В. И. Смирнов

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. И. Смирнов

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1996

Редактор Т.В.Мызникова

Составители: акад. АН Российской Федерации *О.А.Ладыженская*,
д-р физ.-мат. наук *В. М. Бабич*.

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского университета

УДК 517.862.2+517.941.5+517.941.6+513.812

Смирнов В. И. Избранные труды: Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений. С.-Петербург: Издательство С.-Петербургского университета, 1996. 280 с.

ISBN 5-288-01337-3; 5-288-01337-5

В настоящий том избранных произведений выдающегося петербургско-ленинградского математика академика В.И.Смирнова (1887–1974) включены работы, связанные с теорией функций комплесного переменного и аналитической теорией линейных дифференциальных уравнений. Основное содержание тома составляет знаменитая магистерская диссертация В.И.Смирнова "Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками". Кроме нее в том вошли еще четыре статьи, посвященные той же тематике и опубликованные В.И.Смирновым в 20-е годы нашего столетия.

Книга предназначена для специалистов в области комплексного анализа и дифференциальных уравнений.

$$\text{С}\ \frac{1602010000-142}{076(02)-96}\ 51-94(78-96)$$

ISBN 5-288-01337-3

ISBN 5-288-01337-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди обширного творческого наследия академика В. И. Смирнова (1887–1974) существенное место занимает его магистерская диссертация «Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками». Она была издана в Петрограде в 1918 г. в количестве, вероятно, 100 – 200 экземпляров в виде стеклографированного издания с рукописи и в настоящее время является библиографической редкостью (в ней 307 страниц текста и 20 рисунков). Ее основное содержание кратко отражено в статьях В. И. Смирнова, опубликованных в C. R. Acad. Sci., Paris, 1920, t. 171, p. 510–512; Bull. Sci. Math., 1921, t. 45, p. 93–120, 126–135; Мат. сб. 1927. Т. 34, вып. 2. С. 101–106. (Текст этих статей также воспроизведен в настоящем сборнике.)

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с аналитическими коэффициентами были одним из центральных объектов исследований XIX в. Они явились источником получения всех важнейших специальных функций, и многие замечательные свойства этих функций обусловлены тем, что они являются решениями таких уравнений. Свое место среди таких уравнений занимают уравнения, все особые точки которых регулярны. В случае, когда характеристические корни в особых точках совпадают, уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \frac{1}{2}Q(w)y = 0, \tag{1}$$

где

$$Q(w) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2(w - w_k)^2} + \frac{c_k}{w - w_k} \right). \tag{2}$$

Между c_k имеется два соотношения: $\sum_{k=1}^{n-1} c_k = 0$ и $2\sum_{k=1}^{n-1} w_k c_k = -n + 2$, в остальном они свободны (т. е. степень свободы равна $n - 3$).

Если взять два любых линейно независимых решения $y_k(w)$ ($k = 1, 2$) уравнения (1), то их отношение $y_1(w)/y_2(w) = z(w)$ при обходе особой точки w_k претерпевает дробно-линейное преобразование γ_k параболического типа. Между γ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) заведомо имеется соотношение: $\gamma_1 \ldots \gamma_n = I$. Образуемую ими группу Г называют группой монодромии уравнения (1). Если функция $z = z(w)$ обратима, т. е. обратная ей функция $w = J(z)$ однозначна, то $J(z)$ есть Г-автоморфная функция. В этом смысле уравнение (1), равно как и более общие уравнения с регулярными особыми точками, является источником получения автоморфных функций.

Выяснение того, когда функция $z = z(w)$ обратима и какова группа Г, и есть задача обращения дифференциального уравнения. Эта задача была всесторонне исследована Шварцем для случая трех особых точек. Из многих закономерностей, обнаруженных при этом Шварцем, отметим такую: функция $z(w) = y_1(w)/y_2(w)$ удовлетворяет уравнению

$$\{z, w\} = Q(w), \tag{3}$$

где $\{z, w\}$ есть так называемая производная Шварца, а именно:

$$\{z, w\} = \frac{d^3z}{dw^3}\left(\frac{dz}{dw}\right)^{-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2z}{dw^2}\right)^2\left(\frac{dz}{dw}\right)^{-2}.$$

Это обусловлено тем, что производная Шварца от любой дробно-линейной функции равна нулю, а $z(w)$ претерпевает дробно-линейное преобразование при обходе особой точки. Если $z(w)$ есть какое-нибудь решение уравнения (3), то функции $y_1(w) = z/\sqrt{z'(w)}$ и $y_2 = 1/\sqrt{z'(w)}$ являются решениями уравнения (1). Благодаря этому можно сказать, что уравнение (1) «интегрируется с помощью уравнения (3)». Решения же уравнения (3), в свою очередь, элементарно получаются из решений уравнения Рикатти

$$\frac{d\zeta}{dw} + \frac{1}{2}\zeta^2 = Q(w),$$

а именно:

$$\frac{d^2z}{dw^2} = \zeta(w)\frac{dz}{dw}\frac{1}{2}.$$

Ф. Клейн и А. Пуанкаре связали проблему обращения уравнений вида (1) с проблемой униформизации римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ с исключенными из нее точками w_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ и $w_n = \infty$. Без ограничения общности будем считать, что $w_{n-2} = 0$, $w_{n-1} = 1$, $w_n = \infty$. Униформизации тем самым подлежит $X = \mathbb{C} \setminus \{w_1, \ldots, w_{n-3}, 0, 1, \infty\}$ — риманова поверхность рода 0 с n проколами.

Поясним связь этой проблемы с проблемой обращения уравнения (1). Пусть при каких-то значениях параметров c_k группа монодромии Г уравнения (1) является фуксовой группой первого рода, т. е. Г есть дискретная группа, преобразующая верхнюю полуплоскость D в D и оставляющая инвариантной ∂D, а ее фундаментальная область $F = D/\Gamma$ есть многоугольник, ограниченный дугами окружностей, которые, за исключением, может быть, вершин, не лежат на ∂D. Ввиду того, что разности характеристических корней уравнения (1) во всех точках равны нулю, все вершины F лежат на ∂D.

Предположим еще, что между γ_k нет нетривиальных соотношений (т. е. соотношений, отличных от $\gamma_1 \ldots \gamma_n = I$ и $\gamma\gamma^{-1} = I$), так что Г "склеивает" между собою только соседние стороны F. Пусть, наконец, функция $z(w) = y_1(w)/y_2(w)$ обратима. Тогда из сказанного ранее ясно, что обратная функция $w = J(z)$ является Г-автоморфной (и, более того, фуксовой) функцией, и она осуществляет биголоморфное отображение области F на X, а всего D — на универсальную накрывающую X, т. е. дает униформизацию X.

Тем самым проблема униформизации X была сведена к проблеме нахождения постоянных c_k, при которых Г обладает перечисленными ранее свойствами и $z = z(w)$ обратима. Такие c_k называются акцессорными параметрами. Именно их существование и единственность хотел доказать А. Пуанкаре, исследуя проблему униформизации X. (Требование единственности соотношения $\gamma_1 \ldots \gamma_n = I$ им не было сформулировано явно. Исследование, проведенное В. И. Смирновым для случая $n = 4$, показало, что без этого требования параметр c_1 определяется по w_1 неоднозначно.) Однако на этом пути встретились большие препятствия, которые не были полностью преодолены в работах Пуанкаре. По истечении некоторого времени он предложил иной путь, приведший его в конце концов к решению обсуждаемой проблемы униформизации, а также к решению проблем униформизации и для более сложных римановых поверхностей.

В. И. Смирнов пошел по первому пути и всесторонне исследовал случай четырех особых точек. В этом случае при фиксированных w_k имеется только один свободный параметр c_1. Пусть $w_1 = a$ вещественно и лежит между точками $w_2 = 0$ и $w_3 = 1$. Исследуемое уравнение удобно записать в виде

$$\frac{d}{dw}\left[w(w-a)(w-1)\frac{dy}{dw}\right] + (w+\lambda)y = 0, \tag{4}$$

где λ — подлежащий определению акцессорный параметр.

Гильберт доказал, что Г является фуксовой только в тех случаях, когда:

а) решение, регулярное в одной из особых точек, регулярно и в соседней особой точке;

б) решение, регулярное в точке $w_2 = 0$, будучи продолженным вещественным образом через точку $w_1 = a$, окажется регулярным и в точке $w_3 = 1$.

В связи с этим возникли следующие три спектральные задачи (задачи 1 – 3). Именно, требуется отыскать те значения λ, при которых

1) на отрезке $[0, a]$ существует решение, регулярное в точках 0 и a;

2) на отрезке $[a, 1]$ существует решение, регулярное в точках a и 1;

3) существует решение, регулярное в точке 0 и такое, что при вещественном продолжении через точку a оно регулярно и в точке 1.

Владимир Иванович доказал, что каждая из этих задач имеет простой дискретный неограниченный спектр. Собственные значения $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ первой задачи располагаются так: $-a < \mu_1 < \mu_2 < \dots$. Собственные значения $\{\mu_k\}_{k=-1}^{-\infty}$ второй идут в сторону $-\infty$: $-a > \mu_{-1} > \mu_{-2} \dots$, а собственные значения третьей $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ находятся между $\mu_{\pm k}$, а именно: $\dots \mu_{-2} < \lambda_{-1} < \mu_{-1} < \lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 \dots$. Только при этих значениях λ группа Г является фуксовой. Далее, исследуя число колебаний и нулей соответствующих собственных функций, В. И. Смирнов доказал, что обратимость $z = z(w)$ имеет место только для λ, заполняющих отрезок $[\mu_{-1}, \mu_1]$. Таким образом, лишь при $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \mu_{\pm 1}$ группа Г фуксова и $z = z(w)$ обратима. Но при $\lambda = \mu_{\pm 1}$ в Г имеются нетривиальные соотношения (т. е. отличные от $\gamma_1 \dots \gamma_n = I$ и $\gamma\gamma^{-1} = I$), и только при $\lambda = \lambda_0$ выполняются все требования, нужные для униформизации X. Это значение $\lambda = \lambda_0$ и есть акцессорный параметр уравнения (4). Он есть однозначная функция a.

В. И. Смирнов, кроме того, исследовал весь отрезок $\lambda \in [\mu_{-1}, \mu_1]$, где есть обратимость функции $z = z(w)$. Он выявил все λ, при которых $w = J(z)$ является функцией Клейна. Их множество есть некоторый интервал $[\lambda'_0, \lambda''_0]$ и две дискретные последовательности $\{\lambda'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda''_k\}_{k=1}^{\infty}$, стремящиеся к λ'_0 и λ''_0 соответственно, причем $\lambda'_1 = \mu_{-1}$, $\lambda''_1 = \mu_1$. Интервал $[\lambda'_0, \lambda''_0]$ содержит λ_0; при $\lambda \in [\lambda'_0, \lambda''_0]$ нет нетривиальных соотношений в Г, и только при $\lambda = \lambda_0$ $w = J(z)$ является фуксовой. При λ, равном λ'_k или λ''_k, имеется одно нетривиальное соотношение: $\gamma^{k+1} = I$. При $\lambda = \mu_{\pm 1}$ функция $J(z)$ является фуксовой, а при всех остальных λ'_k и λ''_k более сложной — функцией Клейна.

В четвертой части диссертации исследуется группа Г при различных вещественных значениях λ. В частности, найдены необходимые условия, при выполнении которых три заданные параболические подстановки γ_1, γ_2, γ_3 являются производящими подстановками группы монодромии Г для некоторого уравнения вида (4). Исследован также вопрос об уравнениях (4), имеющих одинаковую группу Г. Доказано, что уравнению (4) с любым $\lambda \in R$ соответствует по крайней мере одно уравнение того же вида с некоторым $\lambda \in [\mu_{-1}, \mu_1]$, имеющим ту же группу Г.

Наконец, в пятой части диссертации рассмотрен более общий случай уравнений с четырьмя регулярными особыми точками без предположения о равенстве характеристических корней в особых точках.

Читатель обратит внимание на необычный порядок расположения материала: оглавление предшествует изложению, список литературы предшествует предисловию и т. п. Это связано с тем, что публикуемый текст точно соответствует оригиналу. Поправлены только опечатки, старая орфография заменена новой, номера формул помещены справа от них. К ряду мест диссертации (отмечены цифровым индексом) потребовались пояснения, они написаны Л. А. Тахтаджяном и В. М. Бабичем и помещены в конце тома.

В настоящий том включены еще четыре работы, непосредственно примыкающие к диссертации тематически: заметка (в «Comptes Rendus») «Математический анализ. О некоторых вопросах теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка и автоморфных функций», более подробная статья на ту же тему «О линейных дифференциальных урвнениях второго порядка и теории автоморфных функций» (перевод М. А. Смирнова-Тяншанского), работа «О рациональных преобразованиях линейных дифференциальных уравнений второго порядка» и статья, посвященная некоторым вопросам планиметрии Лобачевского («О фундаментальной области групп движения на плоскости Лобачевского - Болиаи»). Эти статьи были опубликованы в 20-е годы, вскоре после защиты В. И. Смирновым диссертации, но они также актуальны. Интерес к теории фуксовых уравнений в последнее время увеличился в связи с тем, что в классической работе Племеля (1908 г.), в которой, как считалось, содержалось решение двадцать первой проблемы Гильберта, недавно были обнаружены ошибки.

В последней, четвертой работе «О фундаментальной области групп движения на плоскости Лобачевского–Болиаи», включенной в этот том, изучается тот случай, когда фундаментальный многоугольник на плоскости Лобачевского имеет бесчисленное множество сторон. Как и все работы, входящие в этот сборник, это исследование связано с автоморфными функциями. Фундаментальные области на плоскости Лобачевского — весьма интересный объект, нередко встречающийся в современных исследованиях. Большое значение эти области имеют в спектральной теории эллиптических операторов, так как краевые задачи для соответствующего оператора Лапласа обладают рядом замечательных свойств.

Заметим в заключение, что есть все основания надеяться, что настоящая публикация окажется полезной для современного математика, работающего в области теории автоморфных функций, аналитической теории линейных дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного.

Составители хотели бы отметить самоотверженную помощь кандидата физ.-мат. наук Зинаиды Александровны Янсон при подготовке рукописи к печати и при проведении корректур.

О. А. Ладыженская,
В. М. Бабич

ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Петроград, 1918 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Глава II

Глава III

12. **Bianchi.** Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois.–Pisa, 1900.
17. **Bieberbach.** Über einer Satz des Herrn Carathéodory// Göttingen Nachrichten, 1913.
2. **Brouwer.** Beweis aus Jordanschen Kürvensatzes// Math. Ann. 1912. Bd. 69. S. 169.
6. **Carathéodory.** Über die gegenseitige Bezichung der Ränder bei der Konformen Abbildung des Inneren einer Jordanŝchen Kürve auf einen Kreis// Math. Ann. 1913. Bd. 73. S. 305.
9. **Carathéodory.** Untersuchungen über die Konformen Abbildungen von festen und veränderliĉhen Gebieten// Math. Ann. 1912. Bd. 72. S. 107.
25. **Ford L. R.** An introduction to the theory of automorphic functions.—London, 1915.
14. **Fricke.** Die Kreisbogenvierseite und das Princip der Symmetrie// Math. Ann., 1894. Bd. 44. S. 565.
13. **Fricke und Klein.** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen.–Leipzig, 1897–1912. Bd. I, II.
16. **Fricke und Klein** Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen.–Leipzig, 1890.
11. **Fubini.** Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe. Pisa, 1908.
28. **Gerstenmeier.** Beiträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit 4 und 5 singulären Stellen.–Erlagen, 1910.
19. **Heun.** Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten// Math. Ann. 1889. Bd. 33. S. 161.
22. **Hilb.** Uber Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen// Math. Ann., 1909. Bd. 66. S. 215.
29. **Hilbert.** Grundzüge der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.–Leipzig, 1912. S. 258.
20. **Jhlenburg.** Über die geometrische Eigenschaften der Kreisbogenvierecke.–Göttingen, 1909.
1. **Jordan.** Cours d'analyse de l'école polytechnique.–Paris, 1909. Vol. I.
21. **Klein.** Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.–Göttingen, 1894.
26. **Klein.** Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie// Math. Ann., 1883. Bd. 21. S. 141–218.
27. **Klein.** Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung// Math. Ann., 1907. Bd. 64. S. 175.
8. **Koebe.** Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. II.// Math. Ann., 1910. Bd. 69. S. 1.
30. **Kõnig.** Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Theorie der automorphen Functionen// Math. Ann., 1912. Bd. 71. S. 206.
7. **Montel.** Leçons sur les séries des polynomes a une variable complexe.–Paris, 1910.
3. **Osgood.** Lehrbuch der Functionentheorie.–Leipzig, 1912.
4. **Picard.** Traité d'Analyse. Vol. II, III—Paris, 1905, 1908.

24. **Poincaré.** Theorie des groupes fuchsiens// Acta Math, 1882. Vol. I. P. 1–193; Memoire sur les groupes kleiniennes// Acta Math. 1883/1884. Vol. III. P. 49–92; Sur les groupes des equations linearies// Acta Math, 1884. Vol. IV. P. 201–312; Memoire sur les fonetions zeta-fuchsiennes// Acta Math., 1885. Vol. V. P. 209-278.Acta Mathematica. Vol. I, III, IV, V.

15. **Schilling.** Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen *S*-Function // Math. Ann., 1894. Bd. 44. S. 161.

10. **Schlesinger.** Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.– Leipzig, 1895–1898. Bd. I, II.

18. **Schoenflies.** Die Entwickelung der Lehre vonden Punktmannig-faltigkeiten.– Leipzig, 1908.

23. **Schwarz.** Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt // J. für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1872. Bd. 75. S. 292. (Als Forsetzung des von A. L. Grelle).

5. **Study.** Vorlesungen über Geometrie.–Leipzig, 1913.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Рассмотрение линейного дифференциального уравнения второго порядка приводит, как известно, к весьма важным результатам в теории функций. К одному из таких результатов приводит т. н. задача обращения такого уравнения.

Пусть нам дано уравнение

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

и пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — какие-либо два независимые интеграла этого уравнения[1]. Обозначим

$$\eta = y_1(x)/y_2(x). \tag{2}$$

Соотношение это определит x как функцию от η:

$$x = \varphi(\eta). \tag{3}$$

Определение этой функции и составляет задачу обращения уравнения (1). Если коэффициент $q(x)$ равен тождественно нулю, то задача эта приводится к задаче обращения интеграла.

В дальнейшем мы будем считать, что коэффициенты уравнения (1) — рациональные функции от x и что вблизи всякой особой точки уравнение это имеет правильные интегралы[2].

Еще Riemann в своих мемуарах, посвященных теории минимальных поверхностей, ввел в рассмотрение частное двух интегралов линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Указанная задача и методы ее решения были вполне выяснены Schwarz'ем в том случае, когда уравнение (1) есть уравнение Gauss'а и коэффициенты этого уравнения вещественны [23]. Рассматривая задачу обращения, Schwarz, кроме хорошо известных тогда рациональных, просто-периодических и двоякопериодических функций, получил новый класс функций, имеющих при аналитическом продолжении окружность существенной границей. Функции эти являются частным случаем фуксовых функций. Основными пунктами мето́ды Schwarz'а являются рассмотрение конформного преобразования полуплоскости плоскости комплексного переменного x при помощи функции (2) и особый прием аналитического продолжения, называемый принципом симметрии. Метода эта приложима лишь в том случае, когда коэффициенты уравнения (1) — вещественны*.

---

*Основания этой методы можно найти еще у Riemann'а.

Указанная Schwarz'ем метода была источником целого ряда работ Klein'a, Hurwitz'a, Schilling'a и других, посвященных уравнению Gauss'a.

В начале 80-х годов прошлого столетия появился ряд мемуаров Poincare [24] и Klein'a [26], посвященных теории фуксовых функций и более общих функций, которые мы, следуя терминологии Poincare, будем называть клейновыми функциями. Вслед за этими работами появился целый ряд работ, посвященных теории только что указанных функций и связанных с ними фуксовых и клейновых групп*.

Наибольшее значение для нас имеет мемуар H. Poincare "Sur les groupes des equations linearles", помещенный в IV томе Acta Mathematica, 1884, p. 210–312. В этом мемуаре Poincare рассматривает задачу обращения при общих предположениях о коэффициентах уравнения (1). Если уравнение это имеет более трех особых точек, то коэффициенты его зависят от следующих постоянных:

a) особых точек уравнения;
b) корней фундаментального определяющего уравнения в каждой из особых точек;
c) постоянных, которые мы назовем параметрами.

В указанном мемуаре Poincare использует зависимость группы уравнения (1) от этих постоянных, а также ставит следующие две задачи: при определенных значениях постоянных (a) и (b) определить значения постоянных (c) так,

(I) чтобы группа частного двух интегралов уравнения (1) была фуксовой группой; или же так,

(II) чтобы функция (3) была фуксовой или клейновой функцией.

Для решения этих задач Poincare приводит методу, называемую методой непрерывности (méthode de continuité). Основой этой методы является подсчет числа параметров, входящих в уравнение (1), и числа постоянных, от которых зависит группа уравнения. Строгое проведение этой методы представляет большие трудности.

Мы переходим теперь к указанию работ, которые посвящены тому частному случаю, когда уравнение (1) с вещественными коэффициентами имеет четыре особые точки. При этом урав-

---

*Подробную библиографию литературы, касающейся фуксовых и клейновых групп и функций, можно найти у Ford'a [25].

нение содержит один параметр. Случай этот был рассмотрен Poincare в указанном выше мемуаре. Впоследствии Klein [27] установил связь задачи (I) в этом случае с т. н. теоремами колебания, и задача эта была решена Hilb'ом [22] и Gerstenmeier'ом [28], причем последний рассмотрел и случай существования пяти особых точек. Работа Hilb'а не охватывает общего случая уравнения с четырьмя особыми точками, и результаты этой работы не представляются полными, ибо наряду с доказательством существования бесчисленного множества значений параметра, при которых группа уравнения будет фуксовой, нет доказательства единственности этих значений при некоторых добавочных условиях. Доказательства Gerstenmeier'а не везде проведены с достаточной строгостью.

Наконец, в том частном случае, когда фундаментальное определяющее уравнение имеет в каждой из четырех особых точек кратный корень, решение задачи (I) было приведено Hilbert'ом [29] к исследованию некоторого интегрального уравнения, и полное исследование этого уравнения было сделано König'ом [30].

Решение задачи (I) дает возможность просто решить и задачу (II) в том случае, когда искомая функция будет фуксовой функцией. Исследования задачи (II) в случае клейновых функций не было до сих пор сделано. Некоторое отношение к этому вопросу имеет мемуар Fricke [14], в котором рассматривается вопрос об образовании симметрической группы при помощи последовательных отображений четырехугольника, ограниченного дугами окружностей, в его сторонах.

К указанным работам можно причислить также диссертацию Ihlenburg'а, посвященную исследованию односвязных четырехугольников, ограниченных дугами окружностей и не имеющих точек разветвления нигде, кроме вершин.

В настоящем сочинении рассматривается уравнение с вещественными коэффициентами и с четырьмя особыми точками и наиболее полно трактуется тот частный случай, когда фундаментальное определяющее уравнение имеет кратный корень в каждой из особых точек. При этом мы занимаемся задачами (I) и (II), исследованием зависимости группы уравнения от параметра и вопросом об определении уравнения по заданной группе.

Глава I носит предварительный характер и посвящена теории групп дробно-линейных подстановок. Теория эта излагается в том объеме, в каком она необходима для дальнейших приложений. Основные результаты этой главы, касающиеся исследования особых точек группы и областей ее прерывности, получаются чисто аналитическим путем. Изложение это отличается от обычного изложения этой теории, которое основано на методах проективной геометрии.

В главе II решается задача (I) в том частном случае, который был разобран König'ом при помощи интегральных уравнений. Мы пользуемся при решении обычными методами Sturm'а. Вторая половина главы II, а также главы III и IV посвящены остальным указанным выше вопросам в применении к упомянутому только что частному случаю дифференциального уравнения с четырьмя особыми точками. В главе II используется вид четырехугольника, получаемого из полуплоскости при помощи функции (2).

В главе III определяются те значения параметра, при которых задача обращения приводит к однозначной функции, и исследуется группа уравнения в этих случаях.

В главе IV разбирается вопрос об определении уравнения по заданной группе и исследуются уравнения, имеющие одинаковую группу. Основные результаты этих глав представляются нам новыми.

В главе V рассматривается более общий случай дифференциального уравнения с четырьмя особыми точками. В первой половине главы решается задача (I), причем восполняется указанный выше пробел в исследованиях Hilb'а, а также рассматривается тот случай, когда подстановки группы, оставляя неизменной некоторую окружность, преобразуют части плоскости, на которые эта окружность делит всю плоскость, друг в друга. Вторая половина V главы посвящена исследованию вида четырехугольника, получаемого из полуплоскости при помощи функции (2), при различных значениях параметра.

В заключение считаю своим долгом выразить мою глубокую благодарность моему учителю В. А. Стеклову и Н. М. Гюнтеру за их сочувственное отношение к моей работе; Я. Д. Тамаркину, прочитавшему работу в рукописи и сделавшему мне ряд ценных указаний, а также физико-математическому факультету Петроградского университета и Совету Института инженеров путей сообщения, оказавшим мне помощь при издании этой работы.

Петроград
31 января 1918 года

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Функция $f(z)$ комплексного переменного z называется *аналитической, или голоморфной, функцией в области* Г на плоскости переменного z, если функция эта имеет в каждой точке этой области конечное, определенное значение и конечную производную $f'(z)$. В этом определении ничего не предполагается о значениях $f(z)$ на контуре области.

Функция $f(z)$ называется *голоморфной в области* Г, *включая и контур этой области, если она голоморфна в какой-либо области, заключающей внутри себя как область* Г, *так и ее контур.* Определения эти можно обобщить, считая, что Г представляет собою область, покрывающую плоскость переменного z несколько раз, т. е. можно предполагать, что область Г находится на некоторой римановой поверхности, построенной на плоскости переменной z.

Функция называется *голоморфной в точке* $z = z_0$, *если она голоморфна в какой-либо области, заключающей точку* $z = z_0$ *внутри себя.* Пусть на плоскости переменной z даны области Γ_1 и Γ_2, имеющие общую часть Γ_3, и пусть $f_1(z)$ есть функция, голоморфная в области Γ_1, а $f_2(z)$ — функция, голоморфная в области Γ_2, и пусть при этом значения этих функций в области Γ_3 одинаковы. Функция $f_2(z)$ называется *аналитическим продолжением* $f_1(z)$, и наоборот. Функция может иметь только одно аналитическое продолжение.

Функция $f(z)$ называется *аналитической функцией, если она голоморфна в какой-либо области плоскости переменного* z. Если аналитическая функция не имеет аналитического продолжения вне какого-либо контура, то этот последний называется *существенной границей функции.*

§ 2. Пусть координаты точек некоторой кривой C, не пересекающей саму себя, могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{1}$$

где α, β и t — вещественны. Если при этом $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ голоморфны при всяком рассматриваемом значении t и ни при одном из этих значений производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ не обращаются одновременно в нуль, то кривая C называется *аналитической кривой**.

---

*Иногда такую кривую называют *регулярной.*

Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции и в рассматриваемом интервале изменения t различным значениям t соответствуют различные пары значений x и y, то совокупность точек, получаемых из равенств (1), образуют т. н. кривую Jordan'а. Если при этом $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ будут периодическими функциями, то кривая будет замкнутой. В этом случае одинаковым точкам должны соответствовать значения t, отличающиеся на целое число периодов. Замкнутая кривая Jordan'а разделяет плоскость на две части, из которых одна представляет собою ограниченную односвязную область*.

Пусть $f(z)$ есть аналитическая функция с одной стороны аналитической кривой C и пусть при приближении к какой-либо точке этой кривой значения функции стремятся к определенному пределу, который и принимается за значение функции в только что указанной точке кривой C.

Для существования аналитического продолжения $f(z)$ за кривую C необходимо и достаточно, чтобы значения вещественной или мнимой части $f(z)$ на кривой C могли быть представлены в виде голоморфной функции параметра t, входящего в равенства (1). Эти последние преобразуют кривую C в отрезок вещественной оси на плоскости переменной t.

Если мы окружим кривую C достаточно узкой полосой, то эта последняя преобразуется на плоскости переменной t в полосу, окружающую вышеуказанный отрезок, и две точки первой полосы называются *симметричными относительно* C, если соответствующие точки второй полосы имеют сопряженные значения. Если значения мнимой части указанной выше функции $f(z)$ на кривой C будут равны нулю, то, на основании сказанного выше, функция эта может быть аналитически продолжена за кривую C, и ее значения в симметричных точках будут сопряженными. Если сама C есть отрезок вещественной оси, то высказанное утверждение представляет собою т. н. принцип симметрии Riemann'а. Точками симметрии по отношению к окружности будут две точки, лежащие на одном и том же радиусе окружности так, что произведение их расстояний до центра равно квадрату радиуса окружности. Точки эти иногда называются *гармоническими по отношению к окружности*, а самый процесс перехода из одной точки в симметричную — *отображением в окружности.*

---

*См. Jordan [1, vol. I, p. 90–99.]; Brouwer [2, S. 169].

Отрезок вещественной оси может быть при помощи дробно-линейной функции преобразован в дугу окружности, и, следовательно, можно высказать принцип симметрии в следующем виде: *если $w = f(z)$ есть функция, аналитическая по одну сторону дуги некоторой окружности C и непрерывная в этой области, включая и эту дугу, и если при этом $f(z)$ преобразует ее также в дугу некоторой окружности C_1 на плоскости переменной w, то $f(z)$ может быть аналитически продолжена, и значения этой функции в точках, гармонических по отношению к окружности C, будут представляться точками, гармоническими по отношению к окружности C_1.*

При этом область существования указанного аналитического продолжения будет представлять собою отображение в окружности C прежней области существования функции $f(z)$*.

§ **3.** Отделим вещественную и мнимую части в переменных z и w, полагая

$$\begin{gathered} z = x + yi, \\ w = u(x,y) + v(x,y) \cdot i. \end{gathered} \tag{2}$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют системе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Если $f(z)$ — голоморфная функция в области Γ и $f'(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке этой области, то $f(z)$ преобразует область Γ в область, расположенную на плоскости переменной w, так, что каким-либо двум пересекающимся линиям в области Γ соответствуют линии, пересекающиеся под тем же углом, причем этот последний отсчитывается в обоих случаях в одном и том же направлении, если мы начнем отсчет от соответствующих между собою кривых. Такого рода преобразование называется *конформным*. Если в некоторой точке $f'(z)$ и все следующие производные до порядка $(k-1)$ включительно обращаются в нуль, то преобразование в этой точке не будет конформным. Углы в этой точке на плоскости переменной z будут в k раз меньше соответствующих углов на плоскости переменной w. Если $f(z)$ в какой-либо точке имеет полюс первого порядка, то преобразование в этой точке будет также конформным с

---

*См. Osgood [3, S. 665–673]; Picard [4, vol. II, p. 297–307].

той лишь разницей, что соответствующая точка на плоскости переменной w будет бесконечно удаленная точка.

Для того чтобы преобразованная область Γ' нигде не налегала сама на себя, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ принимала в области Γ всякое свое значение не более одного раза. При этом z будет однозначной функцией w в области Γ', и мы будем называть в этом случае $f(z)$ *однозначно-обратимой в области* Γ *функцией*[3]. Для однозначной обратимости необходимо отсутствие кратных полюсов у $f(z)$ и нулей у $f'(z)$.

Предположим, что область Γ есть односвязная область, ограниченная кривой Jordan'а C, и что $f(z)$ — голоморфна в этой области и непрерывна в ней, включая и контур C. Если этому последнему соответствует на плоскости w контур C', не пересекающий сам себя, то $f(z)$ будет однозначно-обратимой в области Γ', и преобразованная область будет находиться внутри контура C'*.

§ **4.** Докажем более общее предложение. Пусть на плоскости переменной z дана область Γ, ограниченная замкнутой кривой Jordan'a C, и пусть $w = f(z)$—аналитическая функция, однозначная в области Γ. Предположим, что $f(z)$ может иметь в области Γ лишь конечное число полюсов первого порядка, что функция эта непрерывна[4] в области Γ, включая и контур C, и что $f'(z)$ не обращается в этой области в нуль. Если при этом контуру C будет соответствовать на плоскости w контур C', не пересекающий сам себя, то $f(z)$ будет однозначно-обратима в области Γ.

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что контуры C и C' не проходят через бесконечно далекую точку. Предположим сначала, что при движении точки по кривой C в положительном направлении соответствующая точка движется по C' в таком же направлении. Обозначим буквою k—число полюсов $f(z)$ в области Γ. Пусть w_0—какая-либо точка на плоскости w, лежащая внутри контура C', а w_1—точка, лежащая вне контура C'. Обращая внимание на изменение аргумента разностей $f(z) - w_0$ и $f(z) - w_1$ при обходе по контуру C или, что то же, по контуру C', мы можем легко заключить, что уравнение $f(z) = w_0$ имеет в области Γ $(k + 1)$ корней, а уравнение $f(z) = w_1$—k корней.

Пусть $k > 0$ и пусть z_1 и z_2 — какие-либо два корня первого уравнения. Проведем в области Γ аналитический контур $\mathcal{L}$, со-

---

*См. Osgood [3, S. 377–381].

единяющий точки z_1 и z_2 и не проходящий через полюсы $f(z)$. Ему будет соответствовать на плоскости w замкнутый контур $\mathcal{L}'$. Обратная функция $z = \varphi(w)$ в силу высказанных выше условий не может иметь точек разветвления в области Γ', но является многозначной функцией при аналитическом продолжении вдоль контура $\mathcal{L}'$, если за начальные значения принять w_0 и z_1. Мы можем при этом предполагать, что кривая $\mathcal{L}'$ не пересекает сама себя, ибо в противном случае мы могли бы рассматривать лишь замкнутую часть этой кривой. Принимая во внимание указанную выше многозначность $\varphi(w)$, мы можем утверждать, что в области B, ограниченной контуром $\mathcal{L}'$, должна находиться хотя бы часть контура C', ибо в противном случае $\varphi(w)$ была бы аналитической функцией в области B и не имела бы там точек разветвления, а потому не могла бы быть многозначной функцией на контуре $\mathcal{L}'$. Этот контур вместе с контуром C' разделит область B на ряд отдельных областей, и $\varphi(w)$ должна быть многозначной функцией при продолжении по контуру по крайней мере одной из этих областей. Но, рассуждая так же, как и выше, легко показать, что этого не может быть. При этом надо отдельно рассмотреть тот случай, когда C' лежит вся внутри области B, и в этом случае надо провести вспомогательную линию, соединяющую $\mathcal{L}'$ с C'.

Мы видим, таким образом, что в рассматриваемом случае k должно равняться нулю, и однозначная обратимость следует непосредственно из высказанного в конце предыдущего параграфа утверждения. Точно так же можно доказать, что если при движении по контуру C в положительном направлении соответствующая точка движется по контуру C' в отрицательном направлении, то $k = 1$ и $f(z)$ преобразует область Γ в часть плоскости, лежащую вне контура C', причем всякой точке в этой части плоскости соответствует только одна точка области Γ.

В заключение формулируем т. н. теорему Riemann'a.

Пусть даны две односвязные области: Γ *и* Γ', *ограниченные замкнутыми кривыми Jordan'a. Существует функция* $f(z)$*—голоморфная и однозначно-обратимая в области* Γ, *которая преобразует эту область в область* Γ'. *При этом функция эта по закону непрерывности может быть определена и на контуре области* Γ *и преобразует этот контур непрерывным образом в контур области* Γ'*.

---

*См. Study [5, Bd. II, §. 5–8]; Carathéodory [6,Bd. 73, S. 305; 9, Bd. 72, S. 107].

§ **5.** В настоящем параграфе изложим т. н. принцип сходимости аналитических функций[5].

Пусть нам дана бесконечная последовательность аналитических функций $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, причем каждая функция $f_n(z)$ голоморфна в некоторой связной области B_n, причем эти последние обладают тем свойством, что все точки области B_{n-1} принадлежат и области B_n при всяком значении n. Обозначим буквою B область, состоящую из тех точек, которые принадлежат, начиная с некоторого значения n, всем областям B_n. Если при этом функции $f_n(z)$ будут ограничены в своей совокупности во всякой области, которая вместе со своим контуром лежит внутри области B, то из вышеуказанной последовательности можно выбрать последовательность $f_{n_k}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся во всякой точке области B. При этом сходимость будет равномерной во всякой области, находящейся вместе с контуром внутри B, и предельная функция $f(z)$ будет голоморфной в области B. Области B_n могут представлять собою многолистные поверхности, построенные на плоскости переменной z. Такою же будет в этом случае и область B^*.

§ **6.** Пусть нам дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (3)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — рациональные функции x. Если $x = a$ есть полюс по крайней мере одной из этих функций, то точка a называется *особой точкой уравнения* (3). Интегралы этого уравнения имеют вблизи такой точки один из следующих двух видов:

$$y = (x - a)^r \varphi(x), \qquad (4)$$

$$y = (x - a)^{r_1} \varphi(x) \lg(x - a) + (x - a)^{r_2} \psi(x), \qquad (5)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — ряды, расположенные по целым положительным и отрицательным степеням $(x - a)$.

Если число членов с отрицательными степенями будет конечно, то можно выбрать r, r_1 и r_2 так, чтобы ряды содержали только положительные степени и чтобы свободный член в этих рядах был отличен от нуля. В этом случае соответствующий интеграл называется *регулярным*, или *правильным*. Для того, чтобы все интегралы уравнения (3) вблизи точки $x = a$ были

---

*См. Montel [7, p. 20–26]; Koebe [8, Bd. 69, S. 71].

правильными, необходимо и достаточно, чтобы кратность полюса a у $p(x)$ была не выше единицы, а у $q(x)$ — не выше двух. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие уравнения вида (3), все интегралы которых будут правильными вблизи всякой особой точки уравнения*.

Пусть вблизи $x = a$ имеются разложения

$$p(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k(x-a)^k,$$

$$q(x) = \sum_{k=-2}^{\infty} b_k(x-a)^k.$$

Квадратное уравнение

$$r(r-1) + a_{-1}r + b_{-2} = 0 \qquad (6)$$

называется ***фундаментальным определяющим уравнением в точке*** $x = a$. Если разность корней этого уравнения не равна целому числу, то уравнение (3) допускает два независимых интеграла, имеющих вблизи точки $x = a$ вид (4). Если же разность $r_2 - r_1$ корней уравнения (6) равна нулю или целому положительному числу, то уравнение (3) будет иметь либо два независимых интеграла вида (4) и (5), причем в выражении (4) надо положить $r = r_1$, либо оба эти интеграла будут иметь разложение вида (4). В случае $r_2 - r_1 = 0$ всегда будет иметь место первый случай.

§ 7. Обозначим буквами y_1 и y_2 какие-либо два независимых интеграла уравнения (3), и пусть x — какая-либо точка, отличная от особой точки этого уравнения. Если мы из точки x опишем замкнутый контур, не проходящий через особые точки уравнения, и будем аналитически продолжать вышеуказанные интегралы вдоль этого контура, то при возвращении в точку x мы будем иметь два новых независимых интеграла z_1 и z_2, связанных с исходными интегралами подстановкою:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha y_1 + \beta y_2, \\ & \qquad\qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \qquad (7) \\ z_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2. \end{aligned}$$

Двум замкнутым контурам, которые могут быть приведены один к другому непрерывным преобразованием, минуя особые

---

*При этом мы принимаем в расчет и бесконечно удаленную точку.

точки уравнения[6] (3), соответствуют одинаковые подстановки. Совокупность всех подстановок, соответствующих всем возможным замкнутым контурам, проходящим через точку x, образует т. н. группу уравнения[7] (3). Обозначим ее буквою Ω.

Возьмем вместо интегралов y_1 и y_2 какие-либо два другие независимые интеграла. Эти последние могут быть получены из интегралов y_1 и y_2 при помощи подстановки S вида (7). Если мы с этими новыми интегралами будем образовывать группу уравнения, то эта последняя будет $S\Omega S^{-1}$. Таким образом, группа уравнения определена с точностью до преобразования ее при помощи любой подстановки вида (7). Непосредственно ясно, что группа не зависит от положения исходной точки x.

Все подстановки группы могут быть представлены в виде произведения целых степеней конечного числа подстановок группы. Эти последние называются ***производящими подстановками группы***[8]. Ими могут служить подстановки, соответствующие положительному обходу вокруг особых точек уравнения (3), причем мы должны принять во внимание все особые точки этого уравнения, кроме одной. Заметим при этом, что положительный обход вокруг особой точки представляет собою замкнутый контур, содержащий внутри себя только одну особую точку, и что контур этот может быть выбран различным образом.

§ **8.** Рассмотрим частное двух интегралов уравнения (3):

$$\eta = y_2/y_1. \tag{8}$$

Замкнутому контуру на плоскости переменной x будет соответствовать на плоскости переменной η подстановка:

$$\eta_1 = \frac{\alpha + \beta\eta}{\gamma + \delta\eta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0). \tag{9}$$

Так же, как и в предыдущем параграфе, мы можем определить группу подстановок этого рода и производящие подстановки этой группы. Группа эта называется ***проективной группой уравнения***[9] (3). Мы в дальнейшем просто будем называть ее *группою уравнения*. Если обозначим буквою Ω эту группу и буквою S какую-либо подстановку вида (9), то при ином выборе интегралов уравнения мы можем получить группу $S\Omega S^{-1}$.

Переменная η удовлетворяет дифференциальному уравнению[10]

$$\frac{3\eta''^2 - 2\eta'''\eta'}{\eta'^2} = [p(x)]^2 + 2p'(x) - 4q(x), \tag{10}$$

левая часть которого не меняется при подстановке вида (9). Наоборот, всякое решение уравнения (10) представляет собою частное интегралов уравнения (3). Равенство (8) определяет x как аналитическую функцию от η, и нахождение этой функции представляет собою т. н. задачу обращения для уравнения (3).

Обозначим буквою Γ область значений переменной η, определяемой равенством (8). Обратная функция

$$x = \varphi(\eta) \tag{11}$$

будет определена в этой области. Для того, чтобы эта функция была однозначной, необходимо и достаточно, чтобы либо η принимало при аналитическом продолжении всякое свое значение не более одного раза, либо чтобы одинаковые значения η соответствовали бы одинаковым значениям x. В последнем случае замкнутому контуру на плоскости x, который не может быть приведен к точке непрерывным преобразованием, минуя особые точки, соответствует тождественная подстановка над переменной η.

Пусть $x = a$ есть особая точка уравнения (3). Выберем за независимые решения вида (4) и (5). Для того, чтобы соответствующее значение η не было точкою разветвления функции (11), необходимо, чтобы разность корней уравнения (6) была нуль или вида $1/n$, где n — целое число, большее единицы. Таким образом, для того, чтобы задача обращения допускала однозначное решение, необходимо, чтобы разность корней фундаментального определяющего уравнения имела только что указанный вид. Условие это будет также и достаточным условием однозначности функции (11) в том случае, когда Γ есть односвязная область. Мы не причисляем к области Γ значений, которые η принимает в тех особых точках уравнения (3), в которых разность корней определяющего уравнения равна нулю, ибо не всем значениям η, близким к только что указанному значению, соответствуют значения x, близкие к рассматриваемой особой точке.

Значение η, соответствующее такому значению x, которое не является особой точкой уравнения (3), не может быть точкою разветвления функции (11), ибо в силу известного равенства

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{c}{y_1^2} \epsilon^{-\int p(x)dx}$$

$d\eta/dx$ не может обратиться в такой точке в нуль.

§ 9^{11}. Если уравнение (3) имеет три особые точки, то, не ограничивая общности, мы можем предположить, что это будут точки $0, 1$ и ∞. Уравнение может быть при этом приведено к виду

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{12}$$

и это последнее уравнение называется уравнением Gauss'а. Разность корней определяющего уравнения будет для него:

$$\begin{aligned} &\text{в точке } x = 0 && — && 1-\gamma, \\ &\text{в точке } x = 1 && — && \gamma-\alpha-\beta, \\ &\text{в точке } x = \infty && — && \beta-\alpha. \end{aligned}$$

Если эти величины будут вещественны, то, не ограничивая общности, мы можем считать их положительными. Обозначим их:

$$\begin{aligned} 1-\gamma = a &= \frac{1}{l}, \\ \gamma-\alpha-\beta = b &= \frac{1}{m}, \\ \beta-\alpha = c &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Для однозначности функции (11) числа l, m, и n должны быть равны целым числам, большим единицы, или бесконечности. В рассматриваемом случае условие это является и достаточным.

Функция (8) преобразует ту часть плоскости переменной x, которая ограничена вещественной осью, в треугольник S, стороны которого суть дуги окружности или прямые линии и углы которого равны $a\pi$, $b\pi$ и $c\pi$*. При аналитическом продолжении функции (8) на плоскости η будет получаться сеть треугольников указанного только что вида, и область Γ всегда будет односвязной. При этом надо различать три случая:

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1, \tag{13_1}$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1, \tag{13_2}$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1. \tag{13_3}$$

В первом случае Γ будет представлять собою всю плоскость, число треугольников сети будет ограничено, и функция (11) будет рациональной функцией η.

---

*Это будет иметь место при всяких вещественных значениях α, β и γ.

В случае (13_2) стороны всех треугольников пройдут через одну и ту же точку плоскости, и Г будет представлять собою всю плоскость, за исключением только что упомянутой точки. В этом случае функция (11) будет двояко или просто периодической функцией η.

Наконец, в случае (13_3) будет существовать окружность или прямая C, ортогональная к сторонам всех треугольников сети, Г будет представлять собою часть плоскости, ограниченную линией C, и эта последняя будет существенной границей функции (11). Во всех этих случаях $\varphi(\eta)$ не будет меняться, если мы совершим над η какую-либо подстановку группы уравнения (12).

В частном случае

$$l = m = n = \infty$$

уравнение (12) превращается в уравнение Legendre'а

$$x(1-x)y'' + (1-2x)y' - \frac{1}{4}y = 0.$$

В этом случае все три угла треугольника S будут равны нулю и его вершины будут находиться на линии C*.

---

*Доказательства всех предложений, изложенных в последних четырех параграфах, можно найти у Schlesinger'а [10, см. Bd. I, II].

ГЛАВА I[12]

ТЕОРИЯ ГРУПП ЛИНЕЙНЫХ ПОДСТАНОВОК

§ **1.** *Дробно-линейной подстановкой* называется подстановка вида

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Она преобразует в себя плоскость комплексного переменного, оставляя неподвижными те точки, координата которых удовлетворяет уравнению

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0. \tag{1}$$

Если заданы какие-либо три точки на плоскости комплексного переменного, то можно выбрать коэффициенты подстановки так, чтобы эти три точки преобразовывались в другие три наперед заданные точки. В дальнейшем мы будем называть подстановку только что указанного вида просто *линейной подстановкой* и будем предполагать, если не будет оговорено особо, что определитель подстановки равен единице, т. е.

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{1_1}$$

Уравнение всякой окружности или прямой в комплексных координатах может быть написано в виде

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0,^{*} \tag{2}$$

где a и c — вещественны. В дальнейшем мы будем называть *окружностью* как действительную окружность, так и прямую линию. Уравнение (2) может изображать окружность, точку или мнимое геометрическое место. Во втором и третьем случаях мы будем соответственно говорить об окружности с нулевым радиусом и о мнимой окружности.

Линейная подстановка преобразует уравнение (2) к уравнению того же вида, причем оба эти уравнения принадлежат одновременно к одному из указанных выше трех случаев. Если

---

*Знаком $\bar{x}$ мы обозначим число, сопряженное с числом x.

новое уравнение совпадает с прежним, то мы будем говорить, что подстановка преобразует в себя соответственную окружность. Если эта последняя вещественна, то подстановка может либо преобразовывать в себя те части плоскости, на которые вся плоскость делится указанной окружностью, либо может преобразовывать одну из этих частей в другую. Например, подстановки, преобразующие в себя часть плоскости, лежащую по одну сторону вещественной оси, суть подстановки с вещественными коэффициентами и положительным определителем. Указанную часть плоскости мы будем называть *верхней полуплоскостью*, если она заключает положительное направление мнимой оси. Остальную часть плоскости будем называть *нижней полуплоскостью.* Подстановки с вещественными коэффициентами и отрицательным определителем преобразуют одну полуплоскость в другую.

Если уравнение (1) имеет различные корни a и b, то подстановка может быть представлена в виде

$$\frac{z_1 - a}{z_1 - b} = k\frac{z - a}{z - b}$$

или в виде

$$z_1 - a = k(z - a),$$

если один из корней уравнения (1) равен бесконечности. Число k называется *множителем подстановки* и определяется как частное корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \delta - \omega, & \beta \\ \gamma, & \alpha - \omega \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Если модуль числа k равен единице, то подстановка называется *эллиптической*. Если k — число вещественное, отличное от -1, то подстановка называется *гиперболической*, и, наконец, если k имеет мнимую часть и по модулю отлично от единицы, то подстановка называется *локсодромической.* Если $k = 1$, то подстановка приводится к тождественному преобразованию.

Если уравнение (1) имеет двукратный корень, то подстановка приводится к виду

$$\frac{1}{z_1 - a} = \frac{1}{z - a} + l$$

или к виду

$$z_1 = z + l,$$

если этот двукратный корень равен бесконечности. Такая подстановка называется *параболической.*

Рассмотрение уравнений (1) и (3) приводит к следующему результату: подстановка, указанная в начале настоящего параграфа, будет эллиптической, гиперболической, параболической или локсодромической соответственно при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} &\alpha+\delta \quad \text{— вещественно и } |\alpha+\delta|<2, \\ &\alpha+\delta \quad \text{— вещественно и } |\alpha+\delta|>2, \\ &\alpha+\delta \quad \text{— вещественно и } |\alpha+\delta|=2, \\ &\alpha+\delta \quad \text{имеет мнимую часть}^{*}. \end{aligned}$$

Произведением линейных подстановок называется подстановка, получаемая в результате последовательного применения данных подстановок. Мы будем обозначать подстановку одною буквою и будем произведение подстановок читать справа налево. Если S_1 и S_2 суть соответственно подстановки

$$\frac{\alpha_1 z+\beta_1}{\gamma_1 z+\delta_1} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2},$$

то подстановка $S_2 S_1$ имеет вид

$$\frac{(\alpha_1\alpha_2+\gamma_1\beta_2)z+(\beta_1\alpha_2+\delta_1\beta_2)}{(\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\delta_2)z+(\beta_1\gamma_2+\delta_1\delta_2)}$$

и ее определитель равен произведению определителей подстановок S_1 и S_2. Знаком S^{-1} обозначается подстановка

$$\frac{\delta_1 z-\beta_1}{-\gamma_1 z+\alpha_1},$$

обратная подстановке S_1, т. е. удовлетворяющая условию

$$S_1^{-1}S_1=S_1S_1^{-1}=1,$$

где числом 1 мы обозначаем тождественное преобразование.

Составим из подстановок S и T новую подстановку:

$$U=TST^{-1}. \tag{4}$$

Легко непосредственно видеть, что подстановки S и U будут одного и того же характера, и неподвижные точки подстановки U могут быть получены из неподвижных точек подстановки S при

---

[*] При этом мы предполагаем, что выполнено условие (1_1).

помощи подстановки T. Если подстановка S преобразует в себя некоторые окружности, то подстановка U преобразует в себя те окружности, которые получаются из только что упомянутых при помощи подстановки T.

§ **2.** Указанные в предыдущем параграфе подстановки называются иногда *подстановками первого рода* в отличие от подстановок второго рода, имеющих вид

$$z_1 = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}.$$

Такая подстановка преобразует окружность в окружность. К этим подстановками приложимо указанное выше понятие о произведении, и произведение двух линейных подстановок второго рода дает подстановку первого рода. В дальнейшем, где это не вызовет сомнений, мы будем подстановки первого рода называть просто линейными подстановками.

Наиболее важным случаем подстановок второго рода является отображение в окружности. Координаты точек, гармонических по отношению к окружности (2), связаны между собою подстановкою

$$z_1 = \frac{-\bar{b}\bar{z}-c}{a\bar{z}+b}.$$

Если мы совершим над плоскостью линейное преобразование первого или второго рода, то, как это легко видеть непосредственно, преобразованные точки будут гармоническими по отношению к преобразованной окружности.

