ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN BEI DER WERTEVERTEILUNG DER MEROMORPHEN FUNKTIONEN ENDLICHER ORDNUNG

VON

HENRIK L. SELBERG

Avhandlinger utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo
I. Matem.-Naturvid. Klasse. 1928. No. 7

UTGITT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

OSLO
I KOMMISJON HOS JACOB DYBWAD
1929

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 5. oktober 1928 ved Størmer.

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

Bekanntlich hat Herr Picard die Unmöglichkeit einer algebraischen Gleichung vom Geschlecht $p > 1$ zwischen zwei Funktionen, die in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle meromorph sind, bewiesen. Die vorliegende Arbeit enthält eine Untersuchung des Falles $p = 1$. Im § 2 wird gezeigt, daß zwei Funktionen, die in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle meromorph und von endlicher Ordnung sind, sich in sehr einfacher Weise durch die elliptischen Funktionen ausdrücken lassen. In § 3 und § 4 wird dieses Ergebnis auf die Theorie der multiplen Stellen angewandt. Betreffs der Methode so fußt diese auf der Theorie des Herrn R. Nevanlinna, läßt sich aber auch ohne derer Hilfe anwenden. Man braucht nur den Begriff „eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung" in ähnlicher Weise wie Herr Borel zu fixieren. Übrigens kommt sie auch schon in der Theorie der ganzen Funktionen vor (man vgl. G. Valiron: Lectures on the General Theory of Integral Functions p. 77).

§ 1. Drei Hauptsätze von Herrn R. Nevanlinna.

Wie von Herrn R. Nevanlinna gezeigt ist[1] nimmt die Theorie der meromorphen Funktionen eine besonders einfache Gestalt an, wenn man die zwei Größen $m(r, f, a)$, $N(r, f, a)$, die folgendermaßen zu erklären sind, einführt: Es sei $f(z)$ im Bereiche $\varrho_0 < |z| < \infty$ meromorph. Bezeichnen wir mit $n(t, f, a)$ die Anzahl der a-Stellen, nach ihrer Multiplizität gezählt, die innerhalb des Kreisringes $r_0 < |z| < t, r_0 > \varrho_0$, liegen. Die Größe $N(r, f, a)$ wird dann als

[1] Zur Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math. t. 46.

$$N(r,f,a)=\int_{r_0}^{r}\frac{n(t,f,a)}{t}\,dt \tag{1}$$

definiert. Für endliche Werte a setzen wir[1]

$$m(r,f,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\lg}\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|d\varphi,\quad z=re^{i\varphi} \tag{2}$$

und falls $a=\infty$

$$m(r,f,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\lg}|f(z)|\,d\varphi,\quad z=re^{i\varphi}. \tag{3}$$

Führen wir weiter mit Herrn R. Nevanlinna die Fundamentalfunktion

$$T(r,f)=m(r,f,\infty)+N(r,f,\infty) \tag{4}$$

ein und beschränken wir uns, was für unseren Zweck hinreichend ist, auf Funktionen endlicher Ordnung, bei denen

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{r=\infty}\frac{\lg T(r,f)}{\lg r}<\infty$$

ist, so lassen sich die Hauptergebnisse des Herrn R. Nevanlinnas auf Folgendes zusammenfassen:

1° (Erster Hauptsatz). Es gilt

$$N(r,f,a)+m(r,f,a)=T(r,f)+O(\lg r) \tag{5}$$

Aus

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{r=\infty}\frac{T(r,f)}{\lg r}<\infty$$

läßt sich auf den rationalen Charakter der Funktion in der Umgebung der Stelle $z=\infty$ schließen.

2° Es gilt weiter

$$m\left(r,\frac{f'}{f},\infty\right)=O(\lg r). \tag{6}$$

3° (Zweiter Hauptsatz). Es sei q verschiedene a_ν gegeben; dann besteht die Ungleichung

[1] $\overset{+}{\lg}\, t$ ist o oder $\overset{+}{\lg}\, t$ je nachdem $o<t<1$ oder $t>1$. Für die spätere Rechnung ist folgendes von Wichtigkeit: $\overset{+}{\lg}(t_1 t_2 \ldots t_n)<\sum\limits_1^n \overset{+}{\lg}\, t_n$ und $\overset{+}{\lg}\left(\sum\limits_1^n t_n\right)<\sum\limits_1^n \overset{+}{\lg}\, t_n+n$.

