(\wp u_3-\wp u_1)+(\wp u-\wp u_3)(\wp u_1-\wp u_2) = 0$$

se déduit, par l'application répétée de la formule (1.) de l'art. 11, l'égalité

$$\begin{aligned}
&\sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)\\
(1.)\qquad &+\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1)\\
&+\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2) = 0,
\end{aligned}$$

valable pour toutes les valeurs des quantités u, u_1, u_2, u_3.

Les équations

$$(2.)\qquad \begin{array}{llll}
u+u_1 = a, & u-u_1 = b, & u_2+u_3 = c, & u_2-u_3 = d,\\
u+u_2 = a', & u-u_2 = b', & u_3+u_1 = c', & u_3-u_1 = d',\\
u+u_3 = a'', & u-u_3 = b'', & u_1+u_2 = c'', & u_1-u_2 = d''
\end{array}$$

définissent trois systèmes composés chacun de quatre quantités a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'', donnant lieu aux relations suivantes:

$$(3.)\qquad \begin{array}{l|l|l}
a' = \frac{1}{2}(a+b+c+d) & a'' = \frac{1}{2}(a'+b'+c'+d') & a = \frac{1}{2}(a''+b''+c''+d'')\\
b' = \frac{1}{2}(a+b-c-d) & b'' = \frac{1}{2}(a'+b'-c'-d') & b = \frac{1}{2}(a''+b''-c''-d'')\\
c' = \frac{1}{2}(a-b+c-d) & c'' = \frac{1}{2}(a'-b'+c'-d') & c = \frac{1}{2}(a''-b''+c''-d'')\\
d' = \frac{1}{2}(-a+b+c-d) & d'' = \frac{1}{2}(-a'+b'+c'-d') & d = \frac{1}{2}(-a''+b''+c''-d'')\\
\hline
a'' = \frac{1}{2}(a+b+c-d) & a = \frac{1}{2}(a'+b'+c'-d') & a' = \frac{1}{2}(a''+b''+c''-d'')\\
b'' = \frac{1}{2}(a+b-c+d) & b = \frac{1}{2}(a'+b'-c'+d') & b' = \frac{1}{2}(a''+b''-c''+d'')\\
c'' = \frac{1}{2}(a-b+c+d) & c = \frac{1}{2}(a'-b'+c'+d') & c' = \frac{1}{2}(a''-b''+c''+d'')\\
d'' = \frac{1}{2}(a-b-c-d) & d = \frac{1}{2}(a'-b'-c'-d') & d' = \frac{1}{2}(a''-b''-c''-d'')
\end{array}$$

$$(3^*)\qquad a^2+b^2+c^2+d^2 = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2 = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2.$$

Il résulte des équations (3.) que chacun des trois systèmes de quatre quantités a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'' peut être regardé comme un système de quatre variables indépendantes.

Remplaçons maintenant dans l'égalité (1.) les quantités $u+u_1$, $u-u_1$, u_2+u_3, u_2-u_3 successivement par chacun des systèmes

$$[1]\ a, b, c, d;\ [2]\ a+\tilde{\omega}, b+\tilde{\omega}, c, d;\ [3]\ a+\tilde{\omega}, b+\tilde{\omega}'', c-\tilde{\omega}', d;\ [4]\ a+\tilde{\omega}'', b+\tilde{\omega}'', c+\tilde{\omega}', d-\tilde{\omega}';$$
$$[5]\ a+\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}', b+\tilde{\omega}, c+\tilde{\omega}, d-\tilde{\omega};\ [6]\ a+\tilde{\omega}, b+\tilde{\omega}, c+\tilde{\omega}, d-\tilde{\omega},$$

où $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}''$, $\tilde{\omega}'$ ont la signification expliquée dans l'art. 33. En faisant usage des égalités (3.) et des relations entre les fonctions σ, et en supprimant chaque fois un facteur exponentiel commun aux trois termes du premier membre de l'égalité obtenue, on a les égalités contenues dans le Tableau [A.]. Les indices λ, μ, ν représentent les nombres 1, 2, 3 dans un ordre arbitraire.

[A.]

$$[1]\quad \sigma a\, \sigma b\, \sigma c\, \sigma d + \sigma a'\, \sigma b'\, \sigma c'\, \sigma d' + \sigma a''\, \sigma b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0$$
$$[2]\quad \sigma_\lambda a\, \sigma_\lambda b\, \sigma c\, \sigma d + \sigma_\lambda a'\, \sigma_\lambda b'\, \sigma c'\, \sigma d' + \sigma_\lambda a''\, \sigma_\lambda b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0$$
$$[3]\quad \sigma_\lambda a\, \sigma_\mu b\, \sigma_\nu c\, \sigma d + \sigma_\lambda a'\, \sigma_\mu b'\, \sigma_\nu c'\, \sigma d' + \sigma_\lambda a''\, \sigma_\mu b''\, \sigma_\nu c''\, \sigma d'' = 0$$
$$[4]\quad \sigma_\mu a\, \sigma_\mu b\, \sigma_\nu c\, \sigma_\nu d - \sigma_\mu a'\, \sigma_\mu b'\, \sigma_\nu c'\, \sigma_\nu d' + (e_\mu - e_\nu)\, \sigma_\lambda a''\, \sigma_\lambda b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0$$
$$[5]\quad (e_\mu - e_\nu)\, \sigma_\lambda a\, \sigma_\lambda b\, \sigma_\lambda c\, \sigma_\lambda d + (e_\nu - e_\lambda)\, \sigma_\mu a'\, \sigma_\mu b'\, \sigma_\mu c'\, \sigma_\mu d' + (e_\lambda - e_\mu)\, \sigma_\nu a''\, \sigma_\nu b''\, \sigma_\nu c''\, \sigma_\nu d'' = 0$$
$$[6]\quad \sigma_\lambda a\, \sigma_\lambda b\, \sigma_\lambda c\, \sigma_\lambda d - \sigma_\lambda a'\, \sigma_\lambda b'\, \sigma_\lambda c'\, \sigma_\lambda d' + (e_\lambda - e_\nu)(e_\lambda - e_\mu)\, \sigma a''\, \sigma b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0.$$

De ces théorèmes d'addition des fonctions σ se déduisent, au moyen des égalités (15—18.) de l'art. 34, les théorèmes correspondants pour les fonctions Θ, donnés dans le Tableau [B.]. Les indices α, β, γ représentent les nombres 2, 3, 0 dans un ordre quelconque.

[B.]

$$[1]\quad \Theta_1 a\, \Theta_1 b\, \Theta_1 c\, \Theta_1 d + \Theta_1 a'\, \Theta_1 b'\, \Theta_1 c'\, \Theta_1 d' + \Theta_1 a''\, \Theta_1 b''\, \Theta_1 c''\, \Theta_1 d'' = 0$$
$$[2]\quad \Theta_\alpha a\, \Theta_\alpha b\, \Theta_1 c\, \Theta_1 d + \Theta_\alpha a'\, \Theta_\alpha b'\, \Theta_1 c'\, \Theta_1 d' + \Theta_\alpha a''\, \Theta_\alpha b''\, \Theta_1 c''\, \Theta_1 d'' = 0$$
$$[3]\quad \Theta_\alpha a\, \Theta_\beta b\, \Theta_\gamma c\, \Theta_1 d + \Theta_\alpha a'\, \Theta_\beta b'\, \Theta_\gamma c'\, \Theta_1 d' + \Theta_\alpha a''\, \Theta_\beta b''\, \Theta_\gamma c''\, \Theta_1 d'' = 0$$
$$[4]\quad \Theta_\beta a\, \Theta_\beta b\, \Theta_\gamma c\, \Theta_\gamma d - \Theta_\beta a'\, \Theta_\beta b'\, \Theta_\gamma c'\, \Theta_\gamma d' \pm \Theta_\alpha a''\, \Theta_\alpha b''\, \Theta_1 c''\, \Theta_1 d'' = 0$$
$$[5]\quad \Theta_2 a\, \Theta_2 b\, \Theta_2 c\, \Theta_2 d - \Theta_3 a'\, \Theta_3 b'\, \Theta_3 c'\, \Theta_3 d' + \Theta_0 a''\, \Theta_0 b''\, \Theta_0 c''\, \Theta_0 d'' = 0$$
$$[6]\quad \Theta_\alpha a\, \Theta_\alpha b\, \Theta_\alpha c\, \Theta_\alpha d - \Theta_\alpha a'\, \Theta_\alpha b'\, \Theta_\alpha c'\, \Theta_\alpha d' \pm \Theta_1 a''\, \Theta_1 b''\, \Theta_1 c''\, \Theta_1 d'' = 0.$$

Dans l'équation [B. 4], il faut prendre le signe **supérieur** quand (α, β, γ) est l'un des systèmes

$$(2, 3, 0), \quad (0, 2, 3), \quad (3, 2, 0),$$

et le signe **inférieur** quand il est l'un des systèmes

$$(2, 0, 3), \quad (0, 3, 2), \quad (3, 0, 2).$$

Dans l'équation [B. 6], il faut prendre le signe **supérieur** pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 0$, le signe inférieur pour $\alpha = 3$.

Si l'on passe des fonctions $\Theta(u)$ aux fonctions $\vartheta(v)$, et que, en tenant compte des égalités (3.*), on supprime un facteur exponentiel ayant pour exposant la quantité $\frac{\bar{\eta}}{2\bar{\omega}}(a^2+b^2+c^2+d^2)$, on déduit des égalités du Tableau [B.] un système d'égalités entièrement analogues, relatives aux fonctions $\vartheta(v)$; elles ont la même forme que les égalités du Tableau [B.].

Les arguments des fonctions σ qui figurent dans les égalités du Tableau [A.] dépendent de **quatre** quantités qui peuvent varier indépendamment les unes des autres. Ce nombre de variables devient plus petit si l'on attribue la valeur zéro à un ou à deux de ces arguments. C'est de ces cas particuliers des formules du Tableau [A.], où d'ailleurs les indices λ, μ, ν peuvent être arbitrairement permutés entre eux, que sont déduites les formules données dans les Tableaux [C.] et [D.]. Les arguments des fonctions σ qui y figurent sont exprimés en fonction de trois quantités u, v, w variables sans limitation et indépendamment les unes des autres; les indices λ, μ, ν représentent les nombres 1, 2, 3 placés dans un ordre quelconque.

Les formules	[C. 1, 16, 19]	et [D. 1]	sont déduites de	[A. 2],
„ „	[C. 7, 8, 13, 14, 17, 18]	„ [D. 7, 8]	„ „ „	[A. 3],
„ „	[C. 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 20]	„ [D. 2, 5, 6, 9]	„ „ „	[A. 4],
„ „	[C. 4]	„ [D. 4]	„ „ „	[A. 5],
„ „	[C. 3]	„ [D. 3]	„ „ „	[A. 6].

En comparant chaque fois les termes correspondants des deux égalités, on obtient aisément les substitutions par lesquelles on passe d'une égalité du Tableau [A.] à l'égalité correspondante du Tableau [C.] ou [D.], et la permutation d'indices qu'il peut être nécessaire d'effectuer.

Les termes qui figurent dans les seconds membres des égalités [C. 7] et [C. 8] sont, si l'on ne tient pas compte des signes, les mêmes que ceux qui figurent dans les seconds membres des égalités [C. 13] et [C. 14], et des égalités [C. 17] et [C. 18].

[C.]

[1] $$\sigma_\lambda(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma(v)$$

[2] $$(e_\nu-e_\mu)\,\sigma_\lambda(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\nu(v) - \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\mu(v)$$

[3] $$\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - (e_\lambda-e_\nu)(e_\lambda-e_\mu)\,\sigma(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma(v)$$

[4] $$(e_\nu-e_\mu)\,\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = (e_\lambda-e_\mu)\,\sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\nu(v) - (e_\lambda-e_\nu)\,\sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\mu(v)$$

[5] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - (e_\lambda-e_\mu)\,\sigma(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[6] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\mu(v) - (e_\lambda-e_\mu)\,\sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma(v)$$

[7] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v) - \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[8] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v) - \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v)$$

[9] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\mu(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma_\nu(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma(v)$$

[10] $$\sigma_\mu(w)\,\sigma_\mu(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\mu(v) - (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[11] $$\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\mu(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma_\nu(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[12] $$\sigma_\lambda(w)\,\sigma_\mu(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma_\mu(v) - (e_\mu-e_\lambda)\,\sigma(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma(v)$$

[13] $$\sigma_\nu(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v) + \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v)$$

[14] $$\sigma_\nu(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v) + \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[15] $$(e_\nu-e_\mu)\,\sigma(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v) - \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[16] $$\sigma(w)\,\sigma_\lambda(u+v+w)\,\sigma(u-v) = \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[17] $$\sigma(w)\,\sigma_\nu(u+v+w)\,\sigma_\mu(u-v) = \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[18] $$\sigma(w)\,\sigma_\nu(u+v+w)\,\sigma_\mu(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v) - \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v)$$

[19] $$\sigma(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma(u+w)\,\sigma_\lambda(u)\,\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda(v) - \sigma_\lambda(u+w)\,\sigma(u)\,\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma(v)$$

[20] $$(e_\nu-e_\mu)\,\sigma(w)\,\sigma(u+v+w)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu(u+w)\,\sigma_\nu(u)\,\sigma_\mu(v+w)\,\sigma_\nu(v) - \sigma_\nu(u+w)\,\sigma_\mu(u)\,\sigma_\nu(v+w)\,\sigma_\mu(v).$$

En attribuant à w, dans les formules [1—14] de ce Tableau, la valeur zéro, en obtient les formules contenues dans le Tableau [D.].

[D.]

[1] $$\sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma^2 u\,\sigma_\lambda^2 v - \sigma_\lambda^2 u\,\sigma^2 v$$

[2] $$(e_\nu - e_\mu)\,\sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma_\mu^2 u\,\sigma_\nu^2 v - \sigma_\nu^2 u\,\sigma_\mu^2 v$$

[3] $$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda^2 u\,\sigma_\lambda^2 v - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\,\sigma^2 u\,\sigma^2 v$$

[4] $$(e_\nu - e_\mu)\,\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = (e_\lambda - e_\mu)\,\sigma_\nu^2 u\,\sigma_\nu^2 v - (e_\lambda - e_\nu)\,\sigma_\mu^2 u\,\sigma_\mu^2 v$$

[5] $$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\mu^2 u\,\sigma_\lambda^2 v - (e_\lambda - e_\mu)\,\sigma^2 u\,\sigma_\nu^2 v$$

[6] $$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda^2 u\,\sigma_\mu^2 v - (e_\lambda - e_\mu)\,\sigma_\nu^2 u\,\sigma^2 v$$

[7] $$\sigma_\lambda(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma_\lambda u\,\sigma u\,\sigma_\mu v\,\sigma_\nu v - \sigma_\mu u\,\sigma_\nu u\,\sigma_\lambda v\,\sigma v$$

[8] $$\sigma(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda u\,\sigma u\,\sigma_\mu v\,\sigma_\nu v + \sigma_\mu u\,\sigma_\nu u\,\sigma_\lambda v\,\sigma v$$

[9] $$\sigma_\mu(u+v)\,\sigma_\lambda(u-v) = \sigma_\lambda u\,\sigma_\mu u\,\sigma_\lambda v\,\sigma_\mu v - (e_\mu - e_\lambda)\,\sigma u\,\sigma_\nu u\,\sigma v\,\sigma_\nu v.$$

Il est très-simple de déduire des formules de ce Tableau les théorèmes d'addition relatifs aux quotients de deux fonctions σ.

C'est ainsi, par exemple, que l'on obtient $\frac{\sigma(u+v)}{\sigma_\lambda(u+v)}$ exprimé rationnellement au moyen de

$$\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u},\quad \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u},\quad \frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u},\quad \frac{\sigma v}{\sigma_\lambda v},\quad \frac{\sigma_\mu v}{\sigma_\lambda v},\quad \frac{\sigma_\nu v}{\sigma_\lambda v},$$

en divisant membre à membre l'égalité [D. 8] par l'égalité [D. 3].

On obtient d'autres expressions de cette même quantité $\frac{\sigma(u+v)}{\sigma_\lambda(u+v)}$ en divisant [D. 8] par [D. 4] ou par [D. 5] ou par [D. 6]; ou encore en divisant par [D. 9], puis permutant λ et μ; ou enfin en divisant [D. 1] ou [D. 2] par [D. 7].

On obtient de même différentes expressions de la quantité $\frac{\sigma_\mu(u+v)}{\sigma_\lambda(u+v)}$ en divisant [D. 9] par [D. 3] ou par [D. 4] ou par [D. 5] ou par [D. 6]; ou en calculant, au moyen de [D. 7], les quantités $\sigma_\mu(u+v)\sigma(u-v)$ et $\sigma_\lambda(u+v)\sigma(u-v)$, et divisant la première par la seconde; ou enfin en calculant, au moyen de [D. 9], les quantités $\sigma_\mu(u+v)\sigma_\nu(u-v)$ et $\sigma_\lambda(u+v)\sigma_\nu(u-v)$, et divisant la première par la seconde.

Les fonctions $E(u)$, $Z(u)$, $\Omega(u)$, $\Theta(u)$, $H(u)$, $\Pi(u,a)$ de Jacobi.

39.

Les fonctions que Jacobi représente par $E(u)$, $Z(u)$, $\Omega(u)$, $\Theta(u)$, $H(u)$, $\Pi(u,a)$ sont définies par les équations

(1.) $E(u) = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\,du,$ Jacobi's Gesammelte Werke, t. I, p. 299.

(2.) $Z(u) = E(u) - \frac{E}{K}u,$ p. 187.

(3.) $\Omega(u) = e^{\int_0^u E(u)\,du},$ p. 300.

(4.) $\Theta(u) = \Theta(0)e^{\int_0^u Z(u)\,du}, \qquad \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$ p. 198. p. 231.

(5.) $H(u) = \frac{1}{i}e^{\frac{(2u+K'i)}{4K}\pi i}\,\Theta(u+K'i),$ p. 224. p. 226.

(6.) $\Pi(u,a) = k^2 \sin\operatorname{am} a \cos\operatorname{am} a\, \Delta\operatorname{am} a \int_0^u \frac{\sin^2\operatorname{am} u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} a \sin^2\operatorname{am} u}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + E(a)\cdot u.$ p. 197. p. 305.