Совокупность каких-либо двух отображений приводит к линейной подстановке. Покажем, что эта последняя будет гиперболической, если окружности, в которых совершалось отображение, не имеют общих точек, параболической, если эти окружности касаются, и эллиптической, если они пересекаются.

Пусть C_1 и C_2 — заданные окружности, а σ_1 и σ_2 — отображения в них. Надо исследовать линейную подстановку

$$S = \sigma_2\sigma_1.$$

Пусть T — линейная подстановка, преобразующая C_1 в вещественную ось и C_2 в какую-либо окружность C, отличную от прямой. Назовем буквами α, β — координаты центра этой окружности, а буквою r — ее радиус. Обозначим буквами τ_1 и τ_2 отображения в вещественной оси и окружности C и рассмотрим линейную подстановку

$$S_1 = \tau_2\tau_1.$$

Подстановки S_1 и S связаны соотношением (4) и имеют поэтому одинаковый характер. Подстановка же S_1 может быть представлена в виде

$$z_1 = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 i)z + (r^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2)}{z + (-\alpha_1 + \beta_1 i)}.$$

Разделим все коэффициенты подстановки на ri для того, чтобы привести определитель подстановки к единице. Удерживая обычное обозначение коэффициентов подстановки, получим для подстановки S_1

$$\alpha + \delta = \frac{2\beta}{r},$$

откуда и вытекает непосредственно наше утверждение.

§ 3. Рассмотрим теперь те окружности, которые преобразуются в себя какой-либо линейной подстановкой первого рода S. Пусть эта последняя будет эллиптической.

Применяя преобразование (4), можем получить эллиптическую подстановку U с неподвижными точками 0 и ∞. Эта последняя подстановка имеет вид

$$z_1 = e^{\varphi i} z$$

и преобразует в себя окружности с центром в начале координат. Если $\varphi = \pi$, то кроме этих окружностей преобразуются в себя также и прямые, проходящие через начало координат. В настоящем параграфе мы исключим из рассмотрения этот последний случай, который легко разобрать самостоятельно. Принимая во внимание сказанное в предыдущем параграфе о гармонических точках, можем утверждать, что подстановка S преобразует в себя те и только те окружности, по отношению к которым ее неподвижные точки будут гармоническими. Точно так же можно убедиться, что гиперболическая подстановка преобразует в себя окружности, проходящие через неподвижные точки подстановки, а локсодромическая подстановка не преобразует в себя никакую окружность.

Если S есть параболическая подстановка, то, как и раньше, можем получить параболическую подстановку U с неподвижной точкой на бесконечности. Подстановка эта будет иметь вид

$$z_1 = z + l$$

и будет преобразовывать в себя семейство параллельных прямых. Следовательно, подстановка S преобразует в себя семейство окружностей, взаимно касающихся в неподвижной точке этой подстановки.

Если z — какая-либо точка плоскости, а S — подстановка, отличная от локсодромической, то, как это непосредственно ясно из рассмотрения подстановки U, через точку z проходит одна и только одна окружность, преобразующаяся в себя подстановкою S.

Если мы над точкою z будем совершать преобразование S^n, где n — какое-либо целое число, то преобразованная точка будет находиться на только что указанной окружности. Если при этом S будет гиперболической подстановкой, то при стремлении n к $+\infty$ преобразованная точка будет стремиться к одной из неподвижных точек подстановки, а при стремлении n к $-\infty$ — к другой неподвижной точке. В случае параболической подстановки оба эти предела совпадут. Все это непосредственно ясно из самого вида подстановки.

Рассмотрим теперь эллиптическую подстановку S, представив ее в виде

$$z_1 = e^{\varphi i} z,$$

где φ будем называть *углом вращения подстановки*. Если φ соизмеримо с π, то найдется такое целое число q, что

$$U^q = 1,$$

т. е. подстановка будет периодической. Если же φ окажется несоизмеримо с π, то можно найти таких два целых числа m и n, что выражение

$$2m\pi + n\varphi$$

будет сколь угодно близко ко всякому наперед заданному числу, т. е. в этом случае точки, получаемые из любой точки плоскости при помощи подстановок U^n, заполнят соответствующую окружность повсюду плотно. Эллиптические подстановки S и U, связанные соотношением (4), будут иметь одинаковый угол вращения. Если эллиптическая подстановка получается от отображения в двух пересекающихся окружностях, то угол $\varphi/2$ равен углу, под которым пересекаются эти окружности. Это легко проверить, если преобразовать точки пересечения окружностей в начало координат и в бесконечно удаленную точку и затем воспользоваться соотношением (4).

Рассмотрим теперь локсодромическую подстановку, представив ее в виде

$$z_1 = re^{\varphi i} z.$$

Определим вещественное число m из равенства

$$r = (e^{\varphi})^m.$$

Указанная локсодромическая подстановка преобразует в себя спираль:

$$\rho = c(e^{\theta})^m,$$

и через всякую точку плоскости проходит одна из таких спиралей. Применяя к какой-либо точке плоскости степени локсодромической подстановки, мы будем получать точки, стремящиеся так же, как и в случае гиперболической подстановки, к неподвижным точкам локсодромической подстановки и остающиеся на указанной выше спирали.

§ 4. *Группой линейных подстановок* называется совокупность этих подстановок, обладающая теми свойствами, что если какая-либо подстановка принадлежит совокупности, то и обратная подстановка принадлежит совокупности, и что произведение каких-либо двух подстановок, принадлежащих совокупности, представляет собою подстановку, также принадлежащую ей. Группа, содержащая конечное число подстановок, называется *конечной*. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь конечные и такие бесконечные группы, совокупность подстановок которых представляет собою исчислимую совокупность, т. е. все подстановки которых могут быть пронумерованы. Если среди подстановок группы можно выбрать конечное число таких подстановок, что всякая подстановка группы может быть представлена в виде произведения целых степеней этих подстановок, то говорят, что группа имеет конечное число производящих подстановок[13].

В дальнейшем мы будем называть *эквивалентными точками* такие точки, которые могут быть получены одна из другой при помощи какой-либо подстановки группы.

Если S есть какая-либо подстановка группы, то совокупность подстановок U, определяемых равенством (4), представляет собою также группу, которая называется *подобной*[14] данной группе. Всякой подстановке одной группы соответствует того же характера подстановка подобной группы, и мы в дальнейших вопросах часто будем заменять группу ей подобной группой. При этом мы будем пользоваться произвольностью подстановки T для того, чтобы нормировать одну из подстановок группы. Если все подстановки группы преобразуют в себя некоторую окружность, то все подстановки подобной группы преобразуют в себя ту окружность, которая получается из вышеупомянутой при помощи подстановки T. Мы будем говорить в этих случаях, что группа преобразует в себя окружность. Такая группа не может содержать локсодромических подстановок. Рассмотрим теперь вообще группы, не содержащие локсодромических подстановок и докажем относительно таких групп теорему*:

Теорема 1. *Если группа не содержит локсодромических подстановок, то возможны следующие случаи:*

1) *группа подобна группе, образованной из гомотетического преобразования и перенесения плоскости;*

2) *группа подобна группе движения плоскости;*

3) *группа содержит лишь эллиптические подстановки;*

4) *группа преобразует в себя некоторую окружность.*

1). Рассмотрим сначала тот случай, когда все подстановки группы имеют одну и ту же неподвижную точку. Пользуясь подобной группой, мы можем предположить, что эта точка есть бесконечно удаленная точка. Все подстановки группы имеют вид

$$z_1 = az + b. \tag{5}$$

Если среди подстановок группы есть такие, в которых $|a| \neq 1$, то такие подстановки являются гиперболическими и среди подстановок группы не может быть эллиптических подстановок, ибо произведение такой подстановки на вышеуказанную гиперболическую представляло бы собою локсодромическую подстановку. В рассматриваемом случае группа приводится к гомотетическому преобразованию и перенесению плоскости.

2). Если во всех подстановках только что рассмотренной группы $|a| = 1$, то группа есть группа движения плоскости и она может содержать эллиптические и параболические подстановки.

3). Мы можем теперь считать, что никакая точка не является неподвижной точкой всех подстановок группы. Предположим, что группа содержит эллиптическую подстановку S_0. За неподвижные точки этой подстановки мы можем принять точки $z = 0$ и $z = \infty$, так что подстановка будет вида

$$z_1 = \frac{e^{\varphi i} z}{e^{-\varphi i}}. \tag{6}$$

---

*См. Fubini [11, p. 189–193].

Принимая во внимание, что все степени S_0 также должны принадлежать группе, мы можем считать, что

$$0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Пусть какая-либо другая подстановка S группы будет

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Принимая во внимание, что подстановки S и $S_0 S$ не локсодромические, мы можем утверждать, что $(\alpha + \delta)$ и $(\alpha e^{\varphi i} + \delta e^{-\varphi i})$ — вещественны, т. е.

$$\alpha = \bar{\delta}.$$

Среди подстановок группы можно найти такую, в которой β и γ будут отличны от нуля. Действительно, β и γ не могут быть равны нулю во всех подстановках, ибо в таком случае эти подстановки имели бы одну и ту же неподвижную точку $z = 0$ или $z = \infty$. Поэтому в группе либо будет такая подстановка, в которой β и γ одновременно будут отличны от нуля, либо такие две подстановки

$$\frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}, \qquad \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2},$$

в которых β_1 и γ_2 будут отличны от нуля. В последнем случае произведение этих двух подстановок приведет к искомой подстановке, и, таким образом, среди подстановок группы всегда будет подстановка вида

$$\frac{\alpha_2 z + \beta_2'}{\gamma_2' z + \bar{\alpha}_2}, \tag{6$_1$}$$

где β_2' и γ_2' — отличны от нуля. Соотношение (1_1) показывает, что произведение $\beta_2'\gamma_2'$ должно быть вещественным. Предположим, что оно отрицательно. Можно найти такое вещественное, отличное от нуля, число b, что числа $-\beta_2' b$ и γ_2/b будут сопряженными. Будем рассматривать группу, подобную исследуемой, приняв в формуле (4) за подстановку T подстановку $z_1 = bz$. При этом подстановка S_0 не изменится, а подстановка (6) примет вид

$$z_1 = \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{-\bar{\beta}_2 z + \bar{\alpha}_2}, \tag{7}$$

где β_2 — отлично от нуля и свойство сопряженности первого и четвертого коэффициентов сохраняется. Отсюда легко непосредственно видеть, что всякая подстановка группы имеет вид (7).

Все эти подстановки должны быть эллиптическими, ибо, если $\beta_2 \neq 0$, то $|\alpha_2| < 1$ и $|\alpha_2 + \bar{\alpha}_2| < 2$. Если же $\beta_2 = 0$, то подстановка имеет вид (6).

Разберем теперь тот случай, когда в подстановке (6_1) произведение $\beta_2' \gamma_2'$ — положительно. В этом случае совершенно так же, как и раньше, можно показать, что все подстановки группы приводятся к виду

$$z_1 = \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\bar{\beta}_2 z + \bar{\alpha}_2} \tag{7_1}$$

и преобразуют в себя окружность:

$$z\bar{z} = 1.$$

В этом случае среди подстановок группы будут наверно гиперболические подстановки. Действительно, обозначим буквою S_2 ту из подстановок (7_1), в которой $\beta_2 \neq 0$, и составим подстановку $S_2 S_0 S_2^{-1} S_0^{-1}$. Она и будет гиперболической.

Рассмотрим теперь тот случай, когда среди подстановок группы нет эллиптических подстановок. Предположим, что группа содержит гиперболическую подстановку S_0, которую можем считать представленной в виде

$$z_1 = kz,$$

где k — положительное число. Пусть какая-либо подстановка группы имеет вид

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Рассматривая не локсодромические подстановки S и SS_0, легко непосредственно видеть, что α и δ должны быть вещественными. Совершенно так же, как и раньше, переходим к подобной группе при помощи подстановки $z_1 = bz$, где b — соответственным образом подобранное вещественное число, и эта новая группа будет иметь подстановки с вещественными коэффициентами и, следовательно, будет преобразовывать в себя вещественную ось.

4). Остается рассмотреть тот случай, когда группа имеет все подстановки — параболические, но не с одинаковой неподвижной точкой. Покажем, что такого случая не может быть.

Пусть S_1 и S_2 — какие-либо две подстановки группы, имеющие различные неподвижные точки, которые мы можем предположить в точках $z = \infty$ и $z = 0$. Легко непосредственно убедиться, что подстановка $S_2 S_1^m$ не может быть параболической при всяком целом m.

Теорема 1 доказана, таким образом, вполне, и она дает нам все виды групп, не содержащих локсодромических подстановок.

К группам пунктов 1) и 2) как частный случай принадлежат т. н. циклические группы, т. е. группы, состоящие из степеней одной подстановки. Мы видим также, что всякая группа пункта 4) всегда содержит гиперболические подстановки, если она не подходит ни под один из первых трех пунктов. Заметим при этом, что группы пунктов 1) и 4) могут состоять из одних гиперболических подстановок.

Рассмотрим теперь группы, состоящие из одних эллиптических подстановок. Эти группы могут принадлежать пунктам 2) и 3). Если группа содержит эллиптическую подстановку с углом вращения $2\pi p/q$, где p и q — взаимно простые числа, то некоторая степень этой подстановки будет иметь угол вращения $2\pi q^{-1}$, и, следовательно, если группа содержит конечное число эллиптических подстановок с одинаковыми неподвижными точками, то все эти подстановки являются степенью одной из них.

Группы пункта 2) могут содержать одни эллиптические подстановки лишь в том случае, когда обе неподвижные точки всех подстановок группы одинаковы. Действительно, пусть S_1 и S_2 — две подстановки группы, имеющие одну неподвижную точку одинаковую, а две другие — различные. Легко убедиться, что подстановка $S_2S_1S_2^{-1}S_1^{-1}$ будет параболической.

Подстановки пункта 3) все эллиптические и приводятся к виду (7). Если группа конечна, то все ее подстановки — эллиптические и периодические. Такая группа может принадлежать к пункту 2), если она будет циклической. Если же она принадлежит пункту 3), то все ее подстановки преобразуют в себя мнимую окружность:

$$z\bar{z} = -1.$$

Такие группы называются *группами правильных многогранников*. Они разделяются на четыре класса и представляют собою группы уравнения Gauss'a в тех случаях, когда задача обращения для этого уравнения приводит к рациональным функциям*.

§ 5. Мы переходим теперь к исследованию бесконечных групп. Для таких групп весьма важными являются понятия о *бесконечно малой подстановке* и *о собственной прерывности*. Говорят,

---

*См. Fubini [11, p. 185–187; 225–231]; Bianchi [12, p. 99–129].

что группа содержит бесконечно малую подстановку, если можно выбрать в группе такую последовательность подстановок

$$\frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

отличных от тождественной подстановки*, что[15]

$$\lim_{n=\infty} \beta_n = \lim_{n=\infty} \gamma_n = 0,$$
$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \lim_{n=\infty} \delta_n = \pm 1.$$

В дальнейшем будем называть группу, не содержащую бесконечно малой подстановки, *прерывной группой*[16]. Если группа прерывна, то и все ее подобные группы прерывны. Простейшим примером непрерывной группы является группа, состоящая из степеней непериодической эллиптической подстановки.

Рассмотрим вопрос о прерывности бесконечных групп, состоящих лишь из эллиптических подстановок. Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма 1. *Если группа содержит бесчисленное множество различных подстановок с ограниченными в своей совокупности коэффициентами, то такая группа непрерывна.*

Пусть только что упомянутые подстановки S_n будут

$$\frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Мы можем из этой последовательности выбрать такую последовательность, в которой все коэффициенты стремятся к конечным пределам. Сохраняя прежнее обозначение значков, положим

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \alpha; \quad \lim_{n=\infty} \beta_n = \beta; \quad \lim_{n=\infty} \gamma_n = \gamma; \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = \delta.$$

Легко непосредственно убедиться, что последовательность подстановок $S_{n-1}^{-1} S_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и приводит к бесконечно малой подстановке.

Рассмотрим бесконечную группу эллиптических подстановок. Если такая группа принадлежит пункту 2), то все ее подстановки имеют вид (6), и к ним непосредственно приложима только что доказанная лемма. Если же группа принадлежит пункту 3), то ее подстановки должны иметь вид

$$\frac{\alpha_n z + \beta_n}{-\bar{\beta}_n z + \bar{\alpha}_n},$$

---

*Здесь, как и в дальнейшем, мы считаем выполненными условия (1_1).

и соотношение

$$|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = 1$$

непосредственно показывает, что и в этом случае приложима лемма 1. Мы видим, таким образом, что всякая бесконечная группа, состоящая из одних эллиптических подстановок, будет группой непрерывной. Всякая конечная группа — прерывна.

Группа называется *собственно прерывной в точке* z_0 ^{17}, если можно описать вокруг этой точки настолько малую область, что будет существовать лишь конечное число подстановок группы, преобразующих какие-либо две точки этой области одну в другую. Точки эти могут быть и одинаковые*. Точку z_0 мы будем в этом случае называть *точкою прерывности группы.* Все точки, достаточно близкие к z_0, будут также точками прерывности. Точки прерывности подобной группы могут быть получены из точек прерывности первоначальной группы при помощи подстановки T, входящей в соотношение (4). Непрерывная группа не может иметь точек прерывности.

Назовем *особыми точками группы* неподвижные точки не эллиптических подстановок группы и точки сгущения этих точек. Ясно, что особые точки группы не могут быть ее точками прерывности.

§ **6.** Докажем в настоящем параграфе следующую важную для нас теорему:

Теорема 2. *Прерывная группа будет собственно прерывной во всякой точке плоскости, отличной от особой точки группы.*

Мы возьмем какую-либо точку z_0, отличную от особой точки, и докажем, что если эта точка не есть точка прерывности группы, то последняя содержит бесконечно малую подстановку. Итак, пусть в точке z_0 и вблизи этой точки не лежат неподвижные точки не эллиптических подстановок группы и пусть имеется ряд точек z_n' и z_n'', таких, что существуют различные подстановки группы S_n, преобразующие z_n' в z_n'', причем

$$\lim_{n=\infty} z_n' = \lim_{n=\infty} z_n'' = z_0.$$

Предположим, что среди подстановок S_n есть бесчисленное множество гиперболических или локсодромических. Пусть эти подстановки имеют вид

$$\frac{z_1 - a_n}{z_1 - b_n} = k_n \frac{z - a_n}{z - b_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

---

*См. Fubini [11, p. 113]; Klein [13, Bd. 1, S. 63]; Schlesinger [10, Bd. II, S. 279].

где [индекс]^{18} n имеет уже другое значение.

Выберем из этой последовательности подстановок такую последовательность, в которой числа a_n и b_n стремились бы к пределам a и b, которые мы можем предполагать конечными. Из равенства

$$\frac{z_n'' - a_n}{z_n'' - b_n} = k_n \frac{z_n' - a_n}{z_n' - b_n}$$

следует непосредственно, что k_n стремится к единице, ибо a и b должны быть отличны от z_a.

Удерживая прежнее обозначение значков, напишем выбранную последовательность подстановок в виде

$$z_1 = \frac{(1 + b_n l_n)z - a_n b_n l_n}{l_n z + (1 - a_n l_n)}, \tag{8}$$

где

$$l_n = \frac{1 - k_n}{a_n - b_n}.$$

Для приведения определителя написанных подстановок к единице надо все элементы разделить на $\sqrt{k_n}$. Если $a \neq b$, то l_n стремится к нулю, и последовательность (8) приводит к бесконечно малой подстановке. Покажем, что в случае $a = b$ l_n стремится к нулю. Если бы это было не так, то существовало бы бесчисленное множество значений n, при которых величина

$$m_n = \frac{1}{l_n}$$

была бы ограниченной. Равенство (8) дает нам

$$z_n' z_n'' - z_n'(b_n + m_n) + z_n''(m_n - a_n) + a_n b_n = 0.$$

Будем придавать n только что указанные значения и в пределе получим невозможное равенство:

$$(z_0 - a)^2 = 0.$$

Если бы среди подстановок S_n было бы бесчисленное множество параболических, то мы могли бы выбрать такую последовательность подстановок:

$$\frac{1}{z_1 - a_n} = \frac{1}{z - a_n} + c_n,$$

что a_n стремится к конечному пределу, отличному от z_0, а c_n — к нулю. Последовательность эта приводит к бесконечно малой подстановке.

Точно так же, как и раньше, мы доказали бы непрерывность группы и в том случае, когда среди подстановок S_n было бы бесчисленное множество эллиптических подстановок, и если бы неподвижные точки этих подстановок имели бы точки сгущения, отличные от z_0. Если бы одна из неподвижных точек эллиптических подстановок стремилась к z_0, а другая — к конечному пределу b, отличному от z_0, то к подстановкам (8) была бы приложима лемма 1. Остается рассмотреть тот случай, когда все подстановки S_n — эллиптические, причем неподвижные точки этих подстановок стремятся к z_0. Если все подстановки группы эллиптические или если существуют в группе непериодические эллиптические подстановки, то, как мы указали выше, группа непрерывна. Можно, следовательно, предположить, что все эллиптические подстановки S_n, неподвижные точки которых мы можем предположить различными, периодичны и что в группе содержатся не эллиптические подстановки. Обозначим одну из них буквою S, и пусть d — одна из ее неподвижных точек. Пусть подстановки S_n имеют вид

$$\frac{z_1 - a_n}{z_1 - b_n} = k_n \frac{z - a_n}{z - b_n}, \tag{9}$$

где

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = z_0. \tag{10}$$

Мы будем выбирать из степеней S_n такую степень, чтобы разность $(1 - k_n)$ имела бы нижний предел, отличный от нуля, и пусть подстановки (9) и представляют собою эти степени. Подстановки эти преобразуют точку d в некоторую точку d_n. Выберем последовательность [индекса] n так, чтобы d_n стремилось к пределу, и пусть он равен d_0. Соотношение

$$\lim_{n=\infty} \frac{d_n - a_n}{d_n - b_n} = \lim_{n=\infty} k_n \neq 1$$

показывает нам, что $d_0 = z_0$, и, следовательно, ряд не эллиптических подстановок $S_n S S_n^{-1}$ показывает, что z_0 есть особая точка группы. Теорема 2 доказана, таким образом, вполне.

Из предыдущих рассуждений следует также, что если z_0 есть точка прерывности группы и если сколь угодно близко к этой точке существуют эквивалентные точки, то подстановки, связывающие эти точки, суть эллиптические подстановки, имеющие одну из неподвижных точек в точке z_0. Вторые неподвижные точки этих подстановок также должны быть одинаковы, ибо в противном случае существовала бы параболическая подстановка с неподвижной точкой z_0, как это указано в конце § 4. Следовательно, все указанные эллиптические подстановки суть степени одной и той же подстановки.

§ 7. Если группа имеет точки прерывности, то она называется *собственно прерывной*[19] *на плоскости комплексного переменного.* Совокупность точек прерывности составляет область прерывности[20], которая будет состоять из одной или нескольких или даже бесчисленного множества связных областей. Граничные точки этих областей суть особенные точки группы. Они образуют замкнутую совокупность точек, и в случае собственной прерывности группы совокупность эта не может иметь внутренних точек[21].

Действительно, в противном случае существовал бы такой круг D, все точки которого были бы особыми точками группы. Внутри этого круга мы могли бы найти неподвижную точку не эллиптической подстановки группы. Взяв теперь какую-либо точку плоскости и применив к ней соответственным образом выбранную степень этой подстановки, мы получили бы преобразованную точку внутри D, т. е. точка эта была бы особенной точкой группы. Но тогда и взятая нами точка была бы особенной точкой, ибо, если некоторая точка плоскости является особенной, то и все ее эквивалентные точки будут таковыми же. В этом случае группа не могла бы быть собственно прерывной.

Таким образом, в случае собственной прерывности группы все точки плоскости распадаются на две совокупности: совокупность точек прерывности и особых точек. Первая совокупность может состоять из ряда областей, а вторая совокупность не заполняет никакую область на плоскости, и ее точки являются предельными точками точек первой совокупности. Всякая подстановка группы преобразует в себя каждую из указанных двух совокупностей.

Если прерывная группа не будет собственно прерывной, то все точки плоскости являются особенными точками, т. е. неподвижные точки не эллиптических подстановок покрывают плоскость повсюду плотно. Принимая во внимание свойство степеней не эллиптических подстановок, мы можем утверждать, что точки, эквивалентные какой угодно точке плоскости, покроют плоскость также повсюду плотно*. Точно так же в слу-

---

*См. Fubini [11, p. 405–407].

чае собственно прерывной группы точки, эквивалентные любой точке плоскости, образуют совокупность, для которой всякая особая точка группы является точкою сгущения. Отсюда непосредственно следует, что неподвижные точки локсодромических подстановок, если последние участвуют в группе, заполняют совокупность особых точек повсюду плотно. То же можно сказать и о гиперболических и параболических подстановках.

Если мы переходим к подобной группе, пользуясь формулой (4), то совокупность особенных точек этой последней группы получается из совокупности особенных точек первоначальной группы при помощи подстановки T.

§ **8.** Рассмотрим теперь группы, подстановки которых преобразуют в себя некоторую окружность. Можно считать, что эта последняя есть вещественная ось и что, следовательно, коэффициенты всякой подстановки — числа вещественные или чисто мнимые. Можно исключить последний случай, если допустить, что определитель подстановки равен 1.

В рассматриваемом случае группа не содержит локсодромических подстановок, и все неподвижные точки гиперболических и параболических подстановок находятся на вещественной оси. Если такая группа будет прерывна, то она будет собственно прерывна в каждой из полуплоскостей. Вообще прерывная группа, все подстановки которой преобразуют в себя некоторую окружность, будет собственно прерывна как внутри, так и вне этой окружности.

Рассматриваемая группа называется *группою первого рода,* если все ее подстановки преобразуют в себя часть плоскости, находящуюся по одну сторону от вышеупомянутой окружности. В противном случае группа называется *группою второго рода.* Если все точки окружности являются особыми точками группы, то группа называется *фуксовой группой с предельным кругом.* В случае же, когда на окружности находятся точки прерывности, группа называется *фуксовой группой с главным кругом.*

Во всякой группе второго рода можно найти подгруппу индекса 2, которая является группой первого рода, так что достаточно рассмотреть лишь группы первого рода. Примером фуксовой группы с предельным кругом является группа подстановок с целыми коэффициентами и с определителем, равным единице.

Если не существует такой окружности, которую преобразуют в себя все подстановки группы, то прерывность такой группы не является достаточным условием собственной прерывности. Например, так называемая группа Picard'а, состоящая из подстановок с целыми комплексными коэффициентами и определителем, равным единице, не содержит бесконечно малой подстановки, но при этом оказывается, что всякая точка плоскости есть особенная точка группы*.

Прерывная бесконечная группа, не преобразующая в себя никакую окружность или точку, называется *клейновой группой*. Таким образом, не всякая клейнова группа будет собственно прерывной группой.

§ **9.** При применении линейных групп в теории функций имеют значение в настоящее время лишь собственно прерывные группы.

Определим теперь для всякой собственно прерывной группы область, аналогичную известному в теории эллиптических функций параллелограмму периодов. Мы будем называть *фундаментальной областью собственно прерывной группы* Γ *всякую область, обладающую следующими свойствами:*

1). *Область эта связна, нигде не налегает сама на себя и имеет четное число сторон, каждая из которых может состоять из конечного числа аналитических кривых.*

2). *Стороны области попарно могут быть преобразованы одна в другую при помощи подстановок группы* Γ.

3). *Если мы применим к области все подстановки группы* Γ, *то какие-либо две области из полученного таким образом бесчисленного множества областей могут иметь общие точки лишь на своем контуре.*

4). *Вершины области, т. е. точки пересечения сторон, могут быть неподвижными точками лишь эллиптических и параболических подстановок группы* Γ, *и те стороны области, которые пересекаются в вершине, являющейся неподвижной точкой параболической подстановки, не должны быть касательны в этой вершине к тем окружностям, которые преобразуются в себя при помощи только что указанной параболической подстановки.*

Фундаментальная область может быть многосвязной областью и может совершенно не иметь вершин, если каждая из ее сторон представляет собою замкнутую кривую. В приложениях нам придется встречаться лишь с односвязными фундаментальными областями, и мы в дальнейшем вместо термина «фунда-

---

*См. Klein [13, Bd. 1, S. 76].

ментальная область» будем часто пользоваться термином «*фундаментальный многоугольник*».

Пусть $2n$ — число сторон такого многоугольника и пусть S_1, $S_2, \ldots, S_n$ — те подстановки группы Г, которые преобразуют стороны эти попарно одну в другую. Примем эти подстановки за производящие подстановки и образуем таким образом некоторую группу Σ. Если эта последняя совпадет с группою Г, то мы назовем вышеуказанный многоугольник *полным фундаментальным многоугольником группы* Г, если же Σ есть лишь подгруппа группы Г, то будем называть многоугольник *неполным фундаментальным многоугольником.* Если применим к фундаментальному многоугольнику подстановки S_i и S_i^{-1}, то вдоль каждой стороны к нему будет прилегать эквивалентный многоугольник. Стороны вновь полученных многоугольников будут попарно эквивалентны, и мы каждый из них можем окружить эквивалентными многоугольниками, применяя к взятому многоугольнику подстановки группы Σ. Например, стороны того многоугольника, который получается из фундаментального при помощи подстановки S_1, будут связаны между собою подстановкам $S_1 S_i S_1^{-1}$.

Вышеописанным способом мы можем получить связную сеть многоугольников, каждый из которых может быть получен из фундаментального при помощи подстановки группы Σ. Наоборот, всякая подстановка этой группы преобразует фундаментальный многоугольник в один из многоугольников сети. Для примера рассмотрим подстановку $S_3 S_2^{-1} S_1$. Назовем a_i' и a_i такие две стороны фундаментального многоугольника, что a_i' получается из a_i при помощи подстановки S_i. Удержим те же обозначения и для эквивалентных сторон других многоугольников. Из фундаментального многоугольника перейдем в тот, который с ним соприкасается вдоль стороны a_3'. Из нового многоугольника перейдем в соседний, пересекая сторону a_2, и, наконец, из этого последнего перейдем в соседний, пересекая сторону a_1'. Легко видеть, что тот многоугольник, в который мы при этом вступим, может быть получен из фундаментального при помощи указанной выше подстановки $S_3 S_2^{-1} S_1$. Из этого примера видно, каким образом по заданной подстановке группы Σ строить последовательность многоугольников, приводящую к многоугольнику, соответствующему заданной подстановке.

Если S есть какая-либо подстановка группы Σ, то в многоугольнике, получаемом из фундаментального при помощи подстановки S, стороны попарно связаны подстановками SS_iS^{-1}, и многоугольник этот может быть принят за фундаментальный многоугольник. Подстановка S преобразует всю сеть многоугольников в себя.

Пусть совокупность подстановок Г может быть представлена в виде

$$\Sigma, T_1\Sigma, T_2\Sigma, \ldots, T_k\Sigma, \ldots,$$

где T_k — различные подстановки Г.

Подстановки T_k преобразуют полученную выше сеть в другие сети, и все они не налегают одна на другую, как это непосредственно следует из пункта 3) определения фундаментального многоугольника. Отметим при этом, что группа Σ может быть конечной лишь в том случае, когда и Г конечно. Действительно, в этом случае после применения конечного числа подстановок к фундаментальному многоугольнику в сети многоугольников не осталось бы свободных сторон, т. е. эта сеть должна была бы покрыть всю плоскость и, следовательно, группа Σ должна была бы совпадать с группою Г. Полученные выше сети мы назовем *эквивалентными сетями*. Все они представлены одним фундаментальным многоугольником, причем за этот последний мы могли бы принять любой многоугольник одной из указанных сетей.

§ **10.** Рассмотрим теперь вершины фундаментального многоугольника. Обозначим их буквами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ — последовательные многоугольники, имеющие общую вершину в точке A_1. Буквою $\mathcal{P}_1$ мы обозначим сам фундаментальный многоугольник. Многоугольник $\mathcal{P}_k$ получается из многоугольника $\mathcal{P}_1$ при помощи подстановки группы Σ. Пусть A_k есть та вершина $\mathcal{P}_1$, которая преобразуется в A_1 только что указанной подстановкой. Среди последовательности вершин $A_1, A_2, \ldots$ найдутся две ближайшие одинаковые вершины. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что это будут вершины A_1 и A_m. Мы будем говорить, что вершины $A_1, A_2, \ldots, A_m$ образуют цикл. Если при этом $\mathcal{P}_m$ совпадает с $\mathcal{P}_1$, т. е. цепь многоугольников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_m$ вполне окружает точку A_1, то вершина A_1 точно так же, как остальные вершины, входящие в указанный выше цикл, называется подвижной, или случайной, вершиной (zufällige Ecke).

Если же $\mathcal{P}_m$ не совпадает с $\mathcal{P}_1$, то линейная подстановка S, преобразующая $\mathcal{P}_1$ в $\mathcal{P}_m$, имеет неподвижную точку A_1. Согласно пункту 4) определения фундаментальной области подстановка эта может быть эллиптической или параболической. В первом случае сумма углов многоугольника $\mathcal{P}_1$ при вершинах $A_1, \ldots, A_{m-1}$ должна иметь вид $2\pi/k$, где k — целое положительное число, большее единицы, и точка A_1 будет вполне окружена цепью, состоящей из $(m-1)k$ многоугольников.

Действительно, если мы построим многоугольники $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \ldots, \mathcal{P}_{m-1}$, то вблизи вершины A_1 останутся свободными одна сторона многоугольника $\mathcal{P}_1$ и одна сторона $\mathcal{P}_{m-1}$. Стороны эти будут связаны между собою подстановкою S, и, следовательно, угол между ними должен быть равен углу поворота этой подстановки. Если мы будем применять к построенной совокупности многоугольников степени подстановок S, то мы получим многоугольники, имеющие одну из вершин в точке A_1, и, в силу пункта 3) определения фундаментальной области, мы можем утверждать, что угол поворота подстановки S должен иметь вид $2\pi/k$, откуда и вытекает непосредственно наше утверждение. Все точки цикла $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ в рассматриваемом случае также будут неподвижными точками эллиптических подстановок группы Σ.

Допустим теперь, что вышеупомянутая подстановка S будет параболической подстановкой. В этом случае стороны многоугольников $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_{m-1}$, связанные подстановкою S, должны иметь общую касательную в точке A_1. Это непосредственно следует из самого вида параболической подстановки. Ту же касательную будут иметь и стороны остальных многоугольников $\mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_{m-2}$, и, следовательно, углы многоугольника $\mathcal{P}_1$ при вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ равны нулю. Все эти вершины являются неподвижными точками параболических подстановок группы Σ.

Принимая во внимание пункт 4) определения фундаментальной области, мы можем утверждать, что точки многоугольников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_{m-1}$, достаточно близкие к вершине A_1, будут находиться по одну сторону от прямой , проходящей через точку A_1 и преобразующейся в себя подстановкою S. Если мы проведем по ту же сторону от этой прямой окружность C_1, касательную к этой прямой в точке A_1, то окружность эта будет преобразовываться в себя при помощи подстановки S, и все точки указанных выше многоугольников, достаточно близкие к вершине A_1, будут находиться внутри C_1. Там же будут находиться и все те точки, которые получаются из только что указанных точек при помощи подстановки S^n.

Возьмем окружность C_1 настолько малой, чтобы она пересекала вне точки A_1 один раз каждую из тех двух сторон многоугольников $\mathcal{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, которые выходят из вершины A_1, и не пересекала бы ни одну из других сторон многоугольников $\mathcal{P}_i$. При этом непосредственно ясно, что всякая окружность C_2, находящаяся внутри окружности C_1 и касательная к ней в точке A_1, будет обладать теми же свойствами.

Если мы возьмем внутри C_1 какую-либо точку M, то точка эта будет находиться на одной из окружностей C. Пусть K и L — точки пересечения этой окружности с крайними сторонами многоугольников $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_{m-1}$. Точки K и L преобразуются одна в другую при помощи подстановок S и S^{-1}, и, применяя к дуге KL степени подстановки S, мы получим такую дугу, которая будет содержать точку M. Отсюда следует, что всякая точка, находящаяся внутри C_1, будет принадлежать одному из многоугольников сети. Если мы при этом опишем около точки A_1 сколь угодно малую окружность C_3, то, исключая из круга, ограниченного окружностью C_1, точки, лежащие внутри окружности C_3, мы получим область, которая может быть покрыта конечным числом многоугольников сети.

Последнее обстоятельство следует из того факта, что если нам дана область $\mathcal{B}$, все точки которой отстоят от неподвижной точки параболической подстановки S на расстоянии, большем какого-либо определенного положительного числа, и малое положительное число ε, то можно найти такое положительное число n, что все точки области, получаемой из области $\mathcal{B}$ при помощи подстановок S^k или S^{-k}, будут отстоять от неподвижной точки подстановки S на расстоянии, меньшем ε, если только k будет больше n. Это следует непосредственно из вида параболической подстановки. Заметим кроме того, что в силу пункта 3) определения фундаментальной области те неподвижные точки подстановок группы Σ, которые лежат внутри сети, должны находиться в вершинах какого-либо из многоугольников.

Вершины многоугольника мы будем называть *подвижными, эллиптическими и параболическими*. Если A_1 есть подвижная или эллиптическая вершина, то вышеуказанные вершины $A_2, A_3, \ldots, A_{m-1}$ представляют собою все вершины фундаментального многоугольника, эквивалентные A_1. Если же A_1 — параболическая вершина, то кроме указанного цикла вершин может существовать второй цикл вершин, эквивалентных A_1, и в этом случае мы будем иметь две цепи многоугольников, имеющих вершину в точке A_1. Части этих цепей, близкие к точке A_1, будут расположены по обе стороны той прямой, которая проходит через точку A_1 и преобразуется в себя соответственной параболической подстановкою. Если две параболические вершины фундаментального многоугольника совпадают в точке A_1, то будет существовать лишь одна цепь многоугольников, имеющих вершину в точке A_1, но многоугольники будут расположены вблизи точки A_1 по обе стороны указанной выше прямой. Более двух цепей быть не может.

§ 11. Перейдем теперь к изучению предельных точек сети многоугольников, т. е. таких точек, которые не принадлежат ни к одному из многоугольников, но внутри сколь угодно малой окружности, описанной около такой точки, находятся точки, принадлежащие сети. Мы будем причислять к предельным точкам и параболические вершины многоугольников.

Всякий многоугольник представляет собою замкнутую совокупность точек, а потому внутри указанной окружности, описанной около предельной точки, находятся точки, принадлежащие бесчисленному множеству многоугольников. Докажем теперь две леммы.

Лемма 2. *Если z_0 не есть особая точка группы, то можно описать около этой точки такую достаточно малую окружность, что из любой последовательности бесчисленного множества подстановок группы можно выбрать последовательность, сходящуюся внутри указанной окружности*.*

Пусть нам дана совокупность Σ_1 подстановок группы. Предположим сначала, что z_0 не есть неподвижная точка эллиптической подстановки группы. Как мы видели в § 6, в этом случае можно описать около z_0 столь малую окружность, что внутри нее не будет эквивалентных точек. Если мы совершим над этой окружностью все подстановки последовательности Σ_1, то полученные круги не будут иметь общих точек. Если мы при этом еще несколько уменьшим радиус окружности, описанной около точки z_0, то упомянутые круги оставят непокрытой некоторую область двух измерений. Если это будет часть плоскости, находящаяся вблизи бесконечно удаленной точки, то значения линейных подстановок совокупности Σ_1 внутри построенной около z_0 окружности будут ограничены, и к этой совокупности будет

---

*При этом бесконечно далекая точка принимается за возможный предел, и группа считается собственно прерывной.

приложим принцип сходимости. То же рассуждение применимо и в том случае, когда бесчисленное множество кругов находится на конечном расстоянии. Если же эти круги имеют единственную точку сгущения на бесконечности, то точка эта и является искомым пределом. В этом случае можно над плоскостью совершить такое линейное преобразование, чтобы предел был конечным и исследуемые подстановки — ограниченными.

Положим теперь, что z_0 есть неподвижная точка эллиптической подстановки группы, и опишем около этой точки достаточно малый круг C, который преобразуется в себя при помощи этой эллиптической подстановки. Из рассуждений § 6 ясно, что этот круг можно взять настолько малым, чтобы подстановки группы преобразовывали его либо в себя, либо в другие круги, которые или вовсе не имеют общих точек, или совпадают. Действительно, пусть S — эллиптическая подстановка, имеющая неподвижную точку z_0. Предположим, что подстановки S_1 и S_2 группы преобразуют круг C в круги C_1 и C_2, имеющие общую точку z_2, и пусть этой точке в круге C соответствуют точки z_2' и z_2''. Эти последние должны быть эквивалентными точками, но, как мы видели в § 6, можно взять круг C настолько малым, чтобы две эквивалентные точки, принадлежащие этому кругу, могли быть преобразованы одна в другую лишь при помощи степени S. Мы имеем следовательно соотношение

$$S_2^{-1}S_1 = S^k.$$

Круг C_1 может быть преобразован в C_2 подстановкою $S_2S_1^{-1}$, но эта подстановка может быть представлена в силу написанного выше соотношения в виде $S_1S^{-k}S_1^{-1}$, и, следовательно, она преобразует C_1 в себя, т. е. круг C_2 совпадает с C_1.

Дальнейшее доказательство леммы будет совершенно таким же, что и в рассмотренном [ранее] случае.

Лемма 3. *Предположим, что имеется сеть многоугольников, указанная в § 9, причем бесконечно удаленная точка находится или вне этой сети* или внутри одного из многоугольников, и пусть нам задано малое положительное число ρ. В этом случае можно провести через любую параболическую вершину одного из многоугольников столь малую окружность, преобразующуюся в*

---

*Так как не принадлежит ни к одному из многоугольников и не является предельной точкою сети.

себя при помощи соответствующей параболической подстановки S, чтобы радиусы всех эквивалентных окружностей были бы меньше ρ.

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями предыдущего параграфа. Пусть A_1 — указанная в условии леммы параболическая вершина. Как мы видели в § 10, можно через эту точку провести окружность, преобразующуюся в себя при помощи подстановки S, так, чтобы все точки, находящиеся внутри круга C_1, ограниченного этой окружностью, принадлежали сети.

Уменьшим радиус круга C_1 настолько, чтобы все эквивалентные круги, построенные при вершинах $A_2, \ldots, A_m$, не имели общих точек между собою и с кругом C_1. При этом в тех частях областей $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_{m-1}$, которые лежат внутри C_1, не будет находиться эквивалентных между собою точек, и потому любые две эквивалентные точки, лежащие внутри C_1, преобразовываются одна в другую при помощи некоторой степени подстановки S. Рассуждая так же, как и в лемме 2, можем утверждать, что круги, эквивалентные C_1, либо не будут иметь общих точек, либо будут совпадать.

Уменьшим, кроме того, радиус круга C_1 настолько, чтобы эквивалентные круги, проходящие через вершины того многоугольника, внутри которого находится бесконечно удаленная точка, не содержали бы этой точки. При этом все эти круги должны находиться на конечном расстоянии, и потому, если мы будем считать совпадающие круги за один круг, сумма их площадей должна быть ограниченной. Следовательно, число тех из этих кругов, радиус которых больше ρ, должно быть конечно.

Теперь нам остается только уменьшить радиус круга C_1 настолько, чтобы радиусы только что упомянутых кругов были меньше ρ.

§ **12.** Докажем в настоящем параграфе следующую теорему:

Теорема 3. *Всякая предельная точка сети многоугольников есть особая точка группы Σ.*

Предположим, что z_0 есть предельная точка сети и не есть особая точка группы Σ. Совершим над плоскостью такое линейное преобразование, чтобы значения подстановок группы Σ вблизи точки z_0 были ограничены (см. доказательство леммы 2) и чтобы бесконечно далекая точка удовлетворяла условиям леммы 3.

Разберем сначала тот случай, когда фундаментальный многоугольник $\mathcal{P}_1$ не имеет параболических вершин. В этом случае можно окружить каждую из его вершин цепью, состоящей из конечного числа эквивалентных многоугольников. Все эти многоугольники вместе с фундаментальным образуют некоторую область $\mathcal{E}$, и наименьшее расстояние точек контура этой области до точек контура многоугольника $\mathcal{P}_1$ будет больше некоторого положительного числа δ.

Опишем около точки z_0 как центра два концентрических круга C и C_1, пусть второй круг находится внутри первого. Круг C возьмем столь малым, чтобы значения всех подстановок группы Σ внутри этого контура были ограничены в своей совокупности. Внутри круга C_1 будут находиться хотя бы частью своей многоугольники сети, и таких многоугольников будет бесчисленное множество, так как z_0 по предложению есть предельная точка. Обозначим эти многоугольники буквами Q_k и пусть

$$z_1 = \varphi_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

— те подстановки группы Σ, которые преобразуют Q_k в многоугольник $\mathcal{P}_1$.

Согласно принципу сходимости мы можем выбрать из ряда функций $\varphi_k(z)$ сходящуюся внутри C последовательность, и сходимость будет равномерной в круге C_1. Мы удержим прежнее обозначение для значка у функций.

Выберем n настолько большим, чтобы при всяком целом положительном m в круге C_1 мы имели бы

$$|\varphi_{n+m}(z) - \varphi_n(z)| < \delta.$$

Пусть z_1 есть какая-либо точка, лежащая в круге C_1 и принадлежащая области Q_n. Точка $\varphi_n(z_1)$ принадлежит многоугольнику $\mathcal{P}_1$, все точки $\varphi_{n+m}(z_1)$ должны принадлежать области $\mathcal{E}$. Все эти точки эквивалентны между собою, и любые две из них преобразуются одна в другую при помощи подстановки, отличной от тождественной. Область $\mathcal{E}$ состоит из конечного числа многоугольников, и потому в одном из них должно оказаться бесчисленное множество эквивалентных точек, чего не может быть.

Рассмотрим теперь тот случай, когда многоугольник $\mathcal{P}_1$ имеет параболические вершины.

Предыдущее доказательство сохранит свою силу, если мы убедимся, что существует положительное число δ_1, обладающее следующим свойством: при любом наперед заданном положительном числе N можно найти значение n, большее N, и точку z_1, лежащую в круге C_1 и внутри области Q_n, так, что точка $\varphi_n(z_1)$, лежащая внутри многоугольника $\mathcal{P}_1$, будет отстоять от его параболических вершин на расстоянии, большем δ_1. В этом случае мы образуем область $\mathcal{E}$, окружив вполне каждую не параболическую вершину многоугольника $\mathcal{P}_1$ эквивалентными многоугольниками и построив у каждой параболической вершины два многоугольника, соседних с $\mathcal{P}_1$. Если мы при этом исключим из многоугольника $\mathcal{P}_1$ те его точки, которые находятся внутри окружностей, описанных около параболических его вершин радиусом δ_1, и обозначим буквою δ наименьшее расстояние точек контура области $\mathcal{E}$ до точек сокращенного вышеуказанным образом многоугольника $\mathcal{P}_1$, то дальнейшее доказательство будет то же, что и выше.

Итак, покажем, что существует упомянутое выше число δ_1.

Пусть ε — радиус круга C_1, $\rho+\varepsilon$ — радиус такого круга, описанного около точки z_0, внутри которого нет параболических вершин многоугольников сети. Мы можем считать, что ρ есть положительное число, ибо z_0 не есть особая точка группы, и радиус ε мы могли выбрать сколь угодно малым.

Проведем через всякую параболическую вершину многоугольника $\mathcal{P}_1$ такую окружность, преобразующуюся в себя при помощи соответствующей параболической подстановки, чтобы все окружности, им эквивалентные, имели бы радиус, меньший $\rho/2$. Точки, эквивалентные тем точкам многоугольника $\mathcal{P}_1$, которые лежат внутри проведенных окружностей, должны таким образом находиться от параболической вершины некоторого многоугольника сети на расстоянии, меньшем, чем ρ, а потому точки эти не могут находиться в круге C_1.

Определим теперь наименьшее расстояние от параболических вершин многоугольника $\mathcal{P}_1$ до тех его точек, которые находятся вне проведенных через параболические вершины окружностей. Расстояние это будет больше нуля в силу пункта 4) определения фундаментальной области, и его мы и можем принять за вышеупомянутое число δ_1.

Таким образом, теорема 3 доказана и в случае существования параболических вершин у многоугольника $\mathcal{P}_1$. На основании доказанной теоремы мы можем утверждать, что все предельные точки суть особые точки группы. Наоборот, всякая точка группы Σ является предельной точкой сети, что следует непосредственно из упомянутого в § 3 свойства степеней не эллиптической подстановки. Напомним при этом, что параболические вершины многоугольников мы причисляем к предельным точкам сети. Если фундаментальный многоугольник приводит к бесчисленному множеству сетей, то эти последние будут иметь на плоскости точки сгущения. Это будут такие точки, в любом соседстве с которыми будут находиться точки, принадлежащие бесчисленному множеству сетей.

Можно, пользуясь рассуждениями теоремы 3, показать, что точки эти буду тособыми точками группы Г. Действительно, при доказательстве этой теоремы мы не упоминали о том, что все многоугольники Q_n принадлежат одной и той же сети. Нужно только будет при доказательстве позаботиться о том, чтобы условия леммы 3 выполнялись для всех сетей, что всегда легко сделать.

§ **13.** В настоящем сочинении мы не касаемся вопроса об определении фундаментальной области для всякой наперед заданной группы. При решении этого вопроса нам пришлось бы несколько обобщить понятие о фундаментальной области.

Если те сети многоугольников, которые произошли от фундаментального многоугольника, не покрывают вместе со своими предельными точками всю плоскость, то в оставшейся части плоскости может существовать другой фундаментальный многоугольник, приводящий также к эквивалентным между собою сетям, которые не имеют общих точек с уже построенными сетями. Таким образом, группе Г может соответствовать несколько или даже бесчисленное множество различных фундаментальных многоугольников, каждый из которых приводит к ряду эквивалентных сетей, причем точки, принадлежащие сетям, происшедшим от различных фундаментальных многоугольников, не могут быть эквивалентны между собою.

В приложениях теории групп линейных подстановок мы будем встречаться лишь с тем случаем, когда число различных фундаментальных многоугольников будет конечно, причем всякая точка плоскости или будет принадлежать одной из сетей, или будет предельной точкой. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением этого случая.

Мы можем изменить фундаментальный многоугольник, отнимая от него некоторую его часть и прибавляя эквивалентную ей часть так, чтобы и новый многоугольник удовлетворял всем четырем условиям § 9. Такого рода изменение называется дозволенным изменением (erlaubte Abänderung), и подразделение плоскости на сети не зависит от такого изменения фундаментального многоугольника. Действительно, на основании теоремы 3 мы можем утверждать, что сети суть те связные области, на которые плоскость делится особыми точками группы, а эти точки определяются самой группой вне всякой зависимости от фундаментального многоугольника.

Разберем теперь случай фуксовых групп. Если фундаментальный многоугольник такой группы лежит внутри круга C, который преобразуется в себя подстановками группы, то сеть многоугольников покроет весь круг C, так как неподвижные точки гиперболических и параболических подстановок лежат все на окружности круга C. Кроме того, будет существовать второй фундаментальный многоугольник, который может быть получен из указанного выше многоугольника при помощи отображения в окружности круга C. Из этого второго многоугольника получится сеть, заполняющая часть плоскости, лежащую вне круга C. Оба фундаментальных многоугольника будут при этом полными фундаментальными многоугольниками группы, и группа будет фуксовой группой с предельным кругом.

Если фундаментальный многоугольник фуксовой группы содержит внутри себя и часть окружности C, то полученная из этого многоугольника сеть заполнит как всю ту часть плоскости, которая находится внутри круга C, так и часть плоскости, находящуюся вне этого круга. В этом случае на плоскости будет существовать лишь одна сеть, и группа будет фуксовой с главным кругом.

Из определения фуксовой группы (см. § 8) нетрудно видеть, что на окружности круга C могут и будут лежать лишь параболические вершины многоугольников, а неподвижные точки любой эллиптической подстановки группы должны быть гармоническими относительно этой окружности. Мы можем поэтому утверждать, что по крайней мере одна из неподвижных точек такой подстановки находится внутри сети и, следовательно, является вершиною одного из многоугольников. Свойство это может не существовать в случае клейновой группы. В главе III мы будем иметь пример группы, для которой существует полный фундаментальный многоугольник, и при этом в группе будут находиться такие эллиптические подстановки, обе неподвижные точки которых не принадлежат сети, образованной из этого многоугольника. Такие неподвижные точки называются *идеальными*.