(7) $$(q-2)\,T(r,f) < \sum_{\nu=1}^{q} N(r,f,a_\nu) - \overline{N}(r,f) + O(\lg r),$$

wo $\overline{N}(r,f)$ aus der Gesamtmenge der mehrfachen Stellen gebildet ist, indem jede m-fache Stelle $(m-1)$-fach zu zählen ist.

§ 2. Über meromorphe Funktionen, die durch eine Gleichung von Geschlecht 1 verbunden sind.

Wenden wir uns jetzt an die eigentliche Aufgabe unserer Abhandlung. Es seien

(8) $$x=f(z),\ y=f_1(z)$$

zwei Funktionen, die in der Umgebung der Stelle $z=\infty$ meromorph und von endlicher Ordnung sind und die außerdem durch die Gleichung von Geschlecht 1

(9) $$y^2=4x^3-g_2x-g_3=4(x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3)$$

verbunden sind. Wie man aus (9) sieht, nimmt $f(z)$ die vier Werte $e_1, e_2, e_3, e_4=\infty$ nur mit Multiplizität höher als 1 an. Durch Anwendung des zweiten Hauptsatzes (7) erhalten wir

(10) $$2\,T(r,f) < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{4} N_2(r,f,e_n) + \sum_{n=1}^{4}\sum_{s=3}^{\infty}\frac{1}{s}N_s(r,f,e_n) + O(\lg r),$$

wo $N_s(r,f,e)$ aus den s-fachen e-Stellen gebildet ist. Eine einfache Umschreibung gibt

(11) $$2\,T(r,f) < \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{4} N(r,f,e_n) - \sum_{n=1}^{4}\sum_{s=3}^{\infty}\frac{s-2}{2\cdot s}N_s(r,f,e_n) + O(\lg r).$$

Nach dem ersten Hauptsatze ist aber

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{4} N(r,f,e_n) + \sum_{n=1}^{4} m(r,f,e_n)\right] = 2\,T(r,f) + O(\lg r),$$

und es kommt also aus (11)

$$\sum_{n=1}^{4} m(r,f,e_n) + \sum_{n=1}^{4}\sum_{s=3}^{\infty}\frac{s-2}{2\cdot s}N_s(r,f,e_n) = O(\lg r),$$

woraus sich weiter die folgenden Abschätzungen

$$\sum_{n=1}^{4} m(r, f, e_n) = O(\lg r),$$

(12)
$$\sum_{n=1}^{4} \sum_{s=3}^{\infty} N_s(r, f, e_n) = O(\lg r)$$

ergeben, von denen die letztere offenbar besagt, daß in der Umgebung der Stelle $z = \infty$ $f(z)$ die Werte $e_1, e_2, e_3, e_4 = \infty$ nur mit der Multiplizität 2 annimmt. Eine ähnliche Rechnung zeigt, daß im allgemeinen

(12′)
$$m(r, f, e) = O(\lg r),$$

für alle Werte e gilt, ein Ergebnis, das uns später von Nutzen wird.

Setzen wir

(13)
$$\frac{\dfrac{d f(z)}{d z}}{\sqrt{4 f^3(z) - g_2 f(z) - g_3}} = \Phi(z),$$

so kann nach dem erwähnten $\Phi(z)$ in der Umgebung der Stelle $z = \infty$ keine Pole besitzen, und es ist sogar leicht zu zeigen, daß $\Phi(z)$ daselbst von rationalem Charakter ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist ja