Pour simplifier les formules qui suivent et nous rattacher plus complètement à celles de l'art. 26, il est bon de désigner, dans les fonctions que nous venons de définir, les arguments que Jacobi appelle u et a, respectivement, par $\sqrt{e_1-e_3}\cdot u$, $\sqrt{e_1-e_3}\cdot a$. On a alors les égalités suivantes:

(7.) $$E(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u) + e_1 u\right),$$

(8.) $$Z(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(u) - \frac{\eta}{\omega}u\right),$$

(9.) $$\Omega(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = e^{\frac{1}{2}e_1u^2}\sigma_3 u,$$

(10.) $$\Theta(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,e^{-2\eta\omega v^2}\sigma_3 u = \vartheta_0(v\,|\,\tau),$$

(11.) $$H(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[8]{G}\,e^{-2\eta\omega v^2}\sigma u = \vartheta_1(v\,|\,\tau),$$

(12.) $$\Pi(\sqrt{e_1-e_3}\cdot u, \sqrt{e_1-e_3}\cdot a) = \frac{1}{2}\log\frac{\sigma_3(u-a)}{\sigma_3(u+a)} + \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(a)\cdot u.$$

Nous ajouterons les remarques que voici:

En même temps que les six fonctions définies par les équations (1—6.), les quantités que Jacobi désigne par K, K' peuvent être regardées comme connues. La partie réelle du quotient $\frac{K'}{K}$ a toujours une valeur positive. On peut prendre pour valeur de $\sqrt{e_1-e_3}$ l'une quelconque des deux valeurs du radical.

Les quantités ω, ω', τ, h sont déterminées par les équations

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}}, \qquad \omega' = \frac{K'i}{\sqrt{e_1-e_3}}, \qquad v = \frac{u}{2\omega}, \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{K'i}{K}, \qquad h = e^{\tau\pi i}.$$

Les quantités

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[8]{G}, \qquad \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}, \qquad \eta$$

se déterminent au moyen des équations (1.), (4.), (13.) de l'art. 35, en posant $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\tilde{\omega} = \omega$, $\tilde{\eta} = \eta$.

Développements des quantités K, K', h en séries procédant suivant les puissances du module k.

40.

En nous appuyant sur ce qui a été dit dans l'art. 27., nous supposerons maintenant que la valeur absolue du module k soit plus petite que 1.

Désignons par $\mathfrak{K}$ la valeur de la série illimitée

$$(1.) \qquad 1+(\tfrac{1}{2})^2k^2+(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2k^4+(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2k^6+\cdots,$$

et posons, pour abréger,

$$(2.) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{K}_1 &= (\tfrac{1}{2})^2k^2+(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2k^4+(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2k^6+\cdots, \\ \mathfrak{K}_2 &= (\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2k^4+(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2k^6+\cdots, \\ \mathfrak{K}_3 &= (\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2k^6+\cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Avec ces notations et en vertu de l'hypothèse faite, on a

$$(3.) \qquad K = \tfrac{1}{2}\mathfrak{K}\pi, \qquad K' = \mathfrak{K}\operatorname{lognat}(4k^{-1})-2[\tfrac{1}{1\cdot 2}\mathfrak{K}_1+\tfrac{1}{3\cdot 4}\mathfrak{K}_2+\tfrac{1}{5\cdot 6}\mathfrak{K}_3+\cdots].$$

Il faut attribuer au logarithme sa valeur principale*).

*) Soit x un nombre réel ou complexe quelconque qui ne soit pas un nombre réel négatif; nous

La quantité K ne pouvant devenir nulle puisque sa partie réelle a toujours une valeur positive, la quantité $2\,\mathrm{log\,nat}\left(\frac{4}{k}\right)-\frac{K'\pi}{K}$ est, pour toutes les valeurs de k dont la valeur absolue est plus petite que 1, représentable par une série procédant suivant les puissances entières et positives de k. Les coefficients des différents termes de cette série sont des nombres rationnels **positifs**.

On a

$$\tau\pi i = -\frac{K'\pi}{K} = 2\,\mathrm{lognat}\left(\tfrac{1}{4}k\right)+\tfrac{1}{2}k^2+\tfrac{13}{64}k^4+\tfrac{23}{192}k^6+\cdots \tag{4.}$$

Il résulte de ce développement en série que la quantité $h=e^{\tau\pi i}$ et toute puissance de cette quantité dont l'exposant est un nombre **positif** est, pour toutes les valeurs du module k dont la valeur absolue ne dépasse pas 1, représentable par une série procédant suivant les puissances de la quantité k; les coefficients des différents termes de cette série sont des nombres **positifs** et leur somme, dans chacune de ces séries, est égale à 1.

On a, en particulier, ces développements en série:

$$h = \tfrac{1}{16}k^2+\tfrac{1}{32}k^4+\tfrac{21}{1024}k^6+\tfrac{31}{2048}k^8+\cdots, \tag{5.}$$

$$h^{\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{k}+2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\right)^5+15\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\right)^9+150\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\right)^{13}+\cdots \tag{6.}$$

Il faut attribuer à la racine $\sqrt{k}$ celle de ses deux valeurs dont la partie réelle est **positive**.

Suivant que, pour calculer une valeur approchée de $h^{\frac{1}{4}}$, on limite la série à son premier, son second, son troisième, son quatrième terme, les erreurs commises sont, en valeur absolue, moindres respectivement que

$$\left(1-\tfrac{1}{2}\right)(\sqrt{k})^5,\qquad \left(1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{2^5}\right)(\sqrt{k})^9,\qquad \left(1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{2^5}-\tfrac{15}{2^9}\right)(\sqrt{k})^{13},\qquad \left(1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{2^5}-\tfrac{15}{2^9}-\tfrac{150}{2^{13}}\right)(\sqrt{k})^{17},$$

et par suite que

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{k})^5,\qquad \tfrac{7}{16}(\sqrt{k})^9,\qquad \tfrac{209}{512}(\sqrt{k})^{13},\qquad \tfrac{1597}{4096}(\sqrt{k})^{17}.$$

---

entendons par **valeur principale** du logarithme naturel de ce nombre celle des valeurs de ce logarithme dont la partie imaginaire est, en valeur absolue, plus petite que π.

Pour les mêmes valeurs de la variable x, nous appelons **valeur principale** de la puissance x^m, m étant une constante quelconque, la quantité $e^{m\,\mathrm{log\,nat}\,x}$, où l'on donne au logarithme naturel sa valeur principale.

Développement de la quantité h suivant les puissances de la quantité l.

41.

Les définitions et les propositions données dans l'art. 27 subsistent quand on remplace e_1, e_2, e_3 respectivement par e_λ, e_μ, e_ν, les indices représentant les nombres 1, 2, 3 placés dans un ordre quelconque. Il faut toutefois convenir encore que, si les points qui représentent géométriquement les quantités complexes e_λ, e_μ, e_ν sont sur une même droite, le point qui correspond à e_μ est entre ceux qui correspondent à e_λ et à e_ν.

Il résulte alors de l'art. 27 que, pour chaque permutation des indices qui satisfait à cette condition, on peut déterminer sans ambiguïté deux quantités k, k', et, par suite, deux quantités K, K'. De celles-ci on déduit, dès que l'on a fait choix de celle des valeurs à attribuer au radical carré $\sqrt{e_\lambda - e_\nu}$, un couple primitif déterminé de périodes $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ de l'argument de la fonction $\wp u$, périodes qui satisfont aux égalités

$$(1.)\qquad \wp(\omega_\lambda) = e_\lambda, \qquad \wp(\omega_\lambda + \omega_\nu) = e_\mu, \qquad \wp(\omega_\nu) = e_\nu.$$

Il est à remarquer que l'ensemble des trois quantités $\omega_\lambda, \omega_\mu = \omega_\lambda + \omega_\nu, \omega_\nu$ est différent pour chacune des permutations permises des indices.

Après avoir choisi une permutation déterminé λ, μ, ν des indices 1, 2, 3, prenons arbitrairement une valeur du radical $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}$ et désignons-en le carré par $\sqrt{e_\lambda - e_\nu}$.

Désignons encore par $\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}$, $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$ celles des valeurs de ces radicaux définies par les formules

$$(2.)\qquad \frac{\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}} = \sqrt{k} = \left(\frac{e_\mu - e_\nu}{e_\lambda - e_\nu}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}} = \sqrt{k'} = \left(\frac{e_\lambda - e_\mu}{e_\lambda - e_\nu}\right)^{\frac{1}{4}},$$

en attribuant aux deux puissances d'exposant $\frac{1}{4}$ leurs valeurs principales.

Déterminons les quantités $\omega_\lambda, \omega_\nu$ par les équations

$$(3.)\qquad \omega_\lambda = \frac{K}{\sqrt{e_\lambda - e_\nu}}, \qquad \omega_\nu = \frac{K'i}{\sqrt{e_\lambda - e_\nu}}.$$

Si l'on pose maintenant

$$\tilde{\omega} = \omega_\lambda, \qquad \tilde{\omega}' = \omega_\nu, \qquad \tau = \frac{\omega_\nu}{\omega_\lambda}, \qquad h = e^{\tau\pi i},$$

les égalités de l'art. 35 sont applicables pour les radicaux dont nous venons de préciser la signification.

La valeur de la quantité $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ qui figure dans ces égalités est ici égale à $\frac{1}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}} \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, où il faut attribuer au radical $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ celle de ses valeurs dont la partie réelle est positive.

On peut regarder les quantités e_λ, e_μ, e_ν comme des variables, assujetties à cette condition qu'aucune des deux quantités k^2, k'^2 ne devienne jamais négative. Si, en outre, nous supposons encore que e_λ, e_μ, e_ν varient de telle sorte que la valeur absolue de la quantité k^2 reste inférieure à 1, les développements donnés dans l'art. précédent deviennent applicables. Si donc, dans le second membre de l'égalité (9.) de l'art. 35, on introduit à la place de $h^{\frac{1}{4}}$ la série

$$(4.) \qquad h^{\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{k} + 2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\right)^5 + 15\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\right)^9 + 150\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\right)^{13} + \cdots, \qquad \text{Voir art. 40 (6.)}$$

et à la place des puissances de $h^{\frac{1}{4}}$ les séries obtenues en formant les puissances correspondantes de cette série, ce second membre se réduit identiquement à $\sqrt{k}$.

Il résulte de là que l'égalité (11.) de l'art. 35

$$l = \frac{2h + 2h^9 + \cdots}{1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots},$$

qui est analogue à l'égalité (9.) de ce même art., est identiquement satisfaite si l'on pose

$$(5.) \qquad h = \tfrac{1}{2}l + 2\left(\tfrac{1}{2}l\right)^5 + 15\left(\tfrac{1}{2}l\right)^9 + 150\left(\tfrac{1}{2}l\right)^{13} + \cdots,$$

la série étant supposée convergente. Cette conclusion ne dépend pas de l'hypothèse que la valeur absolue de k^2 soit inférieure à 1, car la convergence de la série (5.) dépend de cette seule condition que la valeur absolue de la quantité

$$(6.) \qquad l = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

ne dépasse pas l'unité. Mais, en raison des hypothèses faites, cette condition est toujours remplie, et la valeur de la quantité h, qui se déduit des équations (5.) et (6.) quand les valeurs des radicaux sont déterminées comme il a été expliqué, coïncide avec la valeur $h = e^{\tau\pi i}$.

Si les indices λ, μ, ν sont ainsi choisis que, des trois quantités $e_\lambda - e_\nu$, $e_\lambda - e_\mu$, $e_\mu - e_\nu$, celle qui a la plus grande valeur absolue soit la première et celle qui a la plus petite soit la dernière, la valeur absolue de la quantité l ne dépasse pas $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$, et est, par suite, plus petite que $\frac{2}{15}$; la valeur absolue de h ne dépasse pas alors $e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\pi}$. Dans ces conditions, si l'on calcule une valeur approchée de h en prenant les trois premiers termes du développement procédant suivant les puissances de l, l'erreur commise est plus petite, en valeur absolue, qu'une unité du treizième ordre décimal.

Dans la plupart des applications, il sera donc suffisant, si les indices λ, μ, ν sont convenablement choisis, de s'en tenir aux deux ou aux trois premiers termes du développement en série considéré.

Le développement en série (5.) peut encore, il est vrai, être souvent employé avec avantage, pour le calcul numérique, alors même que la quantité l n'a pas la valeur absolue la plus petite qui puisse lui être attribuée dans le cas considéré.

Si, en effet, la valeur absolue de la quantité l ne dépasse pas $\frac{1}{2}$, la valeur absolue de la somme des termes qui, dans le développement en série de h, suivent les deux premiers, et celle de la somme des termes qui suivent les trois premiers, sont déjà inférieures respectivement à

$$\tfrac{1}{30}\, l^9, \qquad \tfrac{1}{50}\, l^{13},$$

ce qui justifie notre assertion.

Une fois la valeur de la quantité h obtenue, la valeur de la quantité $\sqrt{\frac{2\omega_\lambda}{\pi}}$ se déduit de l'équation (8.) de l'art. 35, et celle de ω_ν de l'équation

$$(7.) \qquad \omega_\nu = \frac{\omega_\lambda i}{\pi} \log \operatorname{nat}\left(\frac{1}{h}\right).$$

Il faut attribuer au logarithme naturel sa valeur principale.

Passage du couple primitif de périodes $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ au couple de périodes $(2\omega_\nu, -2\omega_\lambda)$.

42.

Les développements de l'art. qui précède se déduisent des égalités de l'art. 35 en supposant que l'on pose $\tilde{\omega} = \omega_\lambda$, $\tilde{\omega}' = \omega_\nu$. On obtient de même des développements analogues si l'on pose $\tilde{\omega} = \omega_\nu$, $\tilde{\omega}' = -\omega_\lambda$.

Quand on passe du couple primitif de périodes $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ au couple primitif de périodes $(2\omega_\nu, -2\omega_\lambda)$, les deux invariants g_2, g_3 et la quantité e_μ restent, en effet, inaltérés; les quantités

$$e_\lambda, \quad e_\nu, \quad k, \quad k', \quad K, \quad K', \quad \tau$$

sont, au contraire, respectivement remplacées par les quantités

$$e_\nu, \quad e_\lambda, \quad k', \quad k, \quad K', \quad K, \quad \tau_1 = -\tau^{-1}.$$ Voir art. 37.

Nous représenterons par h' et l' les quantités par lesquelles se trouvent remplacées h et l, quand on passe ainsi du premier couple de périodes au second.

Si, maintenant, on détermine les valeurs des radicaux $\sqrt{e_\lambda - e_\nu}$, $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}$, $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$, $\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}$ comme il a été expliqué dans l'art. précédent, les radicaux qui s'en déduisent quand on permute les quantités e_λ et e_ν peuvent être définis par les équations

$$(1.)\qquad \begin{aligned} \sqrt{e_\nu - e_\lambda} &= -i\sqrt{e_\lambda - e_\nu}, & \sqrt[4]{e_\nu - e_\lambda} &= \sqrt{-i}\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}, \\ \sqrt[4]{e_\nu - e_\mu} &= \sqrt{-i}\,\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}, & \sqrt[4]{e_\mu - e_\lambda} &= \sqrt{-i}\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}. \end{aligned}$$

On peut attribuer à $\sqrt{-i}$ l'une quelconque de ses deux valeurs, pourvu que ce soit la même dans toutes les équations.

On a alors les formules

$$(2.)\quad l' = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} - \sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}}, \qquad h' = e^{\tau_1 \pi i} = \tfrac{1}{2}l' + 2(\tfrac{1}{2}l')^5 + 15(\tfrac{1}{2}l')^9 + 150(\tfrac{1}{2}l')^{13} + \cdots,$$

qui peuvent être employées pour le calcul de la quantité h'. De l'égalité (8.) de l'art. 35 on déduit

$$(3.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}} = \frac{1 + 2h' + 2h'^4 + 2h'^9 + \cdots}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}}(1 + 2h'^4 + 2h'^{16} + \cdots) = \frac{1}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}}\sqrt{\frac{2K'}{\pi}}.$$

Il faut attribuer au radical $\sqrt{\frac{2K'}{\pi}}$ celle de ses deux valeurs dont la partie réelle est positive.

On peut employer l'équation (3.) pour calculer la quantité ω_ν; pour le calcul de la quantité ω_λ on a ensuite l'équation

$$\text{(4.)} \qquad \omega_\lambda = \frac{\omega_\nu}{\pi i} \log\operatorname{nat}\left(\frac{1}{h'}\right).$$

Il faut attribuer au logarithme naturel sa valeur principale. Les deux quantités h et h' sont liées par la relation

$$\text{(5.)} \qquad \log\operatorname{nat} h \cdot \log\operatorname{nat} h' = \pi^2.$$

Des égalités (1–4.) et (13–16.) de l'art. 35 se déduisent, en posant $\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_\nu) = \eta_\nu$, les égalités suivantes:

$$\text{(6.)} \qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[8]{G} = \frac{i}{2\omega_\nu}\vartheta_1'(0\,|\,\tau_1) = \frac{\pi i}{\omega_\nu} h'^{\frac{1}{4}}(1 - 3h'^{1\cdot 2} + 5h'^{2\cdot 3} - 7h'^{3\cdot 4} + \cdots),$$

$$\text{(7.)} \qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu} = \vartheta_2(0\,|\,\tau_1) = 2h'^{\frac{1}{4}}(1 + h'^{1\cdot 2} + h'^{2\cdot 3} + h'^{3\cdot 4} + \cdots),$$

$$\text{(8.)} \qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} = \vartheta_3(0\,|\,\tau_1) = 1 + 2h' + 2h'^4 + 2h'^9 + \cdots,$$

$$\text{(9.)} \qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu} = \vartheta_0(0\,|\,\tau_1) = 1 - 2h' + 2h'^4 - 2h'^9 + \cdots,$$

$$\text{(10.)} \qquad 2\eta_\nu\omega_\nu = -\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_1'(0\,|\,\tau_1)} = -2e_\lambda\omega_\nu^2 - \frac{1}{2}\frac{\vartheta_0''(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_0(0\,|\,\tau_1)},$$

$$\text{(11.)} \qquad 2\eta_\nu\omega_\nu = -2e_\mu\omega_\nu^2 - \frac{1}{2}\frac{\vartheta_3''(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau_1)} = -2e_\nu\omega_\nu^2 - \frac{1}{2}\frac{\vartheta_2''(0\,|\,\tau_1)}{\vartheta_2(0\,|\,\tau_1)}.$$

Des égalités (15–18.) de l'art. 34 se déduisent celles qui suivent et qui sont analogues aux formules correspondantes de l'art. 37:

$$v = \frac{u}{2\omega_\nu}, \qquad \tau_1 = -\frac{\omega_\lambda}{\omega_\nu}, \qquad h' = e^{\tau_1\pi i},$$

$$(12.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\eta_\nu\omega_\nu v^2}\,i\,\vartheta_1(v\,|\,\tau_1) = i\Theta_1(u\,|\,\omega_\nu, -\omega_\lambda),$$

$$(13.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\,\sigma_\lambda u = e^{2\eta_\nu\omega_\nu v^2}\,\vartheta_0(v\,|\,\tau_1) = \Theta_0(u\,|\,\omega_\nu, -\omega_\lambda),$$

$$(14.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\eta_\nu\omega_\nu v^2}\,\vartheta_3(v\,|\,\tau_1) = \Theta_3(u\,|\,\omega_\nu, -\omega_\lambda),$$

$$(15.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_\nu}{\pi i}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\eta_\nu\omega_\nu v^2}\,\vartheta_2(v\,|\,\tau_1) = \Theta_2(u\,|\,\omega_\nu, -\omega_\lambda).$$

Passage du couple primitif de périodes $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ au couple de périodes $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu \pm 2\omega_\lambda)$.