Легко показать, что число сетей, покрывающих всю плоскость, либо равно единице, либо двум, либо бесконечно велико, и что всякая сеть либо представляет собою односвязную область, либо имеет бесконечную связность*. В главе III мы будем иметь примеры на все эти случаи. Если имеются две односвязные сети, то они отделяются одна от другой линией $\mathcal{L}$, все точки которой суть особые точки группы. Всякая подстановка группы преобразует линию $\mathcal{L}$ в себя. В случае фуксовой группы с предельным кругом линия эта есть окружность. В случае же клейновой группы линия эта имеет весьма сложный характер**.

§ **14.** Рассмотрим частный случай образования сети. Пусть нам задан односвязный многоугольник, стороны которого суть дуги кругов и который не налегает сам на себя. Отобразим его во всех его сторонах и то же будем делать и со всеми вновь получаемыми многоугольниками. Если при этом эти многоугольники нигде не налягут друг на друга, то мы получим сеть многоугольников, аналогичную описанной в предыдущих параграфах.

Ограничимся рассмотрением четырехугольника. Пусть это будет четырехугольник R_0 с вершинами A, B, C и D, и обозначим буквами σ_n $(n = 1, 2, 3, 4)$ отображения в его сторонах. Мы будем иметь группу Ω подстановок первого и второго рода, и для этой группы подстановки σ_n будут производящими.

Всякий четырехугольник сети может быть получен из R_0 при помощи последовательности отображений σ_n, и наоборот. Если σ есть какая-либо подстановка группы, преобразующая четырехугольник R_0 в четырехугольник R_k, то отображения в сторонах этого последнего четырехугольника представляются в виде $\sigma\sigma_n\sigma^{-1}$ и принадлежат группе. Всякая подстановка группы преобразует сеть в себя, и всякий четырехугольник сети может быть принят за исходный. Четырехугольник R_0 подчиняется 1) и 2) пунктам определения фундаментальной области с той лишь разницей, что в группу входят подстановки второго рода, и каждая сторона четырехугольника соответствует сама себе. Предположим, что сеть четырехугольников удовлетворяет и пункту 3) определения фундаментальной области. При этом могут представиться два случая: 1) никакая последовательность отображений группы не приводит к исходному мно-

---

*См. Fubini [11, p. 203–216]; Klein [13, Bd. I, S. 133–136].

**См. Klein [13, Bd. I, S. 411–428]; Fricke [14, S. 565].

гоугольнику R_0; 2) некоторые последовательности отображений приводят вновь к четырехугольнику R_0. Во втором случае указанные последовательности отображений должны приводиться к тождественной подстановке и, следовательно, должны состоять из четного числа отображений.

Совокупность всех подстановок первого рода, входящих в группу Ω, образует некоторую группу Γ подстановок первого рода. Покажем, что можно принять за полный фундаментальный многоугольник этой группы шестиугольник $\mathcal{P}_0$, образованный из четырехугольника R_0 и из его отображения R_0' в одной из его сторон. Для определения предположим, что мы отобразили R_0 в стороне AB, и пусть C_1 и D_1 — отображения вершин C и D. Пункт 1) определения фундаментального многоугольника выполняется, как это непосредственно видно. Рассмотрим теперь соответствие между сторонами шестиугольника. Например, сторона C_1D_1 получается из стороны CD при помощи подстановки, состоящей из отображений в сторонах AB и C_1D_1. Так же можно разобрать зависимость и между двумя остальными парами сторон, и, следовательно, пункт 2) определения также выполняется. Пункт 3) выполняется, ибо он выполнен для четырехугольников R_0 и R_0' по отношению к подстановкам группы Ω.

Ввиду указанного в § 2 свойства отображений имеем

$$\angle C = \angle C_1; \qquad \angle D = \angle D_1;$$
$$\angle BAD = \angle BAD_1 \quad \text{и} \quad \angle ABC = \angle ABC_1.$$

Вершины $\mathcal{P}_0$ распадаются на четыре цикла: (A); (D, D_1); (C, C_1); (B). Вершина A является неподвижной точкой той подстановки, которая преобразует AD в AD_1. Подстановка эта будет эллиптической или параболической, смотря по тому, будут ли дуги AB и AD пересекаться или касаться. Вблизи вершины D_1 цикл будет состоять из двух шестиугольников, и вершина эта является неподвижной точкой той подстановки, которая состоит из отображения в C_1D_1 и отображения в дуге, получаемой после только что указанного отображения из дуги D_1A. Подстановка эта также будет эллиптической или параболической. То же можно сказать и о других вершинах $\mathcal{P}_0$.

Кроме того, легко убедиться в том, что, если совершаются отображения в двух касательных окружностях, то эти последние ортогональны к окружностям, преобразующимся в себя при помощи получаемой от этих отображений параболической подстановки.

Таким образом, пункт 4) определения фундаментальной области также выполняется, и шестиугольник $\mathcal{P}_0$ является полным фундаментальным многоугольником группы Г.

Принимая во внимание сказанное в § 9 о сумме углов, принадлежащих одному и тому же циклу, и указанные выше равенства углов, можем утверждать, что углы четырехугольника R_0 должны иметь величину вида π/k, где k — целое положительное число, большее единицы, или бесконечность. Легко убедиться в том, что случай $k = 1$ невозможен.

Условие это для углов R_0 является, вообще говоря, лишь необходимым условием того, чтобы сеть удовлетворяла пункту 3) определения фундаментальной области.

Если все стороны R_0 ортогональны некоторой окружности C, то все отображения и, следовательно, все подстановки группы Г преобразуют C в себя, и группа Г является фуксовой группой. Если же некоторые стороны лежат на окружности C, а остальные ортогональны этой окружности, то все подстановки Г преобразуют C в себя, но некоторые из них преобразуют круг, ограниченный окружностью C, в часть плоскости, лежащую вне этой окружности. Вышеприведенные рассуждения имеют место и в том случае, когда многоугольник R_0 имеет любое число сторон. Получаемые таким образом группы называются *симметрическими группами.*

Хорошо известен тот простейший случай, когда R_0 представляет собою треугольник. В этом случае группа Г будет группою некоторого уравнения Gauss'а (см. § 9 Введения);

Заметим, что можно составить группу Г и в том случае, когда многоугольник R_0 или сеть многоугольников, получаемых при отображении, покрывают сами себя. В этом случае либо группа вовсе не будет иметь фундаментальной области, либо $\mathcal{P}_0$ не будет такой областью для группы Г. Все же те рассуждения, которые не зависят от выполнения пункта 3) определения фундаментальной области, будут справедливы и в этом случае.

§ 15. В настоящем параграфе мы определим т. н. *автоморфные функции.* Функция $\varphi(z)$ называется *автоморфной функцией, соответствующей группе* Г, *если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\varphi(z)$ *есть однозначная функция внутри сети, получаемой из полного фундаментального многоугольника группы, и имеет одинаковые значения в эквивалентных точках сети;*

2) *вблизи точки $z = z_0$ функция $\varphi(z)$ имеет разложение*

$$\varphi(z) = t^n(a_0 + a_1 t + \ldots), \tag{11}$$

где $a_0 \neq 0$, n — целое число и t имеет такие значения:

$$t = z - z_0,$$

если z_0 не есть эллиптическая или параболическая вершина одного из многоугольников сети;

$$t = \left(\frac{z - z_0}{z - z_0'}\right)^l,$$

если z_0 — есть эллиптическая вершина, соответствующая подстановке группы

$$\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0'} = e^{2\pi i/l}\frac{z - z_0}{z - z_0'},$$

$$t = \exp\left[\pm\frac{2\pi i}{\gamma}\frac{1}{z - z_0}\right],$$

если z_0 — параболическая вершина, соответствующая подстановке группы

$$\frac{1}{z_1 - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \gamma.$$

В случае, если z_0 есть бесконечно далекая точка, надо заменить предыдущие выражения следующими:

$$t = \frac{1}{z}; \quad t = \frac{1}{(z - z_0')^l}; \quad t = e^{\pm\frac{2\pi i}{\gamma}z}.$$

Если же $z_0' = \infty$, то надо положить

$$t = (z - z_0)^l.$$

В дальнейшем мы удержим прежние обозначения.

Непосредственно ясно, что в случаях обыкновенной точки или эллиптической вершины t стремится к нулю при стремлении z к z_0. Рассмотрим параболическую вершину и для простоты предположим, что $z_0 = 0$ и γ — вещественно. Проведем через z_0 окружность C, преобразующуюся в себя при помощи соответствующей параболической подстановки S. Точки многоугольников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_{m-1}$, достаточно близкие к исследуемой вершине, находятся внутри окружности C и, следовательно, по одну сторону от вещественной оси. Можно поэтому так выбрать знак в выражении

$$t = e^{\pm \frac{2\pi i}{\gamma} \cdot \frac{1}{z}},$$

чтобы t стремилось к нулю при стремлении z к исследуемой вершине, причем предполагается, что эта точка остается внутри вышеуказанных многоугольников или тех многоугольников, которые получаются из них при помощи некоторой степени подстановки S. Если радиус окружности C достаточно мал, то легко показать, что та часть многоугольников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_{m-1}$, которая находится внутри окружности C, преобразуется на плоскость переменной t в круг, описанный около начала координат. То же можно утверждать и в том случае, когда z_0 есть эллиптическая вершина. В этом случае за окружность C надо принять окружность, преобразующуюся в себя при помощи соответствующей эллиптической подстановки, причем точки этой окружности должны быть достаточно близки к точке z_0. Можно поэтому утверждать, что условие 2) равносильно следующему: $\varphi(z)$ — аналитическая функция, имеющая внутри сети лишь полюсы и стремящаяся к определенному пределу, если точка z стремится к какой-либо параболической вершине, оставаясь внутри конечного числа последовательных многоугольников, имеющих общую вершину в указанной параболической вершине.

Рассматривая интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz,$$

взятый по контуру многоугольника $\mathcal{P}_1$ или, если это необходимо, по несколько измененному контуру, и принимая во внимание равенство значений $\varphi(z)$ в эквивалентных точках, можем утверждать, что $\varphi(z)$ принимает в функциональном многоугольнике всякое значение одно и то же число раз. При этом эквивалентные точки контура и вершины, принадлежащие одному и тому же циклу, считаются за одну точку. Всякие автоморфные функции, соответствующие одной и той же группе и одной и той же сети, связаны алгебраическим соотношением, и, следовательно, все такие функции выражаются рационально через две из них. Род алгебраического соотношения, связывающего эти две функции, есть вполне определенная величина, и она равна роду той замкнутой поверхности, которая получится, если мы в многоугольнике $\mathcal{P}_1$ соединим попарно эквивалентные стороны.

Если этот род равен нулю, то существуют автоморфные функции, принимающие в многоугольнике $\mathcal{P}_1$ всякое значение один раз, и всякая автоморфнаая функция выражается рационально через любую из них*.

Мы будем называть автоморфные функции *фуксовыми или клейновыми функциями*, если соответствующая группа Г будет фуксовой или клейновой.

Всякая предельная точка сети является особой точкой группы, и потому, вспоминая свойство степеней не эллиптической подстановки, мы можем утверждать, что вблизи всякой такой точки находится бесчисленное множество многоугольников сети, и точка эта является существенно особой точкой функции $\varphi(z)$.

Обратимся к случаю симметрической группы. Пусть $x = \varphi(z)$ — функция, преобразующая конформно четырехугольник R_0 в верхнюю полуплоскость плоскости переменной x. Из принципа симметрии ясно, что $\varphi(z)$ есть автоморфная функция соответствующей симметрической группы, и функция эта принимает в фундаментальном шестиугольнике группы всякое значение один раз.

---

*См. Fubini [11, p. 311–320]; Klein [13, Bd. II, S. 17–21].

Глава II

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУКСОВОЙ ГРУППЫ У ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ В СЛУЧАЕ РАВНЫХ КОРНЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ

§ **1.** В настоящей главе мы займемся исследованием дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\lambda)y = 0, \tag{1}$$

где

$$p(x) = x(x-a)(x-1), \qquad 0 < a < 1.$$

Уравнение (1) имеет четыре особые точки: 0, a, 1 и ∞, причем вблизи каждой из этих точек интегралы уравнения будут правильными. Для первых трех особых точек оба корня фундаментального уравнения равны нулю, а для четвертой оба равны единице. Таким образом, например, около точки $x = 0$ интегралы уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} y_0(x,\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k; \\ y_{0,1} = y_0(x,\lambda)\lg x + \varphi(x,\lambda), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varphi(x,\lambda)$ — ряд, расположенный по целым положительным степеням x.

Аналогичные разложения будут иметь место около особых точек a и 1. В дальнейшем мы будем обозначать интегралы уравнения (1), голоморфные в точках 0, a и 1 и обращающиеся в этих точках в единицу, следующим образом:

$$y_0(x,\lambda), \quad y_a(x,\lambda), \quad y_1(x,\lambda).$$

Вблизи точки $x = \infty$ будут существовать интегралы

$$\begin{gathered} y_\infty(x,\lambda) = \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{l_k}{x^k}, \\ y_{\infty,1}(x,\lambda) = y_\infty(x,\lambda)\lg\frac{1}{x} + \psi(x,\lambda), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\psi(x,\lambda)$ — ряд, расположенный по целым положительным степеням x^{-1} и не содержащий свободного члена. Все выше сказанное имеет место при любом значении параметра λ.

В настоящей главе мы докажем существование бесчисленного множества вещественных значений этого параметра, при которых подстановки группы уравнения (1) преобразуют в себя некоторую окружность, а также исследуем область тех значений параметра, при которых задача обращения может привести к однозначной функции. В дальнейшем мы не будем писать аргументов у функций там, где это не может вызвать никакой неясности.

§ 2. В настоящей главе нам нужно будет рассматривать лишь вещественные значения λ. При этом будут существовать вещественные интегралы уравнения (1). Если имеется разложение такого интеграла в ряд Тейлора вблизи какой-либо точки вещественной оси, то его дальнейшие значения, получаемые при помощи аналитического продолжения, будут вещественны при вещественных значениях x до тех пор, пока мы не дойдем до особой точки уравнения (1). Дальнейшие значения интеграла мы в настоящей главе будем определять, пользуясь так называемым *вещественным продолжением*. Например, если

$$y = k\lg(a-x)y_a + \varphi(x) \qquad \text{при} \quad x < a,$$

то мы будем считать

$$y = k\lg(x-a)y_a + \varphi(x) \qquad \text{при} \quad x > a.$$

Легко выяснить при вещественном продолжении те условия, при которых группа уравнения (1) преобразует в себя некоторую окружность, а именно, для этого необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

I — существует интеграл, голоморфный в двух соседних особых точках;

II — существует интеграл, голоморфный в двух не соседних особых точках.

Действительно, если, например, $y_0(x, \lambda)$ при продолжении окажется голоморфным в точке $x = a$, то частное интегралов

$$\eta = iy_1/y_0$$

будет испытывать при обходе точек 0, a и 1 вещественные подстановки, и потому вся группа уравнения будет вещественной. Если же $y_0(x, \lambda)$ окажется при вещественном продолжении голоморфным в точке $x = 1$, то частное интегралов

$$\eta = iy_0/y_a$$

будет давать вещественную группу. Остается доказать необходимость указанных условий.

Предположим, что группа уравнения (1) преобразует в себя некоторую окружность и что условие I не выполнено, и докажем, что должно выполняться условие II.

Положим, что частное интегралов определено вышенаписанной формулой. Если, выходя из какой-либо точки отрезка $[0, a]$ вещественной оси, мы совершим обход особых точек 0 и a, то η испытывает соответственно подстановки:

$$\frac{1}{\eta'} = \frac{1}{\eta} + k, \tag{4}$$

$$\eta' = \eta + l, \tag{5}$$

где k и l — вещественны. По условию обе эти подстановки должны преобразовывать в себя некоторую окружность, но подстановка (4) преобразует в себя лишь окружности, касательные к вещественной оси в начале координат, и саму вещественную ось, а подстановка (5) преобразует в себя прямые, параллельные вещественной оси, и эту ось. Отсюда ясно, что группа уравнения может преобразовывать в себя лишь вещественную ось.

Предположим, что при вещественном продолжении y_0 имеет вид

$$\alpha \lg(a - x)y_a + \varphi(x) \quad \text{вблизи } x = a, \tag{6}$$

$$\gamma \lg(1 - x)y_1 + \psi(x) \quad \text{вблизи } x = 1; \tag{7}$$

y_a имеет вид

$$\alpha_1 \lg x y_0 + \varphi_1(x) \quad \text{вблизи} \quad x = 0, \tag{6_1}$$

$$\beta \lg(1 - x)y_1 + \omega(x) \quad \text{вблизи} \quad x = 1; \tag{8}$$

y_1 имеет вид

$$\gamma_1 \lg x y_0 + \psi_1(x) \qquad \text{вблизи} \quad x = 0, \tag{7_1}$$

$$\beta_1 \lg(x-a) y_a + \omega_1(x) \quad \text{вблизи } x = a; \tag{8_1}$$

при этом вторые слагаемые в написанных выражениях представляют собою голоморфные функции вблизи соответствующих точек. В силу сделанного предположения можем утверждать, что постоянные α, α_1, β, β_1 — отличны от нуля. Положим, кроме того, что на отрезке $[0, a]$ при вещественном продолжении y_1 имеет вид

$$m y_0 + n y_a,$$

где постоянная m отлична от нуля в силу упомянутого только что предположения.

Исходя из какой-либо точки отрезка $[0, a]$ вещественной оси, совершим в положительном направлении полуобход около точки a, затем совершим в положительном направлении обход вокруг точки 1 и, наконец, вернемся в исходную точку, совершив в положительном направлении полуобход вокруг точки a. После этого η испытывает подстановку:

$$\eta' = \frac{(1 + 2\pi i \gamma m - 2\pi^2 \alpha\beta m)\eta + (2\pi i \gamma - 2\pi^2 \alpha\beta)(ni - \pi\beta_1) - 2\pi\alpha}{2\pi\beta m \eta + (1 + 2\pi i \beta n - 2\pi^2 \beta\beta_1)}.$$

Подстановка эта должна преобразовать в себя вещественную ось, и потому мы должны иметь

$$\gamma = n = 0, \tag{9}$$

т. е. должно быть выполнено условие II.

§ **3.** Сделаем некоторые замечания по поводу результатов предыдущего параграфа. Одновременное выполнение условий I и II невозможно, ибо при этом оказалось бы, что существует интеграл, голоморфный в трех особых точках, а следовательно, и в четвертой особой точке, но такой интеграл должен быть тождественно равным нулю. Если условие I выполнено в точках 0 и a, то y_0, лишь постоянным множителем отличающийся от y_a, не может быть голоморфным в точках 1 и ∞. Но при этом группа уравнения преобразует в себя некоторую окружность, и, применяя выведенное в предыдущем параграфе необходимое и достаточное условие к точкам a, 1 и ∞, получим, что условие I должно быть выполнено и для точек 1, ∞. Совершенно так же можем утверждать, что если интеграл y_a голоморфен в точке $x = 1$, то интеграл y_∞ должен быть голоморфен в точке $x = 0$.

Таким же образом можно показать, что если интеграл y_0 при вещественном продолжении оказался голоморфным в точке $x = 1$, то интеграл y_a должен оказаться голоморфным в точке $x = \infty$. Следовательно, уравнение (1) будет иметь группу, преобразующую в себя некоторую окружность, в следующих трех случаях:

1) y_0 голоморфен в точке $x = a$,

2) y_a голоморфен в точке $x = 1$,

3) y_0 при вещественном продолжении через точку a будет голоморфным в точке $x = 1$*.

§ **4.** Для использования тех значений λ, при которых будут выполнены только что указанные условия, необходимо исследовать зависимость интегралов уравнения от параметра λ. Докажем для этого общую теорему, которая нам пригодится и в дальнейшем.

Теорема 4. *Если в дифференциальном уравнении*

$$y'' + p(x,\lambda)y' + q(x,\lambda)y = 0 \tag{10}$$

коэффициенты суть одновременно голоморфные функции параметра λ внутри круга Λ и аналитические функции x, имеющие внутри круга K, описанного около начала координат, единственную особую точку $x = 0$; если, кроме того, при всяком значении λ, заключающемся внутри круга Λ, имеется голоморфный интеграл вида

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

где a_k — голоморфные функции λ внутри Λ, то интеграл этот есть голоморфная функция λ внутри круга Λ при всяком значении x, заключающемся внутри круга K.

Обозначим:

$$S_n(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что, если x имеет какое-либо значение внутри круга K, и λ принимает всевозможные значения, принадлежащие некоторой области Λ_1,

---

*То же должно быть и при продолжении через точку $x = \infty$.

которая вместе со своим контуром лежит внутри круга Λ, то при этом $S_n(x,\lambda)$ остаются ограниченными при всяком n*.

Мы докажем, что y будет ограниченным, если λ принадлежит области Λ_1, а x — какому-либо кругу K_1, описанному около начала координат и находящемуся внутри K. Отсюда будет следовать и наше утверждение относительно $S_n(x,\lambda)$.

Действительно, пусть $|x| = r$. Выберем за K_1 круг, описанный около начала координат радиусом r_1, большим r, но таким, чтобы K_1 заключалось внутри K. Пусть

$$|y(x,\lambda)| < M$$

при условии, что λ принадлежит области Λ_1, и x — кругу K_1. Отсюда непосредственно получаем

$$|S_n(x,\lambda)| < M\frac{r_1}{r_1 - r}.$$

Итак, будем доказывать наше утверждение относительно $y(x,\lambda)$. Предположим, что оно неправильно, т. е. пусть существует такая последовательность значений λ: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, что наибольшее значение $|y(x,\lambda_n)|$ на окружности K_1 беспредельно возрастает при возрастании n. Не ограничивая общности, предположим, что существует

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n = \lambda_0,$$

причем λ_0 должно принадлежать области Λ_1.

Пусть b_n есть та точка на окружности круга K_1, в которой $|y(x,\lambda_n)|$ принимает наибольшее значение. Не ограничивая общности, можем допустить, что существует

$$\lim_{n=\infty} b_n = b_0,$$

причем b_0 должно также находиться на окружности круга K_1. Опишем около точки b_0 круг $\mathcal{L}_1$, лежащий внутри круга K, и обозначим буквой $\mathcal{L}$ область, составленную из кругов K_1 и $\mathcal{L}_1$.

Пусть $u(x,\lambda)$ и $v(x,\lambda)$ — два интеграла уравнения (10), удовлетворяющие условиям

$$u(b_0,\lambda) = 1; \quad u'(b_0,\lambda) = 0;$$
$$v(b_0,\lambda) = 0; \quad v'(b_0,\lambda) = 1.$$

---

*См. Montel [7, p. 20].

Так как b_0 есть обыкновенная точка уравнения (10), то $u(x, \lambda)$ и $v(x, \lambda)$ — голоморфные функции λ в области Λ, а потому интегралы эти ограничены в круге $\mathcal{L}_1$ и области Λ_1, так как радиус круга $\mathcal{L}_1$ мы можем считать достаточно малым.

Пусть

$$y(x, \lambda_n) = m_n u(x, \lambda_n) + m'_n v(x, \lambda_n). \tag{11}$$

Из сделанного выше предположения относительно $y(x, \lambda_n)$ будет следовать, что по крайней мере одно из чисел m_n и m'_n при возрастании n будет неограниченным. Предположим, что таким будет m_n и, кроме того, предположим, что частное m'_n/m_n не стремится к бесконечности при возрастании n. Удержим только те значения n, при которых выполнено условие

$$\left|\frac{m'_n}{m_n}\right| < m \qquad (n = n_1, n_2, \ldots),$$

где m — определенное положительной число.

Рассмотрим последовательность функций

$$\frac{y(x, \lambda_n)}{m_n} \qquad (n = n_1, n_2, \ldots,). \tag{12}$$

Функции эти голоморфны в области $\mathcal{L}$, и при достаточно больших значениях n наибольшее значение модуля этих функций находится на окружности круга $\mathcal{L}_1$. Но из выражения (11) ясно, что на этой окружности рассматриваемые функции ограничены, а потому они ограничены и в области $\mathcal{L}$, и к ним приложим принцип сходимости. Пусть $y(x)$ будет предельная функция. Она должна быть голоморфна в области $\mathcal{L}$ и удовлетворяет условиям

$$y^{(k)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k, \quad \lim \frac{a_k}{m_k} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

т. е. $y(x)$ должна обращаться тождественно в нуль. Но из равенства (11) имеем

$$y(b_0) = 1. \tag{13}$$

Следовательно, наше предположение о неограниченности $y(x, \lambda)$ неправильно.

При доказательстве мы предполагали, что частное m'_n/m_n не стремится к бесконечности при возрастании n. Если бы это было не так, то частное m_n/m'_n наверно обладало бы этим свойством. Вместо последовательности (12) мы стали бы рассматривать функции $y(x, \lambda_n)/m'_n$ и пришли бы к функции $y(x)$, которая, с одной стороны, должна быть тождественно равна нулю, а с другой стороны, имеет в точке b_0 производную, равную единице.

§ 5. Возвращаясь к уравнению (1), замечаем, что в равенстве (2) все коэффициенты a_k — полиномы от λ и что выполнены вообще все условия теоремы 4 в любой ограниченной области плоскости переменной λ.

Следовательно, $y_0(x, \lambda)$ есть целая трансцендентная функция параметра λ. То же можно утверждать и относительно $y_a(x, \lambda)$, $y_1(x, \lambda)$ и $y_\infty(x, \lambda)$. Постоянные α, α_1, β, β_1, γ и γ_1, входящие в выражения (6), (6_1), (7), (7_1), (8) и (8_1), будут также целыми трансцендентными функциями λ. Докажем это лишь для постоянных α и γ. Имеем очевидное соотношение:

$$y_0'(x, \lambda) y_a(x, \lambda) \cdot y_a'(x, \lambda) y_0(x, \lambda) = \frac{\sigma(\lambda)}{x(x-a)(x-1)}. \tag{14}$$

Давая в этом равенстве x какое-либо значение, удовлетворяющее условию $0 < x < a$, убедимся, что $\sigma(\lambda)$ есть целая трансцендентная функция λ. Помножая обе части равенства (14) на $(x-a)$ и полагая затем $x = a$, получим

$$\sigma(\lambda) = a(a-1)\alpha,$$

откуда и вытекает наше утверждение относительно α.

Заметим теперь, что в выражении (6) $\varphi(x)$ должна быть, в силу доказанного, целой трансцендентной функцией λ. Следовательно, интеграл

$$\alpha \lg(x-a) y_a + \varphi(x), \tag{15}$$

получаемый после вещественного продолжения y_0 через точку a, будет целой трансцендентной функцией λ.

Применяя формулу, аналогичную формуле (14), к интегралу (15) и к $y_1(x, \lambda)$, убедимся, что γ есть целая трансцендентная функция λ. В дальнейшем мы будем писать аргумент λ у постоянных α, γ и т. д.

§ 6. Условия 1), 2) и 3) § 3 равносильны уравнениям

$$\alpha(\lambda) = 0, \tag{16}$$

$$\beta(\lambda) = 0, \tag{17}$$

$$\gamma(\lambda) = 0. \tag{18}$$

Докажем относительно этих уравнений теорему:

Теорема 5.

1). *Уравнение* (16) *имеет бесчисленное множество вещественных корней* μ_k, *удовлетворяющих неравенствам*

$$-a < \mu_1 < \mu_2 < \dots,$$

и все эти корни — простые.

2). *Уравнение* (17) *имеет бесчисленное множество вещественных корней* μ_{-k}, *удовлетворяющих неравенствам*

$$-a > \mu_{-1} > \mu_{-2} > \dots .$$

3). *Уравнение* (18) *имеет бесчисленное множество вещественных корней* λ_k $(k = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots)$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\dots < \mu_{-2} < \lambda_{-1} < \mu_{-1} < \lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \dots .$$

Корни уравнений (17) *и* (18) *все простые.*

Перейдем к доказательству первой части теоремы и прежде всего докажем, что уравнение (16) не может иметь кратных корней. Заметим при этом, что при всех наших рассуждениях мы имеем в виду лишь вещественные корни.

Пусть $\lambda = \nu_0$ будет таким корнем. Обозначим

$$y_{0\lambda}(x, \nu_0) = \left.\frac{\partial y_0(x, \lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda = \nu_0} .$$

Имеем, очевидно

$$y_{0\lambda}(0, \lambda) = 0. \tag{19}$$

В силу сделанного предположения $y_0(x, \nu_0)$ и $y_{0\lambda}(x, \nu_0)$ будут голоморфны не только вблизи $x = 0$, но и вблизи $x = a$. Функция $y_{0\lambda}(x, \lambda)$ удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_{0\lambda}(x, \lambda)}{dx}\right] + (x + \lambda)y_{0\lambda}(x, \lambda) = -y_0(x, \lambda). \tag{20}$$

Пусть $y(x, \lambda)$ — какой-либо интеграл уравнения (1), отличный от интеграла $y_0(x, \lambda)$ при $\lambda = \nu_0$. Применяя к уравнению (20) методу изменения произвольных постоянных и принимая во внимание условие (19), получим без труда

$$y_{0\lambda}(x, \nu_0) = ky_0(x, \nu_0)\int_0^x y_0(x, \nu_0)y(x, \nu_0)dx -$$

$$- ky(x, \nu_0)\int_0^x \left[y_0(x, \nu_0)\right]^2 dx, \tag{20_1}$$

где k — некоторая постоянная.

Интеграл $y(x,\nu_0)$ вблизи точки $x=a$ должен содержать $\lg(x-a)$, так как иначе этот интеграл лишь множителем отличался бы от $y_0(x,\nu_0)$, но $y_{0\lambda}(x,\nu_0)$ должен быть голоморфным в точке $x=a$, а потому должно быть

$$\int_0^x [y_0(x,\nu_0)]^2\,dx = 0,$$

чего не может быть. Таким образом, доказано, что уравнение (16) не может иметь кратных корней.

§ **7.** Для дальнейшего доказательства первой части теоремы 5 исследуем нули функции $y_0(x,\lambda)$ в интервале $(0,a)$. Из уравнения (1) имеем

$$p(x)y_0'(x,\lambda) = -\int_0^x (x+\lambda)y_0(x,\lambda)dx. \tag{21}$$

Пусть x и λ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant x \leqslant a, \qquad \lambda \leqslant -a.$$

При этом будем иметь

$$p(x) \geqslant 0, \quad x+\lambda \leqslant 0. \tag{22}$$

При увеличении x от 0 до a $y_0(x,\lambda)$ может обратиться в нуль лишь после того, как $y_0'(x,\lambda)$ сделается отрицательным, но из равенства (21) и неравенства (22) видно, что этого не может быть. Следовательно, $y_0(x,\lambda)$ может иметь корни в интервале $(0,a)$ лишь при условии $\lambda > -a$.

При больших положительных значениях λ $y_0(x,\lambda)$ будет иметь сколь угодно много корней в интервале $(0,a)$. Действительно, положим

$$y_0(x,\lambda) = q(x)z_0(x,\lambda),$$

где

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-a)}}.$$

Функция $z_0(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$z''(x,\lambda) + \left[\frac{q''(x)}{q(x)} + \frac{p'(x)q'(x)}{p(x)q(x)} + \frac{x}{p(x)} + \frac{\lambda}{p(x)}\right] z(x,\lambda) = 0.$$

Пусть δ — какой-либо интервал, лежащий внутри интервала $(0,a)$. В силу известной теоремы Sturm'a* можем утверждать,

---

*См. Picard [4, vol. III, p. 117].

что при больших положительных значениях λ $z_0(x,\lambda)$, а следовательно и $y_0(x,\lambda)$, имеют сколь угодно много корней в интервале δ. Уравнения (1) и (20) дают

$$p(x)y_{0\lambda}(x,\lambda)y_0'(x,\lambda)-p(x)y_0(x,\lambda)y_{0\lambda}'(x,\lambda)=\int_0^x[y_0(x,\lambda)]^2dx. \quad (23)$$

Если $x=x_0$ есть корень $y_0(x,\lambda)$, то равенство это показывает, что $y_{0\lambda}(x_0,\lambda)$ и $y_0(x_0,\lambda)$ будут одного знака, и, следовательно, производная $dx_0/d\lambda$ должна быть отрицательна, т. е. корни функции $y_0(x,\lambda)$ в интервале $(0,a)$ уменьшаются при увеличении λ.

Производная $y_0'(x_0,\lambda)$ должна быть отлична от нуля, и, следовательно, корень x_0 есть вещественная аналитическая функция λ, а потому внутри интервала $(0,a)$ корни $y_0(x,\lambda)$ не могут ни появиться, ни исчезнуть. Таким образом, при увеличении λ корни функции $y_0(x,\lambda)$, находящиеся в интервале $(0,a)$, будут двигаться к концу $x=0$, но никогда не выйдут из этого интервала, ибо при $x=0$ функция $y_0(x,\lambda)$ обращается в единицу. Число корней $y_0(x,\lambda)$ в интервале $(0,a)$ может поэтому измениться лишь в том случае, если появятся новые корни у верхней границы интервала, а это может произойти *лишь при переходе* λ через корень уравнения (16).

В следующем параграфе мы докажем, что когда λ, увеличиваясь, переходит через корень уравнения (16), то число корней $y_0(x,\lambda)$ увеличивается при этом на единицу. Отсюда будет следовать, что уравнение (16) не имеет корней, меньших $-a$, и что число корней этого уравнения в интервале $(-a,\lambda)$ равно числу корней функции $y_0(x,\lambda)$ в интервале $(0,a)$, и, следовательно, уравнение (16) имеет бесчисленное множество вещественных корней.

§ **8.** Пусть ν есть какой-либо корень уравнения (16). Покажем, что при значениях λ, меньших ν и достаточно к нему близких, знак $\alpha(\lambda)$ должен быть противоположен знаку $y_0(a,\nu)$, причем последняя величина должна быть конечна и отлична от нуля.

Положим для определенности, что

$$y_0(a,\nu)=k,$$

где k — положительная постоянная. Предположим, что наше утверждение неправильно, т. е. что

$$\alpha(\lambda)>0 \qquad (\lambda<\nu).$$

Определим два достаточно малых интервала:

$$\nu' \leqslant \lambda \leqslant \nu, \tag{δ_1}$$

$$a' \leqslant x \leqslant a, \tag{δ_2}$$

так, чтобы функция $\varphi(x, \lambda)$, входящая в выражение (6), удовлетворяла при этом неравенствам

$$k - \varepsilon < \varphi(x, \lambda) < k + \varepsilon, \tag{24}$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Возьмем в интервале (δ_1) значение ν_1', настолько близкое к ν, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha(\nu_1') \lg(a - a') y_a(a', \nu_1') > -(k - \varepsilon). \tag{25}$$

Принимая во внимание выражение (6) и неравенства (24) и (25), легко видеть, что $y_0(x, \nu_1')$ имеет корень a_1' в интервале (δ_2). Зададим теперь два числа: $\nu^{(2)}$ и $a^{(2)}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\nu_1' < \nu^{(2)} < \nu, \quad a_1' < a^{(2)} < a,$$

и построим два интервала:

$$\nu^{(2)} \leqslant \lambda \leqslant \nu, \tag{δ_1'}$$

$$a^{(2)} \leqslant x \leqslant a. \tag{δ_2'}$$

Рассуждая с интервалами (δ_1') и (δ_2') так же, как мы это только что делали с интервалами (δ_1) и (δ_2), докажем существование значений $\nu_1^{(2)}$ и $a_1^{(2)}$, удовлетворяющих условиям

$$\nu_1' < \nu_1^{(2)}; \quad a_1' < a_1^{(2)}; \quad y_0(a_1^{(2)}, \nu_1^{(2)}) = 0.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим два бесконечных ряда значений:

$$\nu_1' < \nu_1^{(2)} < \nu_1^{(3)} < \cdots < \nu,$$

$$a_1' < a_1^{(2)} < a_1^{(3)} < \cdots < a,$$

удовлетворяющих условию

$$y_0(a_1^{(k)}, \nu_1^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Вспоминая все сказанное об изменении корней функции $y_0(x, \lambda)$ при увеличении параметра λ, мы должны будем заключить, что функция $y_0(x,\nu)$ имеет бесчисленное множество корней в интервале $(0,a)$, чего не может быть.

Следовательно, доказано, что при сделанном относительно $y_0(a,\nu)$ допущении $\alpha(\lambda)$ отрицательно, если λ меньше ν и достаточно к нему близко.

Ввиду отсутствия кратных корней у уравнения (16) можем заключить, что когда λ, увеличиваясь, переходит через ν, $\alpha(\lambda)$ переходит от отрицательных значений к положительным. Определим два интервала:

$$\nu' \leqslant \alpha \leqslant \nu, \tag{26}$$

$$a' \leqslant x \leqslant a, \tag{27}$$

причем a' возьмем настолько близким к a, чтобы все те корни, которые $y_0(x,\lambda)$ имел при $\lambda < \nu$, находились вне интервала (27) при условии

$$\nu \leqslant \lambda < \nu''. \tag{28}$$

Выражение (6) покажет нам, что функция $y_0(x,\lambda)$ не обращается в нуль при условиях (26) и (27), если выбрать ν' достаточно близко к ν. В условии (28) выберем ν'' настолько близким к ν, чтобы все вновь появившиеся корни интеграла $y_0(x,\lambda)$ находились в интервале (27) при выполнении условия (28). Если мы условие (26) заменим условием (28), то будет применимо рассуждение, приведенное нами в начале этого параграфа, так как $\alpha(\lambda)$ и $\varphi(a,\lambda)$ будут одного знака. Мы можем поэтому утверждать, что $y_0(x,\lambda)$ должен иметь по крайней мере один корень в интервале (27) при условии (28). Двух корней быть не может, ибо тогда интеграл $y_a(x,\lambda)$ имел бы корень в интервале (27), чего не может быть, если a' достаточно близко к a и ν'' достаточно близко к ν. Найденный в интервале (27) корень и является единственным новым корнем интеграла $y_0(x,\lambda)$.

Таким образом, можно считать установленной первую часть теоремы 5.

Вторая часть этой теоремы может быть доказана совершенно так же, как и первая, и мы в следующем параграфе перейдем к доказательству третьей части теоремы.

§ 9. Пусть ν есть такое значение параметра λ, при котором интегралы $y_0(x,\nu)$ и $y_a(x,\nu)$ отличны один от другого. В уравнении (20_1) положим, что $y(x,\nu)$ есть интеграл $y_a(x,\nu)$. Уравнение это представляет $y_{0\lambda}(x,\nu)$ в интервале $(0,a)$. Покажем, что то же уравнение представляет $y_{0\lambda}(x,\nu)$ и в интервале $(a,1)$ при условии, что все рассматриваемые интегралы продолжаются вещественным образом через точку $x=a$.

В интервале $(a,1)$ $y_{0\lambda}(x,\nu)$ как решение уравнения (20) может быть представлена в виде

$$y_{0\lambda}(x,\nu)=ky_0(x,\nu)\int_0^x y_0(x,\nu)y_a(x,\nu)dx-\\ -ky_a(x,\nu)\int_0^x [y_0(x,\nu)]^2\,dx+c_1y_0(x,\nu)+c_2y_a(x,\nu), \qquad (20_3)$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Деля обе части равенства на $y_0(x,\nu)$ и принимая во внимание, что

$$\lim_{x=a+0}\frac{y_{0\lambda}(x,\nu)}{y_0(x,\nu)}=\lim_{x=a-0}\frac{y_{0\lambda}(x,\nu)}{y_0(x,\nu)}=\frac{\alpha'(\nu)}{\alpha(\nu)},$$

получим

$$k\int_0^a y_0(x,\nu)y_a(x,\nu)dx=\frac{\alpha'(\nu)}{\alpha(\nu)}, \qquad (29_1)$$

$$c_1=0. \qquad (29_2)$$

Точно так же, подставляя выражение (6) в равенстве (20_3) и принимая во внимание равенство (29_1) и следующее очевидное равенство

$$\lim_{x=a+0}[y_{0\lambda}(x,\nu)-\alpha'\lg(x-a)]=\\ =\lim_{x=a-0}[y_{0\lambda}(x,\nu)-\alpha'(\nu)\lg(a-x)]=\varphi(a,\nu),$$

получим без труда, что и $c_2=0$.

Таким образом, равенство (20_1) будет справедливо и для значений x, заключающихся в интервале $(a,1)$, и, рассуждая так же, как в § 6, можно показать, что уравнение (18) не может иметь кратных корней.

Заметим, кроме того, что значения левой (и правой) части равенства (23) одинаковы при $x=a-0$ и $x=a+0$. Отсюда непосредственно следует, что равенство это справедливо и для значений x, заключающихся в интервале $(a,1)$, а потому, рассуждая так же, как и в § 7, можно показать, что при возрастании λ корни функции $y_0(x,\lambda)$ будут возрастать в интервале $(a,1)$. Пользуясь формулой (23), мы могли бы также доказать отсутствие кратных корней у уравнения (18).

Докажем теперь, что между какими-либо двумя корнями уравнения (16) находится по крайней мере один корень уравнения (18).

Пусть μ_3 и μ_{s+1} — два последовательные корня уравнения (16) и пусть

$$y_0(a, \mu_s) = k_s,$$
$$y_0(a, \mu_{s+1}) = k_{s+1}.$$

Как было показано в § 8, знак k_s совпадает со знаком $\alpha(\mu_s + h)$, а знак k_{s+1} противоположен знаку $\alpha(\mu_{s+1} - h)$, где h — достаточно малое положительное число. Но μ_s и μ_{s+1} — последовательные простые корни уравнения (16), а потому знаки k_s и k_{s+1} противоположны.

Имеем внутри интервала $(a, 1)$ разложения:

$$y_0(x, \lambda) = \alpha(\lambda) \lg(x - a) y_a(x, \lambda) + k_s y_a(x, \mu_s) + (\lambda - \mu_s)\rho_1(x, \lambda), \tag{30_1}$$

$$\begin{aligned} y_0(x, \lambda) = &\alpha(\lambda) \lg(x - a) y_a(x, \lambda) + k_{s+1} y_a(x, \mu_{s+1}) + \\ &+ (\lambda - \mu_{s+1})\rho_2(x, \lambda), \end{aligned} \tag{30_2}$$

где $\rho_1(x, \lambda)$ и $\rho_2(x, \lambda)$ — голоморфные функции своих аргументов. Подставим в эти равенства вместо $y_0(x, \lambda)$ и $y_a(x, \lambda)$ их выражения (8) и (7) и положим в равенстве (30_1) $\lambda = \mu_s$ и в равенстве (30_2) $\lambda = \mu_{s+1}$. Сравнивая затем коэффициенты у $\lg(1 - x)$, получим

$$\gamma(\mu_s) = k_s \beta(\mu_s), \quad \gamma(\mu_{s+1}) = k_{s+1} \beta(\mu_{s+1}). \tag{31}$$

Уравнение (17) не имеет корней в интервале (μ_s, μ_{s+1}), и, следовательно, знаки $\gamma(\mu_s)$ и $\gamma(\mu_{s+1})$ противоположны.

Покажем теперь, что между любыми двумя корнями уравнения (17) лежит по крайней мере один корень уравнения (18).

Рассуждая совершенно так же, как и выше, мы можем убедиться, что между двумя любыми последовательными корнями уравнения

$$\beta_1(\lambda) = 0 \tag{32_1}$$

лежит по крайней мере один корень уравнения

$$\gamma_1(\lambda) = 0. \tag{32_2}$$

Левые части этих уравнений входят в выражения (8_1) и (7_1). Но непосредственно ясно, что корни уравнения (32_1) совпадают с корнями уравнения (17), а корни уравнения (32_2) — с корнями уравнения (18), и, следовательно, наше утверждение относительно корней уравнений (17) и (18) справедливо.

Докажем теперь, что между μ_{-1} и μ_1 лежит по крайней мере один корень уравнения (18). Формулы (31) дают

$$\gamma(\mu_1) = k_1\beta(\mu_1).$$

При $\lambda = \mu_1$ интеграл $y_0(x, \mu)$ не обращается в нуль в интервале $(0, a)$, а интеграл $y_a(x, \mu_1)$ — в интервале $(a, 1)$. Из выражений (30_1) и (8) получаем

$$k_1 > 0, \qquad \beta(\mu_1) < 0,$$

и отсюда

$$\gamma(\mu_1) < 0. \tag{32}$$

При $\lambda = \mu_{-1}$ интеграл $y_a(x, \mu_{-1})$ не обращается в нуль в интервале $(a, 1)$ и конечен на концах этого интервала.

Пусть $y(x, \mu_{-1})$ — какой-либо интеграл, имеющий нуль в интервале $(a, 1)$. В этом интервале у интеграла не может быть более одного нуля, ибо иначе $y_a(x, \mu_{-1})$ также обращался бы там в нуль. Следовательно, $y(x, \mu_{-1})$ на концах интервала $(a, 1)$ имеет разные знаки и обращается там в бесконечность. Любой интеграл, отличный от $y_a(x, \mu_{-1})$, имеет вид

$$c_1 y_a(x, \mu_{-1}) + c_2 y(x, \mu_{-1}) \quad (c_2 \neq 0),$$

и, следовательно, на концах интервала $(a, 1)$ имеет разные знаки. Интеграл $y_0(x, \mu_{-1})$ не обращается в нуль в интервале $(0, a)$ и при $x = a$ становится бесконечно большим и положительным, а потому при $x = 1$ этот интеграл будет бесконечно большим и отрицательным. Выражение (7_1) дает нам

$$\gamma(\mu_{-1}) > 0. \tag{33}$$

Сравнивая неравенства (32) и (33), видим, что между μ_{-1} и μ_1 лежит по крайней мере один корень уравнения (18).

Для окончательного доказательства третьей части теоремы 5 остается показать, что между любыми двумя последовательными корнями уравнения (18) лежит всегда корень уравнений (16) и (17). Пусть λ_s и λ_{s+1} — два последовательных корня уравнения (18) и предположим, что уравнения (16) и (17) не имеют корней в интервале $(\lambda_s, \lambda_{s+1})$. Функции $y_0(x, \lambda_s)$ и $y_0(x, \lambda_{s+1})$ будут конечны при $x = 1$, и в силу только что высказанного предположения число корней обеих этих функций во всем интервале

$(0, 1)$ должно быть одинаково (см. конец § 7). Знаки $y_0(x, \lambda_s)$ и $y_0(x, \lambda_{s+1})$ должны быть поэтому одинаковы при $x = 1$.

Раньше мы показали, что при увеличении λ корни интеграла $y_0(x, \lambda)$ в интервале $(a, 1)$ увеличиваются. Отсюда, рассуждая так же, как и в § 8, можно доказать, что знак $y_0(1, \lambda_s)$ противоположен знаку $\gamma(\lambda_s + h)$, а знак $y_0(1, \lambda_{s+1})$ совпадает со знаком $\gamma(\lambda_{s+1} - h)$, где h — достаточно малое положительное число. Следовательно, знаки $\gamma(\lambda_s + h)$ и $\gamma(\lambda_s - h)$ должны быть противоположны, чего не может быть, ибо λ_s и λ_{s+1} — последовательные корни уравнения (18).

Таким образом, теорему 5 можно считать вполне установленной.

Вспоминая сказанное в конце § 7, можем утверждать, что интеграл $y_0(x, \lambda)$ при условии $\mu_s < \lambda < \mu_{s+1}$ имеет s корней в интервале $(0, a)$. Столько же корней будет иметь в указанном интервале и интеграл $y_a(x, \lambda)$, ибо корни уравнения*

$$\alpha_1(\lambda) = 0$$

совпадают с корнями уравнения (16).

Совершим замену переменных в уравнении (1), полагая

$$x_1 = \frac{a(x-1)}{x-a},$$

$$y(x, \lambda) = (x_1 - a) z(x_1, \lambda).$$

Функция $z(x_1, \lambda)$ будет удовлетворять, как в этом легко убедиться, также уравнению (1), причем интервал $(1, \infty)$ преобразуется на плоскости x_1 в интервал $(0, a)$. Отсюда следует, что число корней интеграла $y_1(x, \lambda)$ или $y_\infty(x, \lambda)$ внутри интервала $(1, \infty)$ совпадает с числом корней интеграла $y_0(x, \lambda)$ в интервале $(0, a)$.

Точно так же можно утверждать, что интегралы $y_a(x, \lambda)$ и $y_1(x, \lambda)$ при условии $\mu_{-s-1} < \lambda < \mu_{-s}$ имеют s корней в интервале $(a, 1)$, и столько же корней будут иметь при этом интегралы $y_0(x, \lambda)$ и $y_\infty(x, \lambda)$ в интервале $(0, \infty)$.

§ **10.** Рассмотрим теперь задачу обращения для уравнения (1).

Пусть $u(x, \lambda)$ и $v(x, \lambda)$ — какие-либо два независимые интеграла уравнения (1), и положим

$$\eta = \frac{u(x, \lambda)}{v(x, \lambda)}. \tag{34}$$

---

*См. выражение (6_1).

Уравнение это определяет x как функцию от η:

$$x = f(\eta). \tag{35}$$

Функция, определяемая выражением (34), есть многозначная функция x. Точки разветвления этой функции суть особые точки уравнения (1), причем при обходе какой-либо из этих точек новая ветвь функции η связана с прежней параболической подстановкой (см. формулы (4) и (5)).

Возьмем на плоскости переменной x какую-либо точку, находящуюся в верхней полуплоскости, и совершим, исходя из этой точки, обходы в положительном направлении вокруг точек $0, a$ и 1. При этом η испытает параболические подстановки:

$$S_1\eta,\quad S_2\eta \text{ и } S_3\eta. \tag{36}$$

При положительном обходе четвертой особой точки уравнения (1) η испытывает параболическую подстановку

$$S_3^{-1}S_2^{-1}S_1^{-1}\eta.$$

Подстановки (36) служат производящими подстановками группы Г уравнения (1). Группу эту можно соответственным выбором интегралов, входящих в выражение (34), преобразовать в любую подобную ей группу, и такие группы мы не будем считать существенно различными. Группа Г будет бесконечной группой, так как она содержит параболические подстановки.

Все особые точки уравнения (1) лежат на вещественной оси, и потому η будет однозначной функцией x в верхней полуплоскости. Дальнейшие значения η будут получаться аналитическим продолжением, причем два таких пути аналитического продолжения, которые не могут быть приведены один к другому непрерывным преобразованием, минуя особые точки, мы будем называть различными. Такие два пути будут приводить, вообще говоря, к разным ветвям функции η, но могут привести, как мы увидим, и к одной и той же ветви. В последнем случае между подстановками (36) будет существовать соотношение

$$\ldots S_2^{m_2^1}S_1^{m_1^1}S_3^{m_3}S_2^{m_2}S_1^{m_1}\eta = \eta, \tag{37}$$

где некоторые показатели могут быть и нулями.

Указанные два случая будем называть случаями первым и вторым.

Если в случае первом при аналитическом продолжении η не будет принимать никакого значения более одного раза, т. е.

если совокупность значений η* будет представлять собою на плоскости η область T, которая нигде не налегает сама на себя, то x будет однозначной функцией η в этой области, и ясно, что функцию эту нельзя аналитически продолжить вне области T.

Пусть l_1 и l_2 — какие-либо два контура, имеющие общее начало и конец и лежащие внутри области T. Им соответствуют на плоскости x два контура m_1 и m_2, имеющие также общие начало и конец. Так как мы находимся в условиях случая первого, то можно утверждать, что контуры m_1 и m_2 могут быть приведены один к другому непрерывным преобразованием, минуя особые точки уравнения (1). Такому преобразованию будет соответствовать непрерывное преобразование внутри области T контуров l_1 и l_2 в один контур, но контуры эти были нами взяты произвольно в области T, и потому можно утверждать, что область эта — односвязна.

Во втором случае, как мы увидим, x также может быть однозначной функцией η, и область существования этой функции будет определяться так же, как и в первом случае. Пусть m_1 и m_2 — два таких различных пути аналитического продолжения на плоскости x, которые приводят к одной и той же ветви функции η. Этим путям будут соответствовать в области T контуры l_1 и l_2, имеющие общие начало и конец. Контуры эти не могут быть непрерывным преобразованием внутри области T приведены один к другому, ибо такому преобразованию соответствовало бы на плоскости x аналогичное преобразование контуров m_1 и m_2, чего не может быть. Следовательно, в этом случае T будет многосвязной областью.