$$T(r, \Phi) = O(\lg r).$$

Nun wissen wir schon

$$N(r, \Phi, \infty) = O,$$

und es genügt also,

(14)
$$m(r, \Phi, \infty) = O(\lg r)$$

zu beweisen. Das ergibt sich nun in folgender Weise: Nach der Definition ist

$$m(r, \Phi, \infty) = m\left(r, \frac{f'}{\sqrt{4 f^3 - g_2 f - g_3}}, \infty\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} \left| \frac{f'}{\sqrt{4(f - e_1)(f - e_2)(f - e_3)}} \right| d\varphi, \quad z = r e^{i\varphi},$$

und da

$$\overset{+}{\lg}\left|\frac{f'}{\sqrt{4(f-e_1)(f-e_2)(f-e_3)}}\right| \leq \overset{+}{\lg}\left|\frac{f'}{f}\right| + \overset{+}{\lg}|f| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\overset{+}{\lg}\left|\frac{1}{f-e_n}\right|,$$

so erhalten wir

$$m(r, \Phi, \infty) \leq m\left(r, \frac{f'}{f}, \infty\right) + \sum_{n=1}^{4} m(r, f, e_n),$$

woraus die Behauptung (14) folgt, indem wir (12) sowie (6) heranziehen.

Dies gestattet uns einen übersichtlichen Ausdruck für $f(z)$ zu gewinnen. Aus (13) erhalten wir nämlich durch Integration und nachfolgende Inversion

(15) $$f(z) = \wp((R(z) + \alpha \lg z), \omega_1, \omega_2),$$

wo $R(z)$ im Punkte $z=\infty$ rationalen Charakter besitzt, und wegen der Eindeutigkeit der Funktion $f(z)$ die Relation

$$\alpha = \frac{m\omega_1 + n\omega_2}{\pi i}, \text{ (m und n ganzzahlig)}$$

bestehen muß, dabei bedeuten ω_1, ω_2 die Halbperioden. Da $y=f_1(z)$ bis auf das Vorzeichen durch (9) und (15) eindeutig bestimmt ist, so wird

(15′) $$f_1(z) = \pm \wp'((R(z) + \alpha \lg z), \omega_1, \omega_2).$$

Umgekehrt wissen wir, daß zwischen diesen Funktionen eine Gleichung der Form (9) besteht.

Erinnern wir uns jetzt daran, daß sich jede algebraische Kurve vom Geschlecht $p=1$ durch birationale Transformationen auf eine Kurve der Form (9) zurückführen läßt und bemerken wir, daß die Ausübung einer endlichen Anzahl rationaler Rechenoperationen auf eine endliche Anzahl Funktionen endlicher Ordnung wieder eine Funktion endlicher Ordnung liefert, so erhalten wir

Satz I. *Besteht zwischen den zwei Funktionen $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$, die in der Umgebung der Stelle $z=\infty$ meromorph und von endlicher Ordnung sind, eine algebraische Gleichung vom Geschlecht $p=1$, so müssen sie von der Form*

$$\varphi(z) = E((R(z) + \alpha \lg z), \omega_1, \omega_2),$$

(15″) $$\varphi_1(z) = E_1((R(z) + \alpha \lg z), \omega_1, \omega_2), \quad \alpha = \frac{m\omega_1 + n\omega_2}{\pi i},$$

sein, wo E und E_1 zwei bestimmten elliptischen Funktionen bedeuten, und $R(z)$ im Punkte $z=\infty$ rationalen Charakter besitzt. Die Funktionen $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$ besitzen weiter die Eigenschaft

$$m(r,\varphi,e)+m(r,\varphi_1,e)=O(\lg r) \tag{12''}$$

für jeden Wert e.

Der letzte Teil dieses Satzes leuchtet zwar nicht ein, ergibt sich aber am einfachsten in folgender Weise: Bezeichnen wie vorher $x=f(z)$, $y=f_1(z)$ zwei Funktionen endlicher Ordnung, die durch die Gleichung (9) verbunden sind, so ist ja bereits im Anfang dieses Paragraphen $m(r,f,e)=O(\lg r)$ hergeleitet worden. Aus (9) erhalten wir dann

$$\overset{+}{\lg}|f_1|\leq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\overset{+}{\lg}|f-e_n|+\lg 2$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[3\overset{+}{\lg}|f|+\sum_{n=1}^{3}\overset{+}{\lg}|e_n|+5\lg 2\right],$$