43.

Si l'on permute les deux quantités e_μ et e_ν, les quantités l et h deviennent respectivement $-l$ et $-h$, tandis que, par suite des égalités (7.) et (8.) de l'art. 35, la quantité $\tilde{\omega} = \omega_\lambda$ reste inaltérée. Le couple primitif de périodes $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ se trouve alors remplacé par le couple primitif de périodes $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu \pm 2\omega_\lambda)$, et il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que la quantité k'^2 est une quantité complexe dont la partie imaginaire est positive ou négative.

Formules pour le calcul des périodes et expressions des fonctions σ par des suites ϑ dans le cas de valeurs réelles des invariants.

44.

Si l'on connait les quantités e_λ, e_μ, e_ν, les formules données dans les art. 34, 35, 41 et 42 sont suffisantes, aussi bien pour le calcul d'un couple primitif de périodes $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ de l'argument de la fonction $\wp u$ et le calcul des quantités $\eta_\lambda = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_\lambda)$, $\eta_\nu = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_\nu)$, que pour exprimer les quatre fonctions σ par des suites ϑ dans lesquelles les quantités h et h' ont chacune une valeur absolue aussi petite que possible.

Pour faciliter l'usage de ces formules, nous les donnons de nouveau avec les modifications qui interviennent quand on suppose que les valeurs des invariants g_2 et g_3 sont réelles; c'est l'objet des art. 45 et 46.

45.

Quand les valeurs des invariants g_2 et g_3 sont réelles et que le discriminant $G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = (e_2-e_3)^2(e_1-e_3)^2(e_1-e_2)^2$ de l'équation cubique $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ est **positif**, les trois racines de cette équation sont **réelles**.

Soient e_1, e_2, e_3 ces racines rangées par ordre de grandeur **décroissante**. Attribuons à tous les radicaux qui se présentent dans les formules qui suivent leurs valeurs **positives**.

Posons

$$(1.)\quad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},\ k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3};\ \omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}},\ \omega_3 = \frac{K'i}{\sqrt{e_1-e_3}};\ \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_1) = \eta_1,\ \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_3) = \eta_3.$$

$$(2.)\quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1},\quad h = e^{\tau\pi i},\quad \tau_1 = -\frac{\omega_1}{\omega_3},\quad h_1 = h' = e^{\tau_1\pi i};\quad v = \frac{u}{2\omega_1},\quad v_1 = \frac{ui}{2\omega_3}.$$

Les valeurs des quantités $\omega_1, \frac{\omega_3}{i}, \frac{\tau}{i}, \frac{\tau_1}{i}, h, h_1$ sont **positives**.

Dans ces conditions, on obtient, en posant $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\nu = 3$, $\tilde{\omega} = \omega_1$, $\tilde{\omega}' = \omega_3$, ce système d'égalités correspondant à celles données dans les art. 34, 35 et 41:

$$(3.)\quad l = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}},\quad h = \tfrac{1}{2}l + 2(\tfrac{1}{2}l)^5 + 15(\tfrac{1}{2}l)^9 + 150(\tfrac{1}{2}l)^{13} + \cdots,$$

$$(4.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots),\quad \omega_3 = \frac{\omega_1 i}{\pi}\log\text{nat}\left(\frac{1}{h}\right),$$

$$(5.)\quad 2\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1 - 3^3h^2 + 5^3h^6 - 7^3h^{12} + \cdots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - 7h^{12} + \cdots},\quad \eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \tfrac{1}{2}\pi i,$$

$$(6.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3} = 2h^{\frac{1}{4}}(1 + h^2 + h^6 + h^{12} + \cdots),$$

$$(7.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots,$$

$$(8.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = 1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots,$$

$$(9.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{G} = \frac{\pi}{\omega_1}h^{\frac{1}{4}}(1 - 3h^2 + 5h^6 - 7h^{12} + \cdots).$$

$$\left.\begin{aligned}
&(10.) && \sqrt{\tfrac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\vartheta_1(v\,|\,\tau),\\
&(11.) && \sqrt{\tfrac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\vartheta_2(v\,|\,\tau),\\
&(12.) && \sqrt{\tfrac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\vartheta_3(v\,|\,\tau),\\
&(13.) && \sqrt{\tfrac{2\omega_1}{\pi}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\vartheta_0(v\,|\,\tau),
\end{aligned}\right\}\quad v = \frac{u}{2\omega_1},\quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

$$(14.)\qquad \vartheta_0(v\,|\,\tau) = 1-2h\cos 2v\pi+2h^4\cos 4v\pi-2h^9\cos 6v\pi+\cdots,$$

$$(15.)\qquad \vartheta_1(v\,|\,\tau) = 2h^{\frac14}\sin v\pi-2h^{\frac94}\sin 3v\pi+2h^{\frac{25}{4}}\sin 5v\pi-\cdots,$$

$$(16.)\qquad \vartheta_2(v\,|\,\tau) = 2h^{\frac14}\cos v\pi+2h^{\frac94}\cos 3v\pi+2h^{\frac{25}{4}}\cos 5v\pi+\cdots,$$

$$(17.)\qquad \vartheta_3(v\,|\,\tau) = 1+2h\cos 2v\pi+2h^4\cos 4v\pi+2h^9\cos 6v\pi+\cdots.$$

Si l'on a $e_2-e_3 \lesseqqgtr e_1-e_2$, et, par suite, $e_2 \lesseqqgtr 0$, on a $l \lesseqqgtr \dfrac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}$, $h \lesseqqgtr e^{-\pi}$.

Si l'on pose, au contraire, $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $\nu = 1$, $\tilde{\omega} = \omega_3$, $\tilde{\omega}' = -\omega_1$, on obtient ce système d'égalités correspondant à celles de l'art. 42:

$$(18.)\qquad l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}-\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}},\qquad h_1 = \tfrac12 l_1+2(\tfrac12 l_1)^5+15(\tfrac12 l_1)^9+150(\tfrac12 l_1)^{13}+\cdots,$$

$$(19.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}}(1+2h_1^4+2h_1^{16}+\cdot\cdot),\qquad \omega_1 = \frac{\omega_3}{\pi i}\log\operatorname{nat}\left(\frac{1}{h_1}\right),$$

$$(20.)\qquad 2\eta_3\omega_3 = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h_1^2+5^3h_1^6-7^3h_1^{12}+\cdot\cdot}{1-3h_1^2+5h_1^6-7h_1^{12}+\cdot\cdot},\qquad \eta_1\omega_3-\omega_1\eta_3 = \tfrac12\pi i,$$

$$(21.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2} = 2h_1^{\frac14}(1+h_1^2+h_1^6+h_1^{12}+\cdots),$$

$$(22.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_3} = 1+2h_1+2h_1^4+2h_1^9+\cdots,$$

$$(23.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_2-e_3} = 1-2h_1+2h_1^4-2h_1^9+\cdots,$$

$$(24.)\qquad \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[8]{G} = \frac{\pi i}{\omega_3}h_1^{\frac14}(1-3h_1^2+5h_1^6-7h_1^{12}+\cdots).$$

$$
\left.
\begin{array}{lll}
(25.) & \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = \frac{1}{i}\,e^{-2\eta_3\omega_3 v_1^2}\,\vartheta_1(v_1 i\,|\,\tau_1), \\
(26.) & \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{-2\eta_3\omega_3 v_1^2}\,\vartheta_0(v_1 i\,|\,\tau_1), \\
(27.) & \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sigma_2 u = e^{-2\eta_3\omega_3 v_1^2}\,\vartheta_3(v_1 i\,|\,\tau_1), \\
(28.) & \sqrt{\frac{2\omega_3}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u = e^{-2\eta_3\omega_3 v_1^2}\,\vartheta_2(v_1 i\,|\,\tau_1),
\end{array}
\right|
\quad
\begin{array}{l}
v_1 = \dfrac{ui}{2\omega_3}, \\[2ex]
\tau_1 = -\dfrac{\omega_1}{\omega_3}.
\end{array}
$$

$$(29.)\quad \vartheta_0(v_1 i\,|\,\tau_1) = 1 - h_1(e^{2v_1\pi}+e^{-2v_1\pi}) + h_1^4(e^{4v_1\pi}+e^{-4v_1\pi}) - h_1^9(e^{6v_1\pi}+e^{-6v_1\pi}) + \cdots,$$

$$(30.)\quad \frac{1}{i}\vartheta_1(v_1 i\,|\,\tau_1) = h_1^{\frac{1}{4}}(e^{v_1\pi}-e^{-v_1\pi}) - h_1^{\frac{9}{4}}(e^{3v_1\pi}-e^{-3v_1\pi}) + h_1^{\frac{25}{4}}(e^{5v_1\pi}-e^{-5v_1\pi}) - \cdots,$$

$$(31.)\quad \vartheta_2(v_1 i\,|\,\tau_1) = h_1^{\frac{1}{4}}(e^{v_1\pi}+e^{-v_1\pi}) + h_1^{\frac{9}{4}}(e^{3v_1\pi}+e^{-3v_1\pi}) + h_1^{\frac{25}{4}}(e^{5v_1\pi}+e^{-5v_1\pi}) + \cdots,$$

$$(32.)\quad \vartheta_3(v_1 i\,|\,\tau_1) = 1 + h_1(e^{2v_1\pi}+e^{-2v_1\pi}) + h_1^4(e^{4v_1\pi}+e^{-4v_1\pi}) + h_1^9(e^{6v_1\pi}+e^{-6v_1\pi}) + \cdots.$$

Si l'on a $e_2-e_3 \lesseqgtr e_1-e_2$, et, par suite, $e_2 \lesseqgtr 0$, on a $l_1 \gtreqless \frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}$, $h_1 \gtreqless e^{-\pi}$.

La quantité $e^{-\pi} = 0{,}0432139$ est plus petite que $\frac{1}{23}$.

Quand g_3 est positif, et, par conséquent, e_2 négative, il est préférable d'employer les équations (3—17.); si, au contraire, g_3 est négatif, et, par suite, e_2 positive, ce sont les équations (18—32.) qu'il vaut mieux employer. Dans le premier cas, en effet, h est plus petit que h_1; dans le second cas, c'est h_1 qui est plus petit que h.

46.

Quand les valeurs des invariants g_2 et g_3 sont réelles et que le discriminant $G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = (e_2-e_3)^2(e_2-e_1)^2(e_1-e_3)^2$ de l'équation cubique $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ est **négatif**, cette équation n'a qu'**une** racine **réelle**; les deux autres sont **imaginaires conjuguées**.

Soient e_2 la racine réelle; e_1 et e_3 les racines imaginaires conjuguées, e_1 étant celle dont la partie imaginaire est positive, en sorte que $e_1 - e_3$ est le produit de i par un nombre **positif**.

Soient ρ et ψ deux quantités positives telles que l'on ait

$$e_2 - e_3 = \rho e^{\psi i}, \qquad e_2 - e_1 = \rho e^{-\psi i}, \qquad (0 < \psi < \pi).$$

Attribuons aux radicaux qui se présentent dans les formules qui suivent leurs valeurs principales.

Posons

(1.) $$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},\quad k'^2 = \frac{e_2-e_1}{e_3-e_1};\quad \omega_1 = \frac{e^{-\frac{1}{4}\pi i}K}{\sqrt{i(e_3-e_1)}},\quad \omega_3 = \frac{e^{\frac{1}{4}\pi i}K'}{\sqrt{i(e_3-e_1)}},$$
$$\omega_2 = \omega_3+\omega_1,\quad \omega_2' = \omega_3-\omega_1;\quad \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_2) = \eta_2,\quad \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega_2') = \eta_2'.$$

(2.) $$\tau' = \frac{\omega_2'}{\omega_2},\quad \tau_2 = \frac{\tau'}{2},\quad h_2 = e^{\tau_2\pi i};\quad \tau_3 = -\frac{1}{2\tau'},\quad h_3 = e^{\tau_3\pi i};\quad v_2 = \frac{u}{2\omega_2},\quad v_3 = \frac{ui}{2\omega_2'}.$$

Les valeurs des quantités ω_2, $\frac{\omega_2'}{i}$, $\frac{\tau'}{i}$, $\frac{\tau_2}{i}$, $\frac{\tau_3}{i}$, h_2, h_3 sont positives.

Dans ces conditions, on obtient, en posant $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 3$, $\tilde{\omega} = \omega_2$, $\tilde{\omega}' = \omega_3 = \frac{1}{2}\omega_2+\frac{1}{2}\omega_2'$, $l = il_2$, $h = ih_2$, ce système d'égalités correspondant à celles données dans les art. 34, 35 et 41:

(3.) $$l_2 = \frac{1}{i}\frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}-\sqrt[4]{e_2-e_1}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_1}} = \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\psi),\quad h_2 = \tfrac{1}{2}l_2+2(\tfrac{1}{2}l_2)^5+15(\tfrac{1}{2}l_2)^9+150(\tfrac{1}{2}l_2)^{13}+\cdots,$$

(4.) $$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_2-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_1}}(1+2h_2^4+2h_2^{16}+\cdots),\qquad \omega_2' = \frac{2\omega_2 i}{\pi}\log\text{nat}\left(\frac{1}{h_2}\right),\\ &\omega_1 = \tfrac{1}{2}\omega_2-\tfrac{1}{2}\omega_2',\qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}\omega_2+\tfrac{1}{2}\omega_2',\end{aligned}\right.$$

(5.) $$\left\{\begin{aligned} &2\eta_2\omega_2 = \frac{\pi^2}{6}\frac{1+3^3h_2^2-5^3h_2^6-7^3h_2^{12}+\cdots}{1+3h_2^2-5h_2^6-7h_2^{12}+\cdots},\qquad \eta_2\omega_2'-\omega_2\eta_2' = \pi i,\\ &\eta_1 = \tfrac{1}{2}\eta_2-\tfrac{1}{2}\eta_2',\qquad \eta_3 = \tfrac{1}{2}\eta_2+\tfrac{1}{2}\eta_2',\end{aligned}\right.$$

(6.) $$\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)} = 2h_2^{\frac{1}{4}}(1-h_2^2-h_2^6+h_2^{12}+\cdots),$$

(7.) $$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}(\sqrt[4]{e_2-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_1}) = 1+2h_2^4+2h_2^{16}+\cdots,$$

(8.) $$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}(\sqrt[4]{e_2-e_3}-\sqrt[4]{e_2-e_1}) = 2i(h_2+h_2^9+h_2^{25}+\cdots),$$

(9.) $$\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\sqrt[8]{-G} = \frac{\pi}{\omega_2}h_2^{\frac{1}{4}}(1+3h_2^2-5h_2^6-7h_2^{12}+\cdots).$$

$$\left.\begin{aligned}
&(10.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\sqrt[8]{-G}\,\sigma u = e^{2\eta_2\omega_2 v_2^2}e^{-\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_1(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2),\\
&(11.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)}\,\sigma_2 u = e^{2\eta_2\omega_2 v_2^2}e^{-\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_2(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2),\\
&(12.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sigma_1 u = e^{2\eta_2\omega_2 v_2^2}\cdot\vartheta_3(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2),\\
&(13.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}}\sqrt[4]{e_2-e_1}\,\sigma_3 u = e^{2\eta_2\omega_2 v_2^2}\cdot\vartheta_0(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2),
\end{aligned}\right\}\quad v_2 = \frac{u}{2\omega_2},\quad \tau_2 = \frac{\omega_2'}{2\omega_2}.$$

$$(14.)\quad e^{-\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_1(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2) = 2h_2^{\frac{1}{4}}\sin v_2\pi + 2h_2^{\frac{9}{4}}\sin 3v_2\pi - 2h_2^{\frac{25}{4}}\sin 5v_2\pi - \cdots,$$

$$(15.)\quad e^{-\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_2(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2) = 2h_2^{\frac{1}{4}}\cos v_2\pi - 2h_2^{\frac{9}{4}}\cos 3v_2\pi - 2h_2^{\frac{25}{4}}\cos 5v_2\pi + \cdots,$$

$$(16.)\quad \tfrac{1}{2}[\vartheta_3(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2)+\vartheta_0(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2)] = 1+2h_2^4\cos 4v_2\pi + 2h_2^{16}\cos 8v_2\pi + \cdots,$$

$$(17.)\quad \tfrac{1}{2}[\vartheta_3(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2)-\vartheta_0(v_2|\tfrac{1}{2}+\tau_2)] = 2i(h_2\cos 2v_2\pi + h_2^9\cos 6v_2\pi + \cdots).$$

Si l'on a $e_2 \gtreqless 0$, et, par suite, $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$, on a $l_2 \lesseqgtr \operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi$ et $h_2 \lesseqgtr e^{-\frac{1}{2}\pi}$.