§ **11.** Исследуем теперь конформное преобразование верхней полуплоскости переменной x на плоскость переменной η. Для этого рассмотрим значения η на вещественной оси. Эта последняя делится особыми точками уравнения (1) на четыре отрезка. Если в формуле (34) мы выберем $u(x, \lambda)$ и $v(x, \lambda)$ так, чтобы они были вещественны на одном из указанных отрезков, то этот последний преобразуется также в отрезок вещественной оси, а следовательно, при любом выборе интегралов каждый из указанных отрезков преобразуется в дугу некоторой окружности.

---

*Мы не причисляем тех значений, которые η принимает в особых точках уравнения (1).

Очевидная формула

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{c}{x(x-a)(x-1)[v(x,\lambda)]^2} \tag{38}$$

показывает, что при движении x от одного конца отрезка к другому η будет двигаться по соответствующей дуге все время в одном направлении. Если при этом η обойдет всю окружность и станет принимать прежние значения, то однозначное обращение невозможно.

Предположим, что λ удовлетворяет неравенству

$$\mu_s < \lambda < \mu_{s+1}. \tag{39}$$

Положим

$$\eta = \frac{y_0(x,\lambda)}{y(x,\lambda)}, \tag{40}$$

где $y(x,\lambda)$ — какой-либо интеграл, отличный от $y_0(x,\lambda)$. В точке $x = 0$ η обращается в нуль, но при соблюдении неравенства (39) $y_0(x,\lambda)$ имеет s корней внутри интервала $(0,a)$, и, следовательно, соответствующая этому интервалу дуга окружности s раз покроет всю окружность. То же можно сказать и о дуге, соответствующей отрезку $(1,\infty)$.

Точно так же можно убедиться, что при выполнении условия

$$\mu_{-s-1} < \lambda < \mu_{-s}, \tag{41}$$

дуги, соответствующие отрезкам $(a,1)$ и $(\infty,0)$, будут покрывать полную окружность s раз. Таким образом, x может быть однозначной функцией η лишь при выполнении неравенства

$$\mu_{-1} \leqslant \lambda \leqslant \mu_1. \tag{42}$$

Если в этом условии откинуть знаки равенства, то легко видеть, что при таких значениях λ каждый из четырех отрезков вещественной оси плоскости x преобразуется в дугу, которая не покрывает полной окружности. Например, в интервале $(0,a)$ η, определяемая по формуле (40), обратится в нуль при $x = 0$, но больше нулей иметь не будет.

Положим теперь $\lambda = \mu_1$. Повторяя приведенные выше рассуждения, убедимся, что отрезки $(\infty,0)$ и $(a,1)$ преобразуются в дуги, не покрывающие полной окружности, а отрезки $(0,a)$ и $(1,\infty)$ преобразуются каждый в полную окружность, причем одна из точек окружности соответствует обоим концам отрезка, а остальные точки находятся в биоднозначном соответствии с внутренними точками интервала. Аналогичные соображения применимы и к случаю $\lambda = \mu_{-1}$.

Дальнейшие рассуждения до § 12 будут иметь место при всяких вещественных значениях λ.

Принимая во внимание разложение интегралов уравнения (1) вблизи особых точек, легко убедиться в том, что на плоскости η в точках, соответствующих особым точкам уравнения (1), рассматриваемый четырехугольник будет иметь углы, равные нулю, и дуги, составляющие эти углы, не могут принадлежать одной и той же окружности.

Формула (38) показывает, что $d\eta/dx$ не обращается в нуль, и непосредственно ясно, что η не может иметь полюсов выше первого порядка. Следовательно, рассматриваемое преобразование полуплоскости в четырехугольник будет конформным везде, за исключением особых точек уравнения (1), которым соответствуют вершины четырехугольника.

Четырехугольник может покрывать плоскость переменной η в некоторых частях более одного раза, т. е. может налегать сам на себя, но на основании только что сказанного x будет однозначной функцией η вблизи всякой точки, принадлежащей четырехугольнику, и этот последний не будет иметь точек разветвления.

§ 12. Докажем теперь, что при выполнении условия (42) четырехугольник не может налечь сам на себя. Для доказательства этого достаточно обнаружить, что контур четырехугольника не пересекает сам себя (см. § 4 Введения).

Мы уже видели, что в рассматриваемом случае никакая сторона не налегает сама на себя, и, кроме того, очевидно, что две соседние стороны не могут пересечься. Следовательно, пересечься могут лишь противоположные стороны четырехугольника. Исключим пока из рассмотрения случаи равенства в условиях (42) и предположим, что дуга, соответствующая интервалу $(0, a)$, пересекается (или касается) с дугою, соответствующей интервалу $(1, \infty)$.

Положим

$$\eta = \frac{iy_0(x, \lambda)}{y_a(x, \lambda)}. \tag{43}$$

При этом отрезок $(0, a)$ преобразуется в положительную часть мнимой оси, а отрезок $(1, \infty)$ — в часть прямой, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на расстоянии $\pi\alpha(\lambda)$, причем

$\alpha(\lambda)$ будет в рассматриваемом случае величиной отрицательной, так как интеграл $y_0(x,\lambda)$ не имеет корней в интервале $(0,a)$ и потому должен быть положительным при $x=a$ (см. выражение (6)). Два других отрезка вещественной оси преобразуются в дуги окружностей.

Нетрудно показать также, что если четыре окружности последовательно касаются одна другой, то точки касания должны лежать на одной окружности, которая в рассматриваемом случае превращается в прямую линию, так как одна из вершин четырехугольника удалена на бесконечность.

Пусть A, J, D и B — вершины четрыехугольника, соответствующие точкам $x=0$, a, 1 и ∞*, и пусть C — та из точек пересечения сторон AJ и BD, которая ближе лежит к вершине A. Сторона DJ не может оказаться внутри треугольника ABC, ибо она не может пересечь ни стороны AC, ни стороны BC, а потому она должна была бы войти и выйти из треугольника через сторону AB, чего не может быть, так как сторона эта должна быть обращена своей выпуклостью внутрь треугольника. В последнем легко убедиться, рассматривая выражение (43) вблизи точки $x=0$. Мы видим, таким образом, что внутри треугольника ABC не будет находиться контур рассматриваемого четырехугольника, и потому, ограничиваясь значениями x, лежащими в верхней полуплоскости, мы можем утверждать, что функция (35) будет голоморфной функцией внутри треугольника и должна быть однозначной при продолжении вдоль контура этого треугольника.

Будем считать точку C принадлежащей дуге BD и определим функцию (35) так, чтобы значение этой функции в точке C принадлежало интервалу $(1,\infty)$. Будем затем аналитически продолжать эту функцию вдоль контура CBA в положительном направлении. Возвращаясь в точку C, мы получим новое значение x, принадлежащее интервалу $(0,\infty)$, что противоречит указанной выше однозначности. Следовательно, контур четырехугольника не может пересечь сам себя.

Перейдем теперь к случаям равенства в условиях (42) и для определенности положим $\lambda=\mu_{-1}$ и определим η по формуле (43). В этом случае отрезки $(0,a)$ и $(1,\infty)$ преобразуются соответственно в положительную и отрицательную части мнимой

---

*Буквою J мы всегда будем обозначать бесконечно удаленную точку плоскости.

оси; отрезок $(a, 1)$ — в прямую, параллельную мнимой оси и отстоящую от нее на расстоянии $\pi\alpha(\mu_{-1})$, причем последняя величина, как и в рассматриваемом случае, отрицательна; отрезок $(\infty, 0)$ преобразуется в окружность, касательную к мнимой оси в начале координат. Окружность эта должна находиться слева от мнимой оси, ибо знак вещественной части η в интервале $(\infty, 0)$ совпадает со знаком $\alpha_1(\mu_{-1})$. Так же, как и выше, можно показать, что противоположные стороны четырехугольника не могут пересечься.

Рассуждения настоящего параграфа позволяют нам, ограничиваясь вещественными значениями параметра λ, высказать следующую теорему:

Теорема 6. *Независимая переменная уравнения* (1) *может быть однозначной функцией частного двух независимых интегралов этого уравнения лишь при выполнении условий* (42).

Если λ удовлетворяет этим условиям, то тот четырехугольник, в который частное двух интегралов преобразует верхнюю полуплоскость, нигде не налегает сам на себя.

§ 13. Мы видели, что частное двух независимых интегралов уравнения (1) преобразует полуплоскость в четырехугольник, ограниченный дугами окружностей, с углами, равными нулю. Четырехугольник этот, как и полуплоскость, является односвязной областью и не содержит точек разветвления. Указанное преобразование будет конформным везде, за исключением точек вещественной оси, которым соответствуют вершины четырехугольника.

Частное интегралов уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$\frac{2\eta'\eta''' - 3\eta''^2}{\eta'^2} = \frac{1}{x(x-a)(x-1)}\left[\frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{x-a} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-a}{x-1} + 4\lambda + x + (1+a)\right]. \quad (44)$$

Предположим теперь, наоборот, что нам дан какой-либо односвязный четырехугольник, ограниченный дугами окружностей, с углами, равными нулю, и не имеющий точек разветвления. Можно построить такую аналитическую функцию η от x, которая преобразует полуплоскость в только что указанный четырехугольник, причем преобразование будет конформным везде за исключением вершин четырехугольника.

Совершая над x соответственным образом выбранное линейное преобразование, можно достигнуть того, чтобы трем последовательным вершинам четырехугольника соответствовали точки $x = 1$, ∞ и 0. Пусть при этом четвертой вершине соответствует точка $x = a$. Последняя точка должна находиться внутри интервала $(0, 1)$.

Функцию η можно, пользуясь принципом симметрии, продолжить аналитически через каждый из четырех отрезков вещественной оси в другую полуплоскость, и эта последняя преобразуется в четырехугольник, получаемый из исходного четырехугольника при помощи отображения в той из его сторон, которая соответствует отрезку вещественной оси, через который было совершено аналитическое продолжение. Новый четырехугольник будет обладать всеми свойствами исходного. Таким образом можно аналитически продолжать функцию η вдоль любого контура, не проходящего через точки

$$x = 0,\ a,\ 1 \text{ и } \infty. \tag{45}$$

Соответствующие значения η будут представлять собой сеть четырехугольников, получаемых путем последовательного отображения каждого из четырехугольников в его сторонах. Каждому из четырехугольников соответствует полуплоскость. Производная η' нигде не обращается в нуль, так как четырехугольники не имеют точек разветвления. Если бесконечно далекая точка принадлежит сети четырехугольников, то η при соответствующем значении x будет иметь полюс первого порядка.

Составим выражение

$$\frac{2\eta'\eta''' - 3\eta''^2}{\eta'^2}. \tag{46}$$

В силу вышесказанного оно будет голоморфно во всякой точке плоскости, за исключением точек (45). Если мы будем продолжать функцию η вдоль какого-либо замкнутого контура, то, так как этот последний пересечет вещественную ось четное число раз, новая ветвь функции η может быть получена из исходной при помощи четного числа отображений, т. е. при помощи линейной подстановки. Но выражение (46) не меняется при такой подстановке, а потому оно представляет собою однозначную функцию x.

Определим вид этой функции вблизи точек (45). Для примера рассмотрим точку $x = 0$. Ввиду указанной инвариантности выражения (46) мы можем рассматривать любое линейное преобразование η. Выберем это последнее так, чтобы вершина четырехугольника, соответствующая точке $x = 0$, была бесконечно удаленной, а одна из сторон четырехугольника пошла бы по мнимой оси так, чтобы отрицательным значениям x, достаточно близким к нулю, соответствовали бы точки, лежащие на положительном направлении мнимой оси достаточно близко к бесконечно далекой точке. Отрезку $(0, a)$ будет соответствовать прямая, параллельная мнимой оси. Пусть ее уравнение будет

$$\eta = b.$$

Легко видеть, что точками четырехугольника, достаточно близкими к рассматриваемой бесконечно удаленной вершине, будут достаточно удаленные точки верхней полуплоскости, лежащие между мнимой осью и указанной только что прямой.

Предположим для определенности, что рассматриваемый четырехугольник является конформным изображением верхней полуплоскости. В этом случае b должно быть положительно. При положительном обходе точки $x = 0$ η испытывает подстановку $\eta_1 = \eta + 2b$. Выражение $\exp[(\pi i/b)\eta]$ будет однозначно вблизи точки $x = 0$ и при стремлении x к нулю оно будет стремиться к нулю при всяком законе изменения x. Следовательно,

$$e^{\frac{\pi i}{b}\eta} = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\eta = c \lg x + \omega(x), \tag{47}$$

где c — отличная от нуля постоянная, и $\omega(x)$ — голоморфная вблизи точки $x = 0$ функция. Подставляя это выражение в выражение (46), убедимся, что это последнее имеет в точке $x = 0$ полюс второго порядка с коэффициентом при x^{-2}, равным $+1$. Тот же результат получим при рассмотрении точек $x = a$ и $x = 1$.

При исследовании точки $x = \infty$ надо в выражение (47) подставить x^{-1} вместо x. Затем легко непосредственно убедиться, что выражение (46) будет голоморфно в точке $x = \infty$ и разложение этого выражения начнется с члена, содержащего x^{-2}.

Принимая во внимание все сказанное, выражение (46) можем написать в виде

$$\frac{2\eta'\eta''' - 3\eta''^2}{\eta'^2} = \frac{1}{x(x-a)(x-1)} \left[\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x-a} + \frac{a_3}{x-1} + a_4 + x\right].$$

Приравнивая коэффициенты при x^{-2}, $(x-a)^{-2}$ и $(x-1)^{-2}$ в правой части этого равенства единице, убедимся, что числители дробей, стоящих в квадратных скобках, совпадают с соответствующими числителями, стоящими в правой части равенства (44). Кроме того, в силу указанной выше инвариантности выражения (46), мы можем считать, что сторона четырехугольника, соответствующая одному из интервалов вещественной оси, сама будет лежать на вещественной оси. Отсюда непосредственно следует, что постоянная a_4 должна быть вещественной.

Мы видим, таким образом, что η удовлетворяет уравнению (44) при вещественном значении параметра λ, и, следовательно, всякий четырехугольник с указанными в начале настоящего параграфа свойствами может быть получен из полуплоскости при помощи частного двух независимых интегралов уравнения вида (1) при вещественном значении параметра λ (см, § 8 Введения).

§ 14. Мы будем говорить, что уравнение соответствует четырехугольнику, если этот последний является преобразованием полуплоскости при помощи частного интегралов упомянутого уравнения. Если мы преобразуем четырехугольник при помощи какой-либо линейной подстановки, то новому четырехугольнику будет соответствовать то же уравнение, что и прежнему.

Пусть нам дан какой-либо четырехугольник с указанными в предыдущем параграфе свойствами. Условимся таким образом преобразовывать его в полуплоскость, чтобы трем его определенным последовательным вершинам соответствовали точки 1, ∞ и 0. При этом четырехугольнику может соответствовать лишь одно уравнение вида (1). Действительно, пусть $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$ — функции, преобразующие полуплоскость в данный четырехугольник при указанном выше условии. Рассмотрим обратные функции $x = \varphi(\eta)$, $x_1 = \varphi_1(\eta)$, преобразующие четырехугольник в полуплоскость. Исключая из этих двух равенств η, получим аналитическую функцию, преобразующую полуплоскость в себя, но это должна быть, как известно, линейная функция. Из предыдущего ясно, что она должна преобразовывать точки 0, 1 и ∞ в себя, и , следовательно, мы имеем тождества

$$\varphi(\eta) = \varphi_1(\eta), \quad \eta(x) = \eta_1(x).$$

Таким образом, $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению вида (44).

Можно изучить все возможные четырехугольники с указанными в предыдущем параграфе свойствами, если рассмотреть все возможные случаи преобразования полуплоскости при помощи частного интегралов уравнения (1).

Мы можем, например, утверждать на основании сказанного в §§ 11 и 12, что четырехугольник сам на себя не налегает, если его стороны не налегают сами на себя, и что налегать на себя могут лишь две противоположные стороны, причем число полных оборотов на каждой из этих сторон должно быть одинаково.

Выше мы показали также, что если в четырехугольнике нет налегающих сторон, то стороны четырехугольника не пересекаются. Покажем теперь, что если в четырехугольнике две противоположные стороны будут налегающими, то стороны эти не могут проходить через одну и ту же точку плоскости. Для определенности предположим, что эти налегающие стороны соответствуют отрезкам $(0, a)$ и $(1, \infty)$ вещественной оси. Удержим те обозначения вершин, которыми мы пользовались в § 12.

В рассматриваемом случае мы будем также иметь треугольник ABC и сторона AB не будет налегающей. Точке C будут соответствовать несколько значений x, лежащих внутри интервалов $(0, a)$ и $(1, \infty)$. Возьмем в первом интервале то из этих значений $x = \alpha$, которое ближе всего лежит к точке $x = a$, а в интервале $(1, \infty)$ возьмем значения, ближайшие к точке $x = 1$. Рассмотрим x как функцию η и возьмем ту ветвь этой функции, которая в точке C принимает значение $x = \alpha$. Будем продолжать эту функцию вдоль контура треугольника ABC в положительном направлении. Возвратившись в точку C, мы будем иметь новое значение $x = \beta$, чего не может быть (§ 12). Таким образом, мы видим, что пересечься могут лишь не налегающие стороны четырехугольника. Впоследствии мы убедимся, что это обстоятельство действительно может иметь место. В последующих главах мы займемся более детальным рассмотрением свойств четырехугольника.

Глава III

ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ В СЛУЧАЕ РАВНЫХ КОРНЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ

§ **1.** Задача обращения дифференциального уравнения (1) предыдущей главы может привести к однозначной функции, как мы видели, лишь при выполнении условия (42). В настоящей главе мы исследуем подробнее вопрос о тех значениях параметра λ, при которых задача обращения действительно приводит к однозначной функции, а также обратим внимание на общие свойства группы уравнения (1) в этих случаях. В этой главе мы будем постоянно предполагать, что параметр λ вещественен и удовлетворяет условию (42). Как мы видели в § 11 предыдущей главы, в этом случае частное двух независимых интегралов уравнения (1) преобразует полуплоскость в известный нам четырехугольник, который не налегает сам на себя.

Дальнейшие значения η будут определяться путем аналитического продолжения, и вся область значений η получится при помощи отображения основного четырехугольника и всех вновь получаемых четырехугольников в каждой из их сторон (см. § 13 гл. II).

При обходе какой-либо особой точки уравнения (1) необходимо пересечь два отрезка вещественной оси, и, следовательно, та дробно-линейная подстановка, которую при этом испытает η, будет состоять из двух отображений. Вообще четное число отображений, о которых мы только что упоминали, даст подстановку группы уравнения (1), и наоборот, всякая подстановка этой группы может быть составлена из четного числа указанных выше отображений.

Два соседних четырехугольника, взятые вместе, составят шестиугольник, являющийся конформным изображением всей плоскости переменной x, причем в этой плоскости надо представить себе проведенной купюру вдоль всей вещественной оси, кроме того отрезка, которому соответствует общая сторона соединенных четырехугольников. Всякому другому отрезку вещественной оси будут соответствовать на плоскости η две стороны шестиугольника. Эти последние связаны линейной подстановкой, и полученные таким образом три линейные подстановки могут быть приняты за производящие подстановки группы уравнения (1).

Вся область значений η может быть получена, если мы преобразуем построенный шестиугольник при помощи всех подстановок группы уравнения (1).

Все эти рассуждения остаются без изменения и в том случае, когда четырехугольник налегает сам на себя (см. § 14 гл. I).

§ **2.** Рассмотрим теперь те случаи, в которых группа уравнения (1) преобразует в себя некоторую окружность. Таких случаев, как мы видели, будет три:

$$\lambda = \lambda_0, \tag{1}$$

$$\lambda = \mu_{-1}, \tag{2}$$

$$\lambda = \mu_1. \tag{3}$$

Начнем со случая первого. Определим η по формуле (43). Особым точкам 0, a и 1 будут соответствовать на плоскости η начало координат, бесконечно далекая точка и точка $\pi\alpha(\lambda_0)$, лежащая на вещественной оси. Четвертая вершина четырехугольника также должна лежать на вещественной оси. Принимая во внимание теорему 6, мы получим четырехугольник, изображенный на рис. 1. Точка A находится в начале координат, прямая AB совпадает с вещественной осью и обе прямые и обе окружности ортогональны к этой оси. Вершины четырехугольника соответствуют особым точкам уравнения (1) следующим образом: точка A соответствует точке $x = 0$, точка B соответствует точке $x = \infty$, точка C соответствует точке $x = 1$, точка J соответствует точке $x = a$.

Совершим над плоскостью η такое линейное преобразование, чтобы бесконечно далекая точка лежала внутри четырехугольника, образованного продолжением сторон рассматриваемого четырехугольника. При этом четырехугольник примет вид, указанный на рис. 2, и будет окружен четырьмя кругами. Если мы отобразим четырехугольник в окружности какого-либо из этих кругов, то изображение этого четырехугольника и трех остальных кругов попадут внутрь этого круга. Проделаем то же и по отношению к трем другим кругам. Мы получим область значений η, состоящую из пяти четырехугольников и окруженную

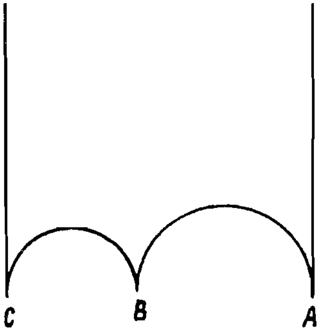

Рис. 1

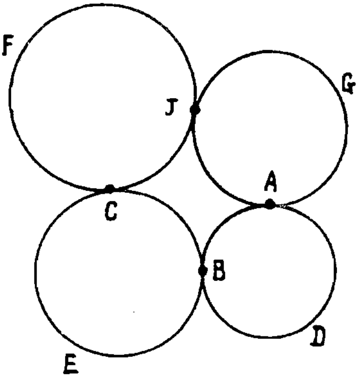

Рис. 2

двенадцатью кругами. Если мы будем отображать все четырехугольники этой области в их свободных сторонах, то получим область, окруженную тридцатью шестью кругами, и т. д. Вообще после n таких отображений получится область, окруженная $4 \cdot 3^n$ кругами.

Непосредственно ясно, что при последовательных отображениях новое положение четырехугольника оказывается внутри той окружности, в которой производилось отображение, а вся совокупность уже полученных четырехугольников — вне этой окружности. Мы видим, таким образом, что область значений η нигде не налегает сама на себя. Заметим при этом, что для нас существенным является лишь то обстоятельство, что окружности, образующие стороны четырехугольника, не пересекаются при продолжении. Таким образом, в рассматриваемом случае группа уравнения будет собственно прерывной, и упомянутый выше шестиугольник будет фундаментальным многоугольником группы. Кроме того, в этом случае все подстановки будут преобразовывать в себя вещественную ось (см. рис. 1) и группа будет фуксовой группой с предельным кругом (см. § 14 гл. I), а x будет фуксовой функцией от η.

§ 3. Разберем теперь условие (2). Определим η опять по формуле (43). В этом случае конформное изображение полуплоскости представится в виде четырехугольника, изображенного на рис. 3, как это непосредственно ясно из рассуждений § 12 гл. II.

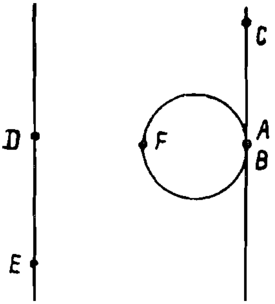

Рис. 3

Точка A, находящаяся в начале координат, соответствует точкам $x = 0$ и $x = \infty$, а бесконечно удаленная точка J — точкам $x = a$ и $x = 1$. Контуром четырехугольника является $ACJDEJBAFA^{22}$, причем последовательность букв соответствует положительному обходу по контуру. Этот четырехугольник будет иметь лишь три различных отображения, а всякий последующий — лишь два, ибо две стороны каждого из четырехугольников будут находиться на одной и той же окружности. В основном, четырехугольник — это суть стороны AC и AB. Если бы мы совершили отображение четырехугольника в обеих этих сторонах, то получили бы два налегающих друг на друга четырехугольника, но при этом одинаковым значениям η соответствовали бы и одинаковые значения x.

При отображении в AC мы, исходя из верхней полуплоскости, достигаем нового значения x, переходя через отрезок $(0, a)$, а при отображении в AB мы при одинаковых значениях x достигаем тех же значений x, переходя через отрезок $(1, \infty)$. Аналогичные обстоятельства будут иметь место и в последующих четырехугольниках. Мы будем вместо двух одинаковых отображений рассматривать одно отображение.

Так как три окружности, образующие четырехугольник, не пересекаются, то область значений η, полученная при помощи последовательных отображений, нигде не наляжет сама на себя, и x будет однозначной функцией η.

Все стороны четырехугольника ортогональны вещественной оси, и группа уравнения (1) будет фуксовой группой с главным кругом (см. § 14 гл. I), а x будет фуксовой функцией от η.

Из § 10 гл. II видно, что в рассматриваемом случае между производящими подстановками группы должны существовать соотношения. За производящие подстановки мы примем подстановки S_1, S_2 и S_3, указанные в § 10 гл. II.

Из выше приведенных соображений об отображении в AB и AC непосредственно следует, что, идя из верхней полуплоскости в нижнюю через отрезок $(0, a)$ и возвращаясь затем опять в верхнюю полуплоскость через отрезок $(1, \infty)$, мы вернемся к исходной ветви функции η, т. е. между производящими подстановками существует соотношение

$$S_3 S_2 = 1. \tag{4}$$

Докажем, что никакого другого соотношения, отличного от этого, быть не может.

Пусть такое соотношение существует. Пользуясь соотношением (4), исключим из этого соотношения подстановки S_3 и S_3^{-1}. Ввиду того, что предполагаемое соотношение отлично от (4), после такого исключения оно не превратится в тождественное соотношение между подстановками S_1, S_2, S_1^{-1} и S_2^{-1}. Каждая из этих подстановок распадается на два отображения.

Приведем затем левую часть предполагаемого соотношения между подстановками к простейшему виду, т. е. исключим возможность непосредственного следования за какой-либо подстановкой подстановки, ей обратной, и выделим потом группы $S_2 S_1$ и $S_1^{-1} S_2^{-1}$, если они встретятся. Непосредственно ясно, что каждой из таких групп будет соответствовать два, а не четыре отображения.

Заменим теперь в соотношении отдельные подстановки и только что указанные группы соответствующими отображениями. Мы получим после этого, как это легко видеть, такую последовательность отображений, в которой два одинаковых отображения не могут следовать одно за другим. Но мы выше видели, что такая последовательность отображений приведет нас к новым значениям η^*, и потому те подстановки, которые стоят в левой части предполагаемого соотношения и которые мы заме-

---

*О замене основных отображений последовательными отображениями в сети четырехугольников см. § 9 гл. I.

нили отображениями, не могут дать в результате тождественной подстановки. Следовательно, всякое соотношение между производящими подстановками группы является следствием соотношения (4).

Совершенно так же мы могли бы рассмотреть случай (3), положив

$$\eta = \frac{iy_2(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)}.$$

Рассуждения последних двух параграфов приводят нас к следующей теореме:

Теорема 7. *В уравнении* (1) *при одном и только одном значении параметра* $\lambda = \lambda_0$ *независимая переменная будет фуксовой функцией с предельным кругом частного двух независимых интегралов этого уравнения, причем в этом случае между производящими подстановками* S_1, S_2 *и* S_3 *группы уравнения не существует никаких соотношений. В этом же уравнении при двух и только двух значениях параметра* $\lambda = \mu_{-1}$ *и* $\lambda = \mu_1$ *независимая переменная будет фуксовой функцией с главным кругом частного двух независимых интегралов, и в каждом из этих случаев между вышеуказанными производящими подстановками группы уравнения будет существовать единственное независимое соотношение, в силу которого произведение некоторых двух из указанных выше подстановок равносильно тождественной подстановке.*

§ **4.** Будем исследовать теперь вид четырехугольника при значениях λ, удовлетворяющих условию

$$\mu_{-1} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0. \tag{5}$$

Определим η по формуле (43) предыдущей главы. При $\lambda = \lambda_0$ четырехугольник будет иметь вид, указанный на рис. 1. При изменении λ вершины A и J будут оставаться неизменными, а вершины B и C будут двигаться, причем легко видеть, что комплексные координаты их будут аналитическими функциями λ. Например, координата вершины C имеет вид

$$\pi\alpha(\lambda) + \frac{i\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}.$$

При всяком значении λ точки A, B и C, как мы упоминали в § 12 гл. II, будут находиться на одной прямой.

В § 9 гл. II мы видели, что при условии (5) $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — отрицательны. Кроме того, принимая во внимание формулу

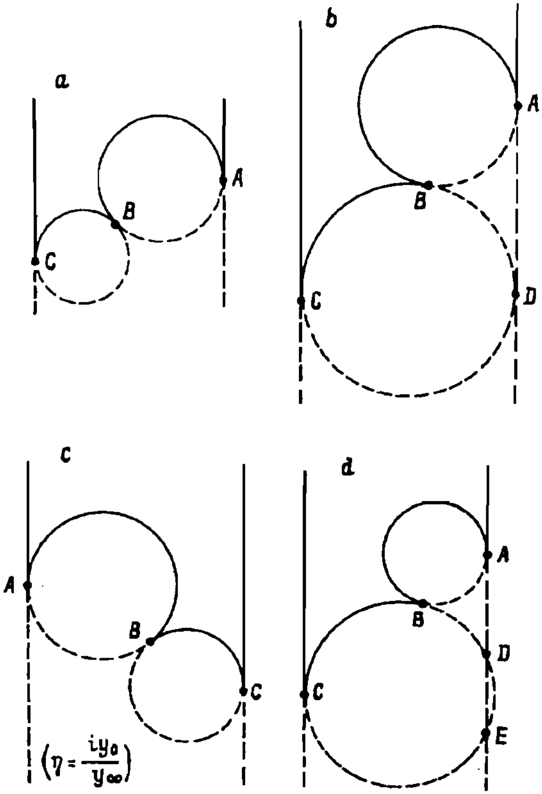

Рис. 4

(33) гл. II, а также то, что $\gamma(\lambda)$ не обращается в нуль внутри интервала (μ_1, λ_0), мы видим, что $\gamma(\lambda)$ положительна при условии (5), и отрезок AC будет таким образом находиться в нижней полуплоскости и будет образовывать с отрицательным направлением вещественной оси угол, заключащийся между 0 и $\pi/2$*. Принимая во внимание теорему 6, можем, таким образом, утверждать, что четырехугольник будет иметь вид, указанный на рис. 4.

---

*Угол этот, как видно из выражения координаты точки C, будет непрерывно меняться при непрерывном изменении λ и будет приближаться к $\pi/2$.

соотношенія, и которые мы замѣнили отображеніями, не могутъ дать въ результатѣ тождественной подстановки. Слѣдовательно всякое соотношеніе между производящими подстановками группы является слѣдствіемъ соотношенія (4). Совершенно также мы могли-бы разсмотрѣть случай (3), положивъ:

$$\eta = \frac{i y_2(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)}.$$

Разсужденія послѣднихъ двухъ параграфовъ приводятъ насъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема $7^{\underline{\text{ая}}}$ Въ уравненіи (1) при одномъ и только одномъ значеніи параметра $\lambda=\lambda_0$ независимое перемѣнное будетъ фуксовой функціей съ предѣльнымъ кругомъ частнаго двухъ независимыхъ интеграловъ этого уравненія, при чемъ въ этомъ случаѣ между производящими подстановками S_1, S_2 и S_3 группы уравненія не существуетъ никакихъ соотношеній.

Въ этомъ-же уравненіи при двухъ и только двухъ значеніяхъ параметра $\lambda=\mu_{-1}$ и $\lambda=\mu_1$ независимое перемѣнное будетъ фуксовой функціей съ главнымъ кругомъ частнаго двухъ независимыхъ интеграловъ, и въ каждомъ изъ этихъ случаевъ между вышеуказанными производящими подстановками группы уравненія будетъ существовать единственное независимое соотношеніе, въ силу котораго произведеніе нѣкоторыхъ двухъ изъ указанныхъ выше подстановокъ равносильно тождественной подстановкѣ.

§4 Будемъ изслѣдовать теперь видъ четырехугольника при значеніяхъ λ, удовлетворяющихъ условію:

$$(5)\ \mu_{-1} \leq \lambda \leq \lambda_0 .$$

Опредѣлимъ η по формулѣ (43) предыдущаго параграфа. При $\lambda=\lambda_0$ четырехугольникъ будетъ имѣть видъ, указанный на рисункѣ $1^{\text{омъ}}$. При измѣненіи λ вершины A и D будутъ оставаться неизмѣнными, а вершины B и C будутъ двигаться, при чемъ легко видѣть, что комплексныя координаты ихъ будутъ аналитическими функціями λ. Напримѣръ координата вершины C имѣетъ видъ:

$$\pi\alpha(\lambda)+\frac{i\gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}.$$

При всякомъ значеніи λ точки A, B и C, какъ мы упоминали въ §12 главы II, будутъ находиться на одной прямой.

Въ §9 главы II мы видѣли, что при условіи (5) $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ - отрицательны. Кромѣ того, принимая во вниманіе формулу (33) главы II, а также то, что $\gamma(\lambda)$ не обращается въ ноль внутри интервала (μ_{-1}, λ_0), мы видимъ, что $\gamma(\lambda)$ положительна при условіи (5), и отрѣзокъ AC будетъ такимъ образомъ находиться въ нижней полуплоскости и будетъ образовывать съ отрицательнымъ направленіемъ вещественной оси уголъ, заключающійся между 0 и $\frac{\pi}{2}$.*) Принимая во вниманіе теорему $6^{\text{ую}}$, можемъ такимъ образомъ утверждать, что четырехугольникъ будетъ <u>имѣть видъ</u>, указанный на рисункѣ $4^{\text{омъ}}$.

---

*) Уголъ этотъ, какъ видно изъ выраженія координаты точки C, будетъ непрерывно мѣняться при непрерывномъ измѣненіи λ и будетъ приближаться $\frac{\pi}{2}$.

Исследуем вопрос о пересечении сторон четырехугольника при их продолжении. Пересекаться могут лишь продолжения противоположных сторон четырехугольника, но прямая CJ, не пересекая дуги AB, отстоит от мнимой оси на расстоянии, большем диаметра окружности, которой принадлежит дуга AB, и потому прямая эта при своем продолжении не может пересечь только что указанной окружности. Итак, может произойти лишь пересечение окружности, на которой лежит сторона BC, с отрицательной частью мнимой оси. Пересечение это обязательно произойдет, если угол между отрезками AC и отрицательной частью вещественной оси станет равным $\pi/4$.

Обозначим буквою D ту точку пересечения, которая будет ближе к точке A (см. рис. 4,d)^{23}. Продолжения дуг AB, CB и мнимой оси образуют при этом треугольник ABD, два угла которого равны нулю, а величину угла при вершине D обозначим буквой φ.

Комплексные координаты точек B и C меняются непрерывно при непрерывном изменении λ, можно поэтому утверждать, что при значениях λ, достаточно близких к λ_0, указанного выше пересечения произойти не может и что при наличии такого пересечения φ будет непрерывной функцией λ и будет удовлетворять условиям

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \qquad \lim_{\lambda=\mu_{-1}} \varphi = \pi. \tag{6}$$

§ **5.** Мы видим, таким образом, что при соблюдении условия (5) φ принимает любое значение, удовлетворяющее неравенству (6).

Мы докажем следующую теорему:

Теорема 8. *При соблюдении условия (5) φ принимает любое значение, удовлетворяющее неравенству (6), лишь один раз.*

Для доказательства этой теоремы установим сначала следующую лемму:

Лемма 4. *Треугольник, ограниченный дугами окружностей, вполне определен, если известны его вершины, углы при вершинах и порядок следования вершин при положительном обходе контура.*

Предполагается, что треугольник будет односвязным и не будет иметь точек разветвления внутри и на сторонах. Вершины будут точками разветвления, если соответствующие углы больше 2π.

Предположим, что мы имеем два треугольника с указанными в условиях леммы свойствами. Пусть $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$ будут функции, преобразующие конформно верхнюю полуплоскость в эти два треугольника так, что вершины треугольников (одинаковые) соответствуют точкам $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$. Это можно сделать ввиду указанного в условиях леммы порядка следования вершин.

Совершенно таким же приемом, который мы употребляли в § 13 гл. II, можно показать, что η и η_1 будут частными двух независимых интегралов уравнения*

$$y'' - \frac{1}{4}\left[\frac{a_1^2-1}{x^2} + \frac{a_2^2-1}{(x-1)^2} + \frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2-1}{x(1-x)}\right] y = 0,$$

причем мы обозначили через $a_1\pi$, $a_2\pi$ и $a_3\pi$ углы треугольников, вершины которых соответствуют точкам $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$. Таким образом, η и η_1 должны быть связаны линейной зависимостью, которая в данном случае превращается в тождественное соотношение $\eta_1 = \eta$, так как вершины обоих треугольников соответствуют сами себе. При этом мы предполагаем, что все три вершины треугольников лежат в различных точках плоскости, иначе лемма 4 не имеет места**.

§ **6.** Переходим теперь к доказательству теоремы 8.

Сделаем предположение, обратное утверждению этой теоремы, т. е. предположим, что φ принимает некоторое значение φ_0 при двух различных значениях λ_1, удовлетворяющих условию (5). Обозначим эти значения буквами λ' и λ''.

Формула (43) предыдущей главы определит $\eta(x, \lambda')$, $\eta(x, \lambda'')$, и мы будем иметь на плоскости переменной η два четырехугольника: $A_1B_1C_1J_1$ и $A_2B_2C_2J_2$ и два треугольника: $A_1B_1D_1$ и $A_2B_2D_2$, вид которых мы определили в § 4.

В треугольниках $A_1B_1D_1$ и $A_2B_2D_2$ углы при вершинах D_1 и D_2 равны по предположению φ_0, а остальные углы равны нулю. Совершим над вторым треугольником и связанным с ним четырехугольником такое линейное преобразование, чтобы точки A_2, B_2 и D_2 совпали бы с точками A_1, B_1 и C_1. Будем обозначать $\eta(x, \lambda')$ просто буквою η, а преобразованные значения $\eta(x, \lambda'')$ — буквою η_1. Эта буква будет изображать частное некоторых двух независимых интегралов уравнения (1) предыдущего параграфа при $\lambda = \lambda''$.

---

*Это есть т. н. каноническая форма уравнения Gauss'a.

**См. Schilling [15, S. 208–214]; Klein [16, S. 84].

В силу леммы 4 стороны треугольника $A_2B_2D_2$ совпадут со сторонами треугольника $A_1B_1D_1$. Четырехугольник $A_2B_2C_2J_2$ преобразуется поэтому следующим образом: сторона A_2B_2 совпадет со стороною A_1B_1, сторона B_2C_2 пойдет по стороне B_1C_1 и сторона A_2J_2 пойдет по стороне A_1J_1. Относительно нового положения точки C_2 можно сделать три предположения:

1) C_2 совпадет с C_1;
2) C_2 будет лежать на стороне B_1C_1;
3) C_2 будет лежать на продолжении стороны B_1C_1.

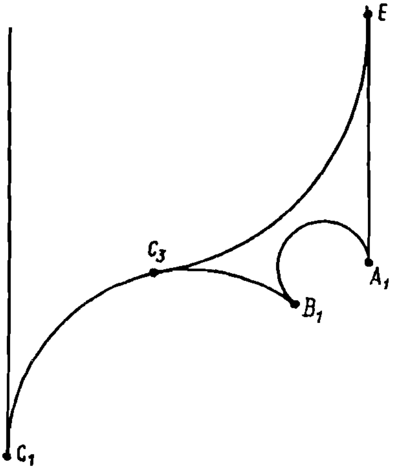

Рис. 5

В первом случае преобразованный четырехугольник должен совпасть с четырехугольником $A_1B_1C_1J_1$, но, как мы видели в § 14 гл. II, одному и тому же четырехугольнику может соответствовать лишь одно уравнение вида (1) предыдущей главы, если трем его определенным вершинам соответствуют точки 0, 1 и ∞. Следовательно, в этом случае должно быть

$$\lambda'' = \lambda'.$$

Перейдем теперь ко второму случаю и докажем, что он не может встретиться. Обозначим буквою C_3 новое положение вершины C_2. Как легко видеть, новое положение вершины I_2 будет лежать на положительном направлении мнимой оси. Обозначим эту точку буквою E. Четырехугольник $A_2B_2C_2J_2$ превратится в четырехугольник $A_1B_1C_3E$, и этот последний будет составлять лишь часть четырехугольника $A_1B_1C_1J_1$ (см. рис. 5). Оба четырехугольника являются конформным изображением верхней полуплоскости, причем особые точки, лежащие на вещественной оси, в обоих случаях будут одни и те же. Напишем соотношения, дающие эти конформные преобразования:

$$\eta = \eta(x, \lambda'), \quad \eta_1 = \eta_1(x, \lambda''). \tag{7}$$

Исключая из этих равенств x, получим

$$\eta_1 = \psi(\eta). \tag{8}$$

Функция эта преобразует четырехугольник $A_1B_1C_1J_1$ в четырехугольник $A_1B_1C_3E$, причем в силу вышеуказанного тождества особых точек на вещественной оси вершинам первого четырехугольника соответствуют вершины второго четырехугольника. Покажем, что такое преобразование невозможно.

§ 7. Если мы станем отображать четырехугольник $A_1B_1C_1J_1$ в его сторонах, то функция (8) может быть на основании принципа симметрии аналитически продолжена во вновь полученные четырехугольники и преобразует их в четырехугольники, которые получаются из четырехугольника $A_1B_1C_3E$ при помощи отображения в соответствующих сторонах.

Обозначим буквою $\mathcal{E}_1$ область, состоящую из четырехугольника $A_1B_1C_1J_1$ и его отображений в сторонах A_1J_1, A_1B_1 и B_1C_1, а буквою $\mathcal{E}_2$ — область, состоящую из четырехугольника $A_1B_1C_3E$ и его отображений в сторонах A_1E, A_1B_1 и B_1C_3, причем мы исключим из рассмотрения в обеих областях вершины четырехугольников.

Непосредственно видно, что области $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ не налегают сами на себя и что область $\mathcal{E}_2$ лежит на конечном расстоянии и составляет лишь часть области $\mathcal{E}_1$. Функция (8) преобразует в силу вышесказанного область $\mathcal{E}_1$ в область $\mathcal{E}_2$. Следовательно, функция эта будет голоморфной функцией в области $\mathcal{E}_1$, будет принимать в этой области всякое свое значение не более одного раза, и к ней будет приложим алгоритм вида

$$\begin{aligned} &\psi_2(\eta) = \psi[\psi(\eta)] \quad (n = 3, 4, \ldots), \\ &\psi_n(\eta) = \psi[\psi_{n-1}(\eta)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Все функции $\psi_n(\eta)$ будут голоморфны в области $\mathcal{E}_1$, ограничены в своей совокупности и каждая из них принимает всякое свое значение не более одного раза. К этим функциям будет, таким образом, приложим принцип сходимости.

Для простоты письма сохраним то же обозначение [индексов] у функций и положим

$$\lim_{n=\infty} \psi_n(\eta) = \psi_0(\eta).$$

Если η находится на дуге B_1C_1 или прямой A_1J_1, то значения $\psi_n(\eta)$ при всяком n находятся там же, и потому $\psi_0(\eta)$ не может быть постоянной. Мы можем поэтому утверждать, что $\psi_0(\eta)$ не может принимать в области $\mathcal{E}_1$ никакого значения более одного раза (см. § 5 Введения). Функция $\psi(\eta)$ преобразует дугу A_1B_1 в себя (концов этой дуги мы не рассматриваем), и мы можем относительно этого преобразования сделать два предположения:

1) существует на дуге A_1B_1 такая точка α, что $\alpha = \psi(\alpha)$;

2) при движении точки η по дуге A_1B_1 от точки A_1 к точке B_1 точка $\psi(\eta)$ движется по этой же дуге в том же направлении, оставаясь постоянно либо впереди, либо позади точки η.

Докажем невозможность обоих этих предположений. При первом предположении мы имеем вблизи точки α разложение вида

$$\psi(\eta) - \alpha = a_1(\eta - \alpha) + a_2(\eta - \alpha)^2 + \ldots,$$

где a_1 должно быть вещественным положительным числом, так как в точке $\eta = \alpha$ направление касательной не меняется при конформном преобразовании при помощи функции $\psi(\eta)$. Совершая алгоритм (9), получим

$$\psi_n(\eta) - \alpha = a_1^n(\eta - \alpha) + a_{2,n}(\eta - \alpha)^2 + \ldots \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Отсюда видно, что a_1 не может быть больше единицы, ибо при этом $\psi_n'(\alpha)$ беспредельно возрастало бы при возрастании n, но мы должны иметь

$$\lim_{n=\infty} \psi_n'(\alpha) = \psi_0'(\alpha).$$

Точно так же предположение, что a_1 меньше единицы, приведет нас к равенству:

$$\lim_{n=\infty} \psi_n'(\alpha) = \psi_0'(\alpha) = 0,$$

а этого не может быть, так как $\psi_0(\eta)$, как было указано выше, принимает в области $\mathcal{E}_1$ всякое свое значение не более одного раза.

Остается предположить, что a_1 равно единице. Пусть при этом в разложении $\psi(\eta) - \alpha$ по степеням $(\eta - \alpha)$ после a_1 следующий коэффициент, не обращающийся в нуль, будет a_k. Такой коэффициент обязательно должен быть, ибо иначе область $\mathcal{E}_2$ должна была бы совпадать с областью $\mathcal{E}_1$. Мы имеем разложения

$$\begin{aligned}\psi(\eta)-\alpha&=(\eta-\alpha)+a_k(\eta-\alpha)^k+\ldots,\\ \psi_n(\eta)-\alpha&=(\eta-\alpha)+na_k(\eta-\alpha)^k+\ldots\quad(n=2,3,\ldots).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\psi_n^{(k)}(\alpha)$ беспредельно возрастает при возрастании n, чего не может быть, так как мы имеем

$$\lim_{n=\infty}\psi_n^{(k)}(\eta)=\psi_0^{(k)}(\eta).$$

Мы разобрали все возможные предположения о значении a_1 и доказали, таким образом, невозможность нашего первого предположения о преобразовании дуги A_1B_1*.

Перейдем теперь ко второму предположению и для определенности будем считать, что при любом положении точки η на дуге A_1B_1 точка $\psi(\eta)$, тоже лежащая на этой дуге, находится ближе к концу B_1, чем точка η.

Пусть α_1 — какая-либо точка дуги A_1B_1. Обозначим

$$\begin{aligned}\alpha_2&=\psi(\alpha_1),\\ \alpha_3&=\psi(\alpha_2)=\psi_2(\alpha_1),\\ &\vdots\\ \alpha_n&=\psi(\alpha_{n-1})=\psi_{n-1}(\alpha_1),\\ &\vdots\end{aligned}\tag{10}$$

Из сделанного предположения следует, что при всяком n точка α_{n+1} будет находиться ближе к концу B_1, чем точка α_n. Таким образом, существует

$$\lim_{n=\infty}\alpha_n=\gamma,$$

и из равенств (10) непосредственно следует

$$\gamma=\psi_0(\alpha_1).\tag{11}$$

---

*См. Bieberbach [17, S. 556].

Построим теперь на дуге A_1B_1 ряд точек:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \psi(\beta_1),\\ \beta_3 &= \psi(\beta_2) = \psi_2(\beta_1),\\ &\vdots\\ \beta_n &= \psi(\beta_{n-1}) = \psi_{n-1}(\beta_1),\\ &\vdots\end{aligned}$$

где β_1 — какая-либо точка дуги A_1B_1, лежащая между точками α_1 и α_2.

В силу свойств функции $\psi(\eta)$ можем утверждать, что β_n должна лежать между α_n и α_{n+1} и, следовательно,

$$\lim_{n=\infty} \beta_n = \gamma.$$

Как и раньше, заключаем отсюда, что

$$\gamma = \psi_0(\beta_1).$$

Принимая во внимание равенство (10), заключаем, что этого не может быть, так как $\psi_0(\eta)$ принимает в области $\mathcal{E}_1$ всякое свое значение не более одного раза. Таким образом, доказана невозможность второго предположения о преобразовании дуги A_1B_1 и вместе с тем вполне установлена невозможность второго случая, указанного на с. 102. Третий случай может быть приведен ко второму, если мы вместо того, чтобы преобразовывать треугольник $A_2B_2D_2$ в треугольник $A_1B_1D_1$, будем преобразовывать $A_1B_1D_1$ в треугольник $A_2B_2D_2$.

Мы можем считать поэтому теорему 8 вполне доказанной.

§ **8.** Перейдем теперь к исследованию задачи обращения в предположении, что параметр λ удовлетворяет условию (5).

Предварительно резюмируем все сказанное нами о четырехугольнике на плоскости переменной η, определенной равенством (43) [гл. II].

При $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \mu_{-1}$ вид четырехугольника был нами указан на рис. 1 и 3, и задача обращения исследована (см. теорему 7). При остальных значениях λ четырехугольник имеет вид, указанный на рис. 4. Стороны четырехугольника не налегают сами на себя и не пересекаются одна с другой. Если продолжить стороны, то могут пересечься лишь продолжения сторон BC и AJ.

Комплексные координаты вершин B и C суть аналитические функции λ. При значениях λ, близких к λ_0, продолжения указанных только что сторон не будут пересекаться. При дальнейшем уменьшении λ мы дойдем до такого значения λ, при котором продолжение дуги BC будет касаться продолжения прямой AJ. Обозначим это значение λ знаком $\lambda_0^{(0)}$. При дальнейшем уменьшении λ продолжение BC будет постоянно пересекаться с продолжением AJ, и угол, который они будут образовывать, будет непрерывно возрастать от 0 до π. Обозначим знаком $\lambda_0^{(\varphi)}$ то значение λ, при котором угол этот равен φ. Мы будем иметь

$$\lambda_0^{(\pi)} = \mu_{-1}.$$

Повторяя рассуждения § 2 настоящей главы, мы докажем, что если λ удовлетворяет условию

$$\lambda_0 \geqslant \lambda \geqslant \lambda_0^{(0)}, \tag{12}$$

то последовательные отображения основного четырехугольника нигде не налягут друг на друга. Следовательно, в этом случае, как это было указано в § 10 гл. II, x будет однозначной автоморфной функцией η, областью существования этой функции будет некоторая односвязная область, и между тремя основными подстановками: S_1, S_2 и S_3 группы уравнения (1) не будет существовать никакого соотношения.

Перейдем теперь к исследованию задачи обращения в тех случаях, когда $\lambda = \lambda_0^{(\varphi)}$.

Совершим над переменной η такое линейное преобразование, чтобы точка D, являющаяся одной из точек пересечения продолженных сторон BC и AJ, попала бы в начало координат, а вторая точка пересечения этих сторон — в бесконечно удаленную точку. Обозначим новое переменное буквой η_1. Это будет также частное двух независимых интегралов уравнения (1) гл. II. Стороны AJ и BC на плоскости переменной η_1 будут прямыми, и четырехугольник примет вид, указанный на рис. 6, причем мы удержали прежнее обозначение точек, так что бесконечно далекая точка плоскости переменной η_1 должна быть обозначена буквой E. Мы имеем

$$\angle ADB = \varphi.$$

Проведем биссектрису DK угла ADB и возьмем на ней какую-либо точку L, лежащую внутри четырехугольника. Проведем окружность, приняв точку D за центр, радиусом DL. Дуга этой окружности MN, лежащая между полупрямыми DJ и DC, будет вся принадлежать четырехугольнику.

Отображая четырехугольник в стороне BC, т. е. перегибая чертеж по прямой DC, получим другой четырехугольник BCJ_1A_1, а дуга MN займет новое положение: MN_1, причем обе эти дуги принадлежат одной и той же окружности. Совершим теперь отображение в стороне A_1J_1. Два совершенных отображения равносильны эллиптической подстановке

$$\eta_1' = e^{2\varphi i}\eta_1,$$

принадлежащей группе уравнения.