also unter Beachtung (12)

$$m(r,f_1,\infty)=O(\lg r). \tag{16}$$

Im allgemeinen genügt es offenbar, die Behauptung für den Wert $e=\infty$ zu beweisen, denn hierauf läßt sich durch eine lineare Transformation jeder andere Fall zurückführen. Infolge einer bekannten Darstellung der elliptischen Funktionen mittels $\wp$ und $\wp'$ ist:

$$\varphi(z)=R(f(z))+f_1(z)R_1(f(z)),$$

wo

$$R(t)=h\frac{\prod^{n'}(t-c'_k)}{\prod^{n''}(t-c''_k)},\quad R_1(t)=h_1\frac{\prod^{m'}(t-d'_k)}{\prod^{m''}(t-d''_k)},$$

und hieraus können wir die Abschätzung

$$\overset{+}{\lg}|\varphi|\leq\overset{+}{\lg}|R(f)|+\overset{+}{\lg}|R_1(f)|+\overset{+}{\lg}|f_1|+\lg 2\leq$$

$$\leq(n'+m')\overset{+}{\lg}|f|+\sum_{k=1}^{n''}\overset{+}{\lg}\left|\frac{1}{f-c''_k}\right|+\sum_{k=1}^{m''}\overset{+}{\lg}\left|\frac{1}{f-d''_k}\right|+\overset{+}{\lg}|f_1|+$$

$$+(n'+m'+1)\lg 2+\sum_{k=1}^{n'}\overset{+}{\lg}|c'_k|+\sum_{k=1}^{m'}\overset{+}{\lg}|d'_k|+\overset{+}{\lg}|h|+\overset{+}{\lg}|h_1|$$

entnehmen, woraus weiter

$$m(r,\varphi,\infty) \leq (n' + m')\, m(r,f,\infty) + \sum_{k=1}^{n''} m(r,f,c_k'') +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m''} m(r,f,d_k'') + m(r,f_1,\infty) + \text{Const.},$$

und also nach (12′) und (16)

$$m(r,\varphi,\infty) = O(\lg r)$$

folgt. Unser Satz ist somit vollständig bewiesen.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß analoge Abschätzungen für $m(r,\zeta,e)$ und $m(r,\sigma,e)$ gilt, wo $\zeta(z)$ und $\sigma(z)$ dieselbe Bedeutung wie die in der Theorie der elliptischen Funktionen übliche haben. Da $\zeta(z)$ die logarithmische Ableitung der Funktion $\sigma(z)$ ist, muß wegen (6)

$$m(r,\zeta,\infty) = O(\lg r) \tag{17}$$

sein. Die Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf die zwei Werte e, ∞ gibt

$$O < N(r,\zeta,\infty) + N(r,\zeta,e) - N(r,\zeta,o) + O(\lg r)\,; \tag{18}$$

wegen (17) ist aber

$$2\,N(r,\zeta,\infty) = N(r,\wp,\infty) = N(r,\wp,o) + O(\lg r)$$

Nach Einführen dieses Ausdruckes in (18) und Berücksichtigung der Abschätzung (17) kommt

$$T(r,\zeta) < N(r,\zeta,e) + O(\lg r)\,.$$

Also nach dem ersten Hauptsatze

$$m(r,\zeta,e) = O(\lg r)\,. \tag{19}$$

Weiter erhalten wir durch Anwendung des zweiten Hauptsatzes auf die drei verschiedenen Werte o, e, ∞

$$T(r,\sigma) < N(r,\sigma,o) + N(r,\sigma,e) - N(r,\zeta,o) + O(\lg r)$$

und wegen

$$N(r,\zeta,o)=N(r,\sigma,o)+O(\lg r)$$

also

$$T(r,\sigma)<N(r,\sigma,e)+O(\lg r),$$

woraus

(20) $$m(r,\sigma,e)=O(\lg r)\,;\quad (e \neq o,\; e \neq \infty)$$

folgt. Betreffs des Verhaltens der Funktion $\sigma(z)$ dem Werte $e=o$ gegenüber, kann ich vorläufig nichts Bestimmtes sagen, ich halte es aber für wahrscheinlich, daß dieser Wert gewöhnlich einen Defekt $\Theta > O$ besitzt, *d. h.*[1]