Si l'on pose, au contraire, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = 1$, $\tilde{\omega} = \omega_2'$, $\tilde{\omega}' = -\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2' - \frac{1}{2}\omega_2$, $l = il_3$, $h = ih_3$, on obtient ce système d'égalités

$$(18.)\quad l_3 = \frac{1}{i}\frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}-\sqrt[4]{e_3-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_3-e_2}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(\pi-\psi),\quad h_3 = \tfrac{1}{2}l_3 + 2(\tfrac{1}{2}l_3)^5 + 15(\tfrac{1}{2}l_3)^9 + 150(\tfrac{1}{2}l_3)^{13} + \cdots,$$

$$(19.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_3-e_2}}(1+2h_3^4+2h_3^{16}+\cdots),\qquad \omega_2 = \frac{2\omega_2'}{\pi i}\operatorname{lognat}\left(\frac{1}{h_3}\right),\\
&\omega_1 = \tfrac{1}{2}\omega_2 - \tfrac{1}{2}\omega_2',\qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}\omega_2 + \tfrac{1}{2}\omega_2',
\end{aligned}\right.$$

$$(20.)\quad \left\{\begin{aligned}
&2\eta_2'\omega_2' = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1+3^3h_3^2-5^3h_3^6-7^3h_3^{12}+\cdots}{1+3h_3^2-5h_3^6-7h_3^{12}+\cdots},\qquad \eta_2\omega_2'-\omega_2\eta_2' = \pi i,\\
&\eta_1 = \tfrac{1}{2}\eta_2 - \tfrac{1}{2}\eta_2',\qquad \eta_3 = \tfrac{1}{2}\eta_2 + \tfrac{1}{2}\eta_2',
\end{aligned}\right.$$

$$(21.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)} = 2h_3^{\frac{1}{4}}(1-h_3^2-h_3^6+h_3^{12}+\cdots),$$

$$(22.)\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\left(\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_3-e_2}\right) = 1+2h_3^4+2h_3^{16}+\cdots,$$

$$(23.)\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\left(\sqrt[4]{e_1-e_2}-\sqrt[4]{e_3-e_2}\right) = 2i(h_3+h_3^9+h_3^{25}+\cdots),$$

$$(24.)\quad \sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\sqrt[8]{-G} = \frac{\pi i}{\omega_2'}h_3^{\frac{1}{4}}(1+3h_3^2-5h_3^6-7h_3^{12}+\cdots).$$

$$\left.\begin{aligned}
&(25.) && \sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\sqrt[8]{-G}\,\sigma u &&= \frac{1}{i}\,e^{-2\eta_2'\omega_2'v_3^2}e^{-\frac{1}{8}\pi i}\vartheta_1(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3),\\
&(26.) && \sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\sqrt[4]{i(e_3-e_1)}\,\sigma_2 u &&= e^{-2\eta_2'\omega_2'v_3^2}e^{-\frac{1}{8}\pi i}\vartheta_2(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3),\\
&(27.) && \sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\sigma_3 u &&= e^{-2\eta_2'\omega_2'v_3^2}\cdot\vartheta_3(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3),\\
&28.) && \sqrt{\frac{2\omega_2'}{\pi i}}\sqrt[4]{e_3-e_2}\,\sigma_1 u &&= e^{-2\eta_2'\omega_2'v_3^2}\cdot\vartheta_0(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3),
\end{aligned}\right\}\quad
\begin{aligned}
v_3 &= \frac{ui}{2\omega_2'},\\
\tau_3 &= -\frac{\omega_2}{2\omega_2'}.
\end{aligned}$$

$$(29.)\quad \frac{1}{i}e^{-\frac{1}{8}\pi i}\vartheta_1(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3) = h_3^{\frac{1}{4}}(e^{v_3\pi}-e^{-v_3\pi})+h_3^{\frac{9}{4}}(e^{3v_3\pi}-e^{-3v_3\pi})-h_3^{\frac{25}{4}}(e^{5v_3\pi}-e^{-5v_3\pi})-\cdots,$$

$$(30.)\quad e^{-\frac{1}{8}\pi i}\vartheta_2(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3) = h_3^{\frac{1}{4}}(e^{v_3\pi}+e^{-v_3\pi})-h_3^{\frac{9}{4}}(e^{3v_3\pi}+e^{-3v_3\pi})-h_3^{\frac{25}{4}}(e^{5v_3\pi}+e^{-5v_3\pi})+\cdots,$$

$$(31.)\quad \tfrac{1}{2}[\vartheta_3(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3)+\vartheta_0(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3)] = 1+h_3^{4}(e^{4v_3\pi}+e^{-4v_3\pi})+h_3^{16}(e^{8v_3\pi}+e^{-8v_3\pi})+\cdots,$$

$$(32.)\quad \tfrac{1}{2}[\vartheta_3(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3)-\vartheta_0(v_3 i\,|\,\tfrac{1}{2}+\tau_3)] = i[h_3(e^{2v_3\pi}+e^{-2v_3\pi})+h_3^{9}(e^{6v_3\pi}+e^{-6v_3\pi})+\cdots].$$

Si l'on a $e_2 \gtreqless 0$, et, par suite, $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$, on a $l_3 \gtreqless \operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi$ et $h_3 \gtreqless e^{-\frac{1}{4}\pi}$.

La quantité $\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi$ est égale à $\sqrt{2}-1 = 0{,}414213\underline{6}$, la quantité $e^{-\frac{1}{4}\pi}$ à $0{,}207879\underline{6}$.

Quand g_3 et par conséquent e_2 sont positifs, il est préférable d'employer les équations (3—17.); si, au contraire, g_3 et par suite e_2 sont négatifs, ce sont les équations (18—32.) qu'il vaut mieux employer. Dans le premier cas, en effet, h_2 est plus petit que h_3; dans le second cas, c'est h_3 qui est plus petit que h_2.

47.

En conservant les conventions faites dans l'art. 45 et dans l'art. 46, on a encore ces formules:

$$(1.)\quad \frac{\sigma_1(\frac{1}{2}\omega_1+u)}{\sigma(\frac{1}{2}\omega_1+u)} = \sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\frac{\vartheta_2(v\,|\,\frac{1}{2}+\tau)-\vartheta_1(v\,|\,\frac{1}{2}+\tau)}{\vartheta_2(v\,|\,\frac{1}{2}+\tau)+\vartheta_1(v\,|\,\frac{1}{2}+\tau)};\qquad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}\cdot\ \text{(Art. 45)}$$

$$(2.)\quad \frac{\sigma_3(\frac{1}{2}\omega_3+u)}{\sigma(\frac{1}{2}\omega_3+u)} = \frac{1}{i}\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\frac{\vartheta_2(v_1 i\,|\,\frac{1}{2}+\tau_1)+\vartheta_1(v_1 i\,|\,\frac{1}{2}+\tau_1)}{\vartheta_2(v_1 i\,|\,\frac{1}{2}+\tau_1)-\vartheta_1(v_1 i\,|\,\frac{1}{2}+\tau_1)};\quad \tau_1 = -\frac{\omega_1}{\omega_3}\cdot\ \text{(Art. 45)}$$

$$(3.)\quad \frac{\sigma_2(\frac{1}{2}\omega_2+u)}{\sigma(\frac{1}{2}\omega_2+u)} = \sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_1}\,\frac{\vartheta_2(v_2\,|\,\tau_2)-\vartheta_1(v_2\,|\,\tau_2)}{\vartheta_2(v_2\,|\,\tau_2)+\vartheta_1(v_2\,|\,\tau_2)};\qquad \tau_2 = \frac{\omega_2'}{2\omega_2}\cdot\ \text{(Art. 46)}$$

$$(4.)\quad \frac{\sigma_2(\frac{1}{2}\omega_2'+u)}{\sigma(\frac{1}{2}\omega_2'+u)} = \frac{1}{i}\sqrt[4]{e_3-e_2}\sqrt[4]{e_1-e_2}\,\frac{\vartheta_2(v_3 i\,|\,\tau_3)+\vartheta_1(v_3 i\,|\,\tau_3)}{\vartheta_2(v_3 i\,|\,\tau_3)-\vartheta_1(v_3 i\,|\,\tau_3)};\qquad \tau_3 = -\frac{\omega_2}{2\omega_2'}\cdot\ \text{(Art. 46)}$$

Calcul d'une valeur de l'argument u correspondant à des valeurs données des fonctions $\wp u$ et $\wp' u$.

48.

En nous conformant aux conventions faites dans l'art. 41, soit $(2\omega_\lambda, 2\omega_\nu)$ un couple primitif déterminé de périodes de l'argument de la fonction $\wp u$. Supposons les valeurs des radicaux $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}$, $\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$ précisées comme dans ce même article, et désignons par $\sqrt{e_\lambda - e_\nu}$, $\sqrt{e_\lambda - e_\mu}$ leurs carrés.

Soit u_0 une racine de l'équation en u, $\wp u = s$; toutes les racines de cette équation sont données par la formule

$$u = \pm u_0 + 2\mu\omega_\lambda + 2\mu'\omega_\nu, \tag{1.}$$

quand on attribue à μ et μ', séparément, toutes les valeurs entières positives et négatives, et la valeur zéro.

De l'égalité $\dfrac{\sigma_\nu(u \pm 2\omega_\nu)}{\sigma_\mu(u \pm 2\omega_\nu)} = -\dfrac{\sigma_\nu u}{\sigma_\mu u}$, il résulte que, parmi ces racines u il y en a toujours pour lesquelles la partie réelle du quotient $\dfrac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}} \dfrac{\sigma_\nu u}{\sigma_\mu u}$ n'est pas négative, pour lesquelles, par conséquent, la valeur absolue de la quantité

$$\frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u} = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}} \frac{\sigma_1(2u \mid \omega_\lambda, 4\omega_\nu)}{\sigma_2(2u \mid \omega_\lambda, 4\omega_\nu)} \tag{2.}$$

Voir art. 35 (12.)

ne dépasse pas l'unité.

Après avoir précisé arbitrairement la valeur du radical $\sqrt{s - e_\mu}$, choisissons celle de $\sqrt{s - e_\nu}$ de telle sorte que la partie réelle du quotient $\dfrac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{s - e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\sqrt{s - e_\mu}}$ ne soit pas négative; posons

$$\frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}} = l, \qquad \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\sqrt{s - e_\mu} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{s - e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\sqrt{s - e_\mu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{s - e_\nu}} = lt, \tag{3.}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_0 &= 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots,\\
\mathfrak{L}_{0,1} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots,\\
\mathfrak{L}_{0,2} &= \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots,\\
\mathfrak{L}_{0,3} &= \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{4.}$$

Dans ces conditions, la valeur de u déduite de l'équation

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu})^2 \cdot u = \int_t^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-l^4\xi^2}} = \\ = \frac{1}{i}\mathfrak{L}_0 \operatorname{lognat}(t + i\sqrt{1-t^2}) + \sqrt{1-t^2}(\mathfrak{L}_{0,1}t + \frac{2}{3}\mathfrak{L}_{0,2}t^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{0,3}t^5 + \cdots), \end{cases}$$

quand on donne à $\sqrt{1-t^2}$ l'une quelconque de ses deux valeurs, et au logarithme naturel l'une quelconque de ses valeurs en nombre illimité, est toujours une racine de l'équation $\wp u = s$.

On peut effectuer l'intégration suivant une droite et attribuer au radical $\sqrt{1-l^4\xi^2}$ celle de ses deux valeurs dont la partie réelle est p o s i t i v e.

Soit $\sqrt{S}$ l'une quelconque des deux valeurs du radical $\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$; la valeur u sera une racine de l'équation

$$(6.)\quad \wp' u = -\sqrt{S},$$

si on la calcule au moyen de l'équation (5.) en attribuant au radical $\sqrt{1-t^2}$ la valeur

$$(7.)\quad \sqrt{1-t^2} = \frac{\sqrt{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt{e_\lambda - e_\mu}}{2} \, \frac{1 - l^2 t^2}{\sqrt{1 - l^4 t^2}} \, \frac{\sqrt{S}}{(s-e_\mu)(s-e_\nu)}.$$

Il faut, dans cette expression, donner au radical $\sqrt{1-l^4t^2}$ celle de ses deux valeurs dont la partie réelle est positive.

En déterminant ainsi le radical $\sqrt{1-t^2}$, l'équation (5.) donne donc, pour chaque couple de valeurs correspondantes de s et $\sqrt{S}$, un nombre u tel que $\wp u = s$ et $\wp' u = -\sqrt{S}$.

Si l'on introduit les notations

$$(8.)\quad \mathfrak{G}_1(t) = t, \qquad \mathfrak{G}_2(t) = t + \tfrac{2}{3}t^3, \qquad \mathfrak{G}_3(t) = t + \tfrac{2}{3}t^3 + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5, \quad \cdots$$

l'équation (5.) devient:

$$(9.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu})^2 \cdot u = \frac{1}{i}\mathfrak{L}_0 \operatorname{lognat}(t + i\sqrt{1-t^2}) + \\ + \sqrt{1-t^2}\,[(\frac{1}{2})^2 \mathfrak{G}_1(t)\, l^4 + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 \mathfrak{G}_2(t)\, l^8 + (\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2 \mathfrak{G}_3(t)\, l^{12} + \cdots]. \end{cases}$$

Si l'on prend successivement s égal à e_λ et à e_ν, on déduit de l'équation (5.) ces valeurs:

$$(10.)\quad \omega_\lambda = \frac{2\mathfrak{L}_0 \pi}{(\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu})^2}, \quad \omega_\nu = \frac{2\mathfrak{L}_0 i \operatorname{lognat}(2l^{-1}) - 2i(\frac{1}{1\cdot 2}\mathfrak{L}_{0,1} + \frac{1}{3\cdot 4}\mathfrak{L}_{0,2} + \frac{1}{5\cdot 6}\mathfrak{L}_{0,3} + \cdots)}{(\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu})^2}.$$

Il faut attribuer au logarithme naturel sa valeur principale. Au lieu d'obtenir directement, au moyen des équations (3—7.), une valeur de u correspondant à des valeurs données s et $-\sqrt{S}$ de $\wp u$ et $\wp' u$, on peut d'abord, connaissant ces valeurs, introduire une quantité quelconque v et calculer, au moyen du théorème d'addition les valeurs s' et $-\sqrt{S'}$ de $\wp(u+v)$ et $\wp'(u+v)$; appliquant ensuite les formules (3—7.), on obtiendra une valeur de l'argument $u+v$ dont il suffira de retrancher v pour avoir une valeur de l'argument u.

Cette méthode est surtout employée dans le cas où v a l'une des valeurs $\pm\omega_\nu$.

Nous donnons ici les formules que l'on obtient quand on prend v égal à $-\omega_\nu$.

Choisissons la valeur du radical $\sqrt{e_\lambda - s}$ de telle sorte que la partie réelle de la quantité

$$\text{(11.)} \qquad \frac{\sqrt{e_\lambda - s}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}} = \frac{1+lt'}{1-lt'}$$

ne soit pas négative; calculons la quantité t' au moyen de l'équation

$$\text{(12.)} \qquad \frac{\sqrt{e_\lambda - s} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt{e_\lambda - s} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}} = lt';$$

attribuons enfin au radical $\sqrt{1-t'^2}$ la valeur déduite de l'équation

$$\text{(13.)} \qquad \sqrt{1-t'^2} = \frac{\sqrt{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt{e_\lambda - e_\mu}}{2(e_\mu - e_\nu)} \, \frac{1-l^2t'^2}{\sqrt{1-l^4t'^2}} \, \frac{\sqrt{S}}{(s-e_\lambda)},$$

en y supposant la partie réelle de $\sqrt{1-l^4t'^2}$ positive.

Dans ces conditions, l'équation

$$\text{(14.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\right)^2 \cdot (u - \omega_\nu) = \\ & = \tfrac{1}{4}\mathfrak{L}_0 \operatorname{lognat}(t' + i\sqrt{1-t'^2}) + \sqrt{1-t'^2}\left(\mathfrak{L}_{0,1}t' + \tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{0,2}t'^3 + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{0,3}t'^5 + \cdots\right) \end{aligned} \right.$$

fait connaître l'une des valeurs de u pour lesquelles $\wp u = s$, $\wp' u = -\sqrt{S}$.

Relativement aux formules (5.) et (14.) nous ferons les remarques suivantes.

Les termes de la série procédant suivant les puissances de t,

$$\mathfrak{L}_{0,1}t + \tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{0,2}t^3 + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{0,3}t^5 + \cdots,$$

décroissent plus rapidement que ceux d'une progression géométrique dont la raison serait l^4t^2, la quantité lt étant, en valeur absolue, au plus égale à l'unité. En général, il sera donc avantageux, pour calculer une valeur de l'argument u, d'employer l'équation (5.) ou l'équation (14.) suivant que la valeur absolue de t sera plus petite ou plus grande que celle de t'.

Si l'on connait les quantités e_λ, e_μ, e_ν, les formules que nous avons données sont suffisantes pour calculer toutes les valeurs de l'argument u qui correspondent à des valeurs données des fonctions $\wp u$ et $\wp' u$.

D'après ce que nous avons dit dans les art. 45 et 46, il y a lieu, quand les invariants g_2 et g_3 ont des valeurs réelles, de considérer les permutations

$$(\lambda, \mu, \nu) = (1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (2, 3, 1).$$

Pour faciliter l'usage des formules précédentes, nous allons donner à nouveau, dans les deux articles qui suivent, les plus importantes d'entre elles, dans le cas des invariants réels, et pour chacune des quatre permutations considérées.

Formules pour le calcul dans le cas des invariants réels d'une valeur de l'argument u correspondant à des valeurs données des fonctions $\wp u$ et $\wp' u$.

49.