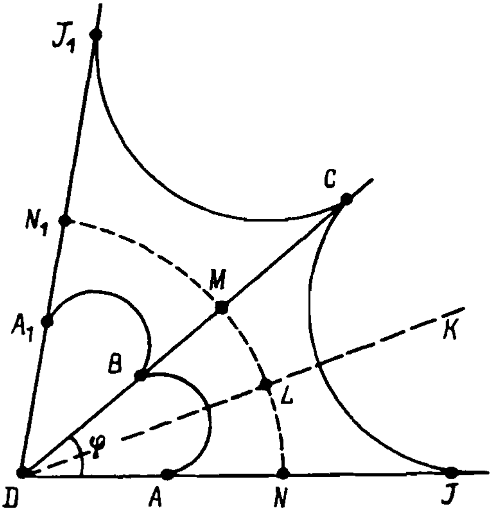

Рис. 6

Дуге NN_1 соответствует на плоскости x замкнутая, сама себя не пересекающая кривая, т. е. различным точкам этой дуги (кроме концов) соответствуют различные значения x.

Будем применять к дуге NN_1 указанную только что эллиптическую подстановку. Эквивалентным значениям η_1 будут соответствовать одинаковые значения x. Все новые положения дуги следуют непосредственно одно за другим и лежат на одной окружности.

Пусть после применения эллиптической подстановки k раз новое положение дуги впервые налегло на прежнее. Для однозначности обращения уравнения (1) необходимо, чтобы $2\varphi k$ было кратно 2π, но, принимая во внимание, что $\varphi < \pi$ и что $2\varphi(k-1) < 2\pi$, получим $2\varphi k = 2\pi$, т. е. для однозначности задачи обращения необходимо, чтобы φ имело вид

$$\varphi = \frac{\pi}{k} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Докажем теперь достаточность этого условия. Обратимся опять к рис. 6. Отобразим основной четырехугольник в стороне BC, полученный четырехугольник отобразим в стороне A_1J_1. Пусть при этом сторона BC займет положение B_1C_1. Отобразим вновь полученный четырехугольник в стороне B_1C_1 и т. д. После $(2k-1)$ отображений точка D будет окружена кольцевой областью $\mathcal{A}$, состоящей из $2k$ четырехугольников. Область эта будет иметь $4k$ сторон, каждая из которых представляет собой дугу окружности, и ни эти стороны, ни их продолжения не пересекаются. Вся область $\mathcal{A}$ лежит вне тех окружностей, на которых лежат стороны. Будем применять к области $\mathcal{A}$ последовательное отображение, как это мы делали с четырехугольником. Ввиду только что указанных свойств области $\mathcal{A}$ мы можем, рассуждая так же, как и в § 2 настоящей главы, прийти к заключению, что полученная таким образом сеть кольцевидных областей нигде не наляжет сама на себя.

Обозначим совершаемые отображения знаком σ_s. Последовательность таких отображений может привести какую-либо кольцевую область в прежнее положение лишь в том случае, когда в этой последовательности все отображения попарно одинаковы.

Пусть внутри сети кольцевых областей имеется контур. Отметим те последовательные области, через которые он проходит, и те отображения, при помощи которых каждая из этих областей получается из предшествующей ей области. Таким образом, всякой последовательности отображений будет соответствовать контур, пересекающий те дуги, в которых мы совершаем отображения, и наоборот. Из предыдущего ясно, что всякий контур $\mathcal{L}$, выходящий из какой-либо кольцевидной области и вновь в нее возвращающийся и притом идущий все время внутри построенной сети, может и пересечь какую-либо границу между кольцевидными областями лишь четное число раз. Поясним это более подробно. Пусть $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3, \ldots$, $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_1$ — те области, через которые проходит контур $\mathcal{L}$. Мы можем утверждать, что либо написанный ряд содержит лишь три члена, либо среди областей $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_n$ есть одинаковые, либо в противном случае последовательные отображения кольцевой области привели бы нас к прежним значениям η_1. Пусть во втором ряду областей области $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{A}_l$ — одинаковы. К ряду областей $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}_{l-1}$, $\mathcal{A}_l$ применимы те же рассуждения, и т. д.

Принимая во внимание, что исходный ряд областей не содержит подряд двух одинаковых областей, можем утверждать, что, применяя предыдущие рассуждения, мы выделим, наконец, в исходном ряде областей такие три последовательные области: $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{A}_{s+1}$ и $\mathcal{A}_{s+2}$, что $\mathcal{A}_s$ и $\mathcal{A}_{s+2}$ будут совпадать.

Назовем *простейшим контуром* такой контур, который проходит внутри сети и не пересекает два раза подряд никакой границы между кольцевидными областями. Из предыдущих рассуждений видно, что всякий контур, выходящий из некоторой кольцевидной области и вновь в нее возвращающийся, не может быть простейшим. Любые две кольцевидные области могут быть получены одна из другой при помощи единственной, вполне определенной простейшей последовательности отображений, т. е. существует вполне определенный простейший контур, выходящий из одной из этих областей и попадающий в другую область.

Действительно, если бы таких простейших контуров было два и они бы проходили через разные области, то мы имели бы простейший контур, выходящий из некоторой области и вновь в нее возвращающийся.

Все эти свойства образования кольцевидных областей будут для нас существенны в дальнейшем, и при ссылках на них мы будем просто упоминать о единственности образования кольцевидных областей.

Разобьем теперь опять область $\mathcal{A}$ на $2k$ четырехугольников. Все другие, ей эквивалентные, кольцевидные области разобьются также на $2k$ четырехугольников, и мы получим таким образом сеть четырехугольников, которая нигде не налегает сама на себя и которая может быть получена из основного четырехугольника путем последовательного отображения.

Покажем теперь, что всякий замкнутый контур, лежащий внутри построенной сети, пересекает четное число сторон четырехугольников. Построенная сеть состоит из кольцевидных областей, каждая из которых содержит $2k$ четырехугольников. Разобьем стороны четырехугольников на два класса: к первому классу причислим стороны, общие двум четырехугольникам, принадлежащим одной и той же кольцевидной области, а ко второму классу — стороны, общие двум кольцевидным областям. Соответственным образом будем говорить и об отображениях первого и второго классов.

Пронумеруем по порядку четырехугольники, лежащие в области $\mathcal{A}$, так, что всякому четырехугольнику будет соответствовать одно из чисел от 1 до $2k$, и числа, соответствующие двум соседним четырехугольникам, будут отличаться на 1 или (в одном случае) на $2k-1$. При отображении области $\mathcal{A}$ будем у эквивалентных четырехугольников сохранять соответствующие им числа, и таким образом четырехугольники каждой кольцевидной области будут пронумерованы по порядку. Нумерация эта будет вполне определенной, ибо всякая кольцевидная область может быть получена из области $\mathcal{A}$ при помощи вполне определенной, простейшей последовательности отображений.

Пусть некоторый контур $\mathcal{L}$, лежащий внутри сети, выходит из точки P и вновь возвращается в эту точку[24]. При каждом пересечении стороны первого класса номер четырехугольника изменяется на 1 или $2k-1$, а при пересечении стороны второго класса остается неизменным. При обходе по контуру $\mathcal{L}$ номер четырехугольника остался прежним, и, следовательно, контур должен был пересечь четное число сторон первого класса.

Не будем теперь обращать внимание на стороны первого класса. Контур $\mathcal{L}$ выходит из некоторой кольцевидной области и вновь в нее возвращается. Из рассуждений, приведенных выше, непосредственно следует, что контур этот должен пересечь четное число сторон второго класса, и, следовательно, он вообще пересечет четное число сторон четырехугольников.

Перейдем теперь к доказательству однозначности функции x на плоскости переменной η_1. Для этого будем аналитически продолжать эту функцию вдоль контура $\mathcal{L}$ и покажем, что при возвращении в точку P мы придем к исходному значению функции.

Отметим в той кольцевидной области, к которой принадлежит точка P, те $(2k-1)$ точек, которые получаются из точки P путем отображения, а в других кольцевидных областях отметим точки, получаемые из уже отмеченных точек при отображении кольцевидных областей. Таким образом, в каждом четырехугольнике будет находиться вполне определенная точка, эквивалентная точке P при процессе отображения.

Число четырехугольников, через которые проходит контур $\mathcal{L}$, есть число четное, как показано выше. Обозначим буквой P со значками отмеченные только что точки в этих четырехугольниках. Пусть это будут точки $P_1, P_2, \ldots, P_{2s}, P_1$, где мы для симметрии поставили P_1 вместо P. Функция x будет однозначной функцией η_1 внутри всякого четырехугольника. Следовательно, не меняя окончательного значения функции при аналитическом продолжении, мы можем деформировать каждую часть контура, находящуюся внутри какого-либо четырехугольника, так, чтобы она прошла через соответствующую точку P_k.

Итак, мы можем предполагать, что контур $\mathcal{L}$ проходит через точки P_k. Значения x на сторонах четырехугольников — вещественны. Пусть x_0 — значение этой функции в точке P_1. В силу принципа симметрии значение этой функции в точке P_2 будет $\bar{x}_0$, в точке P_3 — x_0 и т. д. и, наконец, в точке P_{2s} — $\bar{x}_0$ и в точке P_1 — x_0. Таким образом, при выполнении условия (13) x будет однозначной функцией η_1, а следовательно, и η (см. рис. 4).

Начиная с § 4, мы рассматривали значения λ, удовлетворяющие условию (5). Полагая

$$\eta = \frac{iy_a(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)'},$$

мы могли бы совершенно так же рассмотреть значения λ, удовлетворяющие условию

$$\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \mu_1. \qquad (5_1)$$

Мы получили бы при этом значения λ, аналогичные $\lambda_0^{(0)}$ и $\lambda_0^{(\varphi)}$. Обозначим их знаками $\lambda_1^{(0)}$ и $\lambda_1^{(\varphi)}$. Рассуждения настоящего параграфа приводят нас к следующей теореме:

Теорема 9. *Независимая переменная уравнения* (1) *предыдущего параграфа будет однозначной автоморфной функцией частного двух независимых интегралов этого уравнения при вещественных значениях λ, удовлетворяющих условию*

$$\lambda_1^{(0)} \geqslant \lambda \geqslant \lambda_0^{(0)}, \qquad (14)$$

и при дискретном ряде значений этого параметра $\lambda_0^{(\varphi)}$ и $\lambda_1^{(\varphi)}$, где

$$\varphi = \frac{\pi}{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Значения $\lambda_0^{(\varphi)}$ убывают с возрастанием φ, причем

$$\lambda_0^{(\pi)} = \mu_{-1},$$

$$\lim_{\varphi=0} \lambda_0^{(\varphi)} = \lambda_0^{(0)},$$

значения же $\lambda_1^{(\varphi)}$ возрастают с возрастанием φ, причем

$$\lambda_1^{(\pi)} = \mu_1,$$

$$\lim_{\varphi=0} \lambda_1^{(\varphi)} = \lambda_1^{(0)}.$$

Ни при каких других значениях параметра λ задача обращения не может иметь однозначного решения.

§ **9.** Будем в дальнейшем обозначать знаками $\lambda_{0,k}$ и $\lambda_{1,k}$ значения $\lambda_0^{(\varphi)}$ и $\lambda_1^{(\varphi)}$ при $\varphi = \pi/k$.

Область, в которой определена функция x, при выполнении условия (14) есть односвязная область, и между основными подстановками группы в этом случае не существует никаких соотношений.

Рассмотрим теперь эти же вопросы при значениях λ, равных $\lambda_{0,k}$ и $\lambda_{1,k}$.

Обратимся опять к рис. 6, что не внесет никаких изменений в полученные результаты, так как плоскость переменной η_1 получается из плоскости переменной η при помощи линейной подстановки. Продолжим в основном четырехугольнике дуги AB и JC. Мы получим два треугольника: ABD и JCE, где E — бесконечно далекая точка плоскости. Совершим теперь те $(2k-1)$ отображений, при помощи которых мы образовывали из основного четырехугольника область $\mathcal{A}$. Из треугольников ABD и JCE образуются при этом две области, которые вместе с областью $\mathcal{A}$ составят область $\mathcal{B}$. Эта последняя будет представлять собою плоскость с вырезанными $4k$ кругами, и круги эти образуют две цепи по $2k$ кругов в каждой.

Из рассуждений § 2 настоящей главы убеждаемся в том, что последовательные отображения области $\mathcal{B}$ в этих кругах и в получаемых при этом новых кругах нигде не налягут друг на друга. Отсюда мы можем непосредственно заключить, что отображения основного четырехугольника не только не налягут сами на себя*, но и не налягут на отображения треугольников

---

*Мы исключаем последовательности отображений, приводящие к тождественному преобразованию.

ABD и JCE. Будем совершать последовательные отображения треугольника ABD. Как известно из теории уравнения Gauss'а (см. § 9 Введения), отображения эти заполнят часть плоскости, находящуюся внутри окружности, проведенной из точки D как центра радиусом DA. Следовательно, сеть четырехугольников не может находиться внутри этой окружности. Точно так же она не может находиться вне окружности, описанной из точки D как центра радиусом DJ, и внутри тех окружностей, которые получатся из двух только что указанных окружностей при процессе отображения.

Таким образом, внутри и вне всякой кольцевидной области будут находиться части плоскости, не покрытые сетью четырехугольников, и эта последняя будет иметь бесконечную связность.

Установим теперь соотношения, которыми связаны основные подстановки группы уравнения (1) гл. II (см. § 10 гл. I). Рассмотрим подстановку

$$(S_2S_3)^{-1}. \tag{15}$$

Ей соответствуют (см. рис. 4) отображения в дуге BC и в дуге, получаемой после этого отображения из прямой AJ. Подстановка (15) будет гиперболической при условии

$$\lambda_0 \geqslant \lambda > \lambda_0^{(0)},$$

параболической при $\lambda = \lambda_0^{(0)}$ и эллиптической при $\lambda = \lambda_0^{(\varphi)}$, если $\varphi > 0$ (см. § 2 гл. I). Неподвижными точками этой эллиптической подстановки будут точки D и E (см. рис. 4). Если $\lambda = \lambda_{0,k}$, то мы имеем

$$(S_2S_3)^k = 1, \tag{16}$$

причем при $k = 1$ соотношение это превращается в соотношение (4).

Обратимся опять к плоскости переменной η_1 (см. рис. 6). Если U есть линейная подстановка, преобразующая η в η_1, то любая подстановка S группы уравнения (1) на плоскости переменной η_1 примет вид USU^{-1}. Мы будем обозначать последнюю подстановку буквою T, и если S имеет некоторый [индекс], то и у T мы будем ставить такой же [индекс]. Вместо соотношения (16) мы будем иметь

$$(T_2T_3)^k = 1. \tag{16$_1$}$$

Подстановка $(T_2T_3)^{-1}$ приводится к последовательным отображениям в прямых BC и A_1J_1. Шестиугольник ABA_1J_1CJ является фундаментальной областью группы уравнения, и указанная только что подстановка преобразует сторону AJ в A_1J_1.

Всякому соотношению между подстановками соответствует контур, выходящий из какого-либо шестиугольника и вновь в него возвращающийся. Например, соотношению (16_1) соответствует контур, обходящий область $\mathcal{A}$ в отрицательном направлении. Всякий такой контур мы можем всегда считать замкнутым.

Пусть T — какая-либо подстановка группы. Она преобразует фундаментальный шестиугольник в шестиугольник, который целиком лежит в некоторой кольцевидной области. Действительно, при всяком из тех отображений, на которые распадается подстановка T, два четырехугольника, составляющие фундаментальный шестиугольник, либо оба остаются в той кольцевидной области, где они и были (отображения первого класса), либо оба переходят в другую кольцевидную область (отображения второго класса). Рассуждение это относится вообще ко всем четырехугольникам, составляющим область $\mathcal{A}$, так что подстановка T либо преобразует область $\mathcal{A}$ в себя, либо преобразует ее в другую кольцевидную область, и если какая-либо подстановка группы преобразует фундаментальный шестиугольник в шестиугольник, лежащий в кольцевидной области $\mathcal{A}_n$, то эта же подстановка преобразует $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}_n$.

Мы имеем, как очевидное следствие соотношения (16_1), следующее соотношение:

$$(TT_2T_3T^{-1})^k = 1. \qquad (17_1)$$

Этому соотношению соответствует замкнутый контур, огибающий ту кольцевидную область, которая получается из области $\mathcal{A}$ при помощи подстановки T, и наоборот, всякому замкнутому контуру, огибающему какую-либо кольцевидную область, соответствует соотношение вида (17_1).

Предположим теперь, что имеется какое-либо соотношение между основными подстановками T_1, T_2 и T_3 группы уравнения (1), и докажем, что оно является следствием соотношений (16_1) и (17_1) и что, таким образом, соотношение (16_1) является единственным независимым соотношением между указанными подстановками.

Предположенному соотношению соответствует некоторый контур, выходящий из какого-либо шестиугольника и вновь в него возвращающийся. Разобьем подстановки, входящие в предполагаемое соотношение, на соответствующие им отображения. Мы можем применить к упомянутому только что контуру, который мы можем считать соответствующим полученной последовательности отображений, следующие два способа упрощения.

1). Если контур, выходя из какого-либо четырехугольника и попадая таким образом в соседний четырехугольник, затем непосредственно возвращается в исходный четырехугольник, то мы можем уничтожить часть контура, выходящую во второй из упомянутых четырехугольников, ибо в соотношении между отображениями этой части контура соответствуют два одинаковых рядом стоящих отображения.

2). Пользуясь соотношением (17_1), мы можем также уничтожать такую часть контура, которая, выходя из какого-либо четырехугольника, огибает кольцевидную область, к которой принадлежит этот четырехугольник, и вновь в него возвращается.

Возьмем теперь часть контура, лежащую целиком в какой-либо кольцевидной области. Применяя к ней указанные только что два способа упрощения, мы можем преобразовать ее так, чтобы она не проходила ни через один четырехугольник более одного раза. Преобразуем таким образом всякую часть контура, находящуюся целиком внутри одной из кольцевидных областей.

Полученный после этого преобразования новый контур будем упрощать следующим образом. Пусть $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2, \ldots$, $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}_1$ есть ряд последовательных кольцевидных областей, через которые проходит этот контур. Ввиду единственности образования кольцевидных областей мы можем найти в написанном только что ряду областей такие три последовательных области: $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{A}_{s+1}$ и $\mathcal{A}_{s+2}$, что $\mathcal{A}_s$ будет совпадать с $\mathcal{A}_{s+2}$. Принимая во внимание уже сделанные упрощения контура, мы можем утверждать, что контур пройдет только через один четырехугольник области $\mathcal{A}_{s+1}$. Таким образом, пользуясь способом упрощения, мы можем уничтожить часть контура, выходящую в область $\mathcal{A}_{s+1}$. После такого преобразования число членов написанного выше ряда кольцевидных областей уменьшится на две единицы.

Упростим теперь часть полученного контура, которая лежит в области $\mathcal{A}_s$, так же, как это мы делали с исходным контуром, и затем уменьшим опять число кольцевидных областей, через которые проходит контур, на две единицы. Поступая так же и дальше, мы получим в конце концов контур, который остается внутри одного и того же четырехугольника, т. е., действительно, предположенное соотношение между подстановками является следствием соотношения (17_1).

Мы могли бы в предположенном соотношении между подстановками не разбивать подстановок на отображения, а оперировать лишь с подстановками. Для этого нам достаточно уничтожить в фундаментальном шестиугольнике диагональ BC (см. рис. 6) и те стороны четырехугольников, которые получаются из этой прямой при отображении. Рассматривая теперь шестиугольники вместо четырехугольников, мы могли бы совершенно так же провести наше доказательство, причем всякому пересечению контуром какой-либо стороны шестиугольника соответствовала бы линейная подстановка, преобразующая этот шестиугольник в тот соседний, в который попадает при этом пересечении наш контур.

Возвращаясь к переменной η, мы можем утверждать, что соотношение (16) будет единственным независимым соотношением между основными подстановками группы уравнения (1). Вместо соотношения (17_1) мы будем иметь соотношения

$$(SS_2S_3S^{-1})^k = 1, \tag{17}$$

где S — какая-либо подстановка группы.

Мы будем в дальнейшем обозначать области на плоскости переменной η теми же буквами, что и на плоскости η_1.

Подстановка вида

$$S(S_2S_3)^q S^{-1}, \tag{18}$$

где q — любое целое число, преобразует в себя ту кольцевидную область, которая получается из области A при помощи подстановки S, и подстановка эта будет эллиптической. Принимая во внимание, что всякая подстановка, преобразующая область A в себя, должна иметь вид $(S_2S_3)^q$, мы можем утверждать, что всякая подстановка, преобразующая в себя некоторую кольцевидную область, может быть представлена в виде (18).

Покажем теперь, что при $\lambda = \lambda_{0,k}$ всякая эллиптическая подстановка группы уравнения (1) будет преобразовывать в себя некоторую кольцевидную область, т. е. будет вида (18).

§ **10.** Пусть S_4 есть какая-либо эллиптическая подстановка группы. Возьмем любую кольцевидную область A_1, и пусть подстановка S_4 преобразует ее в область A_2. Соединим какие-либо две эквивалентные точки областей A_1 и A_2 простейшим контуром. Этот последний не проходит ни через одну кольцевидную область более одного раза. Отметим по порядку те кольцевидные области, через которые проходит контур:

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{1,2}, \mathcal{A}_{1,3}, \ldots, \mathcal{A}_{1,p}, \mathcal{A}_2. \qquad (19_1)$$

Применим к этим областям подстановку S_4. Мы получим в результате новую последовательность областей:

$$\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{2,2}, \ldots, \mathcal{A}_{2,p}, \mathcal{A}_3. \qquad (19_2)$$

Совершим над этой последовательностью опять подстановку S_4, и т. д. Группа уравнения (1) в рассматриваемом случае собственно прерывна, и потому подстановка S_4 должна быть периодической. Следовательно, продолжая вышеуказанную операцию, мы должны будем прийти к последовательности областей вида

$$\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_{s,2}, \mathcal{A}_{s,3}, \ldots, \mathcal{A}_{s,p}, \mathcal{A}_1. \qquad (19_s)$$

После всего этого мы получим из вышеупомянутого контура контур, выходящий из области $\mathcal{A}_1$ и вновь в нее возвращающийся. Контур этот будет проходить через последовательность областей

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{1,2}, \ldots, \mathcal{A}_{1,p}, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_{2,2}, \ldots, \mathcal{A}_{2,p}, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_{s,p}, \mathcal{A}_1. \qquad (19)$$

Из единственности образования кольцевидных областей следует, что в этом ряду мы можем найти такие три последовательные области, что крайние из них будут одинаковы. Взятый нами первоначально контур был простейшим, а потому в ряду

$$\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_{k,2}, \ldots, \mathcal{A}_{k,p}, \mathcal{A}_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s) \qquad (19_к)$$

не может быть одинаковых областей. Следовательно, те одинаковые области ряда (19), о которых мы только что упоминали, должны быть вида $\mathcal{A}_{n,p}$ и $\mathcal{A}_{n+1,2}$. Но тогда и области $\mathcal{A}_{1,p}$ и $\mathcal{A}_{2,2}$ должны быть одинаковы. Область $\mathcal{A}_{2,2}$, т. е. область $\mathcal{A}_{1,p}$, получается из области $\mathcal{A}_{1,2}$ при помощи подстановки S_4.

Мы можем, таким образом, вместо последовательности (19_1) рассматривать более короткую последовательность: $\mathcal{A}_{1,2}$, $\mathcal{A}_{1,3}$, $\ldots$, $\mathcal{A}_{1,p}$, последний член которой получается из первого при помощи подстановки S_4. С этой последовательностью мы можем рассуждать так же, как и с последовательностью (19_1), и т. д. Каждый раз будут отпадать последние члены, и в новой последовательности последний член будет получаться из первого при помощи подстановки S_4. Продолжая рассуждения таким образом, мы можем прийти либо к последовательности вида

$$\mathcal{A}_{1,s-1}, \mathcal{A}_{1,s}, \mathcal{A}_{1,s+1}, \tag{20}$$

либо же к последовательности

$$\mathcal{A}_{1,s}, \mathcal{A}_{1,s+1}. \tag{20_1}$$

Рассуждая с последовательностью (20) так же, как с (19_1), легко показать, что подстановка S_4 преобразует в себя область $\mathcal{A}_{1,s}$. Рассуждая так же с последовательностью (20_1), убедимся, что области $\mathcal{A}_{1,s}$ и $\mathcal{A}_{1,s+1}$ должны быть одинаковы. Но этого не может быть, как мы указывали выше.

Итак, любая эллиптическая подстановка группы преобразует в себя некоторую кольцевидную область, и, следовательно, все эллиптические подстановки группы заключаются в виде (18).

Неподвижные точки подстановки (18) суть преобразование точек D и E (см. рис. 4) при помощи подстановки S. Одна из этих неподвижных точек будет находиться внутри окружности, получаемой при помощи подстановки S из окружности, ортогональной к сторонам AJ, AB и BC, а другая неподвижная точка будет находиться внутри окружности, получаемой при помощи той же подстановки S из окружности, ортогональной к сторонам AJ, JC и CB. Круги, ограниченные обеими этими окружностями, будут покрыты сетями треугольников, соответствующих некоторому уравнению Gauss'а, как это мы выше указали, и, следовательно, неподвижные точки всех эллиптических подстановок группы будут находиться вне сети четырехугольников, т. е. будут идеальными неподвижными точками (см. § 13 гл. I).

При $\lambda = \lambda_0^{(0)}$ две только что указанные неподвижные точки эллиптической подстановки вырождаются в одну неподвижную точку параболической подстановки, причем точка эта будет обладать тем свойством, что в ней не будет лежать ни одной вершины четырехугольников. В этом случае точки D и E сливаются в одну точку D (см. рис. 4), и внутри окружностей, одна из которых проходит через точки A, B и D, а другая через точки D, C и J, будет находиться сеть треугольников, соответствующих уравнению Legendre'а (см. § 9 Введения). Сеть треугольников не будет покрывать ни только что указанных кругов, ни тех, которые получаются из них при отображениях.

Совершенно так же, как мы рассмотрели область (5) изменения параметра λ, мы могли бы рассмотреть и область (5_1). Вместо значений $\lambda_0^{(0)}$ и $\lambda_{0,k}$ нам пришлось бы рассматривать значения $\lambda_1^{(0)}$ и $\lambda_{1,k}$, а вместо подстановки S_3S_2—подстановку S_2S_1.

Принимая во внимание рассуждения последних двух параграфов, можно высказать теорему:

Теорема 10. *Область существования автоморфных функций, получаемых при решении задачи обращения уравнения* (1) *предыдущего параграфа, будет односвязной областью при условии*

$$\lambda_1^{(0)} \geqslant \lambda \geqslant \lambda_0^{(0)}$$

и будет иметь бесконечную связность при

$$\lambda = \lambda_{0,k} \quad \text{или} \quad \lambda_{1,k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

В этих случаях между подстановками группы будет существовать единственное соотношение

$$(S_2S_3)^k = 1 \quad \text{или} \quad (S_1S_2)^k = 1, \tag{21}$$

и всякое другое соотношение будет следствием только что написанного соотношения. Группа будет содержать бесчисленное множество эллиптических подстановок, и все эти подстановки будут заключаться в виде

$$S(S_2S_3)^q S^{-1} \quad \text{или} \quad S(S_1S_2)^q S^{-1}, \tag{22}$$

где S — какая-либо подстановка группы, а q — любое целое число. Неподвижные точки этих подстановок будут находиться вне области существования соответствующей автоморфной функции.

§ **11.** Исследуем теперь состав группы при значениях λ, удовлетворяющих условию (42) предыдущей главы. Если λ удовлетворяет соотношению (14), то между подстановками группы не существует никаких соотношений, и потому в группе не будет эллиптических подстановок, так как эти подстановки ввиду собственной прерывности группы в рассматриваемых случаях должны быть периодическими. При значениях $\lambda_0^{(\varphi)}$ группа будет содержать эллиптические подстановки.

При всех значениях λ, удовлетворяющих условию (42) предыдущей главы, группа будет содержать параболические, гиперболические и локсодромические подстановки. Последние не будут входить в группу лишь при значениях λ_0, μ и μ_{-1}, когда группа будет фуксовой. Действительно, наличие параболических подстановок непосредственно ясно, гиперболическую подстановку мы можем получить, отображая основной четырехугольник последовательно в тех его сторонах, которые при продолжении не пересекаются (см. § 2 гл.I), локсодромические же подстановки должны входить во всех случаях, кроме вышеуказанных, в силу теоремы 1.

Обратимся опять к рассмотрению тех случаев, когда задача обращения имеет однозначное решение. В этих случаях группа уравнения должна быть собственно прерывной, и шестиугольник, получаемый от соединения каких-либо двух соседних четырехугольников сети, будет полным фундаментальным многоугольником группы Г уравнения (1) гл. II.

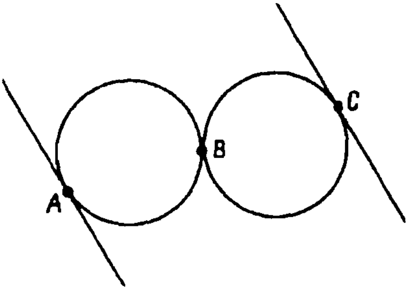

Рис. 7

В § 13 гл. I мы указывали на то, что особые точки собственно прерывной группы делят плоскость на ряд связных областей, каждая из которых может быть покрыта сетью фундаментальных многоугольников. При этом все эти сети могут быть распределены по группам так, что любые два многоугольника, принадлежащие одной и той же сети или двум сетям одной из групп, могут быть преобразованы один в другой при помощи некоторой подстановки группы Г. Точки же, находящиеся внутри сетей, принадлежащих различным группам, не могут быть эквивалентны. Рассмотрим все эти свойства в исследованных нами случаях уравнения (1).[25]

Предположим сначала, что λ удовлетворяет условию

$$\lambda_1^{(0)} > \lambda > \lambda_0^{(0)}. \tag{23}$$

Если мы в этих случаях продолжим стороны основного четырехугольника $ABCJ$ (см. рис. 7), то образуется другой четырехугольник с теми же вершинами, и мы этот четырехугольник будем называть *сопряженным с основным четырехугольником*. При последовательном отображении сопряженного четырехугольника получается та же группа Г, что и при отображении основного (см. § 14 гл. I). Обе полученные сети не будут иметь общих точек, как это непосредственно ясно из рассуждений § 2 настоящей главы.

Покажем, что всякая точка плоскости либо принадлежит одной из этих сетей, либо является предельной точкой обеих этих сетей. Обратимся к рис. 2 и пусть внутренний четырехугольник будет основным, а внешний — ему сопряженным. Будем совершать над каждым из них последовательные отображения. Как было выяснено в § 2 настоящей главы, после таких отображений внутренняя и внешняя сети четырехугольников будут отделяться одна от другой цепью Σ_n кругов, число которых будет $4 \cdot 3^n$, причем каждый из кругов касается двух соседних.

Для доказательства высказанного нами утверждения достаточно показать, что наибольший из радиусов только что упомянутых $4 \cdot 3^n$ кругов стремится к нулю при возрастании n. Если бы это обстоятельство не имело места, то можно было бы указать такое положительное число l, что при всяком n имелся бы среди кругов цепи Σ_n по крайней мере один круг с радиусом, бóльшим l. При этом можно было бы выбрать такую последовательность кругов σ_n, чтобы при всяком n круг σ_{n+1} находился внутри σ_n, этот последний входил в состав цепи Σ_n, и его радиус был больше l.

Действительно, если в цепи Σ_k находится несколько кругов, радиусы которых больше l, то по крайней мере один из них должен обладать тем свойством, что внутри него будут находиться круги любой сети Σ_n при $n > k$, радиусы которых будут больше l. Из цепи Σ_0 возьмем какой-либо круг, обладающий этим свойством, и примем его за круг σ_0. Внутри него должен находиться по крайней мере один из кругов цепи Σ_1, обладающий тем же свойством. Примем его за круг σ_1, и т. д.

Таким образом определятся круги σ_n, обладающие вышеуказанными свойствами. Пусть ρ_n — радиус круга σ_n. При увеличении n ρ_n уменьшаются, но должны оставаться больше l, а потому они будут стремиться к пределу ρ, который должен быть больше нуля. Возьмем n настолько большим, чтобы ρ_n было меньше 2ρ. Непосредственно ясно, что центр F круга σ_n должен будет при этом находиться внутри кругов σ_m при всяком $m > n$, и, таким образом, точка F не может принадлежать ни к внутренней, ни к внешней сети. Но легко показать, что эта точка должна принадлежать внешней сети. Действительно, если мы отобразим ту часть этой сети, которая лежит вне цепи Σ_n, в окружности круга σ_n, то получим также точки, принадлежащие внешней сети (см. § 2 гл. I), но при этом бесконечно удаленная точка, которая находится внутри сопряженного четырехугольника, перейдет именно в точку F. Таким образом, высказанное нами утверждение доказано.

§ **12.** Итак, группа Г при выполнении условия (23) будет иметь на плоскости два полных фундаментальных шестиугольника. Из них получатся две сети, которые в силу теоремы 3 должны иметь одинаковые предельные точки, и всякая точка плоскости либо будет принадлежать одной из этих сетей, либо будет их предельной точкой. Совокупность предельных точек образует границу $\mathcal{L}$, которая делит плоскость на две односвязные части. В дальнейшем мы вернемся к исследованию границы $\mathcal{L}$.

Перейдем теперь к рассмотрению тех случаев, когда $\lambda = \lambda_{0,k}$ или $\lambda_{1,k}$ (см. рис. 6). Образуем, как это было указано в § 8 настоящей главы, кольцевидную область $\mathcal{A}$. При этом из треугольников ABD и JCE мы получим многоугольники G_1 и G_2, имеющие $2k$ сторон, с углами, равными нулю. Многоугольник G_1 находится внутри круга C_1, описанного из точки D как центра радиусом DA, и стороны его ортогональны к окружности этого круга, а G_2 находится вне круга C_2, описанного из точки D как центра радиусом DJ, и стороны его ортогональны к окружности этого круга. Область $\mathcal{A}$ и многоугольники G_1 и G_2 покроют всю плоскость, за исключением $4k$ кругов, и их последовательные отображения нигде не налягут друг на друга.

Будем совершать последовательные отображения так же, как и в случае (23). Сети кольцевидных областей и многоугольников покроют всю плоскость, за исключением $4k(4k-1)^n$ кругов, после того, как мы совершим n вышеуказанных отображений. Совершенно так же, как и в случае (23), можно показать, что наибольший из радиусов этих $4k(4k-1)^n$ кругов будет стремиться к нулю при возрастании n. Следовательно, в рассматриваемом случае группа Г будет иметь на плоскости один полный фундаментальный шестиугольник и два фундаментальных четырехугольника. Из шестиугольника получится одна сеть, имеющая бесконечно большую связность, а из каждого четырехугольника получится бесконечное множество эквивалентных между собой сетей.

Строя, например, последовательные отображения треугольника ABD, мы заполним весь круг C_1, и все точки окружности этого круга будут предельными точками (см. § 14 гл. I). То же можно сказать и об окружности круга C_2. Таким образом, каждая из упомянутых выше сетей треугольника будет ограничена окружностью. Предельными точками сети четырехугольников будут точки окружностей кругов C_1 и C_2, всех эквивалентных им окружностей и точки сгущения этих окружностей.

Вместо четырехугольника и двух треугольников мы могли бы рассматривать области A, G_1 и G_2. Соединение области A и отображения этой области в какой-либо из ее сторон представляет собой полный фундаментальный многоугольник некоторой группы Γ', которая является подгруппой группы Γ и имеет те же предельные точки, что и группа Γ. Группа Γ' не будет содержать эллиптических подстановок.

Совершенно так же мы могли бы рассмотреть и случаи $\lambda = \lambda_0^{(0)}$ и $\lambda = \lambda_1^{(0)}$. В этих случаях группа Г будет иметь на плоскости один полный фундаментальный шестиугольник и два фундаментальных четырехугольника, и разница будет лишь в том, что сеть, получаемая из только что упомянутого шестиугольника, будет односвязной.

§ **13.** Рассмотрим в настоящем параграфе более подробно границу $\mathcal{L}$ двух сетей, получаемых при выполнении условия (23). Если $\lambda = \lambda_0$, то стороны основного и сопряженного четырехугольников ортогональны некоторой окружности, и эта последняя представляет собою границу $\mathcal{L}$. Обозначим буквою η то частное интегралов, значения которого дают сеть, находящуюся внутри только что упомянутой окружности, и пусть $\mathcal{E}_1$ будет круг, ограниченный этой окружностью.

Пусть λ' — какое-либо другое значение параметра λ, удовлетворяющее условию (23). Выберем в этом случае частное интегралов η_1 таким образом, чтобы бесконечно удаленная точка находилась внутри сопряженного четырехугольника (см. рис. 2).

Исключая x из соотношений

$$\eta = \eta(x, \lambda_0), \quad \eta_1 = \eta_1(x, \lambda'),$$

мы получим аналитическую функцию

$$\eta_1 = \varphi(\eta). \tag{24}$$

Принимая во внимание, что в обоих случаях особые точки дифференциального уравнения одинаковы, мы можем утверждать, что функция (24) преобразует четырехугольник, соответствующий дифференциальному уравнению при $\lambda = \lambda_0$, в четырехугольник, соответствующий тому же уравнению при $\lambda = \lambda'_1$ таким образом, что вершине одного четырехугольника соответствует вершина другого, а потому в силу принципа симметрии можно также утверждать, что функция (24) преобразует круг $\mathcal{E}_1$ во внутреннюю сеть $\mathcal{E}_2$ четырехугольников, соответствующих случаю $\lambda = \lambda'$.

Покажем теперь, что функция эта будет непрерывна в круге $\mathcal{E}_1$, включая и его окружность, и что, таким образом, между точками этой окружности и точками границы $\mathcal{L}$ сети $\mathcal{E}_2$ может быть установлено биоднозначное и непрерывное соответствие.

На плоскостях переменных η и η_1 мы будем иметь цепи Σ_n и Σ'_n, о которых мы упоминали в § 11. Пусть $\eta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — ряд значений η, находящихся внутри круга $\mathcal{E}_1$ и стремящихся к некоторой точке $\eta^{(0)}$ окружности этого круга. Если $\eta^{(0)}$ не есть вершина никакого четырехугольника сети, то можно указать при всяком целом положительном значении n такой круг σ_n, принадлежащий цепи Σ_n, внутри которого будут находиться точки $\eta^{(k)}$ при достаточно большом значении k. Круги σ_n будут находиться один внутри другого и будут стремиться к точке $\eta^{(0)}$. Им будут соответствовать на плоскости η_1 круги σ'_n, принадлежащие цепям Σ'_n, и круги эти также будут находиться один внутри другого. Принимая во внимание, что радиусы этих кругов стремятся к нулю при возрастании n и что точки $\varphi(\eta^{(k)})$ находятся при достаточно больших значениях k внутри любого круга σ'_n, мы можем написать

$$\lim_{k=\infty} \varphi(\eta^{(k)}) = \eta_1^{(0)},$$

где $\eta_1^{(0)}$ — точка, принадлежащая границе $\mathcal{L}$. Заметим при этом, что точке $\eta^{(0)}$ соответствует только одна последовательность кругов σ_n, а потому и только одна определенная точка $\eta_1^{(0)}$ границы $\mathcal{L}$.

Предположим теперь, что точки $\eta^{(k)}$ стремятся к вершине A некоторого четырехугольника сети. В этом случае либо число многоугольников, внутри которых находятся точки $\eta^{(k)}$, — конечно, либо можно построить последовательность кругов σ_n, касательных в точке A, внутри которых будет находиться бесчисленное множество точек $\eta^{(k)}$. В обоих случаях легко видеть, что точки $\varphi(\eta^{(k)})$ будут стремиться к вершине A_1 некоторого четырехугольника сети на плоскости η_1.

Мы видим, таким образом, что всякой точке окружности соответствует определенная точка границы $\mathcal{L}$. Также можно показать, что и, наоборот, всякой точке границы $\mathcal{L}$ соответствует определенная точка окружности круга $\mathcal{E}_1$. Принимая во внимание, что радиусы σ_n и σ'_n стремятся к нулю при возрастании n, можем утверждать, что указанное только что соответствие будет непрерывным и что граница $\mathcal{L}$ будет кривой Jordan'а.

Докажем теперь, что при любом значении λ, удовлетворяющем условию (23), сумма площадей всех кругов σ_{n-1}, составляющих цепь Σ_n, стремится к нулю при возрастании n. Чтобы сделать это, достаточно доказать существование такого положительного числа q, меньшего единицы, что какой бы круг σ_n нам ни дали, мы могли бы найти такое целое число m, большее n, чтобы отношение суммы площадей всех кругов σ_m, заключающихся внутри круга σ_n, к площади этого круга было бы меньше q.

На рис. 8 мы изобразили три последовательных круга $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$, принадлежащих цепи Σ_n, и тот круг, принадлежащий цепи Σ_{n-1}, внутри которого находятся эти три круга. Пусть q — какое-либо число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\pi+2}{2\pi} < q < 1. \tag{25}$$

Покажем, что можно выбрать такое целое число m, что отношение суммы площадей кругов, принадлежащих цепи Σ_m и находящихся внутри одного из кругов $\mathcal{K}_s$ $(s = 1, 2, 3)$, к площади этого круга будет меньше q.

Если две окружности одинакового радиуса пересекаются ортогонально, то отношение той части площади одного из получаемых при этом кругов, которая не принадлежит другому кругу, ко всей площади круга равна выражению, стоящему в левой части неравенства (25).

Пусть $\mathcal{K}_1$ есть тот круг, окружность которого проходит через точки A и B, и пусть r есть радиус этого круга. Проведем через точку A две окружности: C_1 и C_2, имеющие радиус r и ортогональные к окружности круга $\mathcal{K}_1$. Покажем, что по крайней мере одна из этих двух окружностей не пересечется с окружностями кругов $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$. Не меняя отношения площадей любых двух фигур на плоскости, мы можем преобразовать эту последнюю при помощи подстановки

$$\eta_1 = \alpha\eta + \beta.$$

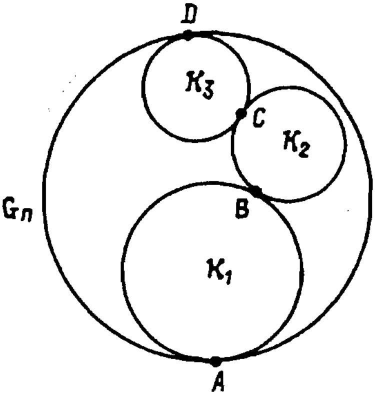

Рис. 8

Применяя эту подстановку к плоскости рис. 8, мы можем достигнуть того, чтобы точка A попала в начало координат, касательная к внешней окружности в этой точке была бы вещественной осью, радиус круга $\mathcal{K}_1$, проходящий через точку A, совпадал бы с положительном направлением мнимой оси, и диаметр круга $\mathcal{K}_1$ равнялся бы единице. Мы будем предполагать, что плоскость рис. 8. удовлетворяет всем этим условиям.

Преобразуем эту плоскость при помощи подстановки

$$z = x + yi = -\frac{1}{\eta}.$$

При этом окружность круга $\mathcal{K}_1$ превратится в прямую $y = 1$, внешняя окружность — в прямую $y = \gamma$, где γ — положительное число меньше единицы, а окружности C_1 и C_2 — в прямые $x = 1$ и $x = -1$. Принимая во внимание, что окружности, которые получатся после преобразования из окружностей кругов $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$, должны заключаться между прямыми $y = \gamma$ и $y = 1$ и должны касаться одна другой, нетрудно заключить, что по крайней мере одна из прямых $x = 1$ или $x = -1$ не имеет общих точек с этими окружностями. Таким образом, наше утверждение относительно окружностей C_1 и C_2 доказано.

Предположим для определенности, что C_1 не имеет общих точек с окружностями кругов $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$. Точка A есть неподвижная точка некоторой параболической подстановки S группы Г. На основании рассуждений § 10 гл. I можем утверждать, что все точки круга $\mathcal{K}_1$, находящиеся внутри окружности C_1, будут принадлежать одной из сетей и что если C есть окружность, описанная около точки A как центра сколь угодно малым радиусом, то та часть круга $\mathcal{K}_1$, которая находится вне окружности C, но внутри окружности C_1, может быть покрыта конечным числом четырехугольников.

Поэтому, если q удовлетворяет неравенству (25), то, совершив достаточное число отображений, мы покроем сетью четырехугольников такую часть круга $\mathcal{K}_1$, что отношение площади той части этого круга, которая осталась непокрытой после указанных отображений, к площади всего круга будет меньше q. Те окружности, в которых нам при этом придется совершать отображения, будут взаимно касаться в точке A и будут принадлежать последовательным цепям Σ_{n+1}, $\Sigma_{n+2}, \ldots$, Σ_{m-1}, и, таким образом, мы определяем число m.

Точно такое же рассуждение применимо и к кругу $\mathcal{K}_3$.

Перейдем теперь к доказательству нашего предположения для среднего круга $\mathcal{K}_2$. Пусть p есть площадь этого круга. Отобразим два четырехугольника, изображенные на рис. 8, в окружности этого круга. Внутри него получатся после этого два четырехугольника и три круга, аналогичные кругам $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$. Отобразим два вновь полученных четырехугольника в окружности среднего из этих кругов и будем так продолжать до тех пор, пока площадь среднего из кругов не станет меньше εp, где ε — настолько малое положительное число, что $q - \varepsilon$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi + 2}{2\pi} < q - \varepsilon < 1.$$

Кроме этого круга внутри $\mathcal{K}_2$ будут находиться круги $\mathcal{K}$, не покрытые четырехугольниками, и каждый из этих кругов будет аналогичен кругу $\mathcal{K}_1$ рис. 8, т. е. будет касаться в некоторой точке D той окружности, отображение в которой и привело к этому кругу. К каждому из этих кругов приложимы те рассуждения, которые мы применяем к кругу $\mathcal{K}_1$, и, следовательно, мы, совершая для каждого из кругов $\mathcal{K}$ достаточное число отображений в окружностях, касательных взаимно в точке D, можем достигнуть того, чтобы отношение той части круга $\mathcal{K}$, которая остается не покрытой сетью четырехугольников, к площади всего круга $\mathcal{K}$ было меньше $(q - \varepsilon)$. После всех вышеуказанных отображений отношение той части круга $\mathcal{K}_2$, которая остается не покрытой сетью четырехугольников, ко всей площади круга $\mathcal{K}_2$ будет меньше q. Так как число этих отображений конечно, то, как и раньше, отсюда мы заключим о существовании требуемого числа m.

Итак, какое бы малое положительное число ε нам ни задали, можно найти такое число N, что сумма площадей всех кругов, образующих цепь Σ_n, будет меньше ε при условии $n > N$. Отсюда следует, что кривую $\mathcal{L}$ можно заключить внутри области, имеющей сколь угодно малую площадь.

Действительно, возьмем n настолько большим, чтобы сумма площадей всех кругов, образующих цепь Σ_n, была меньше $\varepsilon/2$. В этой цепи будет конечное число точек касания двух соседних окружностей. Окружим каждую из этих точек кругом и возьмем радиусы этих кругов настолько малыми, чтобы сумма площадей всех этих кругов была меньше $\varepsilon/2$. Кривая $\mathcal{L}$ будет находиться внутри области, которая состоит из точек, заключающихся внутри кругов Σ_n и только что описанных кругов, и площадь этой области меньше ε.

Мы видим, таким образом, что внутренняя сеть четырехугольников будет представлять собою область, имеющую определенную площадь. Обозначим знаком $\rho_{n,k}$, где k проходит ряд значений от 1 до $4 \cdot 3^n$, радиусы кругов σ_n. Доказанное выше утверждение мы можем записать следующим образом:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{4\cdot 3^n} \rho_{n,k}^2 = 0.^* \qquad (26)$$

---

*См. Schoenflies [18, Bd. II, S. 182-189; 253]; Fricke [14, S. 581].

ГЛАВА IV

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРУППЫ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И С РАВНЫМИ КОРНЯМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ

§ **1.** В настоящей главе мы рассмотрим более подробно свойства группы уравнения (1) гл. II[26] при различных вещественных значениях a и λ.

Будем называть *основными подстановками этой группы* те ее подстановки, которые получаются при положительном обходе каких-либо трех особых точек уравнения (1). Для определенности предположим, что это будут точки 0, a и 1 (см. § 10 гл. II). Докажем относительно этих подстановок теорему:

Теорема 11. *Основные подстановки группы уравнения* (1) *не могут быть одинаковы при различных значениях параметра* λ *и одинаковых значениях* a.

Теорему эту мы докажем при любых значениях λ и a, не требуя их вещественности.

Проведем через особые точки уравнения (1) замкнутую, саму себя не пересекающую линию $\mathcal{L}$, которая разделит всю плоскость на две части. Если a есть число вещественное, то такой линией нам будет служить вещественная ось.

Общий интеграл уравнения (1) будет однозначной функцией в каждой из упомянутых только что частей плоскости переменной x. В дальнейшем мы будем определять интегралы их разложениями около какой-либо особой точки уравнения (1), и они будут вполне определенными функциями в каждой из упомянутых частей плоскости, а их дальнейшие значения могут быть получены аналитическим продолжением.

Возьмем какую-либо точку x в одной из только что указанных частей плоскости. Из этой точки проведем замкнутый контур, огибающий одну из особых точек уравнения (1), как это было указано в § 10 гл. II. В данном случае разница будет лишь в том, что вместо вещественной оси мы имеем линию $\mathcal{L}$. Проведенному контуру и будет соответствовать одна из основных подстановок группы Г уравнения (1).

Пусть при значениях $\lambda = \lambda'$ и $\lambda = \lambda''$ основные подстановки группы уравнения (1) будут одинаковы, и пусть $\eta(x, \lambda')$ и $\eta(x, \lambda'')$ — те частные интегралов, которые испытывают именно эти основные подстановки. Не нарушая общности, можно предположить, что при обходе каких-либо двух точек, например $x = 0$ и $x = a$, $\eta(x, \lambda')$ и $\eta(x, \lambda'')$ испытывают параболические подстановки с неподвижными точками 0 и ∞. Мы не могли бы сделать такого предположения лишь в том случае, если бы неподвижные точки всех трех основных параболических подстановок были бы одинаковы. В этом случае мы могли бы считать, что это есть точка $\eta = 0$, и интеграл, стоящий в числителе выражения $\eta(x, \lambda')$, должен был бы быть голоморфным в точках 0, a, 1 и, следовательно, и в точке $x = \infty$, а потому представлял бы собою постоянную величину, чего не может быть.

Итак, наше предположение законно. Из него непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \eta(x, \lambda') &= k_1 \frac{y_0(x, \lambda')}{y_a(x, \lambda')}, \\ \eta(x, \lambda'') &= k_2 \frac{y_0(x, \lambda'')}{y_a(x, \lambda'')}, \end{aligned} \tag{1}$$

где k_1 и k_2 — постоянные (см. § 1 гл. II).

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = y_a(x, \lambda'') y_0(x, \lambda') - y_0(x, \lambda'') y_a(x, \lambda'). \tag{2}$$

Эта функция вполне определена в той части плоскости переменной x, из которой мы проводим замкнутые контуры, соответствующие основным подстановкам, и при аналитическом продолжении она может иметь особые точки лишь в особых точках уравнения (1).

Рассмотрим для примера точку $x = 1$. Вблизи этой точки будем иметь

$$\psi(x) = p_2(x) \lg^2(x-1) + p_1(x) \lg(x-1) + p_0(x), \tag{2_1}$$

где $p_2(x)$, $p_1(x)$, $p_0(x)$ — функции, голоморфные вблизи $x = 1$. Пусть при положительном обходе этой точки интегралы $y_0(x, \lambda')$ и $y_a(x, \lambda')$ испытывают подстановки

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} y_0(x, \lambda') + \alpha_{12} y_a(x, \lambda'), \\ &\alpha_{21} y_0(x, \lambda') + \alpha_{22} y_a(x, \lambda'). \end{aligned} \tag{3_1}$$

Переменные $\eta(x, \lambda')$ и $\eta(x, \lambda'')$ при этом обходе испытывают одну и ту же линейную подстановку, а потому интегралы $y_0(x, \lambda'')$ и $y_a(x, \lambda'')$ должны при этом испытывать подстановки вида

$$\begin{aligned} &k[\alpha_{11}y_0(x, \lambda'') + \alpha_{12}y_a(x, \lambda'')], \\ &k[\alpha_{21}y_0(x, \lambda'') + \alpha_{22}y_a(x, \lambda'')], \end{aligned} \tag{3_2}$$

где k — некоторая постоянная. Подставляя выражения (3_1) и (3_2) в формулу (2), мы непосредственно убедимся в том, что при обходе точки $x = 1$ функция $\psi(x)$ приобретает постоянный множитель, который может быть равен и единице.