(21) $$\Theta=\liminf_{r=\infty}\frac{m(r,\sigma,o)}{T(r,\sigma)}>O\,.$$

Die Funktion $\sigma(z)$, die zum Periodenparallelogramm $\omega_1=1$, $\omega_2=i$ gehört, besitzt eine Fundamentalfunktion $T(r,\sigma)$, wofür man einen asymptotischen Ausdruck finden kann. Diese Berechnung, die mittels der Funktionalgleichung

$$\sigma(z+2\omega)=-e^{2\eta(z+\omega)}\sigma(z)$$

auszuführen ist, liefert

$$T(r,\sigma)=m(r,\sigma,\infty)\sim\frac{\pi}{2}r^2\,.$$

Es ist also hier

$$N(r,\sigma,o)\sim T(r,\sigma)\,.$$

Jedenfalls ist die Formel (21) nicht immer richtig.[2]

§ 3. Anwendung auf die Theorie der multiplen Stellen.

Dieser Abschnitt ist einigen Anwendungen des Satzes I auf die Theorie der multiplen Stellen gewidmet. Immerhin wird vorausgesetzt, daß $f(z)$ in der Umgebung der Stelle $z=\infty$ meromorph und von endlicher Ordnung ist.

Erklären wir erst den Ausdruck „ein Picardscher Ausnahmenwert des Gewichts $\dfrac{p}{p+1}$“, wo p eine ganze Zahl ist. Es wird damit ein

---

[1] F. Nevanlinna, Acta Math. t. 50 p. 187.

[2] Lassen wir mit Beibehalt der rektangulären Form des Periodenparallelogrammes $\left|\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right|$ von 1 bis 0 variieren, so variiert die Zahl Θ in (21) von 0 bis 1.

Wert a derart verstanden, daß in der Umgebung der wesentlich singulären Stelle jede Wurzel der Gleichung $f(z)-a=0$ mindestens $(p+1)$-fach ist.

Stellen wir uns jetzt die Aufgabe, alle Funktionen zu bestimmen, die eine der folgenden Eigenschaften besitzen:

1. 4 Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts $\frac{1}{2}$.
2. 3 Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts $\frac{2}{3}$.
3. 2 Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts $\frac{3}{4}$ und 1 des Gewichts $\frac{1}{2}$.
4. 1 Picardscher Ausnahmenwert des Gewichts $\frac{5}{6}$, 1 des Gewichts $\frac{2}{3}$ und 1 des Gewichts $\frac{1}{2}$.
5. 1 Picardscher Ausnahmenwert des Gewichts 1 und 2 des Gewichts $\frac{1}{2}$.
6. 2 Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts 1.

Hier stehen alle Fälle mit der Gewichtssumme 2, höher als 2 kann sie nicht werden, was aus dem zweiten Hauptsatz folgt. Der Fall 1 wird durch die Funktion $\wp(z)$ verwirklicht. Die Fälle 2—4 lassen sich dagegen der Reihe nach durch die geradlinigen Dreieckfunktionen

λ	μ	ν
3	3	3
4	4	2
6	3	2

realisieren, wobei die Winkel des Dreieckes gleich $\frac{\pi}{\lambda}$, $\frac{\pi}{\mu}$, $\frac{\pi}{\nu}$ zu setzen sind. Die Fälle 5 und 6 kommen bei $\cos z$ und e^z vor.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo die Funktion $f(z)$ die vier Picardsche Ausnahmenwerte e_1, e_2, e_3, e_4 vom Gewicht $\frac{1}{2}$ besitzt. Die Abschätzung (12) zeigt dann, daß

$$\varphi(\sqrt{z})=f(z),\ \varphi_1(\sqrt{z})=\sqrt{\prod_{n=1}^{4}(\varphi(\sqrt{z})-e_n)}$$