Nous supposons les invariants réels et conservons les notations expliquées dans l'art. 45. Supposons le discriminant G positif, et soient α, β deux quantités réelles. Les formules correspondantes à celles de l'article précédent sont les suivantes; il faut y donner au logarithme naturel sa valeur principale:

$$\text{I.} \quad \lambda = 1, \quad \mu = 2, \quad \nu = 3.$$

$$(1.) \quad \left.\begin{aligned} \mathfrak{L}_0 &= 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots, \\ \mathfrak{L}_{0,1} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots, \\ \mathfrak{L}_{0,2} &= \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots, \\ \mathfrak{L}_{0,3} &= \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l^{12} + \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}\omega_1 &= \frac{\mathfrak{L}_0 \pi}{\left(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\right)^2}, \\ \tfrac{1}{2}\omega_3 &= \frac{\mathfrak{L}_0 i \log\operatorname{nat}(2l^{-1}) - i\left(\frac{1}{1\cdot 2}\mathfrak{L}_{0,1} + \frac{1}{3\cdot 4}\mathfrak{L}_{0,2} + \cdots\right)}{\left(\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\right)^2}. \end{aligned}$$

$$(2.)\qquad \wp u = s, \qquad \Re\frac{\sqrt{s-e_3}}{\sqrt{s-e_2}} \geqq 0, \qquad \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt{s-e_2}-\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt{s-e_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt{s-e_2}+\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt{s-e_3}} = lt,$$

$$(3.)\qquad \wp' u = -\sqrt{S}, \quad \Re\sqrt{1-l^4t^2} > 0, \quad \sqrt{1-t^2} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_1-e_2}}{2}\,\frac{1-l^2t^2}{\sqrt{1-l^4t^2}}\,\frac{\sqrt{S}}{(s-e_2)(s-e_3)},$$

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}\right)^2\cdot\left(u-\tfrac{1}{2}\omega_1\right) = \\ &= \mathfrak{L}_0 i \operatorname{lognat}\left(\sqrt{1-t^2}+ti\right)+\sqrt{1-t^2}\left(\mathfrak{L}_{0,1}t+\tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{0,2}t^3+\tfrac{2\cdot4}{3\cdot5}\mathfrak{L}_{0,3}t^5+\cdots\right); \\ &u = \left(\tfrac{1}{2}+\alpha\right)\omega_1+\beta\omega_3, \quad -1 \leqq \alpha \gtreqless 1, \quad -1 \leqq \beta \gtreqless 1. \end{aligned}\right.$$

$$(2^*)\qquad \wp u = s, \qquad \Re\sqrt{e_1-s} \geqq 0, \qquad \frac{\sqrt{e_1-s}-\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-s}+\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_1-e_2}} = lt',$$

$$(3^*)\qquad \wp' u = -\sqrt{S}, \quad \Re\sqrt{1-l^4t'^2} > 0, \quad \sqrt{1-t'^2} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_1-e_2}}{2(e_2-e_3)}\,\frac{1-l^2t'^2}{\sqrt{1-l^4t'^2}}\,\frac{\sqrt{S}}{(s-e_1)},$$

$$(4^*)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}\right)^2\cdot\left(u-\tfrac{1}{2}\omega_1-\omega_3\right) = \\ &= \mathfrak{L}_0 i \operatorname{lognat}\left(\sqrt{1-t'^2}+t'i\right)+\sqrt{1-t'^2}\left(\mathfrak{L}_{0,1}t'+\tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{0,2}t'^3+\tfrac{2\cdot4}{3\cdot5}\mathfrak{L}_{0,3}t'^5+\cdots\right); \\ &u = \left(\tfrac{1}{2}+\alpha\right)\omega_1+(1+\beta)\omega_3, \quad -1 \leqq \alpha \gtreqless 1, \quad -1 \leqq \beta \gtreqless 1. \end{aligned}\right.$$

II. $\lambda = 3, \quad \mu = 2, \quad \nu = 1.$

$$(5.)\qquad \begin{array}{l|l} \mathfrak{L}_1 = 1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l_1^4+\left(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2 l_1^8+\left(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2 l_1^{12}+\cdots, & \\ \mathfrak{L}_{1,1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l_1^4+\left(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2 l_1^8+\left(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2 l_1^{12}+\cdots, & \tfrac{1}{2}\omega_3 = \dfrac{\mathfrak{L}_1\pi i}{\left(\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}\right)^2}, \\ \mathfrak{L}_{1,2} = \left(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2 l_1^8+\left(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2 l_1^{12}+\cdots, & \\ \mathfrak{L}_{1,3} = \left(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2 l_1^{12}+\cdots, & \tfrac{1}{2}\omega_1 = \dfrac{\mathfrak{L}_1\operatorname{lognat}(2l_1^{-1})-\left(\frac{1}{1\cdot2}\mathfrak{L}_{1,1}+\frac{1}{3\cdot4}\mathfrak{L}_{1,2}+\cdots\right)}{\left(\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}\right)^2}. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

$$(6.)\qquad \wp u = s, \qquad \Re\frac{\sqrt{s-e_1}}{\sqrt{s-e_2}} \geqq 0, \qquad \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt{s-e_2}-\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt{s-e_1}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt{s-e_2}+\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt{s-e_1}} = l_1t_1,$$

$$(7.)\qquad \wp' u = -\sqrt{S}, \quad \Re\sqrt{1-l_1^4t_1^2} > 0, \quad \sqrt{1-t_1^2} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_2-e_3}}{2i}\,\frac{1-l_1^2t_1^2}{\sqrt{1-l_1^4t_1^2}}\,\frac{\sqrt{S}}{(s-e_1)(s-e_2)},$$

$$(8.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3}\right)^2\cdot\left(u-\tfrac{1}{2}\omega_3\right) = \\ &= \mathfrak{L}_1 \operatorname{lognat}\left(\sqrt{1-t_1^2}-t_1 i\right)+i\sqrt{1-t_1^2}\left(\mathfrak{L}_{1,1}t_1+\tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{1,2}t_1^3+\tfrac{2\cdot4}{3\cdot5}\mathfrak{L}_{1,3}t_1^5+\cdots\right); \\ &u = \alpha\omega_1+\left(\tfrac{1}{2}+\beta\right)\omega_3, \quad -1 \leqq \alpha \gtreqless 1, \quad -1 \leqq \beta \gtreqless 1. \end{aligned}\right.$$

$$(6^*)\qquad \wp u = s, \quad \Re\sqrt{s-e_3} \geqq 0, \quad \frac{\sqrt{s-e_3}-\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}}{\sqrt{s-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_3}} = l_1 t_1',$$

$$(7^*)\qquad \wp' u = -\sqrt{S}, \quad \Re\sqrt{1-l_1^4 t_1'^2} > 0, \quad \sqrt{1-t_1'^2} = -\frac{\sqrt{e_1-e_3}+\sqrt{e_2-e_3}}{2i(e_1-e_2)}\,\frac{1-l_1^2 t_1'^2}{\sqrt{1-l_1^4 t_1'^2}}\,\frac{\sqrt{S}}{(s-e_3)},$$

$$(8^*)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_3})^2(u-\omega_1-\tfrac{1}{2}\omega_3) = \\ &= \mathfrak{L}_1 \operatorname{lognat}(\sqrt{1-t_1'^2}-t_1' i) + i\sqrt{1-t_1'^2}(\mathfrak{L}_{1,1}t_1' + \tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{1,2}t_1'^3 + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{1,3}t_1'^5 + \cdots); \\ &u = (1+\alpha)\omega_1 + (\tfrac{1}{2}+\beta)\omega_3, \quad -1 \leqq \alpha \gtreqless 1, \quad -1 \leqq \beta \gtreqless 1. \end{aligned}\right.$$

50.

Les invariants sont supposés réels et nous conservons les notations expliquées dans l'art. 46. Supposons le discriminant G négatif et soient α, β deux quantités réelles. On a le système suivant de formules, dans lesquelles le logarithme naturel doit avoir sa valeur principale:

III. $\lambda = 2, \quad \mu = 1, \quad \nu = 3.$

$$(1.)\qquad \left.\begin{aligned} \mathfrak{L}_2 &= 1 + (\tfrac{1}{2})^2 l_2^4 + (\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 l_2^8 + (\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2 l_2^{12} + \cdots, \\ \mathfrak{L}_{2,1} &= (\tfrac{1}{2})^2 l_2^4 + (\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 l_2^8 + (\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2 l_2^{12} + \cdots, \\ \mathfrak{L}_{2,2} &= (\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 l_2^8 + (\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2 l_2^{12} + \cdots, \\ \mathfrak{L}_{2,3} &= (\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2 l_2^{12} + \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}\omega_2 &= \frac{\mathfrak{L}_2 \pi}{(\sqrt[4]{e_2-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_1})^2}, \\ \tfrac{1}{2}\omega_2' &= \frac{2\mathfrak{L}_2 i \operatorname{lognat}(2 l_2^{-1}) - 2i(\frac{1}{1\cdot 2}\mathfrak{L}_{2,1} + \frac{1}{3\cdot 4}\mathfrak{L}_{2,2} + \cdots)}{(\sqrt[4]{e_2-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_1})^2}. \end{aligned}$$

$$(2.)\qquad \wp u = s, \quad \Re\frac{\sqrt[4]{e_2-e_1}\sqrt{s-e_3}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt{s-e_1}} \geqq 0, \quad \frac{\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt{s-e_1}-\sqrt[4]{e_2-e_1}\sqrt{s-e_3}}{\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt{s-e_1}+\sqrt[4]{e_2-e_1}\sqrt{s-e_3}} = i l_2 t_2,$$

$$(3.)\qquad \wp' u = -\sqrt{S}, \quad \Re\sqrt{1-l_2^4 t_2^2} > 0, \quad \sqrt{1-t_2^2} = \frac{\sqrt{e_2-e_3}+\sqrt{e_2-e_1}}{2}\,\frac{1+l_2^2 t_2^2}{\sqrt{1-l_2^4 t_2^2}}\,\frac{\sqrt{S}}{(s-e_1)(s-e_3)},$$

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(\sqrt[4]{e_2-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_1})^2\cdot(u-\tfrac{1}{2}\omega_2) = \\ &= \mathfrak{L}_2 i \operatorname{lognat}(\sqrt{1-t_2^2}+t_2 i) + \sqrt{1-t_2^2}(\mathfrak{L}_{2,1}t_2 + \tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{2,2}t_2^3 + \tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{2,3}t_2^5 + \cdots); \\ &u = (\tfrac{1}{2}+\alpha)\omega_2 + \beta\omega_2', \quad -1 \leqq \alpha \gtreqless 1, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq \beta \gtreqless \tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

$$(2^*)\qquad \wp u = s, \qquad \Re\sqrt{e_2-s} \geqq 0, \qquad \frac{\sqrt{e_2-s}-\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_1}}{\sqrt{e_2-s}+\sqrt[4]{e_2-e_3}\sqrt[4]{e_2-e_1}} = il_2t_2',$$

$$(3^*)\qquad \wp' u = -\sqrt{S}, \quad \Re\sqrt{1-l_2^4t_2'^2} > 0, \quad \sqrt{1-t_2'^2} = \frac{\sqrt{e_2-e_3}+\sqrt{e_2-e_1}}{2(e_1-e_3)}\,\frac{1+l_2^2t_2'^2}{\sqrt{1-l_2^4t_2'^2}}\,\frac{\sqrt{S}}{(e_2-s)},$$

$$(4^*)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_2-e_3}+\sqrt[4]{e_2-e_1}\right)^2\cdot\left(u-\tfrac{1}{2}\omega_2'\right) = \\ &= \mathfrak{L}_2 i \operatorname{lognat}\left(\sqrt{1-t_2'^2}-t_2'i\right)-\sqrt{1-t_2'^2}\left(\mathfrak{L}_{2,1}t_2'+\tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{2,2}t_2'^3+\tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{2,3}t_2'^5+\cdots\right); \\ &u = \alpha\omega_2+\left(\tfrac{1}{2}+\beta\right)\omega_2', \quad -1 \leqq \alpha \gtreqless 1, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq \beta \gtreqless \tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

IV. $\lambda = 2, \quad \mu = 3, \quad \nu = 1.$

$$(5.)\qquad \left.\begin{aligned} \mathfrak{L}_3 &= 1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l_3^4+\left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l_3^8+\left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l_3^{12}+\cdots, \\ \mathfrak{L}_{3,1} &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 l_3^4+\left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l_3^8+\left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l_3^{12}+\cdots, \\ \mathfrak{L}_{3,2} &= \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 l_3^8+\left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l_3^{12}+\cdots, \\ \mathfrak{L}_{3,3} &= \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 l_3^{12}+\cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}\omega_2' &= \frac{\mathfrak{L}_3\pi i}{\left(\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_3-e_2}\right)^2}, \\ \tfrac{1}{2}\omega_2 &= \frac{2\mathfrak{L}_3\operatorname{lognat}(2l_3^{-1})-2\left(\frac{1}{1\cdot 2}\mathfrak{L}_{3,1}+\frac{1}{3\cdot 4}\mathfrak{L}_{3,2}+\cdots\right)}{\left(\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_3-e_2}\right)^2}. \end{aligned}$$

$$(6.)\qquad \wp u = s, \qquad \Re\frac{\sqrt[4]{e_3-e_2}\sqrt{s-e_1}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt{s-e_3}} \geqq 0, \qquad \frac{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt{s-e_3}-\sqrt[4]{e_3-e_2}\sqrt{s-e_1}}{\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt{s-e_3}+\sqrt[4]{e_3-e_2}\sqrt{s-e_1}} = il_3t_3,$$

$$(7.)\qquad \wp' u = -\sqrt{S}, \quad \Re\sqrt{1-l_3^4t_3^2} > 0, \quad \sqrt{1-t_3^2} = \frac{\sqrt{e_1-e_2}+\sqrt{e_3-e_2}}{2i}\,\frac{1+l_3^2t_3^2}{\sqrt{1-l_3^4t_3^2}}\,\frac{\sqrt{S}}{(s-e_1)(s-e_3)},$$

$$(8.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_3-e_2}\right)^2\cdot\left(u-\tfrac{1}{2}\omega_2'\right) = \\ &= \mathfrak{L}_3\operatorname{lognat}\left(\sqrt{1-t_3^2}-t_3i\right)+i\sqrt{1-t_3^2}\left(\mathfrak{L}_{3,1}t_3+\tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{3,2}t_3^3+\tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{3,3}t_3^5+\cdots\right); \\ &u = \alpha\omega_2+\left(\tfrac{1}{2}+\beta\right)\omega_2', \quad -\tfrac{1}{2} \leqq \alpha \gtreqless \tfrac{1}{2}, \quad -1 \leqq \beta \gtreqless 1. \end{aligned}\right.$$

$$(6^*)\qquad \wp u = s, \qquad \Re\sqrt{s-e_2} \geqq 0, \qquad \frac{\sqrt{s-e_2}-\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_3-e_2}}{\sqrt{s-e_2}+\sqrt[4]{e_1-e_2}\sqrt[4]{e_3-e_2}} = il_3t_3',$$

$$(7^*)\qquad \wp' u = -\sqrt{S}, \quad \Re\sqrt{1-l_3^4t_3'^2} > 0, \quad \sqrt{1-t_3'^2} = \frac{\sqrt{e_1-e_2}+\sqrt{e_3-e_2}}{2i(e_3-e_1)}\,\frac{1+l_3^2t_3'^2}{\sqrt{1-l_3^4t_3'^2}}\,\frac{\sqrt{S}}{(s-e_2)},$$

$$(8^*)\qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_1-e_2}+\sqrt[4]{e_3-e_2}\right)^2\cdot\left(u-\tfrac{1}{2}\omega_2\right) = \\ &= \mathfrak{L}_3\operatorname{lognat}\left(\sqrt{1-t_3'^2}-t_3'i\right)+i\sqrt{1-t_3'^2}\left(\mathfrak{L}_{3,1}t_3'+\tfrac{2}{3}\mathfrak{L}_{3,2}t_3'^3+\tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\mathfrak{L}_{3,3}t_3'^5+\cdots\right); \\ &u = \left(\tfrac{1}{2}+\alpha\right)\omega_2+\beta\omega_2', \quad -\tfrac{1}{2} \leqq \alpha \gtreqless \tfrac{1}{2}, \quad -1 \leqq \beta \gtreqless 1. \end{aligned}\right.$$

Quelques représentations conformes obtenues au moyen des fonctions elliptiques.

51.

Supposons que ω_1 soit un nombre réel positif et ω_3 un nombre purement imaginaire aussi positif (voir les formules et les notations de l'art. 45); soient t et t' deux quantités variables pouvant prendre chacune toutes les valeurs appartenant à l'intervalle $0 \cdots 1$; l'ensemble des valeurs

$$u = t\omega_1 + t'\omega_3, \qquad (0 \leqq t \leqq 1, \quad 0 \leqq t' \leqq 1)$$

est figuré géométriquement par les points de la surface d'un rectangle.

Si l'on donne à la variable u toutes les valeurs figurées par les points du contour de ce rectangle, la fonction $\wp(u \mid \omega_1, \omega_3) = \wp u$ acquiert toutes les valeurs réelles, et chacune d'elles seulement une fois.

Pour les valeurs de l'argument u

$$t\omega_1, \ (t = 0 \cdots 1) \ ; \quad \omega_1 + t'\omega_3, \ (t' = 0 \cdots 1) \ ; \quad t\omega_1 + \omega_3, \ (t = 1 \cdots 0) \ ; \quad t'\omega_3, \ (t' = 1 \cdots 0)$$

les valeurs de la fonction $\wp u$ appartiennent respectivement aux intervalles

$$+\infty \cdots e_1 \quad ; \qquad e_1 \cdots e_2 \quad ; \qquad e_2 \cdots e_3 \quad ; \qquad e_3 \cdots -\infty \, ;$$

les valeurs correspondantes de la dérivée $\wp' u$ sont respectivement

réelles négatives; purement imaginaires positives; réelles positives; purement imaginaires négatives.

Si l'on attribue successivement à l'argument u toutes les valeurs appartenant à chacun des champs

$$u = t\omega_1 + t'\omega_3, \quad \text{et} \quad u = t\omega_1 - t'\omega_3 \qquad (0 < t < 1, \quad 0 < t' < 1)$$

la fonction u acquiert, dans le premier cas, toutes les valeurs complexes à partie imaginaire négative, dans le second cas, toutes les valeurs complexes à partie imaginaire positive.