Принимая во внимание выражение (2_1), мы должны будем заключить из только что сказанного, что $p_2(x)$ и $p_1(x)$ равны тождественно нулю и что, следовательно, $\psi(x)$ — голоморфная функция вблизи точки $x = 1$. Совершенно так же можно убедиться в том, что $\psi(x)$ должна быть голоморфна и вблизи других особых точек уравнения.

Таким образом, $\psi(x)$ должна быть голоморфной на всей плоскости и, следовательно, представляет собой некоторую постоянную. Постоянная эта должна быть равна нулю, ибо общий интеграл уравнения (1) обращается в нуль при $x = \infty$. Принимая во внимание формулу (1), мы будем иметь

$$\eta(x, \lambda') = \eta(x, \lambda'').$$

Но это тождество может существовать лишь при $\lambda' = \lambda''$, что непосредственно видно из того уравнения 3-го порядка, которому удовлетворяет $\eta(x, \lambda)$.

Таким образом, теорема 11 доказана.

§ **2.** Будем рассматривать дифференциальные уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками, с правильными интегралами и при том такие, что фундаментальное определяющее уравнение в каждой особой точке имеет кратный корень.

Совершая замену зависимой переменной

$$y = \varphi(x) y_1,$$

не меняющую подстановок группы уравнения, можем представить всякое такое уравнение в одном из следующих двух видов:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[(x-a)(x-b)(x-c)\frac{dy}{dx}\right] + \left[2x^2 - (a+b+c+d)x + d\right] y = 0, \\ &\frac{d}{dx}\left[(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\frac{dy}{dx}\right] + (x+d)y = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

смотря по тому, будет или нет точка $x = \infty$ особой точкой уравнения. Из теоремы 11 видно, что у двух уравнений указанного вида с одинаковыми особыми точками (ни при каком выборе частного интегралов) подстановки, соответствующие обходу вокруг особых точек, не могут быть все одинаковы.

Если какие-либо два уравнения вида (4) могут быть получены одно из другого при помощи преобразования

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y = \psi(x) y_1, \tag{5}$$

то можно для них так выбрать частное двух интегралов, что при обходе соответствующих особых точек подстановки группы этих уравнений будут одинаковы.

Будем называть *два уравнения, связанные между собой подстановкой* (5), *соответствующими уравнениями.*

Если все четыре [особые] точки какого-либо уравнения вида (4) лежат на одной окружности, то мы всегда можем найти такое уравнение, соответствующее данному, в котором особые точки — вещественны и притом три из них совпадают с точками $0, 1$ и ∞. Для получения этого уравнения достаточно соответственным образом выбрать коэффициенты линейной подстановки, входящей в равенства (5). Полученное уравнение будет иметь вид уравнения (1) гл. II. В дальнейшем мы и будем рассматривать лишь уравнения этого вида и при том будем считать a и λ вещественными.

Будем называть *основным четырехугольником, соответствующим уравнению* (1), тот четырехугольник, в который частное двух интегралов этого уравнения преобразует верхнюю полуплоскость, а *дополнительным* — тот четырехугольник, в который частное интегралов преобразует нижнюю полуплоскость. За дополнительный четырехугольник мы можем принять любое отображение основного четырехугольника в одной из его сторон.

Покажем, что для того, чтобы два уравнения вида (1) были соответствующими, необходимо и достаточно, чтобы основные четырехугольники, соответствующие этим уравнениям, или же основной четырехугольник одного из этих уравнений и дополнительный другого могли быть преобразованы один в другой при помощи линейной подстановки.

Действительно, предположим, что основные четырехугольники двух уравнений вида (1) могут быть получены один из другого при помощи линейного преобразования. В этом случае можно так выбрать частное интегралов двух данных уравнений, чтобы основные четырехугольники, им соответствующие, совпадали.

Пусть η и η_1 — эти частные, а x и x_1 — независимые переменные уравнений. Уравнение

$$\eta(x) = \eta_1(x_1) \tag{6}$$

установит такую аналитическую зависимость между x и x_1, при которой верхняя полуплоскость преобразуется в себя. Но такая зависимость, как известно, может быть лишь дробно-линейной, т. е. x_1 будет получаться из x при помощи линейной подстановки, и особым точкам одного уравнения будут соответствовать особые точки другого уравнения, ибо как те, так и другие соответствуют вершинам четырехугольника.

Нахождение функции $\psi(x_1)$ в соотношениях (5) не представит никакого труда, если мы примем во внимание, что корни фундаментального определяющего уравнения, соответствующего особым точкам, лежащим на конечном расстоянии, должны быть все равны нулю (см. § 1 гл. II).

Если бы мы предположили, что основной четырехугольник одного уравнения связан с дополнительным другого линейным преобразованием, то соотношение (6) привело бы к преобразованию верхней полуплоскости в нижнюю, т. е. x_1 было бы и в этом случае связано с x линейной подстановкой. Подстановка эта в обоих случаях будет иметь вещественные коэффициенты, и в первом случае ее определитель будет положительным, а во втором — отрицательным.

Предположим теперь, наоборот, что данные два уравнения вида (1) будут соответствующими. Предположим, кроме того, для определенности, что определитель линейной подстановки, входящей в преобразование (5), будет положительным. Коэффициенты этой линейной подстановки должны быть вещественны в силу сделанного нами предположения об особых точках уравнения. В рассматриваемом случае, как это непосредственно ясно, можно так выбрать частные интегралов данных уравнений, чтобы основные четырехугольники обоих этих уравнений совпадали, а следовательно, при любом выборе этих частных основные четырехугольники будут связаны линейной зависимостью.

Так же можно рассмотреть и случай отрицательного определителя, и, таким образом, наше утверждение вполне доказано.

Непосредственно ясно, что для того, чтобы два уравнения были соответствующими, необходимо, чтобы существовала такая линейная подстановка, которая преобразовывала бы особые точки одного из этих уравнений в особые точки другого уравнения. Подстановку эту всегда можно выбрать таким образом, чтобы точка a уравнения (1) удовлетворяла неравенству

$$0 < a < 1$$

или более сильному неравенству

$$0 < a \leqslant \frac{1}{2}.$$

§ **3.** Как мы уже упоминали, a и λ мы будем считать вещественными. Кроме того, мы будем в дальнейшем всегда предполагать, что четвертая особая точка a уравнения (1) заключается внутри интервала $(0, 1)$, что не ограничивает общности, как это мы только что видели.

Построим все те линейные преобразования независимого переменного, при помощи которых мы можем перейти от одного из уравнений вида (1) к другому уравнению того же вида. При этом мы должны принять во внимание, что точки 0, a, 1 и ∞ должны преобразовываться в точки a, b, 1 и ∞, причем точка b должна заключаться внутри интервала $(0, 1)$. Перебирая все возможные случаи, получим следующие семь подстановок*:

$$\text{(I)}\ x_1 = \frac{a-1}{x-1}; \quad \text{(II)}\ x_1 = \frac{a(x-1)}{x-a}; \quad \text{(III)}\ x_1 = \frac{x-a}{x};$$

$$\text{(IV)}\ x_1 = \frac{a}{x}; \quad \text{(V)}\ x_1 = -x+1; \quad \text{(VI)}\ x_1 = \frac{x-a}{x-1};$$

$$\text{(VII)}\ x_1 = \frac{(1-a)x}{x-a}.$$

Подстановки (II), (IV) и (VI) преобразуют уравнение (1) в себя. Например, в случае подстановки (II) формулы (5) принимают вид

$$x_1 = \frac{a(x-1)}{x-a}, \quad y = (x_1 - a)y_1.$$

---

*См. Heun [19, Bd. 33, S. 167].

Остальные четыре подстановки преобразуют уравнение (1) в уравнение того же вида, но с особыми точками 0, $1-a$, 1 и ∞ и со значением параметра μ, равным $-(1+\lambda)$. В этих случаях преобразованное уравнение будет тождественно с исходным при

$$a=\frac{1}{2}, \quad \lambda=-\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Будем называть *четвертой особой точкой* уравнения (1) особую точку, отличную от точек 0, 1 и ∞. Из предыдущего ясно, что для того, чтобы два уравнения вида (1) были соответствующими, необходимо и достаточно, чтобы сумма их четвертых особых точек была равна 1, а сумма значений параметров, входящих в эти уравнения, была равна -1. Два соответствующих уравнения мы в дальнейшем не будем считать существенно различными.

Выше мы видели, что в случае существования между независимыми переменными двух уравнений линейного соотношения с положительным определителем основной четырехугольник одного уравнения преобразуется в основной четырехугольник другого уравнения при помощи линейного преобразования, и наоборот. Если же указанная зависимость между независимыми переменными имеет отрицательный определитель, то линейное преобразование будет связывать основной четырехугольник одного уравнения с дополнительным другого, и наоборот.

В последнем случае основной четырехугольник одного уравнения может быть преобразован в основной четырехугольник другого уравнения при помощи линейной подстановки второго рода (см. § 2 гл. I). Наоборот, если для двух основных четырехугольников возможно такое преобразование, то независимые переменные соответствующих уравнений могут быть связаны линейной подстановкой с отрицательным определителем. Если нам заданы два основных четырехугольника, связанных линейной подстановкой первого или второго рода, то в первом случае мы можем считать, что соответствующие этим четырехугольникам уравнения одинаковы, а во втором, — что независимые переменные этих уравнений связаны соотношением (V).

§ **4.** Мы будем в дальнейшем называть *основными подстановками первого рода* или просто *основными подстановками* те подстановки S_1, S_2 и S_3, которые получаются при положительном обходе точек 0, 1 и ∞ по контуру, выходящему из какой-либо точки верхней полуплоскости. При положительном обходе вокруг четвертой особой точки будет получаться подстановка

$$S_4 = S_1^{-1} S_3^{-1} S_2^{-1}. \tag{8}$$

При этом мы предполагаем, как уже было указано выше, что четвертая особая точка заключается внутри интервала $(0, 1)$.

Будем называть *областью однозначного обращения* тот интервал (μ_{-1}, μ_1) изменения параметра λ, который мы исследовали в предыдущем параграфе. Если значение λ, входящее в дифференциальное уравнение, принадлежит этому интервалу, то будем говорить, что уравнение принадлежит области однозначного обращения. В этом случае четырехугольник, соответствующий уравнению, не будет иметь налегающих сторон.

Рассмотрим вопрос о том, сколько может быть различных уравнений вида (1), принадлежащих области однозначного обращения и имеющих одинаковые основные подстановки S_1, S_2 и S_3.

Пусть имеется уравнение с такими основными подстановками. Предположим сначала, что неподвижные точки этих параболических подстановок все различны, т. е. что λ не равно ни μ_1, ни μ_{-1}. Не ограничивая общности, можно предположить, что неподвижные точки подстановок S_1, S_2 и S_3 будут соответственно точки 0, 1 и ∞. Пусть при этом подстановка S_3 имеет вид

$$\eta_1 = \eta + c.$$

Будем строить основной четырехугольник предполагаемого уравнения. Из начала координат проведем вектор, изображающий комплексное число $c/2$, и в концах этого вектора проведем прямые, к нему перпендикулярные. На той из этих прямых, которая пройдет через начало координат, должна лежать сторона четырехугольника, соответствующая отрезку $(\infty, 0)$ вещественной оси плоскости переменной x, на другой же прямой должна лежать сторона, соответствующая отрезку $(1, \infty)$ указанной только что оси. Действительно, отрезкам $(1, \infty)$ и $(\infty, 0)$ вещественной оси плоскости переменной x должны соответствовать на плоскости переменной η полупрямые, идущие из точек 1 и 0 в бесконечно удаленную точку. Кроме того, отображение второй из этих полупрямых в первую должно привести к подстановке S_3, так как контур, выходящий из верхней полуплоскости, при положительном обходе точки $x = \infty$ должен сначала пересечь отрезок $(1, \infty)$, а затем отрезок $(\infty, 0)$ вещественной оси. Заметим, кроме того, что вершины четырехугольника должны находиться в неподвижных точках основных подстановок.

Параболическая подстановка, соответствующая положительному обходу вокруг четвертой особой точки дифференциального уравнения, определяется из соотношения (8). Пусть α — неподвижная точка этой подстановки. Окружность, образующая сторону четырехугольника, соответствующую отрезку $(0, a)$ вещественной оси, должна проходить через точки 0 и α и касаться первой из построенных нами прямых. Окружность эта вполне определится этими условиями. Точно так же вполне определится положение и четвертой стороны, которая должна лежать на окружности, проходящей через точки α и 1 и касающейся второй из построенных прямых.

Построенные две прямые и две окружности должны образовать основной четырехугольник того уравнения, которое имеет основные подстановки S_1, S_2, S_3. Такое уравнение по предположению существует, а следовательно, мы должны будем получить и упомянутый четырехугольник. Если продолжения сторон этого четырехугольника не пересекутся, то они образуют второй четырехугольник, но легко видеть, что этот последний не может быть основным четырехугольником, соответствующим уравнению с основными подстановками S_1, S_2, S_3.*

Действительно, основной четырехугольник является конформным изображением верхней полуплоскости, а потому обход контура этого четырехугольника в положительном направлении есть такой обход, при котором должны быть пройдены последовательно вершины 1, ∞, 0. Это обстоятельство имело место в первом из построенных четырехугольников, а отсюда непосредственно ясно, что оно не будет иметь места во втором четырехугольнике.

Итак, может существовать лишь одно уравнение, принадлежащее области однозначного обращения и имеющее данные основные подстановки, ибо полученный основной четырехугольник может быть преобразован в верхнюю полуплоскость так, чтобы его вершинам 0, 1 и ∞ соответствовали те же точки лишь единственным образом. Последнее непосредственно следует из того, что всякое конформное преобразование полуплоскости в себя может быть совершено лишь при помощи линейной подстановки.

---

*Мы будем всегда считать, что первая из написанных основных подстановок соответствует точке $x = 0$, вторая — $x = 1$ и третья — $x = \infty$.

§ **5.** Рассмотрим теперь тот случай, когда неподвижные точки подстановок S_1 и S_3 или S_2 и S_3 — одинаковы. В этом случае, как мы видели в предыдущей главе, соседние вершины попарно совпадают. Предположим для определенности, что стороны четырехугольника, соответствующие отрезкам $(\infty, 0)$ и $(a, 1)$ вещественной оси, представляют собой полные окружности. Не ограничивая общности, можем считать, что особым точкам $x = 0$, a, 1 и ∞ соответствуют вершины $\eta = \infty$, 0, 0 и ∞. Пусть при этом подстановка S_3 имеет указанный в предыдущем параграфе вид.

Отложим от начала координат вектор, изображающий комплексное число $c/2$, и проведем через его концы прямые, ему перпендикулярные. Начало координат разобьет одну из этих прямых на две полупрямые, причем одна из них будет соответствовать отрезку $(0, a)$, а другая — отрезку $(1, \infty)$ вещественной оси. Вторая из проведенных прямых будет соответствовать отрезку $(\infty, 0)$ вещественной оси. Окружность, соответствующая отрезку $(a, 1)$, должна касаться первой из проведенных прямых в начале координат и находиться с той стороны от этой прямой, с которой находится и вторая из проведенных прямых.

Пусть подстановка S_2^{-1} имеет вид

$$\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta} + e.$$

Подстановка эта состоит из отображения в первой из проведенных прямых и в той окружности, которая получается после этого отображения из окружности, соответствующей отрезку $(a, 1)$. Применяя подстановку S_2^{-1} к бесконечно удаленной точке, получим, что центр преобразованной окружности находится в точке e^{-1}, а потому центр окружности, соответствующей отрезку $(a, 1)$, должен находиться в точке $-(e^{-1})$, и окружность эта, таким образом, вполне определяется.

Точно так же определяется вполне основной четырехугольник, а вместе с ним и уравнение (1).

Следовательно, и в рассматриваемом случае может существовать только одно уравнение, принадлежащее области однозначного обращения и имеющее данные основные подстановки.

Назовем *основными подстановками второго рода* те подстановки, которые получаются при положительном обходе вокруг точек 0, 1 и ∞ по контуру, выходящему из какой-либо точки нижней полуплоскости.

Подстановки эти, как и подстановки первого рода, будем писать в определенном порядке, так, чтобы первая подстановка соответствовала особой точке $x = 0$, вторая — $x = 1$ и третья — $x = \infty$. Построение четырех сторон, которые мы произвели выше, мы смогли бы произвести и в том случае, когда заданные подстановки S_1, S_2 и S_3 были бы подстановками второго рода. В этом случае нам пришлось бы от начала координат откладывать вектор $-c/2$ вместо вектора $c/2$, и т. д.

Принимая во внимание, что точка 1 должна находиться на одной из прямых, перпендикулярных к построенному вектору и проходящих через его концы, мы можем утверждать, что в том случае, когда заданные подстановки — первого рода, вещественная часть c должна быть положительна, в случае же подстановок второго рода — отрицательна.

Из всего только что сказанного мы можем заключить, что заданным основным подстановкам второго рода может соответствовать лишь дифференциальное уравнение вида (1), принадлежащее области однозначного обращения, и что если некоторые три параболические подстановки являются основными подстановками какого-либо рода, то те же подстановки не могут быть основными подстановками другого рода. Следовательно, вообще трем заданным подстановкам без указания их рода* не может соответствовать двух различных уравнений, принадлежащих области однозначного обращения.

§ **6.** Выведем теперь некоторые соотношения между коэффициентами основных подстановок. Мы будем при этом предполагать, что неподвижные точки этих подстановок все различны. Не ограничивая общности, мы можем считать, что это будут точки 0, 1 и ∞, так что подстановки S_1, S_2 и S_3 примут вид

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z} + d,$$

$$\frac{1}{z_1 - 1} = \frac{1}{z - 1} + b,$$

$$z_1 = z + c.$$

Подстановка S_4, получающаяся при положительном обходе четвертой особой точки дифференциального уравнения, выражается формулой (8), если заданные подстановки — первого рода,

---

*Т.е. если известно только, что S_1, S_2 и S_3 — основные подстановки.

и формулой

$$S_4 = S_2^{-1} S_3^{-1} S_1^{-1}, \tag{8_1}$$

если это — подстановки второго рода. Подстановка S_4^{-1} имеет вид

$$z_1 = \frac{(1 + b + dc - db + dbc)z + (c - b + bc)}{(d + b - db + dbc)z + (1 - b + bc)}$$

или

$$z_1 = \frac{(1 + b + bc)z + (c - b - bc)}{(d + b + db + dbc)z + (1 - b + dc - db - dbc)}.$$

Она должна быть параболической, а потому должно быть

$$2 + dc + bc - db \pm dbc = \pm 2, \tag{9}$$

где верхний знак у dbc надо брать в случае подстановок первого рода, а нижний — в случае подстановок второго рода.

Заметим, кроме того, что двум последовательным отображениям в одной из сторон четырехугольника и в преобразованной после этого отображения противоположной стороне четырехугольника должна соответствовать не локсодромическая подстановка (см. § 2 гл. I). Вышеуказанным отображениям соответствуют подстановки $S_2 S_1^{-1} S_3^{-1} S_2^{-1}$, $S_1^{-1} S_3^{-1} S_2^{-1} S_1$ или $S_2^{-1} S_3^{-1} S_1^{-1} S_2$, $S_1 S_2^{-1} S_3^{-1} S_1^{-1}$. Это легко получить, если обратиться к исследованиям предыдущей главы и заметить, что прежняя подстановка S_2 обозначается теперь знаком S_4, а подстановка S_3 — знаком S_2. Только что написанные подстановки по характеру одинаковы с подстановками $S_3 S_1$, $S_2 S_3$ или $S_1 S_3$, $S_3 S_2$, а эти последние имеют вид

$$z_1 = \frac{(1 + dc)z + c}{dz + 1}, \qquad z_1 = \frac{z + c}{dz + (1 + dc)} \tag{10}$$

или

$$z_1 = \frac{(1 + b)z + (c - b + bc)}{bz + (1 - b + bc)}, \quad z_1 = \frac{(1 + b + bc)z + (c - b - bc)}{bz + (1 - b)}.$$

Принимая во внимание, что подстановки эти не могут быть локсодромическими, непосредственно заключаем, что произведения

$$dc, \qquad bc \tag{11}$$

должны быть вещественны.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании дифференциального уравнения вида (1), имеющего ту же совокупность основных подстановок, что и заданное уравнение, но только в другом порядке.

Могут существовать следующие комбинации основных подстановок:

$$S_2, S_1, S_3, \tag{12_1}$$

$$S_2, S_3, S_1, \tag{12_2}$$

$$S_3, S_2, S_1, \tag{12_3}$$

$$S_3, S_1, S_2, \tag{12_4}$$

$$S_1, S_3, S_2. \tag{12_5}$$

Уравнение, имеющее основные подстановки (12_1), получается из данного уравнения заменою независимых переменных:

$$x_1 = -x + 1.^* \tag{13}$$

Докажем теперь, что возможность остальных случаев исключена. Рассмотрим, например, случай (12_2).

Совершенно так же, как и выше, убедимся, что в рассматриваемом случае подстановка S_2S_1 или одинаковая с ней по характеру подстановка S_1S_2 должны быть не локсодромическими. Вычисляя коэффициенты этой подстановки, мы придем к заключению, что произведение db должно быть вещественным. Но, как мы видели выше, dc и bc также должны быть вещественны. Принимая во внимание равенство (9), мы можем отсюда заключить, что все три числа: d, b и c должны быть вещественны. Следовательно, в рассматриваемом случае группа уравнения должна быть вещественна, и стороны четырехугольника должны быть ортогональны вещественной оси, а вершины четырехугольника должны лежать на этой оси (см. § 2 гл. II). Стороны четырехугольника должны быть взаимно расположены так, как это указано на рис. 1, с той лишь разницей, что некоторые из сторон могут налегать сами на себя. Это непосредственно ясно из того, что углы четырехугольника должны быть равны нулю.

Принимая во внимание, что вершины четырехугольника должны быть неподвижными точками соответствующих основных подстановок, можем утверждать, что в случае (12_2) стороны четырехугольника, касательные взаимно в начале координат, должны быть следующие — мнимая ось и дуга окружности, ортогональной вещественной оси и проходящей через точки 0 и 1.

---

*Написанные основные подстановки могут быть как первого, так и второго рода.

В случае же основных подстановок S_1, S_2 и S_3 стороны эти будут лежать на мнимой оси и на окружности, ортогональной вещественной оси и проходящей через начало координат и через некоторую точку вещественной оси, лежащую между точками 0 и 1. Это противоречит тому факту, что в обоих указанных случаях основная подстановка, имеющая неподвижную точку в начале координат, будет одна и та же — S_1.

Таким образом, совокупность основных подстановок (12_2) не может встретиться. Так же можно показать невозможность и остальных трех случаев. Мы можем, следовательно, утверждать, что если S_1, S_2 и S_3 суть основные подстановки некоторого уравнения вида (1), то существует уравнение того же вида, имеющее основные подстановки S_2, S_1 и S_3, но не существует уравнения этого вида с такими же основными подстановками, но расположенными в ином порядке.

Возвращаясь к области однозначного обращения, можем утверждать, что трем заданным основным подстановкам без указания их рода и порядка могут соответствовать лишь два уравнения, принадлежащих области однозначного обращения. Независимые переменные этих уравнений должны быть связаны соотношением (13), так что заданным основным подстановкам будет соответствовать только одно уравнение, если мы поставим условие, чтобы четвертая особая точка уравнения удовлетворяла неравенству

$$0 < a \leqslant \frac{1}{2}.\text{*}$$

§ **7.** Определим теперь то частное интегралов, при котором основные подстановки имеют указанный выше вид. Рассмотрим интегралы $y_0(x, \lambda)$ и $y_\infty(x, \lambda)$ (см. § 1 гл. II).

Пусть интегралы эти при аналитическом продолжении по верхней полуплоскости, если заданные подстановки являются основными подстановками первого рода, или по нижней полуплоскости, если это подстановки второго рода, будут иметь вблизи точки $x = 1$ вид

$$\varepsilon_1(\lambda) \lg(x-1) y_1(x, \lambda) + \chi_1(x, \lambda),$$
$$\varepsilon_2(\lambda) \lg(x-1) y_1(x, \lambda) + \chi_2(x, \lambda),$$

---

*Результат этот можно получить и чисто геометрическим путем.

где $\chi_1(x,\lambda)$ и $\chi_2(x,\lambda)$ — голоморфные вблизи точки $x = 1$ функции. Как известно, $\varepsilon_1(\lambda)$ и $\varepsilon_2(\lambda)$ — целые функции параметра λ (см. теорему 1). Принимая во внимание, что точкам $x = 0, 1$ и ∞ должны соответствовать вершины 0, 1 и ∞ четырехугольника, имеем

$$\eta = \frac{\varepsilon_2(\lambda)y_0(x,\lambda)}{\varepsilon_1(\lambda)y_\infty(x,\lambda)}. \tag{14}$$

Для определенности ограничимся рассмотрением интервала однозначного обращения. Если λ заключается внутри этого интервала, то из теоремы 2 следует, что $\varepsilon_2(\lambda)$ не может обратиться в нуль.

Покажем, что $\varepsilon_1(\lambda)$ не может обратиться в нуль ни при каком вещественном значении λ. Действительно, пусть при некотором вещественном значении $\lambda = \lambda'$ $\varepsilon_1(\lambda')$ обращается в нуль. Интегралы $y_0(x,\lambda')$ и $y_\infty(x,\lambda')$ должны быть при этом линейно независимыми, ибо в противном случае существовал бы интеграл, голоморфный на всей плоскости.

Определим частное двух интегралов следующим образом:

$$\eta = \frac{iy_0(x,\lambda')}{y_\infty(x,\lambda')}.$$

Интервал $(\infty, 0)$ вещественной оси превратится при этом в прямую, лежащую на мнимой оси. Отрезок $(1,\infty)$ должен превратиться, таким образом, в прямую, параллельную мнимой оси, а потому вершина четырехугольника, соответствующая точке $x = 1$, не может оказаться в начале координат. Но если справедливо наше предположение, то $\eta = 0$ при $x = 1$.

Выражение (14) годится, таким образом, во всем интервале однозначного обращения. Величины d, b и c, как это нетрудно видеть, будут голоморфными функциями λ в этом интервале, и ни одна из них не может обратиться в нуль, так как при этом одна из подстановок превратилась бы в тождественную подстановку, чего не может быть ни для какой основной подстановки. Мы имеем, например:

$$d = -2\pi i\frac{\varepsilon_2(\lambda)\delta(\lambda)}{\varepsilon_1(\lambda)},$$

где $\delta(\lambda)$ есть коэффициент при $\lg x^{-1}$, получаемый при разложении интеграла $y_0(x,\lambda)$ вблизи точки $x = 0$.

Мы знаем, что существуют в интервале однозначного обращения такие значения $\lambda_0^{(0)}$ и $\lambda_1^{(0)}$, при которых одна из подстановок (10) становится параболической, т. е. одно из выражений

$$2 + dc, \qquad 2 + bc \tag{15}$$

по модулю становится равным двум, т. е. мы имеем dc или $bc = -4$. Отсюда непосредственно ясно, что произведения (11) должны быть отрицательны при всяком значении λ, находящемся внутри интервала однозначного обращения.

Определим теперь знак правой части в выражении (9). Левая часть этого выражения есть аналитическая функция λ, а потому мы можем при определении знака положить для простоты $\lambda = \lambda_0$.

Для определенности рассмотрим сначала тот случай, когда заданные подстановки являются основными подстановками первого рода. В этом случае мы будем иметь $c = 2$, так как общий перпендикуляр к параллельным сторонам четырехугольника будет представлять собой вектор-единицу (см. рис. 1). Кроме того, оба выражения (15) должны быть по модулю больше двух, так как в рассматриваемом случае окружности или прямые, на которых лежат противоположные стороны четырехугольника, не имеют общих точек. Следовательно, в этом случае имеют место неравенства

$$d < -2, \quad b < -2, \tag{16}$$

и левая часть выражения (9) принимает вид

$$2 + 2d + 2b + db.$$

Но при условиях (16) последнее выражение должно быть больше, чем -2, и, следовательно, в правой части выражения (9) надо в случае основных подстановок первого рода брать знак плюс. К тому же результату мы пришли бы и в случае подстановок второго рода. В этом последнем случае мы будем иметь при $\lambda = \lambda_0$

$$c = -2$$

и

$$d > 2, \quad b > 2. \tag{16_1}$$

Мы можем, таким образом, написать выражение (9) в виде

$$dc + bc - db \pm dbc = 0, \tag{9_1}$$

где верхний знак соответствует случаю основных подстановок первого рода, а нижний — второго рода. Такого же правила знаков мы будем придерживаться и в дальнейшем.

Определим неподвижную точку подстановки S_4. Обратимся для этого к указанному в предыдущем параграфе выражению S_4^{-1}, и, пользуясь равенством (9_1), получим, что точка эта может быть представлена в виде

$$p = 1 - \frac{c}{b(1 \mp c)}. \tag{17}$$

Соответствующая вершина четырехугольника должна находиться на вещественной оси между точками 0 и 1. Выражение для p должно быть поэтому вещественно, и мы должны иметь неравенство

$$0 < \frac{c}{b(1 \mp c)} < 1. \tag{18}$$

Заметим также, что параллельные стороны четырехугольника должны проходить через точки 0 и 1, а потому c должно удовлетворять неравенству $|c| \leqslant 2$, и знак равенства будет иметь место лишь в случае вещественной группы.

§ **8.** Разберем теперь вопрос о необходимых и достаточных условиях, которым должны удовлетворять d, b и c для того, чтобы подстановки S_1, S_2 и S_3, указанные нами в § 6, были основными подстановками некоторого дифференциального уравнения вида (1), соответствующими точкам $x = 0$, 1 и ∞. В настоящем параграфе ограничимся рассмотрением подстановок первого рода и будем предполагать, что уравнение принадлежит области однозначного обращения.

Выше мы вывели следующие два условия:

(I) dc и bc — вещественны и отрицательны;

(II) $dc + bc - db + dbc = 0$.

Из этих двух условий вытекает неравенство (18). Положим

$$c = \alpha + \beta i,$$
$$d = -k(\alpha - \beta i),$$
$$b = -l(\alpha - \beta i),$$

где k и l — вещественные положительные числа. Условие (II) можем написать в виде

$$(\mathrm{II}_1) \qquad 2\alpha = \alpha^2 + \beta^2, \quad k + l = kl.$$

Отсюда непосредственно следует неравенство

$$|c| \leqslant 2.$$

При заданных основных подстановках четырехугольник должен иметь вид, указанный на рис. 7. Принимая во внимание, что координата точки B выражается формулой (17) и что стороны AB и BC не должны пересекать прямые AJ и CJ, получим

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} &|dc(1-c)| > 4 \quad \text{при} \quad \beta > 0, \\ &|bc(1-c)| > 4 \quad \text{при } \beta < 0. \end{aligned}$$

Условия эти можно переписать в виде

$$\text{(III}_1\text{)} \qquad \begin{aligned} &\alpha k > 2 \quad \text{при } \beta > 0, \\ &\alpha l > 2 \quad \text{при } \beta < 0. \end{aligned}$$

Непосредственно очевидно, что условия (III) не являются следствием условий (I) и (II).

Нетрудно показать, что совокупность условий (I), (II) и (III) представляет собой не только необходимое, но и достаточное условие того, чтобы вышеуказанные подстановки S_1, S_2 и S_3 были основными подстановками первого рода некоторого уравнения вида (1).

Пусть, как и раньше, точки A, C и J представляют собой точки 0, 1 и ∞. Отметим точку B, имеющую координату p, которая определяется равенством (17). В силу неравенства (18) точка эта будет лежать на вещественной оси между точками 0 и 1. Проведем через точки A и C в верхней полуплоскости полупрямые AJ и CJ, перпендикулярные к вектору, изображающему комплексное число c. Проведем затем в верхней же полуплоскости две дуги окружности через точку B: одну, касательную к первой из вышеуказанных полупрямых в точке A, а другую, касательную ко второй полупрямой в точке C. Длина перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CJ, выражается дробью $\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Но в силу равенства ($\text{II}_1$) дробь эта равна $|c|/2$. Радиусы окружностей, на которых лежат дуги AB и BC, равны $p/|c|$ и $(1-p)/|c|$, а координаты центров этих окружностей будут

$$\left(\frac{p}{2}, \frac{p\beta}{2\alpha}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{1+p}{2}, \frac{-(1-p)\beta}{2\alpha}\right).$$

Пользуясь первым из соотношений (II_1), легко проверить, что окружности эти будут касаться в точке B. Мы получим, таким образом, в верхней полуплоскости четырехугольник $ABCJ$, и стороны этого четырехугольника не будут пересекаться, как это непосредственно видно из условий (III) (см. рис. 7). Четырехугольнику этому будет соответствовать уравнение вида (1), принадлежащее области однозначного обращения.

Выберем независимое переменное в этом уравнении так, чтобы вершинам A, B и J соответствовали точки $x = 0$, 1 и ∞. Выше мы нашли, что расстояние между параллельными сторонами четырехугольника равно $|c|/2$. Кроме того, обе эти стороны параллельны вектору, изображающему комплексное число c. Отсюда следует, что подстановка S_3 имеет вид

$$\eta_1 = \eta + c.$$

Определяя из геометрических соображений координаты отображений точки B в полупрямых AJ и CJ, убедимся без труда в том, что подстановки S_1 и S_2 будут иметь вид

$$\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta} + d,$$
$$\frac{1}{\eta_1 - 1} = \frac{1}{\eta - 1} + b,$$

и таким образом достаточность условий (I), (II) и (III) доказана. Совершенно так же можно разобрать и случай основных подстановок второго рода.

§ **9.** В настоящем и следующих параграфах, говоря об уравнении вида (1), мы будем каждый раз подразумевать, что уравнение это принадлежит области однозначного обращения.

Пусть S_1, S_2 и S_3 — основные подстановки такого уравнения. Рассмотрим вопрос о существовании таких уравнений вида (1), совокупность основных подстановок которых будет S_1^{-1}, S_2^{-1} и S_3^{-1}. Для определенности предположим, что подстановки S_1, S_2 и S_3 суть основные подстановки первого рода.

Если продолжения сторон четырехугольника, приводящего к этим основным подстановкам, не пересекаются и не касаются, то они образуют второй четырехугольник (см. рис. 7). Преобразуем его в нижнюю полуплоскость так, чтобы вершинам A, C и J соответствовали точки $x = 0$, 1 и ∞. Таким путем мы придем к уравнению вида (1), и основные подстановки этого уравнения будут

$$S_1^{-1}, \quad S_2^{-1} \quad \text{и} \quad S_3^{-1}. \tag{19}$$

Это будут подстановки второго рода. Если мы применим к вновь полученному уравнению преобразование (13), то получим уравнение с основными подстановками

$$S_2^{-1}, \quad S_1^{-1}, \quad S_3^{-1}, \tag{19$_1$}$$

и никаких других уравнений вида (1) с такой же совокупностью основных подстановок быть не может (см. § 6).

Предположим теперь, что продолжения сторон основного четырехугольника пересекаются или касаются. Пусть и в этом случае существует уравнение вида (1), имеющее основные подстановки (19). Равенство (9_1) показывает, что это должны быть подстановки второго рода. Из рассуждений § 4 настоящей главы мы видим, что этим основным подстановкам может соответствовать единственная совокупность четырех последовательно касающихся окружностей, и в рассматриваемом случае это будут продолжения сторон четырехугольника, соответствующего исходному уравнению. Но дуги эти не будут образовывать четырехугольника, ибо две противоположные дуги пересекаются или касаются.

Таким образом, мы можем утверждать,что в этом случае не существует уравнения вида (1) с основными подстановками (19). Точно так же не будет существовать уравнения вида (1) с основными подстановками (19_1), ибо преобразование (13) привело бы такое уравнение к уравнению с основными подстановками (19).

Остается рассмотреть следующие последовательности основных подстановок:

$$S_3^{-1}, S_2^{-1}, S_1^{-1}, \tag{19$_2$}$$

$$S_2^{-1}, S_3^{-1}, S_1^{-1}, \tag{19$_3$}$$

$$S_3^{-1}, S_1^{-1}, S_2^{-1}, \tag{19$_4$}$$

$$S_1^{-1}, S_3^{-1}, S_2^{-1}. \tag{19$_5$}$$

Рассматривая один из этих четырех случаев, мы можем так же, как и в § 6, убедиться, что d, b и c должны быть вещественны, но в рассматриваемом случае этого не может быть, так как продолжения сторон четырехугольника пересекаются. Последнее же обстоятельство не может иметь места в случае вещественной группы. Таким образом, возможность указанных четырех случаев исключена.

§ **10.** Рассмотрим теперь тот случай, когда существует уравнение вида (1) с основными подстановками S_1, S_2, S_3 и уравнение того же вида с основными подстановками (19_1). Первое уравнение будем обозначать знаком (I), а второе — знаком (II).

При сделанном выборе неподвижных точек основных подстановок мы будем иметь на плоскости η два четырехугольника, изображенные на рис. 7, причем точки A и C лежат в точках 0 и 1. Для определенности предположим, что верхний четырехугольник соответствует уравнению (I), т. е. что подстановки S_1, S_2, S_3 суть основные подстановки первого рода этого уравнения. Мы можем считать, что нижний четырехугольник является конформным изображением нижней полуплоскости при помощи частного интегралов уравнения (II) и что точки A и C соответствуют точкам $x = 0$ и $x = 1$.

Для того, чтобы уравнение (II) было соответствующим уравнению (I), необходимо и достаточно, чтобы нижний четырехугольник мог быть получен из верхнего при помощи линейной подстановки первого или второго рода. Это следует непосредственно из рассуждений § 2 настоящей главы. Если группа уравнения (I) вещественна, то прямые AJ и CJ перпендикулярны к вещественной оси, и нижний четырехугольник может быть получен из верхнего при помощи подстановки второго рода $\eta_1 = \bar{\eta}$.

Покажем, что случай этот является единственным случаем, в котором нижний четырехугольник может быть получен из верхнего при помощи линейной подстановки второго рода, если только AB не равно BC.

Пусть $\eta = \alpha$ есть координата точки B. Если указанная только что подстановка существует, то она должна преобразовывать в себя совокупность точек 0, α, 1 и ∞, а потому она должна иметь один из следующих четырех видов (см. § 3)*:

$$\eta_1 = \bar{\eta},$$

$$\eta_1 = \frac{\alpha - 1}{\bar{\eta} - 1},$$

$$\eta_1 = \frac{\bar{\eta} - \alpha}{\bar{\eta}},$$

$$\eta_1 = \frac{\alpha(\bar{\eta} - 1)}{\bar{\eta} - \alpha},$$

---

*Подстановка эта преобразует верхнюю полуплоскость в нижнюю.

причем вторая и третья подстановки возможны лишь в том случае, когда $\alpha = 1/2$, т. е. когда $AB = BC$. Принимая во внимание, что при линейной подстановке второго рода углы должны сохраняться, убедимся без труда, что подстановки первая и четвертая могут преобразовывать верхний четырехугольник в нижний лишь в том случае, когда стороны четырехугольников ортогональны вещественной оси.

Обратимся теперь к исключенному[27] [ранее] случаю $\alpha = 1/2$. В этом случае существует подстановка первого рода

$$\eta_1 - \frac{1}{2} = -\left(\eta - \frac{1}{2}\right),$$

преобразующая верхний четырехугольник в нижний. Покажем теперь, что такая подстановка может существовать лишь в рассмотренных нами двух случаях.

Обратимся к подстановкам, указанным нами в § 3 настоящей главы. Если упомянутая подстановка первого рода существует, то она должна иметь вид (IV), (V), (VI) или (VII). Но если она имеет вид (V) или (VII), то мы должны иметь $\alpha = 1/2$. Если же она имеет вид (IV) или (VI), то, принимая во внимание конформность совершаемого преобразования, мы можем утверждать, что AJ и CJ должны быть перпендикулярны к вещественной оси. Таким образом, наше утверждение доказано.

Точка B есть неподвижная точка подстановки S_4, а потому условие $\alpha = 1/2$ мы можем написать в виде

$$\frac{c}{b(1-c)} = \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Каждое из неравенств, входящих в условие (III) § 8, выражает, что диаметр одной из окружностей, на которых лежат стороны AB и BC, меньше расстояния между параллельными сторонами четырехугольника. Для того, чтобы продолжения сторон четырехугольника не пересекались, необходимо и достаточно выполнение обоих условий (III) вне зависимости от знака β.

Рассуждения последних параграфов приводят нас к следующей теореме:

Теорема 12. *Для того, чтобы подстановки S_1, S_2 и S_3, имеющие вид*

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z} + d,$$

$$\frac{1}{z_1 - 1} = \frac{1}{z - 1} + b,$$
$$z_1 = z + c,$$

были основными подстановками первого рода некоторого уравнения вида (1), *принадлежащего области однозначного обращения, необходимо и достаточно выполнение условий* (I), (II) *и* (III), *указанных в* § 8. *Если такое уравнение существует, то преобразование* (13) *приводит к другому уравнению вида* (1) *с основными подстановками второго рода:*

$$S_2, \quad S_1 \quad \text{и} \quad S_3, \tag{21}$$

и не существует более никакого уравнения вида (1), *принадлежащего области однозначного обращения, с такой же совокупностью основных подстановок.*

Если, кроме того, выполнены оба неравенства, входящие в условие (III), *то существует уравнение вида* (1), *принадлежащее области однозначного обращения с основными подстановками второго рода:*

$$S_1^{-1}, \quad S_2^{-1}, \quad S_3^{-1}. \tag{22}$$

Уравнение это будет соответствующим первоначальному уравнению тогда и только тогда, когда a, b и c будут вещественны или когда будет выполнено условие (20).

Если же одно из неравенств, входящих в условие (III), *не выполняется, то не существует уравнения вида* (1), *принадлежащего области однозначного обращения и имеющего совокупность основных подстановок S_1^{-1}, S_2^{-1} и S_3^{-1}.*

Вообще, если какое-либо уравнение вида (1) *имеет основные подстановки S_1, S_2 и S_3, то преобразование* (13) *приводит к уравнению с основными подстановками* (21), *и не существует уравнения вида* (1), *которое имело бы ту же совокупность основных подстановок, но в другом порядке.*

§ **11.** Обратимся вновь к рис. 7. Назовем два четырехугольника, изображенные на этом рисунке, *сопряженными четырехугольниками.* Точно так же назовем *сопряженными* уравнения (I) и (II), о которых мы упоминали в предыдущем параграфе и которые соответствуют указанным двум четырехугольникам.

Мы, как и раньше, будем предполагать, что верхний четырехугольник соответствует уравнению (I) и что вершинам A, C и J в обоих уравнениях соответствуют особые точки 0, 1 и ∞.

Пусть $y_0(x, \lambda)$ и $y_\infty(x, \lambda)$ — интегралы уравнения (I) и пусть они при аналитическом продолжении по верхней полуплоскости имеют вблизи точек $x = a$ и $x = 1$ разложения

$$\begin{aligned}
&\alpha(\lambda) \lg(x - a) y_a(x, \lambda) + \omega_1(x, \lambda), \\
&\delta(\lambda) \lg(x - a) y_a(x, \lambda) + \omega_2(x, \lambda), \\
&\varepsilon_1(\lambda) \lg(x - 1) y_1(x, \lambda) + \chi_1(x, \lambda), \\
&\varepsilon_2(\lambda) \lg(x - 1) y_1(x, \lambda) + \chi_2(x, \lambda).
\end{aligned}$$

Как мы видели в § 7, η определяется для случая рис. 7 по формуле

$$\eta = \frac{\varepsilon_2(\lambda) y_0(x, \lambda)}{\varepsilon_1(\lambda) y_\infty(x, \lambda)},$$

и координата точки B имеет вид

$$\frac{\varepsilon_2(\lambda) \alpha(\lambda)}{\varepsilon_1(\lambda) \delta(\lambda)}.$$

Если мы будем менять λ непрерывно в интервале однозначного обращения, то координата эта будет непрерывно изменяться. При приближении λ к μ_1 точка B будет стремиться к A, так как $y_0(x, \mu_1)$ — голоморфен в точке $x = a$. При $\lambda = \mu_{-1}$ интегралы $y_0(x, \mu_{-1})$ и $y_\infty(x, \mu_{-1})$ отличаются лишь постоянным множителем, и, следовательно, при этом координата точки B обратится в единицу. Внутри интервала однозначного обращения будет поэтому существовать по крайней мере одно такое значение λ, при котором координата точки B будет равна 1/2. При таком положении точки B продолжения сторон четырехугольника не могут пересечься, так как продолжения эти могут быть получены из сторон четырехугольника при помощи линейной подстановки.

В следующем параграфе мы исследуем подробно изменение четвертой особой точки и параметра в уравнении (II) при непрерывном изменении параметра λ уравнения (1) от $\lambda_0^{(0)}$ до $\lambda_1^{(0)}$. Предварительно докажем следующую лемму:

Лемма 5. *Если в уравнении* (1) *гл.* II *a имеет любое значение, заключающееся внутри интервала* $(0, 1)$, *то можно найти такое, не зависящее от a, положительное постоянное число m, что любое значение λ, принадлежащее интервалу однозначного обращения, будет по абсолютному значению меньше m.*

Обратимся к уравнению

$$z''(x,\lambda)+\left[\frac{q''(x)}{q(x)}+\frac{p'(x)\cdot q'(x)}{p(x)\cdot q(x)}+\frac{x}{p(x)}+\frac{\lambda}{p(x)}\right]z(x,\lambda)=0, \quad (23)$$

которое является преобразованием уравнения (1) (см. § 7 гл. II). Возьмем какой-либо интервал (α,β), лежащий внутри интервала $(1,\infty)$. При любом значении a, заключающемся внутри интервала $(0,1)$, можно указать такие два не зависящих от a числа m_1 и m_2, из которых второе положительно, что сумма первых трех слагаемых, стоящих в квадратных скобках, будет меньше m_1, а $p(x)$ меньше m_2, если x принадлежит интервалу (α,β). Если λ будет удовлетворять неравенству

$$m_1+\frac{\lambda}{m_2}>\frac{\pi^2}{(\beta-\alpha)^2}, \quad (24_1)$$

то в силу известной теоремы Sturm'а можно утверждать, что любой вещественный интеграл уравнения (23), а следовательно, и уравнения (1), будет обращаться в нуль в интервале (α,β).

Возьмем теперь какой-либо интервал (α_1,β_1), лежащий внутри интервала $(\infty,0)$, и определим два числа n_1 и n_2, из которых второе положительно, так, чтобы сумма первых трех слагаемых, стоящих в квадратной скобке в уравнении (23), была больше n_1, а $p(x)$ было больше $-n_2$ при всех значениях x, принадлежащих интервалу (α_1,β_1), и всех вышеуказанных значениях a. Если λ удовлетворяет неравенству

$$n_1-\frac{\lambda}{n_2}>\frac{\pi^2}{(\beta_1-\alpha_1)^2}, \quad (24_2)$$

то всякий интеграл уравнения (1) будет обращаться в нуль в интервале (λ_1,β_1).

Если λ удовлетворяет неравенству (24_1) или (24_2), то λ не может принадлежать интервалу однозначного обращения (см. § 11 гл. II). Отсюда ясно существование числа m, указанного выше.

§ **12.** Обратимся к рис. 4 и будем менять в уравнении (I), соответствующем верхнему четырехугольнику, параметр λ от значения $\lambda_{-1}^{(0)}$ до значения $\lambda_1^{(0)}$. Нижнему четырехугольнику будет соответствовать сопряженное с уравнением (I) уравнение (II). Мы обратим внимание на изменение четвертой особой точки и параметра в этом уравнении при указанном выше изменении параметра в уравнении (I). Мы будем при этом считать, что вершинам A, C и J соответствуют в обоих уравнениях особые точки 0, 1 и ∞. Частное интегралов уравнения (I) мы определим по формуле $\eta = iy_0/y_\infty$.

Можно указать в верхней полуплоскости такую точку H, что круг $\mathcal{K}$, описанный около этой точки как центра, достаточно малым радиусом r, будет при всяком из указанных выше значений λ находиться внутри верхнего четырехугольника. Совершим над плоскостью рис. 4 такое линейное преобразование, чтобы мнимая ось перешла в некоторую окружность и точка H — в центр этой окружности. Коэффициенты этого дробно-линейного преобразования не будут зависеть от λ, и отсюда непосредственно ясно, что координаты центра и радиусы окружностей, образующих два четырехугольника, получаемых после преобразования, будут непрерывными функциями λ.

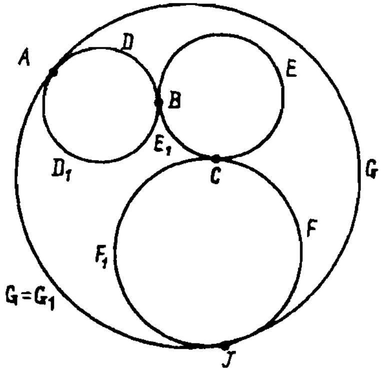

Рис. 9

После преобразования сопряженный четырехугольник, получаемый из нижнего четырехугольника рис. 4, и все его последовательные отображения будут находиться при всяком значении λ, принадлежащем интервалу $(\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)})$, на конечном расстоянии. Действительно, мнимая ось преобразуется в окружность, которая не будет меняться при изменении λ, и отображение в этой окружности того круга, который получится из круга $\mathcal{K}$, будет содержать внутри себя все достаточно удаленные точки плоскости и будет находиться внутри сети, получаемой из четырехугольника, соответствующего уравнению (I).

После указанного преобразования плоскости рис. 4 мы получим два четырехугольника, изображенные на рис. 9. Мы удержали при этом прежнее обозначение вершин.

Пусть четырехугольник $AD_1BE_1CF_1JG_1A$ соответствует уравнению (II), а четырехугольник $ADBECFJGA$ — уравнению (I). Вершины A, C и J соответствуют, как мы указали раньше, особым точкам 0, 1 и ∞, и вышеуказанный четырехугольник является дополнительным четырехугольником уравнения (II). Вершина B будет соответствовать четвертой особой точке b этого уравнения, и точка эта будет заключаться внутри интервала $(0,1)$.

Обозначим буквою ν параметр, входящий в уравнение (II). При изменении параметра λ точки A и J и внешняя окружность на рис. 9 не будут меняться. Докажем, что b и ν будут непрерывными функциями λ.

Пусть λ стремится к некоторому значению λ', лежащему внутри интервала $(\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)})$. При этом b будет находиться внутри интервала $(0,1)$, а значения ν будут ограничены, как это следует из леммы. Мы можем поэтому выбрать такую последовательность значений λ_n, стремящихся к λ', что соответствующие значения b_n и ν_n также будут стремиться к пределу. Обозначим

$$\lim_{n=\infty} b_n = b', \qquad \lim_{n=\infty} \nu_n = \nu'.$$

Предположим сначала, что b' отлично от нуля и единицы.

Будем описывать на плоскости переменной x около точки b' как центра окружности C_n радиусом r_n так, чтобы точки b_n лежали внутри окружностей C_n и чтобы при увеличении n r_n стремилось к нулю. Возьмем нижнюю полуплоскость и пришьем к ней четыре экземпляра верхней полуплоскости вдоль отрезков $(\infty, 0)$, $(0, b')$, $(b', 1)$ и $(1, \infty)$ вещественной оси. Исключим из полученной таким образом области точки 0, 1 и ∞, а также точки, лежащие внутри окружности C_n. Полученную после этого область назовем буквою $\mathcal{B}_n$. Будем обозначать знаками $\eta(x, \lambda)$ и $\eta_1(x, \nu)$ частные интегралов уравнений (I) и (II), преобразующие полуплоскости в четырехугольники, изображенные на рис. 9. Функции $\eta_1(x, \nu_n)$ преобразуют конформно область $\mathcal{B}_n$ в часть четырехугольника $AD_1BE_1CFJG_1A$ и ее отображения в сторонах этого четырехугольника. Функции $\eta_1(x, \nu_n)$ принимают потому в областях $\mathcal{B}_n$ всякое свое значение один лишь раз и являются функциями, ограниченными в своей совокупности.

Приложим к функциям $\eta_1(x, \nu_n)$ принцип сходимости. Равномерное стремление этих функций к предельной будет иметь место внутри области $\mathcal{B}$, которая является пределом областей $\mathcal{B}_n$ и состоит из нижней полуплоскости и четырех экземпляров верхней полуплоскости (см. § 5 Введения). Этой области будет принадлежать и вся вещественная ось за исключением точек a, b', 1 и ∞.