als Funktionen von $\sqrt{z}$ erfaßt, in der Umgebung der Stelle $\sqrt{z}=\infty$ meromorph und von endlicher Ordnung sind. Da sie außerdem durch die Relation

$$\varphi_1{}^2(\sqrt{z})=\prod_{n=1}^{4}(\varphi(\sqrt{z})-e_n)$$

verbunden sind, muß nach Satz I $f(z)$ der Form

$$f(z)=E((R(\sqrt{z})+\alpha \lg z), \omega_1, \omega_2)$$

sein, wo E die uniformisierende elliptische Funktion zweiter Ordnung der Fläche $y^2=(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)$ ist.

Sei nun $f(z)$ eine Funktion, die 3 Picardsche Ausnahmenwerte e_1, e_2, e_3 vom Gewicht $\frac{2}{3}$ besitzt. Durch eine lineäre Transformation können wir stets $e_1=0$, $e_2=1$, $e_3=\infty$ erreichen. Wenden wir den zweiten Hauptsatz auf die Werte e_1, e_2, e_3 an, erhalten wir:

$$T(r,f)<\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=3}^{\infty}\frac{1}{s}N_s(r,f,e_n)+O(\lg r),$$

wo $N_s(r,f,e_n)$ dieselbe Bedeutung wie vormals hat. Hieraus weiter

$$T(r,f)<\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{3}N(r,f,e_n)-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=4}^{\infty}\frac{s-3}{3\cdot s}N_s(r,f,e_n)+O(\lg r),$$

also

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=4}^{\infty}N_s(r,f,e_n)=O(\lg r),$$

worin enthalten ist, daß $f(z)-e_n$ in der Umgebung der Stelle $z=\infty$ nur Wurzeln der Multiplizität 3 besitzt. Daher sind

$$\varphi\left(\sqrt[3]{z}\right)=\sqrt[3]{f(z)}, \quad \varphi_1\left(\sqrt[3]{z}\right)=\sqrt[3]{f(z)-1}$$

als Funktionen von $\sqrt[3]{z}$ erfaßt, in der Umgebung der Stelle $\sqrt[3]{z}=\infty$ meromorph und von endlicher Ordnung. Da sie außerdem durch die Relation

$$\varphi^3\left(\sqrt[3]{z}\right)-\varphi_1{}^3\left(\sqrt[3]{z}\right)=1$$

verbunden sind, muß

$$f(z)=E\left(\left(R\left(\sqrt[3]{z}\right)+\alpha \lg z\right), \omega_1, \omega_2\right)$$

sein, wo E eine elliptische Funktion ist, die mit der elliptischen Dreieckfunktion ($\lambda=3$, $\mu=3$, $\nu=3$) übereinstimmen muß.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auf die Fälle 3 und 4 anstellen. Ich brauche dies kaum näher auseinanderzusetzen, ebenso wie ich an der Behandlung des Falles 5 vorübergehe (man vgl. hierzu G. Valiron, Lectures on the General Theory of Integral Funktions p. 77—78). Das in diesem Paragraphen gewonnene Ergebnis ist das folgende:

Satz II. *Alle Funktionen, die vier Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts* $\frac{1}{2}$ *besitzen, sind von der Form*

$$E(R(\sqrt{z})+\alpha \lg z),$$

wo E eine elliptische Funktion zweiter Ordnung ist.

Alle Funktionen, die drei Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts $\frac{2}{3}$ *besitzen, lassen sich durch lineare Transformationen der Funktionen*

$$E_1\left(R\left(\sqrt[3]{z}\right)+\alpha \lg z\right)$$

darstellen; dabei bedeutet E_1 die elliptische Dreieckfunktion $\lambda=3$, $\mu=3$, $v=3$.

Alle Funktionen, die zwei Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts $\frac{3}{4}$ *und einen des Gewichts* $\frac{1}{2}$ *besitzen, lassen sich durch lineare Transformationen der Funktionen*

$$E_2\ \left(R\left(\sqrt[4]{z}\right)+\alpha \lg z\right)$$

darstellen; dabei bedeutet E_2 die elliptische Dreieckfunktion $\lambda=4$, $\mu=4$, $\nu=2$.