En représentant géométriquement les valeurs de la fonction $\wp u$, on obtient donc, comme correspondant aux deux rectangles considérés comme surfaces à un seul feuillet

$$u = t\omega_1 \pm t'\omega_3, \qquad (0 \leqq t \leqq 1, \quad 0 \leqq t' \leqq 1)$$

deux demi-plans, considérés aussi comme surfaces à un seul feuillet, limités l'un et l'autre par l'axe réel. Chacun des deux rectangles se trouve ainsi représenté, avec conservation de la connexion et similitude des éléments infiniment petits, sur l'un des deux demi-plans, de telle sorte qu'il y a une correspondance univoque entre les points des deux surfaces.

Aux axes de symétrie $u = t\omega_1 \pm \frac{1}{2}\omega_3$, $u = \frac{1}{2}\omega_1 \pm t'\omega_3$ des rectangles correspondent alors, dans le plan où sont figurées géométriquement les valeurs de la quantité complexe $\wp u$, quatre demi-circonférences se raccordant deux à deux pour former deux circonférences.

L'une de ces circonférences a le point e_1 pour centre et $\sqrt{(e_1-e_3)(e_1-e_2)}$ pour rayon; l'autre a e_3 pour centre et $\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}$ pour rayon.

Les points

$$\wp(\tfrac{1}{2}\omega_1 \pm \tfrac{1}{2}\omega_3) = e_2 \mp i\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}$$

sont communs aux deux circonférences.

Au moyen de la fonction

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{e_2-e_3}+i\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_2-e_3}-i\sqrt{e_1-e_2}}\cdot\frac{\wp u-e_2+i\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}}{\wp u-e_2-i\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}}},$$

on obtient la représentation conforme du rectangle considéré comme surface à un seul feuillet

$$u = t\omega_1 + t'\omega_3 \qquad (0 \leqq t \gtreqless 1,\ 0 \leqq t' \gtreqless 1)$$

sur un cercle de rayon égal à l'unité, considéré aussi comme surface à un seul feuillet. Les centres du rectangle et du cercle se correspondent; aux axes de symétrie du rectangle correspondent deux diamètres du cercle; aux sommets du rectangle correspondent les quatre points

$$\frac{\mp\sqrt{e_2-e_3}\mp i\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}.$$

Si l'on attribue à l'argument u toutes les valeurs qui appartiennent au champ

$$u = \pm t\omega_1 \pm t'\omega_3 \qquad (0 \leqq t \gtreqless 1,\ 0 \leqq t' \gtreqless 1)$$

la valeur absolue de la fonction

$$\sqrt[4]{(e_1-e_3)(e_1-e_2)}\,\frac{\sigma u}{\sigma_1 u} \qquad \text{est inférieure, égale, supérieure à } 1,$$

suivant que la valeur de t est inférieure, égale, supérieure à $\frac{1}{2}$.

Dans la même hypothèse, la valeur absolue de la fonction

$$\sqrt[4]{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \qquad \text{est inférieure, égale, supérieure à } 1,$$

suivant que la valeur de t' est inférieure, égale, supérieure à $\frac{1}{2}$.

Dans le champ

$$u = \pm t\omega_1 \pm t'\omega_3 \qquad (0 \leqq t < 1, \quad 0 \leqq t' < 1)$$

les parties réelles des quatre quantités u, $\frac{\sigma u}{\sigma_1 u}$, $\frac{\sigma u}{\sigma_2 u}$, $\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}$ ont le même signe, ainsi que les parties imaginaires. Pour les mêmes valeurs de l'argument u, la partie réelle de chacun des six quotients $\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ est différente de zéro et positive.

Dans le champ

$$u = t\omega_2 + t'\omega_3 \qquad (0 < t < 1, \quad 0 < t' < 1)$$

la partie imaginaire du quotient $\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$ est positive ou négative suivant que μ est supérieur ou inférieur à ν.

Si l'on désigne par v la quantité $\frac{u}{2\omega_1}$, et par τ la quantité $\frac{\omega_3}{\omega_1}$, les parties réelles des fonctions $\vartheta_0(v|\tau)$, $\vartheta_1(v|\tau)$, $\vartheta_2(v|\tau)$, $\vartheta_3(v|\tau)$, dans le champ

$$u = t\omega_1 \pm t'\omega_3 \qquad (0 < t < 1, \quad 0 \leqq t' < 1)$$

sont positives.

Dans le champ

$$u = t\omega_1 + t'\omega_3 \qquad (0 < t < 1, \quad 0 < t' < 1)$$

les parties imaginaires des fonctions $\vartheta_0(v|\tau)$ et $\vartheta_1(v|\tau)$ sont positives, celles des fonctions $\vartheta_2(v|\tau)$ et $\vartheta_3(v|\tau)$ sont négatives.

Dans le champ

$$u = t\omega_1 - t'\omega_3 \qquad (0 < t < 1, \quad 0 < t' < 1)$$

les parties imaginaires des fonctions $\vartheta_0(v|\tau)$ et $\vartheta_1(v|\tau)$ sont négatives, celles des fonctions $\vartheta_2(v|\tau)$ et $\vartheta_3(v|\tau)$ sont positives.

On déduit, par exemple, de là que la fonction

$$\frac{1}{i}\log\operatorname{nat}\frac{\vartheta_\varrho(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t'\tau|\tau)}{\vartheta_\varrho(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t'\tau|\tau)}, \qquad (\varrho = 0, 1, 2, 3)$$

où l'on attribue au logarithme naturel sa valeur principale, est, dans le champ $(0 < t < 1, \ 0 \leqq t' < 1)$, une fonction réelle continue des deux arguments t, t', qui s'annule pour $t' = 0$.

52.

Supposons que $\omega_2 = \omega_3 + \omega_1$ soit un nombre réel positif, et $\omega_2' = \omega_3 - \omega_1$ un nombre purement imaginaire positif (voir les formules et les notations de l'art. 46);

soient t et t' deux quantités réelles pouvant prendre chacune toutes les valeurs appartenant à l'intervalle $0 \cdots 1$: l'ensemble des valeurs

$$u = t\omega_2 + t'\omega_2' \qquad (0 \leqq t \overline{\gtrless} 1, \quad 0 \leqq t' \overline{\gtrless} 1)$$

est figuré géométriquement par les points de la surface d'un rectangle. Le long du contour de ce rectangle, la fonction $\wp(u \mid \omega_1, \omega_3) = \wp u$ acquiert toutes les valeurs réelles, et, comme il résulte de l'égalité $\wp(\omega_3 + u') = \wp(\omega_3 - u')$, elle acquiert deux fois chacune d'elles.

Pour les valeurs de l'argument u

$$t\omega_2, \ (t = 0 \cdots 1)\ ; \quad \omega_2 + t'\omega_2', \ (t' = 0 \cdots 1)\ ; \quad t\omega_2 + \omega_2', \ (t = 1 \cdots 0)\ ; \quad t'\omega_2', \ (t' = 1 \cdots 0)$$

les valeurs de la fonction $\wp u$ appartiennent respectivement aux intervalles

$$+\infty \cdots e_2 \quad ; \qquad e_2 \cdots -\infty \quad ; \qquad +\infty \cdots e_2 \quad ; \qquad e_2 \cdots -\infty;$$

les valeurs correspondantes de la dérivée $\wp' u$ sont respectivement

réelles négatives; purement imaginaires positives; réelles positives; purement imaginaires négatives.

Si l'on attribue à l'argument u toutes les valeurs appartenant au champ

$$u = t\omega_2 + t'\omega_2' \qquad (0 < t < 1, \quad 0 < t' < 1)$$

la fonction $\wp u$ acquiert toutes les valeurs complexes à partie imaginaire négative, et, sauf la valeur $\wp\omega_3 = e_3$, elle acquiert deux fois chacune d'elles.

Si l'on attribue à l'argument u toutes les valeurs appartenant au champ

$$u = t\omega_2 - t'\omega_2' \qquad (0 < t < 1, \quad 0 < t' < 1),$$

la fonction $\wp u$ acquiert toutes les valeurs complexes à partie imaginaire positive, et, sauf la valeur $\wp\omega_1 = e_1$, elle acquiert deux fois chacune d'elles.

A chacun des deux rectangles considérés comme surfaces à un seul feuillet

$$u = t\omega_2 \pm t'\omega_2' \qquad (0 \leqq t \overline{\gtrless} 1, \quad 0 \leqq t' \overline{\gtrless} 1)$$

correspond, par la représentation géométrique des valeurs de la fonction $\wp u$, une surface à deux feuillets composée de deux demi-plans. Dans les deux cas, les deux demi-plans sont limités par l'axe réel; le point e_1 est un point de ramification du premier ordre de la surface à deux feuillets correspondant au premier cas, e_3 un point de ramification du premier ordre de la surface à deux feuillets correspondant au second cas. Aux axes de symétrie $u = t\omega_2 \pm \frac{1}{2}\omega_2'$, $u = \frac{1}{2}\omega_2 \pm t'\omega_2'$ des deux rectangles correspondent, dans le plan où sont figurées géométriquement les valeurs de la fonction $\wp u$, quatre arcs d'une même circonférence ayant pour centre le point e_2 et pour rayon $\sqrt{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}$. Les deux points e_1, e_3 sont sur cette circonférence.

Au moyen de la fonction $\sqrt[4]{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}\,\frac{\sigma u}{\sigma_2 u}$, on obtient la représentation conforme du rectangle considéré comme surface à un seul feuillet,

$$u = \pm t\omega_2 \pm t'\omega_2' \qquad (0 \leqq t \overset{=}{<} \tfrac{1}{2},\ \ 0 \leqq t' \overset{=}{<} \tfrac{1}{2}),$$

sur un cercle de rayon égal à l'unité, considéré aussi comme surface à un seul feuillet. Les centres du rectangle et du cercle se correspondent; à chacun des axes de symétrie du rectangle correspond un diamètre du cercle; aux sommets du rectangle correspondent les quatre points

$$\pm \frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}}, \qquad \pm \frac{\sqrt{e_3-e_2}}{\sqrt[4]{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}}.$$

Si l'on attribue à l'argument u toutes les valeurs qui appartiennent au champ

$$u = \pm t\omega_2 \pm t'\omega_2' \qquad (0 \leqq t \overset{=}{<} 1,\ \ 0 \leqq t' \overset{=}{<} 1),$$

la valeur absolue de la fonction

$$\sqrt[4]{(e_1-e_2)(e_3-e_2)}\,\frac{\sigma u}{\sigma_2 u} \qquad \text{est inférieure,}\quad \text{égale,}\quad \text{supérieure à } 1,$$

suivant que le produit $(t-\frac{1}{2})(t'-\frac{1}{2})$ est positif, nul, négatif.

Dans le champ

$$u = \pm t\omega_2 \pm t'\omega_2' \qquad (0 \leqq t < 1,\ \ 0 \leqq t' < 1),$$

les parties réelles des deux quantités u, $\frac{\sigma u}{\sigma_2 u}$ ont le même signe, ainsi que les parties imaginaires.

Supposons que les trois angles du triangle qui a pour sommets les points représentant géométriquement les trois quantités $0, \omega_1, \omega_3$ soient **aigus**; à l'ensemble des valeurs

$$u = \pm t\omega_2 \pm t'\omega_2' \qquad (0 \leqq t \overset{=}{<} \tfrac{1}{2},\ \ 0 \leqq t+t' \overset{=}{<} 1),$$

correspond la surface d'un hexagone convexe à côtés rectilignes, ayant pour sommets $\pm\omega_1$, $\pm\omega_3$, $\pm\omega_2'$, et ayant la propriété d'être divisé en six triangles égaux n'ayant que des angles aigus, par les trois diagonales qui joignent les sommets opposés.

Si, au contraire, l'un des angles du triangle qui a pour sommets les points $0, \omega_1, \omega_3$ est **obtus**, à l'ensemble des valeurs

$$u = \pm t\omega_2 \pm t'\omega_2' \qquad (0 \leqq t+t' \overset{=}{<} 1,\ \ 0 \leqq t' \overset{=}{<} \tfrac{1}{2})$$

correspond la surface d'un hexagone convexe à côtés rectilignes, ayant pour sommets $\pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3$, et divisé en six triangles égaux n'ayant que des angles aigus, par les trois diagonales qui joignent les sommets opposés.

Pour toutes les valeurs de l'argument u à l'intérieur de l'un ou de l'autre des hexagones, la partie réelle de chacun des six quotients $\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ est différente de zéro; elle est positive.

Quand $\omega_3 = \omega_1 i$, cette même conclusion s'applique pour toutes les valeurs de l'argument à l'intérieur du carré

$$u = \pm t\omega_2 \pm t'\omega_2' \qquad (0 \leqq t + t' < 1).$$

53.

Supposons le couple primitif de périodes $(2\omega_1, 2\omega_3)$ de l'argument u d'une fonction $\wp(u\,|\,\omega_1, \omega_3)$ choisi de telle sorte que les trois angles du triangle qui a pour sommets les points représentant géométriquement les quantités $0, \omega_1, \omega_3$ soient aigus (voir art. 27). A l'ensemble des valeurs

$$u = 2t\omega_1 + 2t'\omega_3 \qquad (0 \leqq t \lesseqgtr 1, \;\; 0 \leqq t' \lesseqgtr 1, \;\; 0 \leqq t + t' \lesseqgtr 1)$$

correspond alors la surface d'un triangle n'ayant que des angles aigus. Les quantités ω_1, $\omega_1 + \omega_3 = \omega_2$, ω_3 correspondent aux milieux des côtés. Joignons ces trois points par des droites; la surface du triangle se trouve décomposée en quatre triangles égaux, n'ayant que des angles aigus, et l'on obtient ainsi le rabattement sur l'une de ses faces, de la surface d'un tétraèdre qui a la propriété d'avoir les arêtes opposées d'égales longueurs. A chaque point de cette surface correspond une valeur de la fonction $\wp(u\,|\,\omega_1, \omega_3)$, et, au moyen de cette fonction, elle se trouve représentée sur le plan illimité où l'on figure les valeurs de la fonction $\wp u$, avec conservation de la connexion et similitude des éléments infiniment petits, de telle sorte que les points des deux surfaces se correspondent d'une manière univoque.

Si le triangle n'ayant que des angles aigus dont il vient d'être question devient un triangle rectangle, la surface du tétraèdre considéré devient la surface, regardée comme formée de deux feuillets, d'un rectangle, ces feuillets se raccordant tout le long du contour de ce rectangle en formant un pli (voir le mémoire:

H. A. Schwarz, Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel, Journal de Crelle, t. 70; H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen, t. II. p. 84—101).

L'hexagone convexe à côtés rectilignes dont les sommets correspondent aux valeurs $\pm\omega_1$, $\pm\omega_3$, $\pm(\omega_3-\omega_1)$ a la propriété d'être divisé en six triangles égaux, n'ayant que des angles aigus, par les trois diagonales qui joignent les sommets opposés.

Pour toutes les valeurs de l'argument u qui correspondent aux points situés à l'intérieur de l'hexagone dont il vient d'être question, la partie réelle de chacun des six quotients $\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3)$ est différente de zéro; elle est positive.

De ce théorème peut se déduire la détermination, que font connaître les égalités (2.) de l'art. 28, des radicaux qui se présentent dans les relations entre les fonctions σ.

Le carré du module et l'invariant absolu en fonction du rapport des périodes.

54.

La quantité $k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \frac{\vartheta_2^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)}$ (voir aussi la formule (6.) de l'art. 32) est une fonction analytique uniforme du rapport $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ des deux périodes d'un couple primitif de périodes $(2\omega_1, 2\omega_3)$.

Nous désignerons cette fonction par $\theta(\tau)$.

Posons $\tau = \alpha + \beta i$, α, β désignant deux quantités réelles variables. La quantité α peut acquérir toute valeur réelle, tandis que β ne peut prendre que les valeurs réelles positives.

La variable τ étant représentée géométriquement, à l'ensemble des valeurs

$$\tau = \alpha + \beta i \qquad (0 \leqq \alpha \mathrel{\substack{=\\<}} 1, \ \ \beta \geqq \sqrt{\alpha(1-\alpha)})$$

correspond la surface d'un triangle T limité par des arcs de cercles, à savoir: deux droites et une demi-circonférence, et ayant tous ses angles nuls. L'un des sommets de ce triangle à côtés circulaires correspond à la valeur $\beta = +\infty$, les deux autres correspondent aux valeurs $\tau = 0$ et $\tau = 1$. Si la variable τ ne sort pas du champ T, le triangle à côtés rectilignes dont les sommets correspondent aux valeurs $0, 1, \tau$ a tous ses angles aigus. Ce triangle devient un triangle rectangle si τ acquiert l'une quelconque des valeurs

$$1+\beta i \quad (\beta > 0) \quad ; \quad \beta i \quad (\beta > 0) \quad ; \quad \alpha + i\sqrt{\alpha(1-\alpha)} \quad (0 < \alpha < 1)$$

qui correspondent aux points du contour du champ T.

Le long de ce contour, la fonction $\theta(\tau) = k^2$ acquiert toutes les valeurs réelles, et chacune d'elles une fois seulement.

Quand τ prend les valeurs

$$1+\beta i \quad (\beta = 0 \cdots +\infty) \quad ; \quad \beta i \quad (\beta = +\infty \cdots 0) \quad ; \quad \alpha + i\sqrt{\alpha(1-\alpha)} \quad (\alpha = 0 \cdots 1)$$

les valeurs de la fonction $\theta(\tau) = k^2$ appartiennent respectivement aux intervalles

$$-\infty \cdots 0 \quad ; \quad 0 \cdots 1 \quad ; \quad 1 \cdots +\infty.$$

A l'intérieur du champ T, la fonction $\theta(\tau)$ acquiert toutes les valeurs complexes à partie imaginaire positive, et chacune d'elles une fois seulement.

En représentant géométriquement la variable complexe $\theta(\tau) = k^2$, on obtient donc une correspondance univoque entre les points de la surface, considérée comme formée d'un seul feuillet, du triangle limité par des arcs de cercles T, et ceux de la surface, considérée aussi comme formée d'un seul feuillet, du demi-plan supérieur.

La fonction $\theta(\tau)$ acquiert toutes les valeurs complexes à partie imaginaire négative, et chacune d'elles une fois, quand τ prend toutes les valeurs appartenant au champ

$$\tau = \alpha + \beta i \qquad (-1 \leqq \alpha \lesseqgtr 0, \ \ \beta \geqq \sqrt{-\alpha(1+\alpha)}).$$

A ces valeurs correspond dans le plan où l'on représente la variable τ la surface d'un second triangle limité par des arcs de cercles; nous l'appellerons T_1. A des valeurs de la variable τ figurées par des points des champs T et T_1 symétriques par rapport à l'axe imaginaire, correspondent des valeurs imaginaires conjuguées de la fonction $\theta(\tau) = k^2$.