Покажем, что предельная функция не может обратиться в постоянную. Действительно, значения функций на отрезках $(0, b')$ и $(1, \infty)$ вещественной оси лежат на дугах AD_1B и JF_1C. Координаты центра и радиусы этих дуг являются непрерывными функциями λ, и потому значения предельной функции на указанных выше отрезках вещественной оси должны лежать на дугах AD_1B и JF_1C, соответствующих значению $\lambda = \lambda'$. Заметим при этом, что когда мы говорим о какой-либо дуге рис. 9, соответствующей заданному значению параметра, то мы при этом подразумеваем то положение, которое эта дуга занимает при указанном значении параметра.

Дуги AD_1B и JF_1C при $\lambda = \lambda'$ не имеют общих точек, откуда и следует, что предельная функция не может быть постоянной. Кроме того, непосредственно ясно, что функция эта удовлетворяет уравнению

$$\frac{2\eta_1'''\eta_1' - 3\eta_1''^2}{2\eta_1'^2} = \frac{1}{x(x-1)(x-b')} \times$$
$$\times \left[\frac{b'}{x} + \frac{b'(b'-1)}{x-b'} + \frac{1-b'}{x-1} + 4\lambda' + x + (1+b')\right]. \quad (25)$$

Мы имеем таким образом

$$\lim_{n=\infty} \eta_1(x, \nu_n) = \eta_1(x, \nu').$$

Значения функции $\eta_1(x, \nu')$ должны, как это ясно из только что приведенных соображений, преобразовывать нижнюю полуплоскость в четырехугольник, сопряженный с основным четырехугольником уравнения (I) при $\lambda = \lambda'$, т. е. b' и ν' представляют собой значения b и ν при $\lambda = \lambda'$.

§ **13.** Покажем теперь, что b не может быть равно нулю или единице. Предположим, например, что $b' = 0$.

Пришьем к нижней полуплоскости три экземпляра верхней полуплоскости вдоль интервалов $(\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ вещественной оси и окружим точку $x = 0$ окружностями C_n, о которых мы упоминали выше. Область B будет состоять из нижней полуплоскости и трех экземпляров верхней полуплоскости и будет содержать вещественную ось, за исключением точек 0, 1 и ∞.

Предельная функция, отличная от постоянной и удовлетворяющая уравнению (25), должна быть частным интегралов уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[x^2(x-1)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\nu')y=0. \tag{26}$$

Значения этой функции в точках, принадлежащих интервалам $(\infty,0)$, $(0,1)$ и $(1,\infty)$ вещественной оси, должны лежать соответственно на дугах AG_1J, BE_1C и JF_1C, получаемых при $\lambda=\lambda'$. Уравнение (26) имеет в особых точках $x=1$ и $x=\infty$ разность корней фундаментального определяющего уравнения, равную нулю, а в точке $x=0$ уравнение это имеет вид

$$r^2+r-\nu'=0. \tag{27}$$

Разность корней этого уравнения может быть либо вещественной, либо чисто мнимой. Уравнение (26) имеет вещественные коэффициенты, а потому при стремлении x к нулю вдоль вещественной оси частное интегралов η_1 этого уравнения должно описывать некоторую окружность в одном направлении (см. § 11 гл. II). Если бы только что упомянутая разность была чисто мнимой, то при указанном стремлении x к нулю η_1 пробегала бы окружность бесчисленное множество раз. Действительно, в этом случае некоторое частное интегралов уравнения (26) имело бы вид вблизи точки $x=0$

$$x^{\varphi i}(a_0+a_1x+\ldots),$$

где a_0 — отлично от нуля и φ — вещественно и также отлично от нуля. Выражение это при стремлении x к нулю не стремится ни к какому пределу, откуда и вытекает непосредственно вышесказанное нами утверждение. В рассматриваемом случае частное интегралов уравнения (26) не может пробегать окружности более одного раза, так как предельная функция может принимать в области B всякое свое значение не более одного раза.

Разность корней уравнения (27) должна быть вещественной, и потому при приближении x к нулю с той или другой стороны вдоль вещественной оси частное интегралов будет стремиться к определенному пределу, т. е. это частное должно преобразовывать полуплоскость в треугольник, ограниченный дугами кругов. В рассматриваемом случае две вершины треугольника должны лежать в точках A и J, третьей же вершины не может существовать, так как окружности, на которых лежат дуги AG_1J и BE_1C, не имеют общих точек при $\lambda = \lambda'$. Мы видим, таким образом, что b' не может быть равной нулю. Точно так же можно показать, что b' не может быть равно единице.

Итак, при стремлении λ к λ' b и ν имеют единственные точки сгущения b' и ν', которые и являются значениями b и ν при $\lambda = \lambda'$, т. е. требуемая непрерывность изменения b и ν установлена.

§ **14.** Исследуем теперь изменение этих величин при стремлении λ к $\lambda_0^{(0)}$. Напомним, что при $\lambda = \lambda_0^{(0)}$ дуга BE_1C касается дуги AG_1J. Обозначим точку касания буквою H.

Мы можем, как и раньше, построить величины b' и ν'. Относительно b' мы можем сделать три предположения:

1) $0 < b' < 1$;
2) $b' = 1$;
3) $b' = 0$.

Докажем невозможность первых двух предположений.

Пусть имеет место первое предположение. Построим, как и раньше, области $\mathcal{B}_n$ и предельную функцию $\eta_1(x, \nu')$. Эта последняя будет отлична от постоянной, будет принимать в области $\mathcal{B}$ всякое свое значение не более одного раза и будет удовлетворять уравнению (25). Она является, таким образом, частным интегралов уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-b')(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\nu')y = 0, \tag{26$_1$}$$

принадлежащего области однозначного обращения, и должна преобразовывать нижнюю полуплоскость в четырехугольник. Стороны этого четырехугольника должны находиться на сторонах четырехугольника, сопряженного с основным четырехугольником уравнения (I) при $\lambda_0^{(0)}$. Но при этом значении параметра упомянутый четырехугольник разбивается на два треугольника, и отсюда легко видеть, что предположение 1) неправильно.

Разберем предположение 2). При этом останется справедливым все, что мы сказали в случае предположения 1), с той лишь разницей, что вместо уравнения (26_1) мы будем иметь уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-1)^2\frac{dy}{dx}\right] + (x+\nu')y = 0, \tag{26$_2$}$$

и область B будет состоять из нижней полуплоскости и трех экземпляров верхней полуплоскости и будет содержать вещественную ось, за исключением точек 0, 1 и ∞.

Так же, как и в предыдущем параграфе, можем убедиться, что частное интегралов уравнения (26_2) должно преобразовывать нижнюю полуплоскость в треугольник, ограниченный дугами окружностей, с определенными вершинами, и стороны этого треугольника должны лежать на дугах AG_1J, AD_1B и JF_1C, соответствующих значению $\lambda = \lambda_0^{(0)}$. Но этого не может быть, так как последние две дуги не имеют общих точек.

Рассмотрим подробно единственно возможное предположение 3). Область B имеет в этом случае тот же вид, что и в предыдущем случае. Значения предельной функции в точках, принадлежащих интервалам $(\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ вещественной оси, должны находиться на дугах AG_1J, BE_1C и CF_1J, соответствующих значению $\lambda = \lambda_0^{(0)}$. Эти три дуги не пересекаются в одной точке, а потому предельная функция $\eta_1(x, \nu')$ отлична от постоянной, принимает в области B всякое свое значение один лишь раз и является частным интегралов уравнения (26).

Как и раньше, можем убедиться, что функция эта должна преобразовывать нижнюю полуплоскость в треугольник с определенными вершинами. Стороны этого треугольника должны лежать на дугах AG_1J, BE_1C и CF_1J и не могут налегать сами на себя. Таким образом, непосредственно ясно, что это будет треугольник JCH, и вершина H будет соответствовать особой точке $x = 0$ уравнения (26). Угол треугольника при этой вершине равен нулю, и потому корни уравнения (27) должны быть одинаковы, т. е. $\nu' = -1/4$. Мы можем поэтому написать:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0^{(0)}} b = 0, \qquad \lim_{\lambda=\lambda_0^{(0)}} \nu = -\frac{1}{4}. \tag{28}$$

Совершенно так же мы могли бы доказать, что

$$\lim_{\lambda=\lambda_1^{(0)}} b = 1, \qquad \lim_{\lambda=\lambda_1^{(0)}} \nu = -\frac{3}{4}. \tag{29}$$

В этом последнем случае произошло бы прикосновение дуг AD_1B и CF_1J, и предельная функция была бы частным интегралов уравнения (26_2).

Мы видим, таким образом, что при непрерывном изменении параметра λ в уравнении (I) от значения $\lambda_0^{(0)}$ до значения $\lambda_1^{(0)}$

четвертая особая точка b сопряженного уравнения меняется непрерывно от значения $b = 0$ до значения $b = 1$.

§ **15.** Докажем в настоящем параграфе, что при различных значениях λ значения b также должны быть различны.

Предположим, что при двух различных значениях параметра $\lambda = \lambda'$ и $\lambda = \lambda''$ в уравнении (I) четвертая особая точка сопряженного уравнения будет одинакова. Выпишем все эти уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\lambda')y = 0, \tag{30_1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\lambda'')y = 0, \tag{30_2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-b)(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\nu')y = 0, \tag{31_1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-b)(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\nu'')y = 0. \tag{31_2}$$

Выберем частное интегралов уравнений (30_1) и (30_2) так, чтобы основные четырехугольники, соответствующие этим уравнениям, имели вид, указанный на рис. 2, причем вершинам A, C и J пусть соответствуют, как всегда, особые точки: 0, 1 и ∞ дифференциальных уравнений.

Пусть внешний четырехугольник этого рисунка соответствует уравнению (30_1), тогда внутренний будет соответствовать уравнению (31_1). Уравнениям (30_2) и (31_2) будут соответствовать четырехугольники, аналогичные только что указанным.

Плоскость рис. 2 будем называть *плоскостью переменной* η, а плоскость, в которой лежат четырехугольники, соответствующие уравнениям (30_2) и (31_2), назовем *плоскостью переменной* η_1.

Исключая из частных интегралов уравнений (30_1) и (30_2) независимое переменное, мы получим аналитическую функцию

$$\eta_1 = \varphi_1(\eta), \tag{32_1}$$

преобразующую конформно внешний четырехугольник плоскости η во внешний четырехугольник плоскости η_1 так, что вершинам первого четырехугольника соответствуют вершины же второго. Проделывая то же с уравнениями (31_1) и (31_2), мы получим аналитическую функцию

$$\eta_1 = \varphi_2(\eta), \tag{32_2}$$

преобразующую внутренний четырехугольник во внутренний, причем соответствие между вершинами будет таким же, что и во внешних четырехугольниках. Функция (32_1) может быть продолжена согласно принципу симметрии, она будет функцией аналитической во всей внешней сети четырехугольников плоскости η* и преобразует эту сеть во внешнюю сеть плоскости η_1. То же самое имеет место относительно функции (32_2) и внутренних сетей. Рассуждая совершенно так же, как и в § 13 предыдущей главы, мы можем установить вполне определенное биоднозначное, непрерывное соответствие между точками границ $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1$ сетей на плоскостях переменных η и η_1**.

Построим теперь функцию

$$\eta_1 = \psi(\eta).$$

Определим эту функцию следующим образом: в точках внешней сети она совпадает с функцией (32_1), в точках внутренней сети — с функцией (32_2), а на границе $\mathcal{L}$ пусть ее значения будут равны координатам соответствующих точек границы $\mathcal{L}_1$. Функция эта преобразует плоскость комплексного переменного η в себя. Будем обозначать букой τ_n контур цепи Σ_n на плоскости η (см. § 11 предыдущей главы). Буквою τ_n' обозначим часть этого контура, лежащую во внешней цепи, а буквою τ_n'' — часть, лежащую во внутренней сети. При интегрировании по этим контурам мы будем считать положительным то направление, при котором площадь соответствующего круга остается слева. Соответствующие контуры на плоскости η_1 обозначим буквами $\bar{\tau}_n$, $\bar{\tau}_n'$ и $\bar{\tau}_n''$.

Буквою $r_n^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots, 4 \cdot 3^n$) обозначим радиусы кругов цепи Σ_n, и пусть $\rho_n^{(s)}$ обозначает радиус соответствующего круга на плоскости η_1. Покажем, что если c есть какая-либо точка, принадлежащая внутренней сети, то

$$\lim_{n=\infty} \int_{\tau_n} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta = 0. \tag{33}$$

При достаточно больших значениях n точка c будет находиться вне цепи Σ_n, а потому, обозначая через $a_n^{(s)}$ какую-либо точку,

---

*Функция эта будет иметь один полюс первого порядка.

**Соответствие это непосредственно вытекает из того, что $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1$ суть кривые Jordan'а (см. § 4 Введения).

лежащую на окружности $\sigma_n^{(s)}$ цепи Σ_n, будем иметь при достаточно больших значениях n

$$\int_{\sigma_n^{(s)}} \frac{\psi(a_n^{(s)})}{\eta - c} d\eta = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, 4 \cdot 3^n).$$

Начиная с некоторого значения n, наименьшее расстояние точки c до контура τ_n будет больше определенного положительного числа l. Мы имеем

$$\int_{\tau_n} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta = \sum_{s=1}^{4 \cdot 3^n} \int_{\tau_n^{(s)}} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta = \sum_{s=1}^{4 \cdot 3^n} \int_{\tau_n^{(s)}} \frac{\psi(\eta) - \psi(a_n^{(s)})}{\eta - c} d\eta,$$

и, следовательно, при достаточно больших значениях n

$$\left| \int_{\tau_n} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta \right| \leqslant \sum_{s=1}^{4 \cdot 3^n} \frac{4\pi \rho_n^{(s)} r_n^{(s)}}{l} \leqslant \frac{2\pi}{l} \sum_{s=1}^{4 \cdot 3^n} \left(\rho_n^{(s)2} + r_n^{(s)2} \right).$$

Отсюда, пользуясь формулой (27) гл. III, убеждаемся в справедливости формулы (33).

Функция $\psi(\eta)$ голоморфна внутри областей, заключенных между двумя какими-либо контурами τ_k и τ_l, а потому

$$\int_{\tau_k} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta = \int_{\tau_l} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta,$$

если только точка c находится вне окружностей, принадлежащих цепям Σ_k и Σ_l. Принимая во внимание формулу (33), можем утверждать, что при достаточно больших значениях n

$$\int_{\tau_n} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta = 0.$$

Возьмем точку c в исходном внутреннем четырехугольнике. В этом случае мы будем иметь

$$\int_{\tau_0} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta = 0.$$

В силу этого равенства будем иметь

$$\psi(c) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0'} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_0''} \frac{\psi(\eta)}{\eta - c} d\eta. \tag{34}$$

Мы видим, таким образом, что функция $\varphi_2(\eta)$ будет аналитической функцией внутри контура $ADBECFJGA$ на рис. 2.

Пусть d — какая-либо точка, лежащая внутри этого контура и принадлежащая внешней сети. Возьмем число k настолько большим, чтобы точка d лежала вне цепи Σ_k. Мы имеем

$$\psi(d) = \varphi_1(d) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0''}\frac{\psi(\eta)}{\eta - d}d\eta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_k''}\frac{\psi(\eta)}{\eta - d}d\eta.$$

Как и раньше, мы можем показать

$$\int_{\tau_k}\frac{\psi(\eta)}{\eta - d}d\eta = 0,$$

и, следовательно,

$$\psi(d) = \varphi_1(d) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0''}\frac{\psi(\eta)}{\eta - d}d\eta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_k'}\frac{\psi(\eta)}{\eta - d}d\eta.$$

Но подынтегральная функция голоморфна внутри контура τ_k', а потому

$$\varphi_1(d) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0''}\frac{\psi(\eta)}{\eta - d}d\eta.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (34), замечаем, что функция $\varphi_2(\eta)$ при аналитическом продолжении приводится к функции $\varphi_1(\eta)$. Значения функции $\psi(\eta)$ в точках границы $\mathcal{L}$, за исключением не исследованных пока точек A, B, C и J, совпадают со значениями функции $\varphi_1(\eta)$, так как при приближении к какой-либо точке границы $\mathcal{L}$ $\psi(\eta)$ стремится к определенному пределу (см. § 13 гл. III), который и был нами принят за значение функции в соответствующей точке границы. Мы видим, таким образом, что $\psi(\eta)$ будет аналитической функцией на всей плоскости*, за исключением вышеупомянутых четырех точек, и преобразует плоскость в себя. Значения $\psi(\eta)$ вблизи каждой из указанных четырех точек ограничены, ибо часть плоскости η_1, лежащая вне круга, описанного из начала координат как центра достаточно большим радиусом, соответствует вполне определенной части плоскости, лежащей внутри исходного внешнего четырехугольника плоскости η. Вышеупомянутые четыре точки будут поэтому обыкновенными точками функции $\psi(\eta)$, а эта последняя должна, таким образом, быть дробно-линейной функцией. Таковыми же будут и функции $\varphi_1(\eta)$ и $\varphi_2(\eta)$. На основании рассуждений § 2 настоящей главы мы можем утверждать, что уравнения (30_1) и (30_2), а также уравнения (31_1) и (31_2) должны

---

*Она будет иметь один полюс первого порядка.

быть соответствующими. Но из рассуждений § 3 настоящей главы вытекает, что два уравнения вида (1) с одинаковыми особыми точками могут быть соответствующими лишь в том случае, когда четвертые особые точки этих уравнений есть $x = 1/2$. Мы должны, таким образом, иметь

$$a = b = \frac{1}{2},$$
$$\lambda' + \lambda'' = \nu' + \nu'' = -1.$$

Одно из значений λ' или λ'' должно быть отлично от того значения $\lambda = \bar{\lambda}$, которое находится внутри интервала однозначного обращения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-\frac{1}{2})(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\lambda)y = 0 \tag{35}$$

и при котором группа уравнения будет фуксовой. Пусть это будет $\lambda = \lambda'$.

Возьмем в уравнениях (30_2) и (31_2) $\lambda'' = \nu'' = \bar{\lambda}$. Все наши предыдущие рассуждения буду применимы и в этом случае, так как уравнения (30_2) и (31_2) можно считать сопряженными взаимно уравнениями*. Мы получим, таким образом, что два уравнения вида (35) будут сопряженными при $\lambda = \lambda'$ и $\lambda = \bar{\lambda}$, чего не может быть, так как в первом случае группа уравнения будет клейновой, а во втором — фуксовой. Можно считать поэтому доказанным наше утверждение, что различным значениям параметра λ в уравнении (1) гл. II соответствуют различные четвертые особые точки сопряженного уравнения.

Напомним, что в § 11 мы показали, что должно существовать такое значение λ, при котором сопряженное уравнение будет соответствующим уравнением, и при этом четвертая точка этого уравнения будет $x = 1 - a$.

Из рассуждений последних параграфов мы получаем следующую теорему:

Теорема 13. *При непрерывном увеличении параметра λ в уравнении* (1) *от значения $\lambda_0^{(0)}$ до значения $\lambda_1^{(0)}$ четвертая особая точка сопряженного уравнения увеличивается непрерывно от нуля до единицы. При этом изменении один раз при $\lambda = \lambda_0$ сопряженное уравнение будет совпадать с уравнением* (1) *и один*

---

*См. § 9 настоящей главы.

раз при том значении λ, при котором четвертая особая точка сопряженного уравнения будет $x = 1 - a$, это последнее уравнение будет соответствующим уравнению (1)*.

§ 16. Рассмотрим уравнение (35). Подстановка (I), указанная в § 3 настоящей главы, преобразовывает это уравнение в уравнение с теми же особыми точками, но со значением параметра $\mu = -(1 + \lambda)$. Если положим $\lambda = \bar{\lambda}$, то преобразованное уравнение также должно принадлежать области однозначного обращения и иметь своей группой фуксову группу с предельным кругом. Мы имеем, следовательно, $\bar{\lambda} = -(1 + \bar{\lambda})$, т. е. $\bar{\lambda} = -1/2$. Для уравнения (35) те два значения параметра λ, о которых упоминалось в теореме 13, совпадают и равны $-1/2$. Уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)\frac{dy}{dx}\right] + \left(x - \frac{1}{2}\right)y = 0 \tag{36}$$

будет принадлежать области однозначного обращения, и его группа есть фуксова группа с предельным кругом.

Из сделанного замечания ясно, что основной четырехугольник, соответствующий этому уравнению, может быть образован полупрямыми, выходящими из точек 0 и 1 и перпендикулярными к вещественной оси, и полуокружностями, проходящими через точки 0, 1/2 и 1/2, 1. Основные подстановки группы этого уравнения будут при этом иметь вид

$$\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta} - 4,$$
$$\frac{1}{\eta_1 - 1} = \frac{1}{\eta - 1} - 4,$$
$$\eta_1 = \eta + 2.$$

Восстановим из точки $\eta = 1/2$ перпендикуляр к вещественной оси. Упомянутый выше четырехугольник разобьется при этом на два треугольника с углами, равными нулю. Конформное преобразование одного из них в полуплоскость может быть, как известно, совершено при помощи частного двух интегралов уравнения Legendre'a:

$$\frac{d}{dx_1}\left[x_1(x_1 - 1)\frac{dy_1}{dx_1}\right] - \frac{1}{4}y_1 = 0. \tag{37}$$

---

*Напомним, что мы считаем при этом, что одни и те же вершины сопряженных четырехугольников соответствуют особым точкам $x = 0, 1, \infty$.

Отсюда непосредственно следует, что группа уравнения (36) является подгруппой уравнения (37), и индекс этой подгруппы равен двум.

Группа уравнения (37) состоит из подстановок группы уравнения (35) и из произведения этих подстановок на подстановку:

$$\eta_1 = \eta + 1.$$

Независимое переменное уравнения (37) будет фуксовой функцией частного двух интегралов этого уравнения, и при сделанном выборе основного треугольника функция эта будет существовать в верхней полуплоскости (см. § 9 Введения). Она не будет меняться, если мы преобразуем частное интегралов при помощи какой-либо подстановки группы уравнения (36). Следовательно, как мы указывали в § 15 гл. I, x_1 должно быть рациональной функцией x. Действительно, мы можем перейти от уравнения (37) к уравнению (36), пользуясь подстановкой

$$x_1 = -4x(x-1).$$

§ **17.** Если S_1, S_2 и S_3 суть основные подстановки первого рода уравнения (1), то при сделанном нами выборе дополнительного четырехугольника для сопряженного уравнения это последнее будет иметь основными подстановками второго рода S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_3^{-1}, и группа сопряженного уравнения будет совпадать с группой уравнения (1).

Покажем теперь, что если уравнение

$$\frac{d}{dx_1}\left[x_1(x_1-c)(x_1-1)\frac{dy_1}{dx_1}\right] + (x_1+\mu)y_1 = 0 \tag{38}$$

имеет ту же группу, что и два вышеуказанные уравнения, то оно будет соответствующим либо уравнению (1), либо уравнению с ним сопряженному (уравнение (38) принадлежит области однозначного обращения).

Обозначим буквами $\mu_0^{(0)}$ и $\mu_1^{(0)}$ значения параметра μ в уравнении (38), аналогичные значениям $\lambda = \lambda_0^{(0)}$ и $\lambda = \lambda_1^{(0)}$ в уравнении (1). В рассматриваемом случае группа уравнения (38) не будет содержать эллиптических подстановок и будет иметь на плоскости две области прерывности, ограниченные кривой Jordan'a $\mathcal{L}$ (см. теорему 10). Мы можем поэтому утверждать, что значение μ, входящее в уравнение (38), заключается внутри интервала $(\mu_0^{(0)}, \mu_1^{(0)})$ и что область значений частного интегралов уравнения (38) представляет собой одну из тех двух областей, на которые кривая $\mathcal{L}$ делит плоскость.

Для определенности предположим, что это будет область, заполненная четырехугольниками, соответствующими уравнению (1). Обозначим буквою η частное интегралов уравнений (1) и (38) и буквою $\mathcal{D}$ — указанную только что область. В этой области мы имеем

$$x = \omega(\eta), \qquad x_1 = \omega_1(\eta),$$

где $\omega(\eta)$ и $\omega_1(\eta)$ — аналитические функции, и производные этих функций не обращаются в нуль. Одинаковые значения x могут получиться лишь при значениях η, связанных подстановками группы, но при этом и значения x_1 будут одинаковы. Исключая η из вышенаписанных уравнений, мы получим функцию

$$x = \omega_2(x_1),$$

однозначную и аналитическую на всей плоскости, кроме точек $x_1 = 0$, c, 1 и ∞, и функция эта будет принимать по одному разу всякое значение, кроме значений $x = 0$, a, 1 и ∞. Отсюда непосредственно ясно, что при приближении x_1, например, к нулю x будет стремиться к одному из только что указанных четырех значений, и мы можем утверждать, что $\omega_2(x_1)$ будет функцией аналитической на всей плоскости* и будет преобразовывать эту плоскость в себя, т. е. будет дробно-линейной функцией. Это, как известно, и указывает на то, что уравнения (1) и (38) связаны одно с другим преобразованием (5).

Совершенно так же можно показать, что если два уравнения вида (1), принадлежащих области однозначного обращения, имеют группу, не содержащую эллиптических подстановок, причем области прерывности этой группы состоят из бесчисленного множества кругов и из односвязной области, ограниченной этими кругами, то эти два уравнения будут соответствующими (см. § 12 гл. III). В этом случае область значений частного интегралов каждого из уравнений должна представлять собой только что указанную односвязную область. Действительно, предельные точки области должны быть особыми точками группы (см. теорему 3), но ни один из кругов не может быть областью значений частного интегралов, ибо в этом случае все подстановки группы преобразовывали бы этот круг в себя, т. е. группа должна была бы быть фуксовой группой, чего не может быть.

Мы можем, следовательно, высказать следующую теорему:

---

*См. Schlesinger [10, Bd. II, S. 183].

Теорема 14. *Все уравнения вида* (1), *принадлежащие области однозначного обращения и имеющие одну и ту же группу* Г, *не содержащую эллиптических подстановок, будут соответствующими одному из двух уравнений только что указанного характера, если группа* Г *имеет на плоскости две области прерывности.*

В частном случае, когда группа Г *будет фуксовой группой или когда после приведения основных подстановок одного из уравнений к виду, указанному в теореме* 12, *окажется выполненным условие* (20), *указанные два уравнения будут взаимно соответствующими.*

Если области прерывности группы Г *состоят из бесчисленного множества кругов и одной односвязной области, ограниченной этими кругами, то все указанные уравнения вида* (1) *будут соответствующими между собой. То же будет и в том случае, когда группа* Г *будет фуксовой группой с главным кругом.*

§ 18. Кроме значений λ, принадлежащих интервалу $(\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)})$, который мы выше исследовали, задача обращения будет иметь однозначное решение при $\lambda = \lambda_{0,k}$ и $\lambda = \lambda_{1,k}$ (см. теорему 10). При этих значениях λ областями прерывности группы будут бесчисленное множество кругов и одна область бесконечной связности. Область значений частного двух интегралов в этих случаях будет представлять собой только что указанную область бесконечной связности, и теорема 14 может быть доказана и в этом случае. При всех остальных значениях λ, принадлежащих интервалу однозначного обращения, задача обращения не будет иметь однозначного решения, и в случае собственной прерывности группы в этих случаях шестиугольник, получаемый от соединения двух соседних четырехугольников, не будет фундаментальным многоугольником группы уравнения.

Указанные значения λ имеют вид $\lambda_0^{(\varphi)}$ и $\lambda_1^{(\varphi)}$ (см. § 8 гл. III), ибо φ не может быть представлено в виде π/k (k — целое число). Продолжения двух противоположных сторон четырехугольника пересекаются в этом случае под углом φ, и, если угол этот не соизмерим с π, то подстановка группы, получаемая при последовательном отображении в указанных только что сторонах, будет эллиптической непериодической подстановкой, и, следовательно, группа будет содержать бесконечно малую подстановку.

Рассмотрим еще тот частный случай, когда φ имеет вид

$$\varphi = \frac{2\pi}{k},$$

где k — целое нечетное число, большее единицы. Построим основной четырехугольник так, как это мы делали на рис. 6, и будем пользоваться обозначениями этого рисунка. В рассматриваемом случае

$$\angle ADB = \frac{2\pi}{k},$$

а потому после k отображений мы построим кольцевидную область, но не придем при этом к прежней ветви функции $\eta_1(x, \lambda_0^{(\varphi)})$, так как k — число нечетное. Чтобы прийти к прежней ветви, мы должны совершить еще k отображений, после чего кольцевидная область будет покрыта четырехугольниками два раза.

Будем теперь отображать кольцевидную область в ее сторонах и т. д. Так же, как и в § 8 гл. III, мы убедимся, что отображения эти нигде не налягут друг на друга, и мы получим, таким образом, всю сеть четырехугольников.

Если бы группа уравнения не была собственно прерывной группой, то, как мы видели в § 7 гл. I, либо группа должна была бы содержать бесконечно малую подстановку, либо точки, получаемые из любой точки плоскости при помощи подстановок группы, заполняют плоскость повсюду плотно. Применим к одной из вершин основного четырехугольника подстановки группы. Мы должны при этом получить точки, которые служат вершинами четырехугольников нашей сети.

Если бы группа не была собственно прерывной, то либо эти вершины заполнили бы плоскость повсюду плотно, либо взятая вершина основного четырехугольника была бы точкою сгущения этих вершин, и в этом последнем случае мы могли бы, не ограничивая общности, предположить, что взятая вершина основного четырехугольника не является неподвижной точкой тех подстановок группы, которые приводят к бесконечно малой подстановке. Но из указанного выше процесса отображения следует, что ни того, ни другого случая быть не может, т. е. группа должна быть собственно прерывной группой.

Все рассуждения гл. III об образовании путем отображения ряда кольцевидных областей останутся в силе с той лишь разницей, что число четырехугольников в каждой кольцевидной области будет нечетно. Вследствие этого замкнутый контур, проходящий внутри построенной сети, может пересечь нечетное число сторон четырехугольников, и x не будет однозначной функцией η_1. Непосредственно ясно, что при аналитическом продолжении этой функции вдоль замкнутого контура мы можем либо прийти к прежним значениям x, либо к сопряженным, т. е. x будет двузначной функцией η_1. В рассматриваемом случае при образовании кольцевидной области (см. рис. 6) одна из прямолинейных сторон четырехугольников пойдет по продолжению прямой DK. Прямая эта пересекается под прямым углом со сторонами AB и CJ основного четырехугольника. Поэтому в рассматриваемом случае в группе, кроме эллиптических подстановок периода k, будут и эллиптические подстановки периода 2. Неподвижные точки этих подстановок будут лежать на тех двух сторонах четырехугольников сети, которые не пересекаются при продолжении. При помощи рассуждений, аналогичных рассуждениям предыдущей главы, мы могли бы установить, что указанные выше эллиптические подстановки периодов k и 2 представляют собой все эллиптические подстановки группы.

Совершенно так же, как и в § 12 гл. III, мы можем в рассматриваемом случае построить подгруппу Г, и непосредственно ясно, что подгруппа эта будет иметь те же особые точки, что и сама группа уравнения. Следовательно, и в рассматриваемом случае областями прерывности группы будут бесчисленное множество кругов и одна область бесконечной связности.

§ 19. Рассмотрим теперь группу уравнения (1) при значениях λ, лежащих вне интервала однозначного обращения.

Начнем с рассмотрения интервала

$$\mu_{-1} \geqslant \lambda \geqslant \mu_{-2}. \tag{39}$$

Определим частное интегралов по формуле (43) гл. II. Заметим при этом, что если бы мы пользовались этой формулой при всех значениях λ, лежащих внутри интервала (μ_{-1}, μ_1), то при значениях λ, бóльших λ_0, мы получили бы четырехугольник, аналогичный указанному на рис. 4,d, с той разницей, что вершины B и C лежали бы в верхней полуплоскости, и при значениях λ, достаточно близких к μ_1, продолжение стороны CJ пересеклось бы с продолжением стороны AB и образовался бы известный нам треугольник с углами 0, 0 и φ. Все это легко получить, исследуя величины $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ при $\lambda > \lambda_0$.

При условии (39) мы получим основной четырехугольник, стороны которого AB и CJ будут налегающими. Вершины A и J будут по-прежнему лежать в точках 0 и ∞, вершины же B и C будут находиться в верхней полуплоскости, в нижней или на вещественной оси, смотря по тому, будет ли λ больше, меньше или равно λ_{-1}.

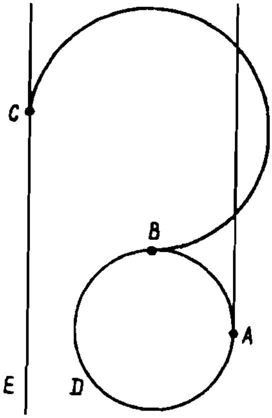

Рис. 10

Вспоминая сказанное в конце гл. II, мы можем утверждать, что стороны AB и CJ не будут проходить через одну и ту же точку плоскости переменной η. При значениях λ, достаточно близких к μ_{-1}, координата вершины C будет сколь угодно большой по абсолютному значению, а вершины B — сколь угодно малой, и стороны, выходящие из вершины A, будут сколь угодно близки к тем положениям, которые они занимают при $\lambda = \mu_{-1}$*. Четырехугольник будет иметь вид, указанный на рис. 10. Сторона BC пересечется со стороной AJ, и четырехугольник будет лежать в двух листах, построенных на плоскости переменной η. Только что указанные две стороны будут лежать в различных листах, так что, говоря о пересечении этих сторон, мы лишь подразумеваем то, что стороны эти проходят через одну и ту же точку плоскости.

Этого пересечения совсем не будет при значениях λ, достаточно близких к λ_{-1}, и при всех значениях λ, меньших λ_{-1}. При

---

*Сторона AJ не меняется при изменении λ.

значениях λ, достаточно близких к μ_{-2}, пересекутся продолжения сторон BC и AJ.

Совершенно ту же картину мы получим и в том случае, когда λ будет заключаться внутри интервала (μ_{-k}, μ_{-k-1}). Только в этом последнем случае стороны AB и CJ будут k раз налегать сами на себя. Совершенно так же можно исследовать интервал (μ_k, μ_{k+1}). Мы можем утверждать, что во всех случаях, по крайней мере, одна пара окружностей, на которых лежат противоположные стороны четырехугольника, не пересекается.

Кроме того, во всех случаях окружности, на которых лежат стороны четырехугольника, образуют один или два четырехугольника без налегающих сторон. Этим четырехугольникам будут соответствовать уравнения, принадлежащие области однозначного обращения, и группа этих уравнений будет та же, что и группа данного уравнения, не принадлежащего области однозначного обращения. Указанных четырехугольников будет два, если окружности, на которых лежат противоположные стороны четырехугольников, не пересекаются, т. е. если группа не содержит эллиптических подстановок и имеет на плоскости две области прерывности.

Введем теперь понятие о так называемом *трансверсальном присоединении* (transversale Einhängung)*.

Пусть окружности C_1 и C_2, на которых лежат две противоположные стороны четырехугольника, не имеют общих точек, и предположим, что можно соединить некоторую точку окружности C_1 с точкою окружности C_2 таким контуром l, который не пересекает сам себя и вышеуказанных окружностей и лежит внутри данного четырехугольника.

Возьмем часть плоскости $\mathcal{K}$, ограниченную окружностями C_1 и C_2, и проведем на ней контур l', тождественный с контуром l. Совершим купюры в данном четырехугольнике вдоль контура l и в области $\mathcal{K}$ вдоль линии l' и присоединим область $\mathcal{K}$ к нашему четырехугольнику, соединяя крестообразно концы проведенных купюр. Таким образом, мы получим, как нетрудно видеть, односвязный четырехугольник с углами, равными нулю. Сама операция и называется *трансверсальным присоединением.*

Возможность выполнения этой операции обусловливается наличием линии l с указанными выше свойствами. Если стороны четырехугольника, лежащие на окружностях C_1 и C_2, не будут

---

*См. Jhlenburg [20, S. 32].

налегающими, то вышеупомянутой линии l не может существовать, если две другие стороны являются налегающими, так как, если бы такая линия существовала, то мы пришли бы к четырехугольнику, у которого все четыре стороны налегающие, чего не может быть, как это мы видели в конце гл. II.

Если стороны четырехугольника, не лежащие на окружностях C_1 и C_2, не будут налегающими, то линия l наверно будет существовать. В этом легко убедиться непосредственно.

Совершим над плоскостью η такое линейное преобразование, чтобы окружности C_1 и C_2 превратились бы в две концентрические окружности. Непосредственно ясно, что две другие стороны должны при этом лежать в кольце, образованном этими концентрическими окружностями, и четырехугольник примет вид, указанный на рис. 11 и 12.

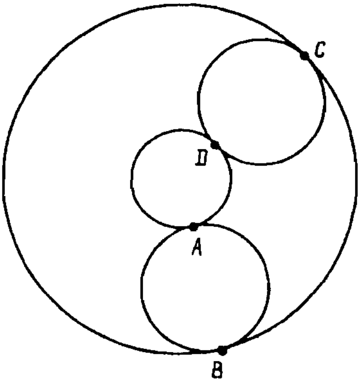

Рис. 11

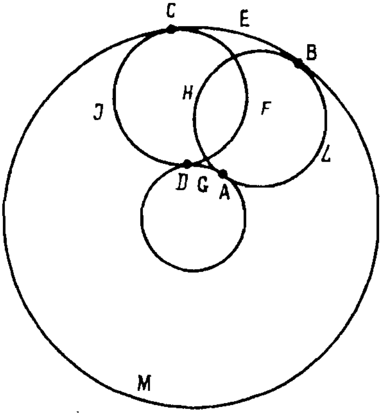

Рис. 12

Обратимся к рис. 11. Мы имеем в этом случае два четырехугольника, которым соответствуют два уравнения, принадлежащие области однозначного обращения и имеющие одну и ту же группу Г. Эта последняя не содержит эллиптических подстановок и имеет на плоскости две области прерывности. Над каждым из указанных четырехугольников мы можем любое число раз произвести процесс трансверсального присоединения, приняв за окружности C_1 и C_2 любые две противоположные стороны четырехугольников. Всем вновь полученным четырехугольникам будут соответствовать уравнения, имеющие ту же группу Г. Таким образом, мы исчерпаем все уравнения вида (1), имеющие группу Г.

Действительно, пусть нам дано такое уравнение. Как мы видели выше, окружности, на которых лежат стороны четырехугольника, соответствующего этому уравнению, образуют два четырехугольника с неналегающими сторонами. Этим последним четырехугольникам соответствуют уравнения, принадлежащие области однозначного обращения и имеющие группу Г. В силу теорем 12 и 14 мы можем поэтому утверждать, что четырехугольники эти совпадают с четырехугольниками рис. 11, и, следовательно, мы получим четырехугольник, соответствующий заданному уравнению, имеющему группу Г, совершая процесс тарнсверсального присоединения над одним из четырехугольников рис. 11.

Обратимся к рис. 12. Здесь мы имеем только один четырехугольник с неналегающими сторонами. Обратим внимание на второй четырехугольник, противоположные стороны которого один раз налегают сами на себя. Это будет четырехугольник $AGDFCEBHA$. Над каждым из этих четырехугольников мы можем любое число раз произвести процесс трансверсального присоединения. Только в этом случае роль окружностей C_1 и C_2 могут играть лишь концентрические окружности. Если, например, те две окружности, которые находятся внутри кольца, касаются, то так же, как и раньше, мы можем показать, что описанный процесс трансверсального присоединения даст все четырехугольники, которым соответствуют уравнения вида (1), имеющие одну и ту же группу Г.

Мы можем теперь несколько дополнить результаты § 8 настоящей главы. Предположим, что выполнены условия (I) и (II) этого параграфа и , кроме того, выполнено одно из неравенств, входящих в условие (III), но само это условие не выполнено. Для определенности предположим, что выполнено первое неравенство, но что при этом $\beta < 0$.

Построим, как это было указано в § 8, четыре последовательно касательные окружности. В силу выполненного неравенства две из этих окружностей не будут иметь общих точек. Преобразуя эти две окружности в концентрические окружности, мы получим два четырехугольника рис. 12. Следовательно, и до преобразования мы имели два четырехугольника, и непосредственно ясно, что одному из них соответствует уравнение вида (1) с заданными основными подстановками S_1, S_2 и S_3. Только при сделанных предположениях у этого четырехугольника будут налегающие стороны. Заметим при этом, что рассуждения § 7 остаются без изменения, если λ и не принадлежит интервалу однозначного обращения. Действительно, внутри каждого интервала (μ_k, μ_{k+1}) будут значения λ, аналогичные тем значениям $\lambda_0^{(0)}$, $\lambda_1^{(0)}$ и λ_0, которыми мы пользовались при рассуждениях в § 7.

Мы можем таким образом утверждать:

Добавление к теореме 12. *Для того, чтобы подстановки* S_1, S_2 *и* S_3 *были основными подстановками первого рода некоторого уравнения вида* (1), *необходимо и достаточно выполнение условий* (I) *и* (II) *и одного из неравенств, входящих в условие* (III).

На основании вышеприведенных рассуждений мы можем также высказать следующую теорему:

Теорема 15. *Если дано какое-либо уравнение вида* (1) *гл.* II, *то всегда можно найти такое уравнение того же вида, принадлежащее области однозначного обращения, которое будет иметь ту же группу, что и данное уравнение. Если группа эта не будет содержать эллиптических подстановок, то таких приведенных уравнений, принадлежащих области однозначного обращения, будет одно или два. В последнем случае четырехугольник, соответствующий какому-либо уравнению вида* (1), *имеющему ту же группу, что и заданное уравнение, может быть получен из одного из четырехугольников, соответствующих приведенным уравнениям, при помощи трансверсального присоединения.*

В случае же одного приведенного уравнения можно получить все четырехугольники, соответствующие уравнениям с такой же группой, применяя трансверсальное присоединение или к четырехугольнику, соответствующему приведенному уравнению, или же к четырехугольнику, стороны которого лежат на тех же окружностях, что и стороны предыдущего четырехугольника, и в котором две противоположные стороны один раз налегают сами на себя.

Заметим, что если мы над четырехугольником, соответствующим уравнению (1) гл. II, совершаем процесс трансверсального присоединения, то новое уравнение, соответствующее вновь полученному четырехугольнику, будет иметь те же основные подстановки, что и уравнение (1). Из теоремы 11 непосредственно следует, что четвертая особая точка этого нового уравнения не может совпадать с четвертой особой точкой уравнения (1).

ГЛАВА V

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ СЛУЧАЕВ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И С ПРАВИЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

§ **1.** Уравнение (1) гл. II, которое мы рассматривали до сих пор, представляет собою частный случай линейного дифференциального уравнения с четырьмя особыми точками и с правильными интегралами. Рассмотрим общий вид такого уравнения. При помощи преобразования независимого переменного и искомой функции вида

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y_1 = \varphi(x) y, \tag{1}$$

можно привести указанное уравнение к виду*

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha}{x} + \frac{1-\beta}{x-a} + \frac{1-\gamma}{x-1}\right) y' + \frac{A_1 x + \lambda}{x(x-a)(x-1)} y = 0. \tag{2}$$

Уравнение это имеет особые точки: $x = 0$, $x = a$, $x = 1$, $x = \infty$, и корни фундаментального определяющего уравнения в этих точках будут соответственно $0, \alpha$; $0, \beta$; $0, \gamma$; δ_1, δ_2. При этом будут иметь место соотношения

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 2; \quad \delta_1 \delta_2 = A_1. \tag{2_1}$$

Обозначим

$$\delta = \delta_1 - \delta_2.$$

В дальнейшем мы будем считать, что a, λ и все корни фундаментальных определяющих уравнений — числа вещественные и что выполняются неравенства

$$0 < \alpha < 1; \quad 0 < \beta < 1; \quad 0 < \gamma < 1; \quad 0 < \delta < 1; \qquad 0 < a < 1; \tag{3}$$

---

*См. Klein [21, S. 5].

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta < 2. \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) будут существенны для нас при дальнейших вычислениях.

Вблизи точки $x = 0$ мы будем иметь интегралы вида

$$y_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k,$$

$$\bar{y}_0 = x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad (b_0 = 1).$$

Мы будем при этом считать, что y_0 имеет только что указанный вид при $x > 0$. При $x < 0$ мы положим

$$\bar{y}_0 = (-x)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad (b_0 = 1).$$

Аналогичным образом определим y_a, $\bar{y}_a$, y_1 и $\bar{y}_1$. Положим

$$y_{\infty} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{x}\right)^k \quad (c_0 = 1),$$

$$\bar{y}_{\infty} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta_1} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{1}{x}\right)^k \quad (d_0 = 1).$$

Пусть указанные только что выражения имеют место при $x > 0$. При $x < 0$ заменим, как и выше, в множителе, стоящем перед знаком суммы, x на $-x$. Во всех выше написанных выражениях мы будем брать арифметическое значение степени.

Из условия (4) вытекает, что δ_1 и δ_2 — положительные числа, и что, следовательно, $A_1 > 0$. Если мы, применяя преобразование (1), приведем уравнение (2) к уравнению того же вида, то в преобразованном уравнении коэффициент A_1 также должен быть положительным.

На основании теоремы 4 мы можем утверждать, что все написанные выше интегралы суть целые функции параметра λ.

§ **2.** Уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[x^{1-\alpha}(x-a)^{1-\beta}(x-1)^{1-\gamma}y'\right] + \\ + (A_1 x + \lambda)x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(x-1)^{-\gamma}y = 0. \tag{5}$$

Предположим, что параметр λ удовлетворяет условию

$$\lambda \leqslant -aA_1. \tag{6_1}$$

Подставим $\bar{y}_a$ в уравнение (5) и полученный результат проинтегрируем от a до x, где $0 \leqslant x \leqslant a$. Мы получим

$$x^{1-\alpha}(a-x)^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}\bar{y}'_a(x,\lambda) =$$
$$= \int_x^a x^{-\alpha}(a-x)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}(A_1x+\lambda)\bar{y}_a(x,\lambda)dx - \beta a^{1-\alpha}(1-a)^{1-\gamma}. \tag{7_1}$$

Отсюда непосредственно следует, как и в § 7 гл. II, что $\bar{y}_a(x,\lambda)$ положительно, а $\bar{y}'_a(x,\lambda)$ — отрицательно во всем интервале $(0,a)$ при условии (6_1). То же можем утверждать и относительно $y_a(x,\lambda)$ и $y'_a(x,\lambda)$.

Путем аналогичных рассуждений мы могли бы убедиться в том, что $y_0(x,\lambda)$, $\bar{y}_0(x,\lambda)$, $y'_0(x,\lambda)$ и $\bar{y}'_0(x,\lambda)$ — положительны в интервале $(0,a)$ при соблюдении условия (6_1).

Предположим теперь, что λ удовлетворяет условию

$$\lambda \geqslant -aA_1. \tag{6_2}$$

Равенство

$$x^{1-\alpha}(x-a)^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}y'(x,\lambda) =$$
$$= \int_a^x x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}(A_1x+\lambda)y(x,\lambda)dx + C, \tag{7_2}$$

где C — некоторая постоянная, которую легко определить при всяком частном выборе интеграла $y(x,\lambda)$, как и раньше, покажет, что $y_a(x,\lambda)$, $\bar{y}_a(x,\lambda)$, $y'_a(x,\lambda)$ и $\bar{y}'_a(x,\lambda)$ должны быть положительны в интервале $(a,1)$ при соблюдении условия (6_2). Точно так же легко убедиться в том, что при этом $y_1(x,\lambda)$ и $\bar{y}_1(x,\lambda)$ будут также положительны, а $y'_1(x,\lambda)$ и $\bar{y}'_1(x,\lambda)$ — отрицательны в интервале $(a,1)$.

Продолжим аналитически интегралы $y_a(x,\lambda)$ и $\bar{y}_a(x,\lambda)$ вдоль вещественной оси до точек $x=0$ и $x=1$, и пусть вблизи этих точек мы получим

$$\begin{aligned} y_a(x,\lambda) &= m_1y_0(x,\lambda) + n_1\bar{y}_0(x,\lambda), \\ y_a(x,\lambda) &= p_1y_1(x,\lambda) + q_1\bar{y}_1(x,\lambda), \\ \bar{y}_a(x,\lambda) &= m_2y_0(x,\lambda) + n_2\bar{y}_0(x,\lambda), \\ \bar{y}_a(x,\lambda) &= p_2y_1(x,\lambda) + q_2\bar{y}_1(x,\lambda). \end{aligned} \tag{8_1}$$

Как и в § 5 гл. II, легко убедиться, что все коэффициенты m, n, p и q — целые функции λ. Ясно, кроме того, что они вещественны при вещественных значениях λ. Из уравнений (8_1) мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} y_0(x,\lambda) &= \frac{n_2}{\Delta_1} y_a(x,\lambda) - \frac{n_1}{\Delta_1}\bar{y}_a(x,\lambda), \\ y_1(x,\lambda) &= \frac{q_2}{\Delta_2} y_a(x,\lambda) - \frac{q_1}{\Delta_2}\bar{y}_a(x,\lambda), \\ \bar{y}_0(x,\lambda) &= -\frac{m_2}{\Delta_1} y_a(x,\lambda) + \frac{m_1}{\Delta_1}\bar{y}_a(x,\lambda), \\ \bar{y}_1(x,\lambda) &= -\frac{p_2}{\Delta_2} y_a(x,\lambda) + \frac{p_1}{\Delta_2}\bar{y}_a(x,\lambda), \end{aligned} \tag{8_2}$$

где Δ_1 и Δ_2 — целые функции λ, никогда не обращающиеся в нуль, так как, если бы при некотором значении λ одна из этих функций обратилась в нуль, то при этом интегралы $y_a(x,\lambda)$ и $\bar{y}_a(x,\lambda)$ были бы линейно зависимы, чего не может быть.

В дальнейшем, когда это представится необходимым, мы будем писать аргумент λ у коэффициентов, входящих в равенства (8_1).

Напишем уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{1-\alpha}(x-a)^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}y_a'(x,\lambda)\right] = \\ = (A_1x+\lambda)x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}y_a(x,\lambda), \tag{5_1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{1-\alpha}(x-a)^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}y_a'(x,\lambda_1)\right] = \\ = (A_1x+\lambda_1)x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}y_a(x,\lambda_1). \tag{5_2}$$

Умножая уравнение (5_1) на $y_a(x,\lambda_1)$ и уравнение (5_2) — на $y_a(x,\lambda)$, вычитая полученные уравнения одно из другого и интегрируя полученную разность от $x=a$ до $x=1$, получим

$$\gamma(1-a)[p_1(\lambda)q_1(\lambda_1) - p_1(\lambda_1)q_1(\lambda)] = \\ = (\lambda-\lambda_1)\int_a^1 x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}y_a(x,\lambda)y_a(x,\lambda_1)dx. \tag{5_3}$$

При λ_1, достаточно близких к λ, интеграл, стоящий в правой части равенства, будет положительным, и потому из этого равенства можем заключить, что частное $q_1(\lambda)/p_1(\lambda)$ убывает при возрастании λ. Точно так же, подставляя в равенства (5_1) и (5_2) вместо $y_a(x,\lambda)$ интегралы $\bar{y}_a(x,\lambda)$, $y_1(x,\lambda)$ и $\bar{y}_1(x,\lambda)$, получаем равенство (5_3), из которого убеждаемся, что частные

$$\frac{q_2(\lambda)}{p_2(\lambda)}, \quad \frac{q_2(\lambda)}{q_1(\lambda)}, \quad \frac{p_2(\lambda)}{p_1(\lambda)}$$

также убывают при возрастании λ. При переходе через бесконечность все эти частные должны переходить от отрицательных значений к положительным. Рассуждая точно так же, убедимся в том, что частные

$$\frac{n_1(\lambda)}{m_1(\lambda)}, \quad \frac{n_2(\lambda)}{m_2(\lambda)}, \quad \frac{m_2(\lambda)}{m_1(\lambda)}, \quad \frac{n_2(\lambda)}{n_1(\lambda)}$$

возрастают при возрастании λ.