Alle Funktionen, die einen Picardschen Ausnahmenwert der Gewichts $\frac{5}{6}$, *einen des Gewichts* $\frac{2}{3}$ *und einen des Gewichts* $\frac{1}{2}$ *besitzen, lassen sich durch lineare Transformationen der Funktionen*

$$E_8\left(R\left(\sqrt[6]{z}\right)+\alpha \lg z\right)$$

darstellen; dabei bedeutet E_8 die elliptische Dreieckfunktion $\lambda=6$, $\mu=3$, $\nu=2$.

Alle Funktionen, die einen Picardschen Ausnahmenwert des Gewichts 1 und zwei des Gewichts $\frac{1}{2}$ besitzen, lassen sich durch lineare Transformationen der Funktionen

$$\cos\left(R(\sqrt{z})+\alpha \lg z\right)$$

darstellen.

Alle Funktionen, die zwei Picardsche Ausnahmenwerte der Gewichts 1 besitzen, lassen sich durch lineare Transformationen der Funktionen

$$z^{a}\, e^{R(z)}$$

darstellen.

R bedeutet überall eine Funktion, die in der Umgebung der unendlich fernen Stelle rationalen Charakter besitzt.

Diese Funktionen bilden die Menge aller meromorphen Funktionen endlicher Ordnung, deren Picardschen Ausnahmenwerte das Gesamtgewicht 2 besitzen. Einander gegenüber zeigen sie charakteristische Unterschiede. In den Fällen 5 und 6 kommen nämlich transzendente Singularitäten der Umkehrfunktion vor. Die Fälle 1–4 liefern dagegen Umkehrfunktionen, die einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht $p=1$ gegenüber, in der Umgebung der Stelle $z=\infty$ relativ unverzweigt sind.

§ 4. Beziehung zur Ordnung der Funktion.

Das Ergebnis, das in (15″) enthalten ist, gestattet eine sehr einfache Bestimmung der Fundamentalgrößen $T(r,\varphi)$ und $T(r,\varphi_1)$, die jenen Funktionen gehören. Es ist dabei zwischen drei Fällen zu scheiden:

1. $R(z)$ hat im Punkte $z=\infty$ einen Pol n^{ter} Ordnung.
2. $R(z)$ ist im Punkte $z=\infty$ regulär und $\alpha \neq O$.
3. $R(z)$ ist im Punkte $z=\infty$ regulär und $\alpha = O$.

Der letzte Fall fällt offenbar trivial aus, denn entweder besitzen dann $\varphi(z)$ und $\varphi_1(z)$ im Punkte $z=\infty$ rationalen Charakter oder sie reduzieren sich beide auf Konstanten.

Im Falle 1 und 2 schneiden wir die z-Ebene längs einer nach $z=\infty$ gehenden Geraden auf; dadurch entsteht ein Regularitätsgebiet der Funktion $R(z)+\alpha \lg z$.

1. Sei $n_1(\varrho, \omega_1, \omega_2)$ die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb des Kreisringes $\varrho_0<|u|<\varrho$, so überlegt man leicht, daß ein assymptotischer Ausdruck

$$n_1(\varrho, \omega_1, \omega_2) \sim H_1(\omega_1, \omega_2)\,\varrho^2$$

besteht, wo $H_1(\omega_2, \omega_1)$ eine reelle positive nur von ω_1 und ω_2 abhängige Zahl bedeutet. Da nun durch $u=R(z)$ die aufgeschlitzte Umbung des Punktes $z=\infty$ auf die aufgeschlitzte Umgebung des Windungspunktes n^{ter} Ordnung $u=\infty$ schlicht abgebildet wird, und das Hinzufügen des Gliedes $\alpha \lg z$ dies Verhältnis nur unwesentlich ändert (bewirkt ja nur eine konstante Verschiebung der Ränder gegeneinander), erhalten wir mit wenig Mühe aus $(15'')$