Par reproduction symétrique relativement à chacun de ses côtés*), on déduit du triangle T, outre le triangle T_1, deux autres triangles; si, à chacun de ces nouveaux triangles, on applique le même procédé, et que l'on continue ainsi, on obtient une infinité de triangles, limités par des arcs de cercles, qui recouvrent entièrement le demi-plan supérieur $\beta > 0$, sans empiéter les uns sur les autres.

La représentation conforme obtenue au moyen de la fonction $\theta(\tau) = k^2$ fait correspondre à l'un quelconque de ces triangles déduits du triangle T au moyen d'un nombre fini de reproductions symétriques, le demi-plan supérieur ou le demi-plan inférieur suivant que ce nombre de reproductions symétriques est pair ou impair.

La fonction $\theta(\tau) = k^2$ reste inaltérée quand on effectue sur τ l'une ou l'autre des transformations

$$\tau \parallel 2+\tau, \qquad \tau \parallel \frac{\tau}{1+2\tau},$$

ainsi que par toutes les transformations effectuées sur τ qui s'obtiennent en composant celles-ci.

Cette composition conduit à une transformation $\tau \parallel \frac{p'+q'\tau}{p+q\tau}$ dans laquelle p, q, p', q' désignent quatre entiers assujettis aux seules conditions $pq'-qp' = 1$, $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $p' \equiv 0$, $q' \equiv 1$ (mod. 2).

Le demi-plan supérieur $\beta > 0$ est recouvert entièrement et une seule fois par l'ensemble du triangle T et de tous les triangles qui s'en déduisent comme il a été expliqué; d'autre part, la fonction $\theta(\tau)$ n'acquiert qu'une seule fois dans le triangle T l'une quelconque des valeurs qu'elle y peut acquérir; si donc k^2 n'est pas égal à l'un des nombres $0, 1, \infty$, et si l'on désigne par τ_0 une racine de l'équation $\theta(\tau) = k^2$, toutes les autres racines de cette équation seront données par la formule $\tau = \frac{p'+q'\tau_0}{p+q\tau_0}$, où p, q, p', q' sont quatre entiers de la nature indiquée précédemment.

On a d'ailleurs ce théorème général: suivant que les quatre nombres p, q, p', q'

---

*) La reproduction symétrique d'une figure relativement à une circonférence est la figure qu'on déduit de la proposée par une transformation par rayons vecteurs réciproques, quand la circonférence est prise pour cercle d'inversion.

satisfaisant à la condition $pq' - qp' = 1$, rentrent dans le cas

I, II, III, IV, V, VI

du tableau (5.) de l'art. 33, la valeur de $\theta\left(\frac{p'+q'\tau}{p+q\tau}\right)$ est égale à

$$\theta(\tau), \qquad \frac{\theta(\tau)}{\theta(\tau)-1}, \qquad \frac{1}{\theta(\tau)}, \qquad \frac{1}{1-\theta(\tau)}, \qquad \frac{\theta(\tau)-1}{\theta(\tau)}, \qquad 1-\theta(\tau).$$

Chacune de ces six quantités est égale à l'un des six rapports anharmoniques que l'on peut obtenir au moyen des quatre quantités ∞, e_1, e_2, e_3, en les permutant de toutes les manières possibles.

55.

Par la transformation $\tau \| -\frac{1}{\tau}$, le champ T devient le champ T_1, les sommets $+\infty i$, 0, 1 du champ T correspondant respectivement aux sommets 0, $+\infty i$, -1 du champ T_1; le point $\tau = i$ se correspond à lui-même.

Par les transformations $\tau \| \frac{1}{1-\tau}$ et $\tau \| \frac{\tau-1}{\tau}$, le champ T se change en lui-même, les sommets $+\infty i$, 0, 1 correspondant respectivement, dans le premier cas, aux sommets 0, 1, $+\infty i$, et dans le second cas, aux sommets $1, +\infty i, 0$. Le point $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ reste inaltéré par l'une et l'autre des transformations.

La droite $\alpha = \frac{1}{2}$ et les deux circonférences décrites des points $\tau = 0$ et $\tau = 1$ comme centres avec l'unité pour rayon partagent le champ T en six triangles ayant pour côtés des arcs de cercles et pour angles chacun $0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi$. La fonction $\theta(\tau) = k^2$ fournit la représentation conforme de ce champ sur un demi-plan et, à la division en triangles, correspond une division de ce demi-plan en six triangles, limités par des arcs de cercles, ayant chacun pour angles $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi$. Les lignes qui, outre l'axe réel, limitent les triangles du demi-plan sont la perpendiculaire au point $k^2 = \frac{1}{2}$ à cet axe réel et les deux circonférences décrites des points $k^2 = 0$ et $k^2 = 1$ comme centres, avec l'unité pour rayon.

Si l'on divise de la manière analogue le champ T et le demi-plan inférieur correspondant, le plan sur lequel on figure les valeurs de la quantité complexe k^2 se trouve finalement divisé en douze triangles ayant des arcs de cercles pour côtés.

Les quantités g_2 et g_3 étant définies comme dans l'art. 5 (3.), on a les égalités

$$\frac{4(1-k^2+k^4)^3}{27[k^2(1-k^2)]^2} = \frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}, \qquad \frac{[(1+k^2)(2-k^2)(1-2k^2)]^2}{27[k^2(1-k^2)]^2} = \frac{27g_3^2}{g_2^3-27g_3^2}.$$

La quantité $\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$, qui est un invariant absolu correspondant au couple primitif de périodes $(2\omega_1, 2\omega_3)$, est une fonction analytique uniforme du rapport τ des périodes; nous la représenterons par $j(\tau)$.

La fonction $\frac{4(1-k^2+k^4)^3}{27[k^2(1-k^2)]^2} = j(\tau)$ fournit une représentation conforme sur un demi-plan de chacun des douze triangles dont il vient d'être question, telle qu'il y a une correspondance univoque entre les points des deux surfaces.

On a d'ailleurs cette proposition générale:

Le long du contour du champ

$$\tau = \alpha+\beta i \qquad (0 \leqq \alpha \gtreqless \tfrac{1}{2},\ \beta \geqq \sqrt{1-\alpha^2})$$

l'invariant absolu $j(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$ acquiert toutes les valeurs réelles, et chacune d'elles une fois seulement; pour les valeurs du rapport τ des périodes

$$\beta i \quad (\beta = +\infty \cdots 1) \quad ; \quad \alpha + i\sqrt{1-\alpha^2} \quad (\alpha = 0 \cdots \tfrac{1}{2}) \quad ; \quad \tfrac{1}{2}+\beta i \quad (\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdots +\infty)$$

les valeurs de $j(\tau)$ appartiennent respectivement aux intervalles

$$+\infty \cdots 1 \qquad ; \qquad 1 \cdots 0 \qquad ; \qquad 0 \cdots -\infty.$$

Si l'on attribue au rapport τ des périodes toutes les valeurs appartenant au champ

$$\tau = \alpha+\beta i, \qquad \tau = -\alpha+\beta i \qquad (0 < \alpha < \tfrac{1}{2},\ \beta > \sqrt{1-\alpha^2}),$$

l'invariant absolu prend toutes les valeurs complexes à partie imaginaire négative et positive, et chacune d'elles une fois seulement.

Les racines de l'équation $j(\tau) = j(\tau_0)$ sont toutes données par la formule

$$\tau = \frac{p'+q'\tau_0}{p+q\tau_0},$$

dans laquelle il faut attribuer aux quantités p, q, p', q' tous les systèmes de valeurs entières qui satisfont à la condition $pq'-qp'=1$.

Nous indiquons ici quelques travaux se rapportant aux résultats des art. 54 et 55.

Dedekind, Ueber die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Journal de Crelle, t. 83, p. 265 et suiv., 1877.

F. Klein, Ueber die Transformation der elliptischen Functionen, Mathematische Annalen, t. 14, p. 111 et suiv., 1878.

Weierstrass, Zur Theorie der elliptischen Functionen, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin, année 1883, p. 1271 et suiv.

Formes normales des intégrales elliptiques de première, de seconde et de troisième espèce.

56.

Comme le montre la formule donnée dans l'art. 17, l'intégrale $\int\varphi(u)\,du$ d'une fonction elliptique $\varphi(u)$ se compose, en général, de quatre parties différentes:

1° un terme de la forme $C_0\cdot u$;

2° un ensemble de termes de la forme $-\Sigma_\mu C'_\mu \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu)$, qui, d'après l'art. 11 (5.), peut être remplacé par la somme d'un terme unique de la forme $-(\Sigma_\mu C'_\mu)\cdot\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ et d'une fonction elliptique de l'argument u;

3° un ensemble de termes de la forme $\Sigma_\mu C_\mu \log\sigma(u-v_\mu)$, qui, en raison de l'égalité $\Sigma_\mu C_\mu = 0$ (art. 16 (2.)), peut être remplacé par la somme d'une constante et d'un terme de la forme $\Sigma^*_\mu C_\mu \log\frac{\sigma(v_\mu-u)}{\sigma u\,\sigma v_\mu}$, le signe Σ^*_μ indiquant que la somme doit être étendue à toutes les valeurs de l'indice μ pour lesquelles la quantité v_μ n'est pas congruente à zéro;

4° une fonction elliptique de l'argument u, dont l'argument, comme celui de la fonction $\varphi(u)$, admet $(2\omega, 2\omega')$ pour périodes.

La formule de l'art. 17 devient, par conséquent, en désignant par $\varphi_1(u)$ une fonction elliptique pour l'argument de laquelle $(2\omega, 2\omega')$ est un couple de périodes:

$$\text{(1.)}\qquad \int\varphi(u)\,du = C_0\cdot u-(\Sigma_\mu C'_\mu)\frac{\sigma'}{\sigma}(u)+\Sigma^*_\mu C_\mu\log\frac{\sigma(v_\mu-u)}{\sigma u\,\sigma v_\mu}+\varphi_1(u).$$

Comme nous l'avons fait dans les art. 48—50, désignons par s la valeur de la fonction $\wp u$ qui correspond à la fonction elliptique $\varphi(u)$, et par $\sqrt{S}$ l'une des deux valeurs de la racine carrée de $S = 4s^3 - g_2 s - g_3$.

Regardons l'argument u comme une fonction de s; soit s_0 une valeur quelconque de s et $\sqrt{S_0}$ l'une des deux valeurs de la racine carrée de la quantité $S_0 = 4s_0^3 - g_2 s_0 - g_3$. Considérons, d'une part, l'ensemble des valeurs de u pour lesquelles on a à la fois $\wp u = s_0$, $\wp' u = -\sqrt{S_0}$, et, d'autre part, l'ensemble des valeurs qu'acquiert l'intégrale elliptique de première espèce $\int_{(s_0, \sqrt{S_0})}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}$, quand l'intégration est effectuée le long de tous les chemins possibles qui vont de s_0, $\sqrt{S_0}$ au point à l'infini; ces deux ensembles de valeurs sont identiques.

Si u_0 est l'une quelconque de ces valeurs de u, elles sont toutes données par la formule $u = u_0 + 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, quand on attribue aux quantités μ, μ' toutes les valeurs entières positives et négatives, et la valeur zéro.

On dit alors que les périodes 2ω, $2\omega'$ de l'argument de la fonction elliptique $\varphi(u)$ et de la fonction $\wp u$ qui lui correspond sont aussi des périodes de l'intégrale elliptique de première espèce $u = \int_{(s, \sqrt{S})}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}$.

Si l'on désigne par $J(s, \sqrt{S})$ la valeur de cette intégrale elliptique de première espèce, l'équation

$$u = J(s, \sqrt{S}) = \int_{(s, \sqrt{S})}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} \tag{2.}$$

est absolument équivalente au système d'équations simultanées

$$s = \wp u, \qquad \sqrt{S} = -\wp' u. \tag{3.}$$

La quantité $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$, si on la regarde aussi comme une fonction de l'argument s, peut être prise pour forme normale de l'intégrale elliptique de seconde espèce. On a, en effet, l'égalité

$$(4.)\qquad \frac{\sigma'}{\sigma}(u) = \int^{(s,\sqrt{S})}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}},$$

pourvu que la constante d'intégration, dans le second membre, soit déterminée de telle sorte que le développement, valable pour les valeurs absolues suffisamment grandes de s, de ce second membre ait la forme

$$(5.)\qquad \int^{(s,\sqrt{S})}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} = \sqrt{s}\left[1 + * - \frac{g_2}{24}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{g_3}{40}\cdot\frac{1}{s^3} + \cdots\right],$$

où il faut poser

$$\sqrt{S} = 2\sqrt{s}\left[s + * - \frac{g_2}{8}\cdot\frac{1}{s} - \frac{g_3}{8}\cdot\frac{1}{s^2} + \cdots\right].$$

Désignons par $J'(s,\sqrt{S})$ ce second membre; si u est l'une quelconque des valeurs qui satisfont aux équations (3.) précédentes, la valeur de la function $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ est une valeur de l'intégrale elliptique de seconde espèce

$$J'(s,\sqrt{S}) = \int^{(s,\sqrt{S})}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}.$$

Si l'argument u croît de 2ω, la fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ croît de 2η; si l'argument u croît de $2\omega'$, la fonction croît de $2\eta'$. Ces changements simultanés de valeurs des quantités u, $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$ peuvent être obtenus en modifiant simultanément, et de la même manière, les chemins d'intégration relatifs aux intégrales

$$\int_{(s,\sqrt{S})}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}}, \qquad \int^{(s,\sqrt{S})}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}.$$

C'est pourquoi 2η, $2\eta'$ se nomment aussi les périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce

$$J'(s,\sqrt{S}) = \int^{(s,\sqrt{S})}\frac{s\,ds}{\sqrt{S}},$$

qui correspondent aux périodes 2ω, $2\omega'$ de l'intégrale elliptique de première espèce

$$J(s,\sqrt{S}) = \int_{(s,\sqrt{S})}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}.$$

On peut prendre pour forme normale de l'intégrale elliptique de troisième espèce l'intégrale de la fonction $\frac{1}{2}\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v}$, u étant la variable d'intégration:

$$(6.)\qquad \int \tfrac{1}{2}\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v}\,du = \log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u\,\sigma v}+\frac{\sigma'}{\sigma}(v)\cdot u + C. \qquad \text{(Voir art. 11 (5.))}$$

La quantité v, qui varie indépendamment de l'argument u, et que l'on peut appeler le paramètre de l'intégrale elliptique de troisième espèce considérée, ne doit pas devenir nulle, ni acquérir aucune valeur congruente à zéro.

Si l'on attribue à la constante C qui figure dans l'intégrale elliptique de troisième espèce considérée la valeur zéro, le terme constant du développement procédant suivant les puissances de u avec $-\log u$ comme terme initial, valable dans le voisinage de la valeur $u = 0$,

$$(7.)\qquad \int \tfrac{1}{2}\frac{\wp' u+\wp' v}{\wp u-\wp v}\,du = -\log u + C - \tfrac{1}{2}\wp v\cdot u^2 + \tfrac{1}{6}\wp' v\cdot u^3 + \cdots,$$

est aussi nul.

Dans ce cas, si s, $\sqrt{S}$ sont déterminées par les équations (3.) qui précèdent, et s_0, $\sqrt{S_0}$ par les équations $s_0 = \wp v$, $\sqrt{S_0} = -\wp' v$, on obtient pour forme normale de l'intégrale elliptique de troisième espèce l'expression

$$(8.)\qquad \log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u\,\sigma v}+\frac{\sigma'}{\sigma}(v)\cdot u = \int^{(s,\sqrt{S})} \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\frac{ds}{\sqrt{S}};$$

nous en désignerons la valeur par $J(s,\sqrt{S};s_0,\sqrt{S_0})$.

En échangeant les deux quantités u, v, on a

$$\log\frac{\sigma(u-v)}{\sigma u\,\sigma v}+\frac{\sigma'}{\sigma}(u)\cdot v = J(s_0,\sqrt{S_0};s,\sqrt{S});$$

on a donc l'égalité

$$(9.)\qquad J(s,\sqrt{S};s_0,\sqrt{S_0})-J(s_0,\sqrt{S_0};s,\sqrt{S}) = u\frac{\sigma'}{\sigma}(v)-v\frac{\sigma'}{\sigma}(u)+(2n_0+1)\pi i,$$

dans laquelle n_0 représente un nombre entier.

A cette proposition correspond, dans la théorie des intégrales elliptiques telle que l'ont donnée Legendre et Jacobi, le théorème sur l'échange de l'argument et du paramètre dans l'intégrale elliptique de troisième espèce.

Si l'on ajoute à l'argument u, soit 2ω, soit $2\omega'$, la valeur de l'intégrale elliptique de troisième espèce considérée acquiert les accroissements respectifs

$$(10.)\qquad -2\eta v+2\omega\frac{\sigma'}{\sigma}(v)+2n\pi i,\qquad -2\eta' v+2\omega'\frac{\sigma'}{\sigma}(v)+2n'\pi i,$$

où n et n' représentent deux entiers dont la détermination exige une discussion spéciale. Ces quantités sont donc des périodes de l'intégrale elliptique de troisième espèce

$$(11.)\qquad \int^{u}\frac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v}du = \log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma u\,\sigma v}+u\frac{\sigma'}{\sigma}(v) = \int^{(s,\sqrt{S})}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S_0}}{s-s_0}\frac{ds}{\sqrt{S}} = J(s,\sqrt{S};s_0,\sqrt{S_0}).$$

Il résulte de ce qui précède que l'intégrale $\int\varphi(u)\,du$ peut être représentée par une expression composée avec

1° une intégrale elliptique de première espèce;

2° une intégrale elliptique de seconde espèce;

3° un nombre limité d'intégrales elliptiques de troisième espèce;

4° une fonction rationnelle des quantités $s=\wp u$ et $\sqrt{S}=-\wp' u$.

Théorèmes d'addition des intégrales elliptiques.

57.