$$n(r, \varphi, \infty) \sim K_1 r^{2n},$$

woraus

$$N(r, \varphi, \infty)=\int_{r0}^{r} \frac{n(t, \varphi, \infty)}{t}\,dt \sim = K_2 r^{2n}$$

folgt. Unter Beachtung

$$m(r, \varphi, \infty)=O(\lg r)$$

ergibt sich also für die Fundamentalgrößen $T(r, \varphi)$ und $T(r, \varphi_1)$ der Ausdruck

$$T(r, \varphi) \sim K_2 r^{2n},\; T(r, \varphi_1) \sim K_3 r^{2n}, \tag{22}$$

wo $K_2 | K_3$ eine rationale Zahl ist

2. Es ist in diesem Falle die Abbildung des aufgeschlitzten Gebietes durch die Funktion

$$u=\alpha \lg z+R(z),\quad (R(z)=c_0+c_1, z^{-1}+\ldots),$$

zu untersuchen. Nun bildet ja bekanntlich

$$u=\alpha \lg z\,,\quad (z=r e^{i\varphi},\ \varphi_0 \leqq \varphi < \varphi_0+2\pi),$$

den aufgeschlitzten Kreisring $r_0 \leq |z| \leq r$ auf ein Rechteck ab, und wegen

$$\pi i a = m \omega_1 + n \omega_2$$

ergibt sich für die Anzahl der Gitterpunkte, die diesem Rechteck gehören

$$n_2(\varrho, \omega_1, \omega_2, a) \sim H_2(\omega_1, \omega_2, a) \lg r \text{ , } (\varrho = \lg r).$$

Dieser asymptotische Ausdruck wird, wie man sich leicht überzeugt, durch das Glied $R(z)$ nicht geändert, und wir erhalten

$$n(r, \varphi, \infty) \sim K_4 \lg r,$$

woraus wieder

$$N(r, \varphi, \infty) = \int_{r0}^{r} \frac{n(t, \varphi, \infty)}{t} dt \sim K_5 \lg^2 r$$

folgt. Da nach (12″)

$$m(r, \varphi, \infty) = O(\lg r)$$

ist, ergeben sich in diesem Falle für die Fundamentalgröße $T(r, \varphi)$ und $T(r, \varphi_1)$ die asymptotischen Ausdrücke

(23) $$T(r, \varphi) \sim K_5 \lg^2 r \text{ , } T(r, \varphi_1) \sim K_6 \lg^2 r,$$

wo wie vorher $K_5 | K_6$ eine rationale Zahl ist.

Die in (22) und (23) gewonnenen Ergebnisse lassen sich, zwar weniger genau, folgendermaßen formulieren:

Satz III. *Zwei Funktionen, die in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle meromorph und von endlicher Ordnung* ϱ *und* ϱ_1 *sind, können nur dann durch eine algebraische Gleichung vom Geschlecht* $p = 1$ *verbunden sein, wenn die Beziehung* $\varrho = \varrho_1 \equiv 0$ *(mod. 2) besteht.*

In ähnlicher Weise erhalten wir:

Satz IV. *Eine Funktion von endlicher nicht-ganzzahliger Ordnung besitzt höchstens drei Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts* $\frac{1}{2}$.

Satz V. *Eine Funktion, deren Ordnung kein vielfaches* $\frac{2}{3}$ *ist, kann höchstens drei Picardsche Ausnahmenwerte des Gewichts* $\frac{2}{3}$ *besitzen.*

Satz VI. *Eine ganze Funktion, deren Ordnung kein vielfaches $\frac{1}{2}$ ist, kann höchstens einen Picardschen Ausnahmenwert des Gewichts $\frac{1}{2}$ besitzen.*

Nun bemerke man, daß nach Satz II die Möglichkeit der Fälle 3 und 4 erst eintritt, wenn die Ordnung der Funktion ein Vielfaches $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ ist. Deshalb können wir den folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

Satz VII. *Ist die Ordnung der Funktion kein vielfaches $\frac{1}{6}$, können nicht Picardsche Ausnahmenwerte vom Gesamtgewicht 2 vorliegen.*