Si l'on pose

$$u_1+u_2=u_3,$$

$$x_0=\wp u_0,\qquad x_1=\wp u_1,\qquad x_2=\wp u_2,\qquad x_3=\wp u_3,$$
$$y_0=-\wp' u_0,\qquad y_1=-\wp' u_1,\qquad y_2=-\wp' u_2,\qquad y_3=-\wp' u_3,$$

et les intégrales $J(x,y)$, $J'(x,y)$, $J(x,y;x_0,y_0)$ étant définies comme dans l'article précédent, on a les égalités:

$$(1.)\qquad J(x_1,y_1)+J(x_2,y_2) = J(x_3,y_3).$$

$$(2.)\qquad J'(x_1,y_1)+J'(x_2,y_2) = J'(x_3,y_3)+\tfrac{1}{2}\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

$$(3.)\qquad J(x_1,y_1;x_0,y_0)+J(x_2,y_2;x_0,y_0) = J(x_3,y_3;x_0,y_0)-\log\left[\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{y_1+y_0}{x_1-x_0}-\frac{y_2+y_0}{x_2-x_0}\right)\right].$$

Chacune d'elles exprime que, si l'on attribue à chacune des intégrales qui figurent dans son premier membre l'une quelconque des valeurs en nombre illimité qu'elle est susceptible d'avoir, la somme obtenue est égale à l'une des valeurs en nombre illimité que peut avoir le second membre.

Détermination des périodes de l'intégrale d'une fonction elliptique.

58.

Soit $2\bar{\omega}$ l'une quelconque des périodes, y compris zéro, de l'argument d'une fonction elliptique quelconque $\varphi(u)$. Par période de l'intégrale $\int\varphi(u)\,du$ de cette fonction elliptique, il faut entendre chacune des valeurs de l'intégrale définie

$$\int_{u_0}^{u_0+2\bar{\omega}}\varphi(u)\,du,$$

le chemin de l'intégration devant seulement avoir une longueur finie et ne passer par aucun point où la fonction $\varphi(u)$ devienne infiniment grande.

Si $2\bar{\omega}$ a la valeur zéro, le chemin d'intégration est fermé. Soit k_μ la différence entre le nombre de fois, nécessairement fini, où ce chemin tourne positivement autour de chacun des points

$$v_\mu+2\mathfrak{m}\omega+2\mathfrak{m}'\omega' \qquad (\mathfrak{m},\mathfrak{m}'=0,\pm1,\pm2,\cdots\pm\infty)$$

et le nombre de fois, également fini, où il tourne négativement autour de ces mêmes points. On a alors, l'intégration étant effectuée le long de ce chemin,

$$\int_{u_0}^{u_0}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu)\,du = 2k_\mu\pi i;$$

si donc on met la fonction $\varphi(u)$ sous la forme donnée dans l'art. 16 (3.), la valeur de l'intégrale $\int_{u_0}^{u_0} \varphi(u)\,du$ prise suivant le même chemin est

$$\Sigma_\mu 2k_\mu C_\mu \pi i, \qquad (\mu = 1, 2, 3, \cdots m).$$

Ainsi l'on peut toujours déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{u_0}^{u_0} \varphi(u)\,du$ dès que l'on sait obtenir les entiers k_μ relatifs aux valeurs v_μ qu'il y a lieu de considérer pour le chemin d'intégration donné.

Supposons que $2\tilde{\omega}$ soit différent de zéro; prenons dans le voisinage de u_0 un point u_1 tel que aucun des segments qui le joignent aux points $u_1 + 2\omega$, $u_1 + 2\omega'$ ne passe par un point où la fonction $\varphi(u)$ devienne infinie. Soient L le chemin d'intégration donné qui va du point u_0 au point $u_0 + 2\tilde{\omega} = u_0 + 2m\omega + 2m'\omega'$; L' un chemin choisi arbitrairement allant du point u_0 au point u_1 et ne contenant aucun point où la fonction $\varphi(u)$ devienne infinie; L'' le chemin décrit par le point $u + 2\tilde{\omega}$ quand le point u décrit le chemin L'.

Faisons décrire à la variable u, successivement, les chemins d'intégration suivants:

1° Le chemin donné L allant du point u_0 au point $u_0 + 2\tilde{\omega}$;

2° Le chemin L'' qui va du point $u_0 + 2\tilde{\omega}$ au point $u_1 + 2\tilde{\omega}$;

3° Le chemin rectiligne*) allant du point $u_1 + 2\tilde{\omega} = u_1 + 2m\omega + 2m'\omega'$ au point $u_1 + 2m\omega$;

4° Le chemin rectiligne allant du point $u_1 + 2m\omega$ au point u_1;

5° Le chemin L' qui va du point u_1 au point u_0;

ces cinq chemins parcourus successivement dans le sens indiqué composent un chemin d'intégration unique, fermé, que nous représenterons par $\bar{L}$. Si donc nous suppo-

*) Voir la note de la page 31.

sons que les entiers désignés précédemment par k_μ se rapportent au chemin $\bar{L}$, on a l'égalité:

$$\underset{(\bar{L})}{\int_{u_0}^{u_0}} \varphi(u)\,du = \underset{(L)}{\int_{u_0}^{u_0+2\bar{\omega}}} \varphi(u)\,du + \underset{(L'')}{\int_{u_0+2\bar{\omega}}^{u_1+2\bar{\omega}}} \varphi(u)\,du - {}'\!\!\int_{u_1+2\mathrm{m}\omega}^{u_1+2\bar{\omega}} \varphi(u)\,du - {}'\!\!\int_{u_1}^{u_1+2\mathrm{m}\omega} \varphi(u)\,du - \underset{(L')}{\int_{u_0}^{u_1}} \varphi(u)\,du =$$

$$= \Sigma_\mu 2k_\mu C_\mu \pi i, \qquad (\mu = 1, 2, \cdots m).$$

On a ainsi l'équation

$$(1.) \qquad \underset{(L)}{\int_{u_0}^{u_0+2\bar{\omega}}} \varphi(u)\,du = \mathrm{m}\,{}'\!\!\int_{u_1}^{u_1+2\omega} \varphi(u)\,du + \mathrm{m}'\,{}'\!\!\int_{u_1}^{u_1+2\omega'} \varphi(u)\,du + \Sigma_\mu 2k_\mu C_\mu \pi i.$$

Les quantités C_μ sont liées par la relation $\Sigma_\mu C_\mu = 0$; il peut, en outre, y avoir encore entre ces quantités d'autres relations de la forme $\Sigma_\mu \gamma_\mu C_\mu = 0$, où les coefficients γ_μ soient des entiers. Il est toujours possible de former des combinaisons linéaires $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_\varrho$, à coefficients entiers, des quantités $C_1, C_2, \cdots C_m$ telles que réciproquement $C_1, C_2, \cdots C_m$ soient des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, de $\mathfrak{C}_1, \cdots \mathfrak{C}_\varrho$, et qu'entre ces dernières quantités il n'existe aucune relation linéaire homogène à coefficients entiers.

L'expression

$$\Sigma_\mu 2k_\mu C_\mu \pi i \qquad (\mu = 1, 2, \cdots m)$$

devient alors une expression de la forme

$$\Sigma_\nu 2\mathrm{m}_\nu \mathfrak{C}_\nu \pi i \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \varrho),$$

les coefficients m_ν étant des entiers.

Si l'on pose maintenant:

$$(2.) \qquad {}'\!\!\int_{u_1}^{u_1+2\omega} \varphi(u)\,du = \Omega, \qquad {}'\!\!\int_{u_1}^{u_1+2\omega'} \varphi(u)\,du = \Omega', \qquad 2\mathfrak{C}_\nu \pi i = \Omega_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \varrho)$$

on obtient:

$$(3.) \qquad \underset{(L)}{\int_{u_0}^{u_0+2\bar{\omega}}} \varphi(u)\,du = \mathrm{m}\Omega + \mathrm{m}'\Omega' + \Sigma_\nu \mathrm{m}_\nu \Omega_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \varrho).$$

Mais il est toujours possible, quand le choix de la quantité $2\tilde{\omega} = 2m\omega + 2m'\omega'$ reste arbitraire, de choisir des chemins d'intégration tels que l'un quelconque des nombres m, m', m_1, m_2, $\cdots m_\varrho$ soit égal à 1, tous les autres étant égaux à zéro. Les quantités Ω, Ω', Ω_1, Ω_2, $\cdots$ Ω_ϱ constituent donc un système primitif de périodes de la fonction $\int\varphi(u)\,du$, dont on peut déduire, par addition et soustraction, toutes les autres périodes de la fonction.

Pour mettre la fonction $\varphi(u)$ sous la forme donnée dans l'art. 16 (3.), on peut choisir les quantités v_μ de telle sorte qu'elles appartiennent toutes à l'ensemble de valeurs

$$u = u_1 + 2t\omega + 2t'\omega', \qquad (0 < t < 1, \quad 0 < t' < 1)$$

qui constituent l'intérieur du parallélogramme des périodes défini par les valeurs u_1, $u_1 + 2\omega$, $u_1 + 2\omega + 2\omega'$, $u_1 + 2\omega'$.

Assujettissons la variable v à rester aussi dans ce parallélogramme des périodes; on a alors les égalités

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{u_1}^{u_1+2\omega}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)\,du = -2\eta, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\int_{u_1}^{u_1+2\omega'}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v)\,du = -2\eta';$$

et si, enfin, v' et v'' appartiennent également au même parallélogramme des périodes, on a

$$(4.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{u_1}^{u_1+2\omega}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v'') - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v')\right]du = -2\eta(v''-v'), \\ \displaystyle\int_{u_1}^{u_1+2\omega'}\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v'') - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v')\right]du = -2\eta'(v''-v'). \end{cases}$$

Par suite de la relation $\Sigma_\mu C_\mu = 0$, l'égalité (1.) de l'art. 56 peut être mise sous la forme

$$(5.)\qquad \varphi(u) = C_0 + \Sigma_\mu C_\mu\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(u-v_\mu) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u-v')\right] - (\Sigma_\mu C'_\mu)\frac{d}{du}\frac{\sigma'}{\sigma}(u) + \frac{d\varphi_1(u)}{du};$$

on en déduit, d'après les égalités (4.), ces expressions des périodes Ω, Ω':

$$(6.)\qquad \Omega = 2C_0\omega - 2(\Sigma_\mu C_\mu v_\mu + \Sigma_\mu C'_\mu)\eta, \qquad \Omega' = 2C_0\omega' - 2(\Sigma_\mu C_\mu v_\mu + \Sigma_\mu C'_\mu)\eta'.$$

Par les égalités (1—6.), le problème de la détermination des périodes de l'intégrale $\int \varphi(u)\,du$ d'une fonction elliptique $\varphi(u)$ est résolu de la manière la plus générale.

59.

Nous allons maintenant appliquer cette détermination générale des périodes au cas particulier de l'intégrale elliptique de troisième espèce.

Imaginons la quantité v mise sous la forme $2\alpha\omega + 2\beta\omega'$, α et β désignant deux quantités réelles; soient α_0 et β_0 les deux nombres entiers qui satisfont à ces conditions que les différences $\alpha-\alpha_0$, $\beta-\beta_0$ soient nulles ou bien positives et inférieures à un.

Supposons d'abord qu'aucune des deux différences $\alpha-\alpha_0$, $\beta-\beta_0$ ne soit nulle; les formules générales données dans l'art. précédent, appliquées au cas spécial de l'intégrale elliptique de troisième espèce, donnent celles-ci, où ε, ε' désignent des quantités positives suffisamment petites:

$$(1.)\quad \int_{\varepsilon'\omega'}^{\varepsilon'\omega'+2\omega} \tfrac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v}\,du = -2\eta v + 2\omega\frac{\sigma'}{\sigma}(v) + 2(\beta_0+1)\pi i, \quad \text{si l'on a } 0<\varepsilon'<2(\beta-\beta_0),$$

$$(2.)\quad \int_{\varepsilon\omega}^{\varepsilon\omega+2\omega'} \tfrac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v}\,du = -2\eta' v + 2\omega'\frac{\sigma'}{\sigma}(v) - 2(\alpha_0+1)\pi i, \quad \text{si l'on a } 0<\varepsilon<2(\alpha-\alpha_0),$$

$$(3.)\quad \int_{-\varepsilon'\omega'}^{-\varepsilon'\omega'+2\omega} \tfrac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v}\,du = -2\eta v + 2\omega\frac{\sigma'}{\sigma}(v) + 2\beta_0\pi i, \quad \text{si l'on a } 0<\varepsilon'<2-2(\beta-\beta_0),$$

$$(4.)\quad \int_{-\varepsilon\omega}^{-\varepsilon\omega+2\omega'} \tfrac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v}\,du = -2\eta' v + 2\omega'\frac{\sigma'}{\sigma}(v) - 2\alpha_0\pi i, \quad \text{si l'on a } 0<\varepsilon<2-2(\alpha-\alpha_0).$$

Suivant, au contraire, que l'une ou l'autre des deux différences $\beta-\beta_0$, $\alpha-\alpha_0$ est nulle, on a les égalités:

$$(5.)\quad \int_{\pm\varepsilon'\omega'}^{\pm\varepsilon'\omega'+2\omega} \tfrac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v}\,du = -2\eta v + 2\omega\frac{\sigma'}{\sigma}(v) + 2\beta_0\pi i, \quad \text{si l'on a } \beta=\beta_0,\ 0<\varepsilon'<2,$$

$$(6.)\quad \int_{\pm\varepsilon\omega}^{\pm\varepsilon\omega+2\omega'} \tfrac{1}{2}\frac{\wp'u+\wp'v}{\wp u-\wp v}\,du = -2\eta' v + 2\omega'\frac{\sigma'}{\sigma}(v) - 2\alpha_0\pi i, \quad \text{si l'on a } \alpha=\alpha_0,\ 0<\varepsilon<2.$$

60.

Pour obtenir les valeurs des deux intégrales

$$\int_0^{\omega} \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}\, du, \qquad \int_0^{\omega'} \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}\, du,$$

les intégrations étant, selon nos conventions, effectuées suivant des droites, on peut employer la méthode suivante qui est indépendante de ce que nous venons d'étudier dans les articles précédents.

De l'art. 11 (3.), on déduit la formule

$$(1.)\qquad \int_0^{u} \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}\, du = \log \frac{\sigma(v+u)}{\sigma(v-u)} - 2u \frac{\sigma'}{\sigma}(v).$$

Imaginons la quantité v mise sous la forme $2\alpha\omega + 2\beta\omega'$, α et β désignant deux quantités réelles; soient α_0 et β_0 les deux entiers pour lesquels les différences $\alpha - \alpha_0$, $\beta - \beta_0$ sont nulles ou bien positives et inférieures à un.

La première des deux intégrales que nous voulons obtenir n'a une signification que si $\beta - \beta_0$ n'est pas nulle, la seconde que si $\alpha - \alpha_0$ n'est pas nulle.

De l'équation (1.) se déduisent les expressions

$$(2.)\qquad \int_0^{\omega} \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}\, du = 2\eta v - 2\omega \frac{\sigma'}{\sigma}(v) + \mathrm{n}\pi i, \qquad \int_0^{\omega'} \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}\, du = 2\eta' v - 2\omega' \frac{\sigma'}{\sigma}(v) + \mathrm{n}'\pi i,$$

où n et n′ désignent des entiers impairs.

Si la quantité v décrit le segment qui va du point $2\alpha\omega + 2\beta\omega'$ au point $(2\alpha_0 + 1)\omega + (2\beta_0 + 1)\omega'$, les valeurs des deux intégrales définies et celles des expressions

$$2\eta v - 2\omega \frac{\sigma'}{\sigma}(v), \qquad 2\eta' v - 2\omega' \frac{\sigma'}{\sigma}(v)$$

ne peuvent que varier d'une façon continue; il s'ensuit que, pour ce déplacement, les deux entiers n, n′ conservent leurs valeurs. Mais si l'on attribue à la quantité v

la valeur $(2\alpha_0+1)\omega+(2\beta_0+1)\omega'$, les deux intégrales définies s'annulent, et les expressions

$$2\eta_1 v - 2\omega\frac{\sigma'}{\sigma}(v), \qquad 2\eta_1' v - 2\omega'\frac{\sigma'}{\sigma}(v)$$

prennent respectivement les valeurs $(2\beta_0+1)\pi i$, $-(2\alpha_0+1)\pi i$; on en conclut ces valeurs de n et n'

$$\text{(3.)} \qquad \mathrm{n} = -(2\beta_0+1), \qquad \mathrm{n}' = 2\alpha_0+1.$$

Aux hypothèses spéciales $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ correspondent respectivement les formules

$$\text{(4.)} \quad \int_0^{\omega} \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}\,du = 2\eta_1 v - 2\omega\frac{\sigma'}{\sigma}(v) - \pi i, \quad v = 2\alpha\omega + 2\beta\omega', \quad (\alpha \text{ quelconque}, \ 0<\beta<1),$$

$$\text{(5.)} \quad \int_0^{\omega'} \frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v}\,du = 2\eta_1' v - 2\omega'\frac{\sigma'}{\sigma}(v) + \pi i, \quad v = 2\alpha\omega + 2\beta\omega', \quad (0<\alpha<1, \ \beta \text{ quelconque}).$$

61.

Il arrive quelquefois qu'une fonction elliptique à intégrer $\varphi(u)$ est donnée comme quotient de deux fonctions entières homogènes des quatre fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$:

$$\varphi(u) = \frac{G_1(\sigma u, \sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u)}{G_2(\sigma u, \sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u)}.$$

Parmi les cinq couples de périodes

$$(2\omega, 2\omega'), \qquad (4\omega, 2\omega'), \qquad (2\omega, 4\omega'), \qquad (4\omega, 2\omega+2\omega'), \qquad (4\omega, 4\omega')$$

se trouve au moins un couple de périodes de l'argument d'une telle fonction.

Désignons par $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ un tel couple de périodes.

Si l'on remplace la fonction $\sigma(u\,|\,\omega, \omega')$, prise pour base des considérations des art. 56 et 58, par la fonction $\sigma(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$, on peut mettre la fonction $\varphi(u)$ sous la forme donnée dans l'art. 58 (5.), et, dès lors, les formules données dans cet art. font connaître les périodes de l'intégrale $\int\varphi(u)\,du$ de la fonction $\varphi(u)$.