Заметим, что $y_a(x,\lambda)$ или $\bar{y}_a(x,\lambda)$ обращаются в нуль при $x = 1$ тогда и только тогда, когда λ является корнем $p_1(\lambda)$ или $p_2(\lambda)$. Напишем уравнения:

$$p_1(\lambda) = 0, \tag{9_1}$$

$$p_2(\lambda) = 0, \tag{9_2}$$

$$q_1(\lambda) = 0, \tag{9_3}$$

$$q_2(\lambda) = 0. \tag{9_4}$$

Докажем, что уравнения эти не могут иметь кратных корней.

Обозначим знаком $y_\lambda(x,\lambda)$ производную $\partial/\partial\lambda\, y(x,\lambda)$. Эта последняя удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[x^{1-\alpha}(x-a)^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}y'_\lambda(x,\lambda)\right] - \\ -(A_1x+\lambda)x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}y_\lambda(x,\lambda) = \\ = x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}y(x,\lambda).$$

Из этого уравнения и уравнения (5) получим

$$x^{1-\alpha}(x-a)^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}[y'(x,\lambda)y_\lambda(x,\lambda) - y'_\lambda(x,\lambda)y(x,\lambda)] = \\ = \int_a^x x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}[y(x,\lambda)]^2dx + C,$$

где C — постоянная, которую легко определить при определенном выборе интеграла $y(x,\lambda)$.

Подставим в полученное равенство $y(x,\lambda) = \bar{y}_a(x,\lambda)$ и предположим, что уравнение (9_2) имеет кратный корень λ. При сделанном выборе интеграла левая часть равенства обращается в нуль при $x = a$, и, следовательно, $C = 0$. В силу сделанного предположения левая часть равенства обращается в нуль и при $x = 1$ (см. неравенства (3)), и мы приходим к невозможному равенству:

$$\int_a^1 x^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}[y(x,\lambda)]^2dx = 0.$$

Совершенно так же можно показать, что и остальные три уравнения не могут иметь кратных корней.

Из вышенаписанного равенства так же, как и в § 7 гл. II, следует, что корни интегралов $y_a(x,\lambda)$ и $\bar{y}_a(x,\lambda)$ в интервале $(a,1)$ убывают при убывании λ. Мы можем также легко убедиться в том, что интегралы эти при достаточно малых значениях λ будут иметь сколь угодно много корней в интервале $(a,1)$. Рассуждая дальше так же, как и в гл. II, убедимся, что число корней $y_a(x,\lambda)$ внутри интервала $(a,1)$ совпадает с числом корней уравнения (9_1) внутри интервала $(\lambda, -aA_1)$. То же можно сказать об интеграле $\bar{y}_a(x,\lambda)$ и уравнении (9_2).

Мы видим, таким образом, что уравнения (9_1) и (9_2) имеют бесчисленное множество корней. Принимая во внимание указанное выше свойство частных $q_1(\lambda)/p_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)/p_2(\lambda)$, убеждаемся в существовании бесчисленного множества корней уравнений (9_3) и (9_4). Корни всех этих уравнений будут меньше, чем $-aA_1$. Это непосредственно ясно из того, что $y_a(x,\lambda)$, $\bar{y}_a(x,\lambda)$, $y'_a(x,\lambda)$ и $\bar{y}'_a(x,\lambda)$ должны быть положительны в интервале $(a,1)$ при выполнении условия (6_2).

Рассматривая интервал $(0,a)$, можно также доказать существование бесчисленного множества корней у уравнений

$$m_1(\lambda) = 0, \tag{10_1}$$

$$m_2(\lambda) = 0, \tag{10_2}$$

$$n_1(\lambda) = 0, \tag{10_3}$$

$$n_2(\lambda) = 0. \tag{10_4}$$

Все эти корни будут простые и больше, чем $-aA_1$.

§ 3. Принимая во внимание сказанное в предыдущем параграфе относительно знака интегралов и их производных в интервале $(0,a)$, можем утверждать, что при выполнении условия (6_1) мы будем иметь

$$\begin{gathered} m_1(\lambda) > 0, \quad m_2(\lambda) > 0, \quad n_1(\lambda) < 0, \quad n_2(\lambda) < 0, \\ \Delta_1 = m_1(\lambda)n_2(\lambda) - n_1(\lambda)m_2(\lambda) < 0. \end{gathered} \tag{11_1}$$

Точно так же при выполнении условия (6_2) имеем

$$\begin{gathered} p_1(\lambda) > 0, \quad p_2(\lambda) > 0, \quad q_1(\lambda) < 0, \quad q_2(\lambda) < 0, \\ \Delta_2 = p_1(\lambda)q_2(\lambda) - q_1(\lambda)p_2(\lambda) < 0. \end{gathered} \tag{11_2}$$

Обозначим

$$p(\lambda) = \frac{p_2(\lambda)}{p_1(\lambda)}, \quad q(\lambda) = \frac{q_2(\lambda)}{q_1(\lambda)},$$
$$m(\lambda) = \frac{m_2(\lambda)}{m_1(\lambda)}, \quad n(\lambda) = \frac{n_2(\lambda)}{n_1(\lambda)}.$$

Неравенства (11_1) и (11_2) дадут

$$n(\lambda) > m(\lambda) > 0 \quad \text{при } \lambda \leqslant -aA_1,$$
$$q(\lambda) > p(\lambda) > 0 \quad \text{при } \lambda \geqslant -aA_1.$$

Заметим, кроме того, что ни при одном значении λ $n(\lambda)$ не может равняться $m(\lambda)$ и $q(\lambda)$ не может равняться $p(\lambda)$, так что указанные только что неравенства $n(\lambda) > m(\lambda)$; $q(\lambda) > p(\lambda)$ перестанут существовать, если $n(\lambda)$ или $q(\lambda)$ обратится в бесконечность.

Рассуждения последних двух параграфов приводят нас к следующей теореме:

Теорема 16. *При возрастании λ $n(\lambda)$ и $m(\lambda)$ возрастают, $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ убывают, причем $n(\lambda)$ не может ни при каком значении λ совпасть с $m(\lambda)$ и $p(\lambda)$ — с $q(\lambda)$.*

При $\lambda \leqslant -aA_1$ $n(\lambda)$ и $m(\lambda)$ постоянно положительны, $n(\lambda) > m(\lambda)$ и интегралы $y_a(x, \lambda)$ и $\bar{y}_a(x, \lambda)$ не имеют корней в интервале $(0, a)$, а при $\lambda \geqslant -aA_1$ $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ постоянно положительны, $q(\lambda) > p(\lambda)$ и интегралы $y_a(x, \lambda)$ и $\bar{y}_a(x, \lambda)$ не имеют корней в интервале $(a, 1)$.

При возрастании λ $n(\lambda)$ и $m(\lambda)$ бесчисленное множество раз переходят через нуль, а при убывании λ то же будет с $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$.

При переходе $m(\lambda)$ через нуль интеграл $\bar{y}_a(x, \lambda)$ приобретает один корень в интервале $(0, a)$, а при переходе $m(\lambda)$ через бесконечность $y_a(x, \lambda)$ приобретает один корень в указанном интервале. То же можно сказать по отношению к $p(\lambda)$ и указанным только что интегралам, если уменьшать λ и обращать внимание на корни интегралов, заключающиеся в интервале $(a, 1)$.*

§ **4.** Частное $\eta(x, \lambda)$ каких-либо двух независимых интегралов уравнения (2) преобразует полуплоскость плоскости переменной x в четырехугольник, ограниченный дугами кругов, с углами

$$\alpha\pi, \quad \beta\pi, \quad \gamma\pi, \quad \delta\pi. \tag{12}$$

---

*См. Hilb [22, Bd. 66, S. 215].

Обозначим вершины четырехугольника соответственно буквами A, B, C и D.

При аналитическом продолжении функции $\eta(x,\lambda)$ через какой-либо из отрезков вещественной оси в другую полуплоскость, функция эта преобразует последнюю полуплоскость в четырехугольник, который получается из упомянутого выше четырехугольника при помощи отображения в той из его сторон, которая соответствует отрезку вещественной оси, через который было совершено аналитическое продолжение. Таким образом, последовательные значения η образуют сеть четырехугольников, получаемых при помощи отображений из исходного четырехугольника (см. § 11 гл. II). Совокупность четного числа этих отображений будет представлять собою некоторую подстановку группы уравнения (2). Обходам вокруг особых точек уравнения (2) соответствуют эллиптические подстановки S_1, S_2, S_3, S_4, имеющие множители $e^{2\alpha\pi i}$, $e^{2\beta\pi i}$, $e^{2\gamma\pi i}$, $e^{2\delta\pi i}$. Одна из неподвижных точек какой-либо из этих подстановок находится в соответствующей вершине четырехугольника. Мы будем называть эту неподвижную точку *первой неподвижной точкой подстановки*, а другую неподвижную точку — *второй*. Эта последняя является второй точкой пересечения сторон четырехугольника, выходящих из вышеупомянутой вершины.

Так же, как и в § 12 гл. II, можно показать, что всякий односвязный четырехугольник, ограниченный дугами окружностей, не имеющий точек разветвления и имеющий углы (12), может быть получен из полуплоскости при помощи частного интегралов уравнения (2). Мы, как и раньше, будем говорить об уравнении вида (2), соответствующем четырехугольнику с указанными свойствами. Если мы закрепим значения x, соответствующие трем определенным вершинам четырехугольника, то этому последнему будет соответствовать вполне определенное уравнение вида (2). То же уравнение будет соответствовать всякому четырехугольнику, получаемому из только что указанного при помощи какого-либо линейного преобразования.

Рассмотрим теперь, при каких условиях сторона четырехугольника может быть налегающей. Для примера возьмем сторону BC, соответствующую интервалу $(a,1)$ вещественной оси. Определим $\eta(x,\lambda)$ по формуле

$$\eta(x,\lambda)=\frac{\bar{y}_a(x,\lambda)}{y_a(x,\lambda)}, \tag{13}$$

причем мы будем считать в этой формуле $\bar{y}_a(x,\lambda)$ вещественным в интервале $(a,1)$. Сторона BC будет расположена на вещественной оси от начала координат и может быть налегающей тогда и только тогда, когда интеграл $\bar{y}_a(x,\lambda)$ будет иметь корни внутри интервала $(a,1)$.

При указанном определении $\eta(x,\lambda)$ сторона BA будет лежать на прямой, выходящей из начала координат и образующей с положительным направлением вещественной оси угол $\beta\pi$. Таким образом, второй неподвижной точкой подстановки S_2 будет бесконечно удаленная точка, и отсюда непосредственно ясно, что для того, чтобы сторона BC проходила через вторую неподвижную точку подстановки S_2, необходимо и достаточно, чтобы интеграл $y_a(x,\lambda)$ имел корни внутри интервала $(a,1)$.

На основании теоремы 16 мы можем утверждать, что, если сторона BC является налегающей или проходит через вторую неподвижную точку подстановки S_2, то сторона AB не обладает ни одним из этих свойств. Так же, как мы только что рассуждали со стороною BC, мы можем рассуждать со стороною AB.

Мы можем таким образом выбрать преобразование (1), чтобы оно преобразовывало уравнение (2) в уравнение того же вида* и чтобы при этом любые два из четырех отрезков вещественной оси преобразовывались бы в отрезки, лежащие на конечном расстоянии. Из полученного выше результата вытекает поэтому следующий более общий: если из двух соседних сторон четырехугольника одна является налегающей или проходит через вторую неподвижную точку подстановки, соответствующей общей вершине указанных сторон, то другая сторона не обладает ни одним из этих свойств. Отсюда непосредственно видно, что две соседние стороны могут иметь общую точку лишь в вершине четырехугольника. Если у четырехугольника нет налегающих сторон, то стороны не могут пересечься. В случае же, если две противоположные стороны будут налегающими, то они не могут пересекаться (см. § 11 и § 12 гл. II).

§ **5.** Перейдем теперь к исследованию тех случаев, при которых подстановки группы преобразуют в себя некоторую окружность C. Напомним о том, что эллиптическая подстановка может преобразовывать окружность C_1 в себя либо в том случае, когда неподвижные точки подстановки являются гармоническими точками по отношению к этой окружности, либо же в том

---

*Уравнение это не должно быть тождественно с первоначальным.

случае, когда эти неподвижные точки лежат на окружности C_1 и период подстановки равен двум. Если последнее обстоятельство не имеет места, то все стороны четырехугольника ортогональны к окружности C_1.

Предположим, что вершина B лежит на окружности C_1 и что сторона BC не лежит на этой окружности. В этом случае угол $\beta\pi$ равен прямому, и сторона BC должна быть ортогональна к окружности C_1. Отсюда видно, что сторона AB должна касаться в точке B окружности C_1.

Но вторая точка пересечения окружностей, на которых лежат стороны AB и BC, также должна лежать на окружности C_1, так как это есть вторая неподвижная точка подстановки S_2. Поэтому сторона AB должна лежать на окружности C_1, там же будет находиться и вершина A, и потому угол четырехугольника при этой вершине должен быть равен прямому. Следовательно, вершины четырехугольника могут находиться на окружности C_1 только в том случае, когда два угла четырехугольника равны прямому углу, и в этом случае сторона, заключенная между этими двумя углами, должна находиться на окружности C_1.

Мы будем рассматривать пока лишь тот случай, при котором окружность C_1 ортогональна ко всем сторонам четырехугольника. Установим условие существования такой окружности.

Определим частное интегралов по формуле (13) и заметим, что подстановки S_1, S_2 и S_3 могут служить производящими подстановками группы. Подстановка S_2 будет иметь вид

$$\eta_1 = e^{2\beta\pi i}\eta$$

и преобразует в себя окружности, имеющие центр в начале координат. Если $\beta = 1/2$, то подстановка эта преобразует в себя также и прямые, проходящие через начало координат. Но при этом вершина B, находящаяся в этом начале, будет лежать на этих прямых, а этот случай мы пока исключаем из рассмотрения. Неподвижными точками подстановок S_1 и S_3 будут

1-я неподвижная точка — $e^{\beta\pi i}m(\lambda)$, 2-я неподвижная точка — $e^{\beta\pi i}n(\lambda)$,

1-я неподвижная точка — $p(\lambda)$, 2-я неподвижная точка — $q(\lambda)$.

Для существования окружности C_1 необходимо и достаточно, чтобы обе пары точек были гармоническими по отношению к одной и той же окружности, имеющей центр в начале координат. В силу теоремы 16 при всяком значении λ по крайней мере в одной из двух пар чисел $m(\lambda)$, $n(\lambda)$ и $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ оба числа будут положительны, и потому высказанное выше условие выражается равенством

$$m(\lambda)n(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda). \tag{14}$$

Легко также убедиться в том, что высказанное условие будет соблюдено, если в какой-либо из вышеуказанных пар чисел одно число будет равно нулю, а другое — бесконечности.

Обозначим буквами α_{-1} и α_1 наибольший корень уравнения (9_3) и наименьший корень уравнения (10_3). При увеличении λ от α_{-1} до α_1 левая часть уравнения (14) будет увеличиваться от некоторого положительного числа до бесконечности, а правая будет уменьшаться от бесконечности до некоторого положительного числа. Внутри интервала (α_{-1}, α_1) будет поэтому существовать одно значение $\lambda = \lambda_0$, при котором подстановки группы уравнения (2) будут преобразовывать в себя окружность C_0, ортогональную к сторонам четырехугольника.

В силу теоремы 16 будут иметь место неравенства

$$q(\lambda_0) > p(\lambda_0),$$
$$n(\lambda_0) > m(\lambda_0).$$

Докажем первое из этих неравенств. При $\lambda \geqslant -aA_1$ $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ положительны, и при убывании λ они возрастают. Из неравенства, упомянутого в теореме 16, следует, что из уравнений (9) первый корень встретится у уравнения (9_3). Поэтому неравенство это, справедливое при $\lambda \geqslant -aA_1$, останется справедливым и при $\lambda > \alpha_{-1}$, так как $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ не могут быть равны и ни одна из этих величин не обратится в бесконечность при $\lambda > \alpha_{-1}$. Ясно также, что при $\lambda = \lambda_0$ стороны AB и BC не будут проходить через вторую неподвижную точку подстановки S_2, так как при этом интеграл $y_a(x, \lambda_0)$ не имеет корней в интервалах $(0, a)$ и $(a, 1)$. Кроме того, из написанных на предыдущей странице неравенств следует, что вершины A и C должны находиться внутри окружности C_0. Принимая все это во внимание, можем утверждать, что окружность эта не пересечет сторон AB и BC четырехугольника.

§ **6.** При увеличении λ от значения $\lambda = \alpha_1$ правая часть равенства (14) будет все время положительной и убывающей, левая же часть станет отрицательной вследствие перехода $n(\lambda)$ через бесконечность.

При дальнейшем увеличении λ могут представиться три случая: 1) сначала $m(\lambda)$ обратится в бесконечность и затем $n(\lambda)$ — в нуль; 2) сначала $n(\lambda)$ обратится в нуль и затем $m(\lambda)$ — в бесконечность; 3) одновременно $n(\lambda)$ обратится в нуль и $m(\lambda)$ — в бесконечность. Пусть β_1 есть то значение λ, при котором $n(\lambda)$ обращается в нуль, и γ_1 — то значение λ, при котором $m(\lambda)$ обращается в бесконечность. Рассмотрим сначала случай 2).

При увеличении λ от α_1 до β_1 левая часть равенства (14) будет отрицательной, а потому искомой окружности существовать не может. При дальнейшем увеличении λ от β_1 до γ_1 левая часть равенства (14) будет увеличиваться от нуля до бесконечности, а потому в интервале (β_1, γ_1) будет существовать одно значение $\lambda = \lambda_1$, при котором будет существовать искомая окружность C_1*. При этом сторона AB пройдет через вторую неподвижную точку подстановки S_1, так как интеграл $y_a(x, \lambda_1)$ будет иметь корень в интервале $(0, a)$ в силу теоремы 16. Окружность C_1 один раз пересечет сторону AB и не пересечет сторону BC. Этому случаю будет соответствовать рис. 13, причем надо помнить, что вершины A, B и C находятся соответственно в точках $e^{\pi\beta i}m(\lambda)$, 0 и $p(\lambda)$.

Рассмотрим теперь случай 1). В этом случае γ_1 будет меньше β_1, и при увеличении λ от γ_1 до β_1 левая часть равенства (14) будет положительна и будет уменьшаться от бесконечности до нуля. Следовательно, и в этом случае внутри интервала (γ_1, β_1) будет существовать по крайней мере одно значение $\lambda = \lambda_1$, удовлетворяющее равенству (14). Покажем, что такое значение будет только одно, как и в случае 2). Определим частное интегралов по формуле

$$\eta_0(x, \lambda) = \frac{\bar{y}_0(x, \lambda)}{y_0(x, \lambda)}.$$

Пусть при аналитическом продолжении интегралов $y_0(x, \lambda)$ и $\bar{y}_0(x, \lambda)$ вдоль отрезка $(\infty, 0)$ вещественной оси мы получаем вблизи точки $x = \infty$

$$y_0(x, \lambda) = r_1(\lambda) y_\infty(x, \lambda) + s_1(\lambda) \bar{y}_\infty(x, \lambda),$$
$$\bar{y}_0(x, \lambda) = r_2(\lambda) y_\infty(x, \lambda) + s_2(\lambda) \bar{y}_\infty(x, \lambda).$$

Совершенно так же, как в § 2, мы можем показать, что частные $r_2(\lambda)/r_1(\lambda)$ и $s_2(\lambda)/s_1(\lambda)$ убывают при возрастании λ. Для этого достаточно разрешить написанные только что уравнения

---

*Окружность, получаемую при $\lambda = \lambda_0$, мы будем обозначать знаком C_0.

относительно $y_\infty(x,\lambda)$ и $\bar{y}_\infty(x,\lambda)$ и воспользоваться соотношением

$$\frac{d}{dx}\left[(-x)^{1-\alpha}(a-x)^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}y'(x,\lambda)\right]y(x,\lambda_1)-$$
$$-\frac{d}{dx}\left[(-x)^{1-\alpha}(a-x)^{1-\beta}(1-x)^{1-\gamma}y'(x,\lambda_1)\right]y(x,\lambda)=$$
$$=(\lambda-\lambda_1)(-x)^{-\alpha}(a-x)^{-\beta}(1-x)^{-\gamma}y(x,\lambda)y(x,\lambda_1).$$

При значениях λ, заключающихся в интервале (γ_1,β_1), $y_0(x,\lambda)$ и $\bar{y}_0(x,\lambda)$ будут постоянно положительными в интервале $(\infty,0)$, ибо сторона четырехугольника, соответствующая отрезку $(\infty,0)$ вещественной оси, не может проходить через вторую неподвижную точку подстановки S_1. Действительно, из равенств (8_2) и (8_1) и из теоремы 16 вытекает, что если y_1 имеет корни в интервале $(a,1)$, то y_a не может иметь корней в интервале $(0,a)$.

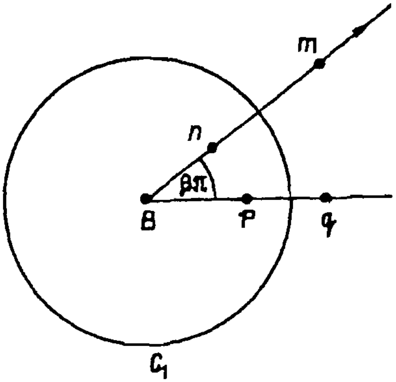

Рис. 13

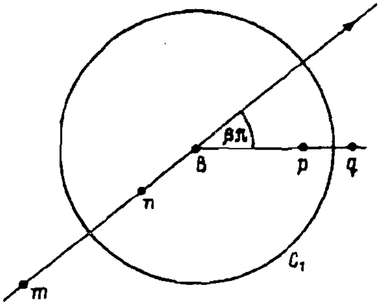

Рис. 14

Аналогичное заключение мы можем высказать и относительно соседних интервалов $(\infty,0)$ и $(0,1)$. Но в рассматриваемом случае $y_a(x,\lambda)$ имеет корень в интервале $(0,a)$, и потому $y_0(x,\lambda)$ не имеет корней в интервале $(\infty,0)$.

На основании вышесказанного мы можем утверждать, что частные $r_2(\lambda)/r_1(\lambda)$ и $s_2(\lambda)/s_1(\lambda)$ положительны при $\lambda>\gamma_1$.

Вместо особых точек 0, a и ∞ мы рассматриваем теперь особые точки ∞, 0 и a, и уравнение (14) принимает вид

$$\left(-\frac{m_2(\lambda)}{n_2(\lambda)}\right)\left(-\frac{m_1(\lambda)}{n_1(\lambda)}\right) = \frac{r_2(\lambda)}{r_1(\lambda)}\frac{s_2(\lambda)}{s_1(\lambda)}. \tag{14_1}$$

Множители, стоящие в левой части этого равенства, будут положительные и возрастающие в интервале (γ_1, β_1), так как в силу условия 1) и неравенств (11_1) $m_2(\lambda)$ и $n_1(\lambda)$ будут положительны и $m_1(\lambda)$ и $n_2(\lambda)$ — отрицательны в этом интервале. Кроме того, в § 2 мы видели, что частные $n_1(\lambda)/m_1(\lambda)$ и $n_2(\lambda)/m_2(\lambda)$ возрастают при возрастании λ. Следовательно, уравнение (14_1) имеет лишь один корень $\lambda = \lambda_1$ в интервале (γ_1, β_1). То же можно утверждать и об уравнении (14). Рассмотренному случаю будет соответствовать рис. 14. Сторона BA, выйдя из вершины B в направлении, указанном стрелкой, пройдет через бесконечно далекую точку, и вершина A будет находиться вне окружности C_1.

В случае 3) мы имеем

$$\beta_1 = \gamma_1 = \lambda_1,$$

и вершина A будет находиться в бесконечно далекой точке.

Во всех трех рассмотренных случаях окружность C один раз пересечет сторону BA и ни разу не пересечет стороны BC.

§ 7. При дальнейшем увеличении λ мы опять дойдем либо до такого интервала изменения λ, внутри которого множители, стоящие в левой части равенства (14), будут одного знака, либо до такого значения λ, при котором один из этих множителей обратится в нуль и другой — в бесконечность.

В последнем случае при указанном значении λ будет существовать окружность C_2, ортогональная к сторонам четырехугольника. В первом же случае внутри указанного интервала будет существовать по крайней мере одно значение параметра λ, при котором также будет существовать окружность C_2. Если $m(\lambda)$ и $n(\lambda)$ положительны в этом интервале, то совершенно так же, как это мы делали при разборе случая 2) предыдущего параграфа, мы можем доказать единственность указанного значения λ. Если $m(\lambda)$ и $n(\lambda)$ отрицательны в исследуемом интервале, но $n(\lambda)$ больше, чем $m(\lambda)$, то, принимая во внимание теорему 16, мы можем утверждать, что $m_1(\lambda)$ и $n_1(\lambda)$, а также $m_2(\lambda)$ и $n_2(\lambda)$ одинаковое число раз перешли через нуль при возрастании λ от $-aA_1$ до исследуемых значений λ. При $\lambda = -aA_1$ величины эти были разных знаков, и потому, пользуясь уравнением (14_1), мы совершенно так же, как и в предыдущем параграфе, можем и в этом случае установить указанную единственность.

Во всяком случае окружность C_2 пересечет сторону BA два раза и не пересечет стороны BC. Последнее ясно непосредственно. В первом же легко убедиться, если принять во внимание, что точки $e^{\beta\pi i}m(\lambda)$ и $e^{\beta\pi i}n(\lambda)$ движутся по прямой, изображенной на рис. 13 и 14, в одном направлении (снизу вверх) при возрастании λ, не могут совпасть и что вершина A находится в точке $e^{\beta\pi i}m(\lambda)$.

Те интервалы*, внутри которых уравнение (14) будет иметь корни, встречаются всякий раз, как точки $e^{\beta\pi i}m(\lambda)$ и $e^{\beta\pi i}n(\lambda)$ находятся по одну сторону от точки B. Окружности C должны при этом разделять эти точки. При беспредельном увеличении λ мы будем встречать последовательные интервалы, внутри которых уравнение (14) будет иметь по крайней мере один корень. Нетрудно убедиться в том, что при переходе от какого-либо из этих интервалов к следующему число пересечений стороны AB с соответствующей окружностью C увеличится на единицу. Для этого достаточно разобрать все возможные случаи положения точек $e^{\beta\pi i}m(\lambda)$ и $e^{\beta\pi i}n(\lambda)$ как в первом, так и во втором интервалах, и принять во внимание указанный выше закон движения этих точек.

Таким образом, мы установили существование окружностей C_k, ортогональных к сторонам четырехугольника, пересекающих сторону AB k раз и не пересекающих стороны BC. При $k = 0$ и $k = 1$ нами установлено, что такая окружность может быть только одна. Единственность эта была нами установлена выше и для других значений k, исключая тот случай, когда $m(\lambda)$ и $n(\lambda)$ внутри исследуемого интервала удовлетворяют неравенствам

$$0 > m(\lambda) > n(\lambda). \tag{15}$$

Разберем те условия, при которых мы можем встретиться с этими неравенствами.

§ **8.** Если выполнены неравенства (15), то в интервале $(-aA_1, \lambda)$ $n_1(\lambda)$ будет иметь одним корнем больше, чем $m_1(\lambda)$, и, следовательно, внутри исследуемого интервала функции эти будут одного знака. То же можно сказать и о функциях $m_2(\lambda)$ и $n_2(\lambda)$.

---

*Интервалы могут содержать и одно только значение λ.

Возьмем интегралы $y_1(x,\lambda)$ и $\bar{y}_1(x,\lambda)$ и будем аналитически продолжать их вдоль вещественной оси, огибая особые точки уравнения (2) и оставаясь при этом в верхней полуплоскости. Интегралы эти будут иметь вблизи точки $x=\infty$ внутри интервала $(1,\infty)$ следующий вид*:

$$\Delta_2 y_1 = (q_2 m_1 r_1 + q_2 n_1 r_2 e^{\alpha\pi i} - q_1 m_2 r_1 e^{\beta\pi i} - q_1 n_2 r_2 e^{(\alpha+\beta)\pi i}) e^{\delta_2 \pi i} y_\infty + \\ + (q_2 m_1 s_1 + q_2 n_1 s_2 e^{\alpha\pi i} - q_1 m_2 s_1 e^{\beta\pi i} - q_1 n_2 s_2 e^{(\alpha+\beta)\pi i}) e^{\delta_1 \pi i} \bar{y}_\infty,$$

$$\Delta_2 \bar{y}_1 = (-p_2 m_1 r_1 e^{\gamma\pi i} - p_2 n_1 r_2 e^{(\alpha+\gamma)\pi i} + p_1 m_2 r_1 e^{(\beta+\gamma)\pi i} + \\ + p_1 n_2 r_2 e^{(\alpha+\beta+\gamma)\pi i}) e^{\delta_2 \pi i} y_\infty + (-p_2 m_1 s_1 e^{\gamma\pi i} - p_2 n_1 s_2 e^{(\alpha+\gamma)\pi i} + \\ + p_1 m_2 s_1 e^{(\beta+\gamma)\pi i} + p_1 n_2 s_2 e^{(\alpha+\beta+\gamma)\pi i}) e^{\delta_1 \pi i} \bar{y}_\infty.$$

Взятые интегралы однозначны в верхней полуплоскости, и, следовательно, к тем же выражениям мы должны прийти, непосредственно продолжая интегралы вдоль отрезка $(1,\infty)$ вещественной оси, и потому коэффициенты в написанных выражениях у y_∞ и $\bar{y}_\infty$ должны быть вещественны. Мы можем, таким образом, написать:

$$q_2 m_1 r_1 \sin \pi\delta_2 + q_2 n_1 r_2 \sin \pi(\alpha+\delta_2) - \\ - q_1 m_2 r_1 \sin \pi(\beta+\delta_2) - q_1 n_2 r_2 \sin \pi(\alpha+\beta+\delta_2) = 0, \quad (16_1)$$

$$-p_2 m_1 r_1 \sin \pi(\gamma+\delta_2) - p_2 n_1 r_2 \sin \pi(\alpha+\gamma+\delta_2) + \\ + p_1 m_2 r_1 \sin \pi(\beta+\gamma+\delta_2) + p_1 n_2 r_2 \sin \pi(\alpha+\beta+\gamma+\delta_2) = 0. \quad (16_2)$$

В § 6 мы указали, что r_1 и r_2 при рассматриваемых значениях λ будут одного знака**. Таким образом, в написанных равенствах коэффициенты при тригонометрических функциях оказываются одного знака, а потому из равенства (16_1) вытекает

$$\alpha + \beta + \delta_2 > 1, \quad (17)$$

ибо в противном случае аргументы всех sinus'ов в равенстве (16_1) заключались бы в интервале $(0,\pi)$ и все слагаемые были бы одного знака.

---

*Для краткости мы не пишем аргументов у функций.

**Заметим, что в § 6 мы пропустили доказательство того, что при $\lambda > \gamma_1$ $s_1(\lambda)$ и $s_2(\lambda)$ будут одного знака. В этом мы могли бы убедиться, преобразовывая уравнение (2) подстановкою (1) так, чтобы отрезки $(\infty, 0)$ и $(0,a)$ преобразовались в отрезки $(0,a)$ и $(a,1)$, и принимая во внимание рассуждения § 2 настоящей главы.

Принимая во внимание равенство (2_1), получаем

$$\alpha+\beta>\gamma+\delta.$$

Покажем, что в рассматриваемом случае должно быть выполнено и более сильное неравенство:

$$\alpha+\beta>1. \tag{18}$$

Перепишем равенства (16_1) и (16_2) в виде

$$\frac{\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_2)}{\sin\pi\delta_2}=q\frac{m_1r_1}{n_2r_2}+\frac{q}{n}\frac{\sin\pi(\alpha+\delta_2)}{\sin\pi\delta_2}-\\ -\frac{m_2r_1}{n_2r_2}\frac{\sin\pi(\beta+\delta_2)}{\sin\pi\delta_2}, \tag{19_1}$$

$$\frac{\sin\pi\delta_1}{\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)}=p\frac{m_1r_1}{n_2r_2}+\frac{p}{n}\frac{\sin\pi(\beta+\delta_1)}{\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)}-\\ -\frac{m_2r_1}{n_2r_2}\frac{\sin\pi(\alpha+\delta_1)}{\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)}. \tag{19_2}$$

Рассмотрим начальное значение $\lambda=\lambda'$ того интервала, который характеризуется неравенствами (15). В силу теоремы 16 можем утверждать, что $n(\lambda')$ равно бесконечности, а $m(\lambda')$ — отрицательно. При этом, как мы уже упоминали, $m_2(\lambda')$ и $n_2(\lambda')$ будут одного знака, а следовательно, $m_1(\lambda')$ и $n_2(\lambda')$ — разных знаков. Вторые слагаемые в правых частях равенств (19_1) и (19_2) пропадут, а первые слагаемые будут отрицательны. Принимая во внимание теорему 16, можем написать:

$$q\frac{m_1r_1}{n_2r_2}\bigg|_{\lambda=\lambda'}<p\frac{m_1r_1}{n_2r_2}\bigg|_{\lambda=\lambda'}. \tag{20_1}$$

Докажем неравенство

$$\frac{\sin\pi(\beta+\delta_2)}{\sin\pi\delta_2}>\frac{\sin\pi(\alpha+\delta_1)}{\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)}. \tag{20_2}$$

Перепишем его в виде

$$\frac{\sin\pi(\beta+\delta_2)\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)-\sin\pi(\alpha+\delta_1)\sin\pi\delta_2}{\sin\pi\delta_2\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)}>0.$$

В силу равенства (2_1) и неравенств (3) и (17) можем написать:

$$\sin\pi\delta_2\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)<0,$$

и, следовательно, нам остается показать, что числитель написанной дроби отрицателен. Пользуясь равенством (2_1) и неравенством (3), можем написать:

$$\sin\pi(\beta+\delta_2)\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)-\sin\pi(\alpha+\delta_1)\sin\pi\delta_2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\pi(\alpha+\delta)-\cos\pi(\beta-\gamma)+\cos\pi(\beta+\gamma)-\cos\pi(\alpha+\delta)\right] =$$
$$= -\sin\pi\beta\sin\pi\gamma < 0,$$

и неравенство (20_2) доказано.

Пользуясь неравенствами (20_1) и (20_2) и равенствами (19_1) и (19_2), можем написать:

$$\frac{\sin\pi\delta_1}{\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)}-\frac{\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_2)}{\sin\pi\delta_2} > 0.$$

Принимая во внимание неравенство (17) и условие $\delta > 0$, можем написать это неравенство в виде

$$\sin\pi\delta_1\sin\pi\delta_2-\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_1)\sin\pi(\alpha+\beta+\delta_2) < 0.$$

Преобразуя левую часть этого неравенства, получаем

$$\sin\pi\gamma\sin\pi(\alpha+\beta) < 0,$$

откуда и вытекает неравенство (18).

Точно так же можно показать, что лишь при выполнении этого неравенства возможно одновременное обращение $n(\lambda)$ в бесконечность и $m(\lambda)$ в нуль. Полученный результат может быть доказан и геометрически.

Если бы неравенство (18) не выполнялось, то при указанном значении $\lambda = \lambda'$ четырехугольник имел бы вид, указанный на рис. 15, если определить частное интегралов по формуле (13) и считать $\bar{y}_a$ вещественным в интервале $(0, a)$.

Действительно, в рассматриваемом случае n_1 обращается в нуль и η имеет вблизи точки $x = 0$ вид

$$m+\frac{n_2\bar{y}_0}{m_1 y_0},$$

а вершина A имеет координату m, отрицательную в силу неравенства (15). Из написанного выражения видно непосредственно, что сторона AD будет прямолинейной.

Мы предположим, что четырехугольник является конформным преобразованием верхней полуплоскости. Отсюда легко определить отсчет углов $\alpha\pi$ и $\beta\pi$. Например, вблизи точки $x = a$ η имеет разложение

$$\eta = (a - x)^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (a_0 \neq 0),$$

и, следовательно, при $x > 0$ значения η будут находиться на полупрямой, которая образует с положительным направлением вещественной оси угол $\beta\pi$, отсчитываемый от вещественной оси в отрицательном направлении.

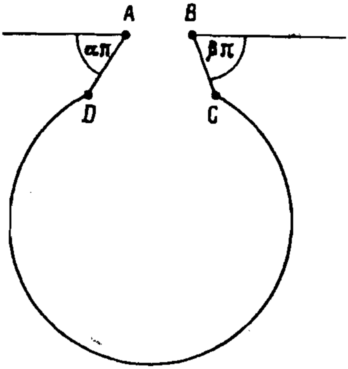

Рис. 15

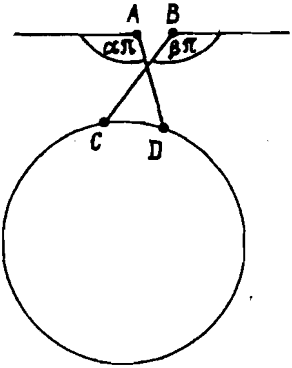

Рис. 16

Сторона AB проходит через бесконечно далекую точку, которая является второй неподвижной точкой подстановок S_1 и S_2, а потому, в силу сделанного в § 4 замечания, можем утверждать, что стороны BC и AD не будут проходить через бесконечно далекую точку. Остается неопределенным лишь положение стороны DC. Но при всяком возможном положении этой стороны мы можем из элементарных геометрических соображений получить

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta > 2,$$

что противоречит неравенству (4). Выведенное соотношение остается справедливым и в том случае, когда четырехугольник будет иметь огибающие стороны.

Итак, должно существовать неравенство (18), если выполнено условие (15). До упомянутого выше значения λ' мы можем дойти следующим образом: при увеличении λ сначала обратится в нуль n_1, затем в любом порядке m_1 и n_2 и, наконец, опять n_1. Пусть это последнее будет иметь место при $\lambda = \lambda'$. При дальнейшем увеличении λ будут выполнены условия (15).

Будем предполагать, что указанная только что картина изменения имеет место. В интервале $(-aA_1, \lambda')$ m_1 обратилось в нуль, а m_2 — нет. Отсюда мы можем заключить, что при $\lambda = \lambda'$ сторона AB будет проходить через бесконечно далекую точку, которая является второй неподвижной точкой подстановок S_1 и S_2, но не будет налегающей стороной. Стороны AD и BC не могут, следовательно, проходить через бесконечно далекую точку. Совершенно так же, как и в § 14 гл. II, мы можем убедиться в том, что сторона CD не может пересечься со стороною AB. Принимая во внимание все сказанное, а также неравенства (4) и (18), убедимся на основании элементарных геометрических соображений в том, что сторона CD должна быть налегающей и четырехугольник должен иметь вид, указанный на рис. 16. Из этого рисунка мы непосредственно видим, что неравенства (15) могут встретиться, ибо углы изображенного четырехугольника можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства (3) и (4).

§ 9. В § 7 мы показали, что существуют такие значения $\lambda = \lambda_k$, при которых стороны четырехугольника ортогональны к окружностям C_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, причем окружность C_k пересекает сторону AB k раз и не пересекает стороны BC. Если при некотором значении k соответствующие значения λ_k принадлежат интервалу, внутри которого выполняется условие (15), то мы еще не доказали, что при таком k будет только одно значение λ_k. В настоящем параграфе мы восполним этот пробел.

Предварительно сделаем некоторые замечания по поводу окружностей C_k. Мы будем при этом пользоваться линейными подстановками, указанными в § 3 гл. IV.

Совершим над уравнением (2) преобразование вида (1), причем независимое переменное преобразуем по формуле (VI) указанного только что параграфа. При этом уравнение (2) преобразуется в уравнение того же вида, интервал $(0, a)$ преобразуется в себя, а интервалы $(\infty, 0)$ и $(a, 1)$ — друг в друга. Роль стороны BC будет играть сторона AD, и мы можем утверждать потому, что окружности C_k $(k = 1, 2, \ldots)$ не пересекают стороны AD.

Действительно, если мы будем уменьшать λ, начиная со значения $\lambda = \lambda_0$, то так же, как и в § 7, мы сможем доказать, что получится ряд окружностей C_{-k} ($k = 1, 2, \ldots$), ортогональных к сторонам четырехугольника, причем всякая окружность C_{-k} пересекает сторону BC k раз и не пересекает стороны AB. Окружности C_k ($\cdots - 1, 0, +1 \ldots$) представляют собою все возможные окружности, ортогональные к сторонам четырехугольника, и мы можем потому утверждать, что если такая окружность пересекает сторону четырехугольника, соответствующую отрезку $(0, a)$ вещественной оси, то она не пересекает стороны, соответствующей отрезку $(a, 1)$, и наоборот. Отсюда вытекает непосредственно высказанное нами утверждение о том, что окружности C_k ($k = 1, 2, \ldots$) не пересекают стороны AD. Совершим над уравнением (2) преобразование вида (1), пользуясь формулой (II) § 3 гл. IV. При этом интервалы $(1, \infty)$ и $(\infty, 0)$ преобразуются в интервалы $(0, a)$ и $(a, 1)$ и, следовательно, роль сторон AB и BC будут играть стороны CD и DA. Следовательно, должны существовать окружности C'_k и C'_{-k}, которые имеют к сторонам CD и DA то же отношение, что окружности C_k и C_{-k} к сторонам AB и BC. Совокупность окружностей C'_k и C'_{-k} совпадает с совокупностью окружностей C_k и C_{-k}, так как и та и другая совокупность должна состоять из всех возможных окружностей, ортогональных к сторонам четырехугольника.

Расположим окружности C'_n ($\cdots - 1, 0, 1, \ldots$) и C_n в том порядке, в каком они получаются при увеличении параметра λ*. Окружности C_k не пересекают, как мы видели, сторон AD и BC, а окружности C_{-k} пересекают по крайней мере одну из этих сторон. Принимая во внимание преобразование отрезков вещественной оси в случае формулы (II) § 3 гл. IV, можем утверждать, что окружность C'_0 также должна находиться между двумя окружностями, из которых одна не пересекает ни одну из указанных только что сторон, а другая пересекает по крайней мере одну из них. Таким образом, непосредственно ясно, что окружность C'_0 совпадает с окружностью C_0. Принимая во внимание указанное выше свойство окружностей C_k, можем также утверждать, что совпадают окружности C'_1 и C_1. При дальнейшем увеличении λ такое соответствие могло бы нарушиться, если бы для одной из пар сторон AB и BC или AD и DC существовал интервал изменения λ, внутри которого выполнялось бы нера-

---

*Нами доказана единственность окружностей C_k лишь при $k = 0$ и $k = 1$, так что пока мы должны предполагать, что при заданном значении k может существовать несколько окружностей C_k. То же можно утверждать и относительно окружностей C'_k.

венство (15), и этому интервалу соответствовало бы несколько окружностей C_k.

Для определенности предположим, что это обстоятельство впервые встретилось для первой пары сторон при $k = 2$, и пусть $C_2^{(1)}$, $C_2^{(2)} \dots$ — те последовательные окружности, ортогональные к сторонам четырехугольника и пересекающие сторону AB два раза, которые мы получим, увеличивая λ. При этом должно выполняться неравенство (18), и мы в силу неравенства (4) имеем

$$\gamma + \delta < 1.$$

Следовательно, при рассмотрении пары сторон AD и DC мы не можем встретиться с интервалом, внутри которого выполнялись бы неравенства, аналогичные неравенствам (15), т. е. при заданном k будет существовать только одна окружность C'_k, при увеличении λ от значения $\lambda = \lambda_0$ каждая последующая ортогональная окружность будет иметь со стороной CD одной точкой пересечения больше, чем предшествующая ей окружность. Таким образом, окружность $C_2^{(1)}$ пересечет сторону CD два раза, а окружность $C_2^{(2)}$ пересечет эту сторону уже три раза. Но эта окружность пересекает по предположению сторону AB два раза, и, следовательно, вершины A и B должны находиться по одну сторону от этой окружности. Стороны AD и BC, как мы видели, не пересекаются с окружностью $C_2^{(2)}$, а потому эта последняя должна пересекать периметр четырехугольника в пяти точках, чего не может быть.

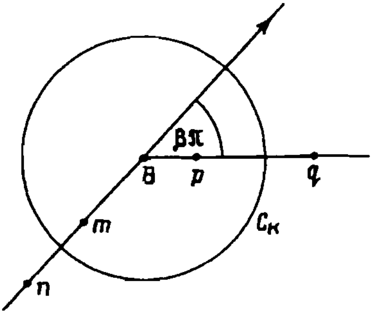

Рис. 17

Рассмотрим теперь общее предположение относительно k.

Пусть рассмотренный случай встретился впервые при некотором значении k. При выполнении неравенства (15) точки $e^{\beta\pi i}m(\lambda)$ и $e^{\beta\pi i}n(\lambda)$ будут расположены так, как это указано на рис. 17, и из рисунка этого ясно, что ортогональная окружность должна при этом пересечь сторону AB четное число раз. В остальном доказательство будет таким же, что и в случае $k = 2$.

Мы видим, таким образом, что если мы встретимся с таким интервалом, внутри которого выполняется неравенство (15), то внутри него будет существовать лишь одно значение параметра λ, удовлетворяющее равенству (14), т. е. при всяком значении k будет существовать только одна окружность C_k и одна окружность C'_k, и окружности эти будут одни и те же. То же можно сказать и об окружностях C_{-k} и C'_{-k}.

Полученные результаты мы можем формулировать в следующем виде:

Теорема 17. *В уравнении* (2) *можно определить одно и только одно значение параметра* λ*:*

$$\lambda = \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

так, чтобы существовала окружность, ортогональная к сторонам четырехугольника, соответствующего этому уравнению, и чтобы окружность эта пересекала стороны AB и CD k раз и не пересекала сторон BC и AD.

Точно так же можно определить одно и только одно значение параметра

$$\lambda = \lambda_{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

так, чтобы существовала окружность, ортогональная к сторонам упомянутого четырехугольника, и чтобы окружность эта пересекала стороны BC и AD k раз и не пересекала бы сторон AB и CD.

Кроме того, можно определить одно и только одно значение параметра

$$\lambda = \lambda_0$$

так, чтобы существовала окружность, ортогональная к сторонам четырехугольника и не пересекающая ни одну из этих сторон.

Указанные значения [λ] исчерпывают все возможные, при которых существует окружность, ортогональная к сторонам четырехугольника, и они удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_n < \lambda_{n+1} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

В упомянутом выше мемуаре Hilb'а автор доказывает предварительно, что если окружность, ортогональная к сторонам четырехугольника, пересекает одну из сторон четырехугольника k раз, то она пересечет и противоположную сторону столько же раз. Приведенное доказательство этого предложения не представляется нам убедительным. Автор пользуется при доказательстве лишь тем, что упомянутая окружность не пересечет двух сторон четырехугольника. Но легко построить такой четырехугольник, что существует окружность, ортогональная к сторонам четырехугольника, пересекающая одну из сторон два раза и не пересекающая остальных сторон. В рассматриваемом вопросе существенными являются те неравенства, которым удовлетворяют углы четырехугольника.

§ 10. Если в четырехугольнике нет двух соседних углов, равных $\pi/2$, то указанные в теореме 17 случаи представляют собою все те случаи, в которых подстановки группы уравнения (2) преобразуют в себя некоторую окружность C'. В случае же если такие углы есть, то могут существовать и другие значения параметра λ, при которых будет существовать окружность C', и эта последняя будет совпадать с одной из сторон четырехугольника*.

Определим те значения параметра, при которых возможен последний случай.

Для определенности предположим

$$\gamma = \delta = \frac{1}{2}, \qquad \beta \neq \frac{1}{2} \tag{21}$$

и рассмотрим, в каких случаях окружность, на которой лежит сторона CD, будет ортогональна к остальным трем сторонам четырехугольника. Окружность эта будет обязательно ортогональна к BC и AD в силу условий (21). Определим η по формуле (13). Стороны AB и BC представятся при этом в виде прямых, выходящих из начала координат, и для того, чтобы упомянутая окружность была ортогональна к обеим этим сторонам, необходимо и достаточно, чтобы она имела центр в начале координат. Принимая во внимание то, что сторона CD образует со стороной BC прямой угол, можем утверждать, что для ортогональности ее к стороне AB необходимо и достаточно, чтобы точки пе-

---

*См. § 5. Если бы на окружности C лежали две стороны четырехугольника, то все его углы должны были бы быть равны $\pi/2$, что противоречит неравенству (4).

ресечения стороны CD со стороною BC лежали на одинаковом расстоянии от начала координат. Но точки эти суть неподвижные точки подстановки S_3, и потому условие ортогональности может быть написано в виде

$$p(\lambda) = -q(\lambda). \tag{22}$$

Уравнение это имеет корни в тех интервалах изменения λ, внутри которых $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ разных знаков. Но в силу теоремы 16 внутри каждого такого интервала одна из этих величин убывает, а другая возрастает по абсолютному значению, и внутри такого интервала будет один и только один корень уравнения (22). Из предыдущего ясно, что между двумя последовательными значениями $\lambda = \lambda_{-k}$ и $\lambda = \lambda_{-k-1}$ лежит один и только один интервал, внутри которого $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ разных знаков. Следовательно, между вышеуказанными значениями лежит один и только один корень уравнения (22).

Если, кроме того, мы имеем

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2},$$

то совершенно так же можно показать, что между любыми двумя последовательными значениями λ_k и λ_{k+1} лежит одно и только одно значение параметра λ, при котором сторона AD будет ортогональна к трем остальным сторонам четырехугольника.

Из вышеприведенных рассуждений вытекает следующее

Дополнение к теореме 17. *Если два последовательные угла четырехугольника равны $\pi/2$, то между двумя значениями параметра λ, при которых существуют окружности, ортогональные к сторонам четырехугольника и пересекающие сторону, лежащую между прямыми углами, k и $k+1$ раз ($k = 0, 1, \ldots$), будет находиться одно и только одно такое значение параметра λ, при котором указанная только что сторона будет ортогональна к трем остальным сторонам четырехугольника.*

Теорема 17 и последнее дополнение к ней исчерпывают все случаи, в которых подстановки группы уравнения (2) преобразуют в себя некоторую окружность.

§ 11. Рассмотрим теперь вопрос о существовании налегающих сторон в четырехугольнике. Из рассуждений § 2 и § 4 видно, что для того, чтобы стороны AB и BC были неналегающими, необходимо и достаточно, чтобы λ заключалось между большим корнем уравнения (9_2) и меньшим корнем уравнения (10_2). Аналогичное условие должно быть выполнено и по отношению к двум другим сторонам четырехугольника, если мы желаем получить четырехугольник, не имеющий налегающих сторон.

Напомним, что если одна из сторон четырехугольника является налегающей, то две соседние не могут быть таковыми.

Для простоты мы в дальнейшем будем рассматривать лишь тот случай, когда противоположные стороны одновременно делаются налегающими, т. е. когда при одном и том же значении λ противоположные стороны обращаются в полную окружность.

Рассмотрим для примера стороны AB и CD. Если вышеуказанное обстоятельство имеет место, то вершина A совпадает с вершиной B, а вершина C — с вершиной D, стороны AB и CD представляют собою две окружности, а стороны BC и AD соединяют некоторую точку одной окружности с точкой другой окружности. Принимая во внимание направления отсчета углов в четырехугольнике, получаем

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta. \tag{23_1}$$

Рассматривая стороны BC и AD, точно так же получим

$$\beta + \gamma = \alpha + \delta. \tag{23_2}$$

Таким образом, для того, чтобы противоположные стороны четырехугольника при изменении λ одновременно обращались в полную окружность, необходимо выполнение условий

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta. \tag{24}$$

Легко показать, что условия эти будут и достаточными условиями. Действительно, при выполнении их уравнение (2) преобразуется в себя при помощи подстановки

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{a(x-1)}{x-a}, \\ y = (x_1 - a)^{\delta_2} y_1, \end{gathered} \tag{25}$$

причем интервалу $(0, a)$ будет соответствовать интервал $(1, \infty)$, а интервалу $(a, 1)$ — интервал $(\infty, 0)$. На основании этого так же, как и в § 9 гл. II, можем убедиться в том, что если две соседние вершины четырехугольника совпадут, то то же произойдет и с двумя другими вершинами четырехугольника. Точно так же мы можем при этом утверждать, что если вершина B находится во второй неподвижной точке подстановки S_1, то вершина D находится во второй неподвижной точке подстановки S_3, и т. д.

§ **12.** Перейдем теперь к рассмотрению тех случаев, в которых задача обращения может иметь однозначное решение, и к более подробному исследованию свойств четырехугольника при различных значениях параметра λ. Необходимым условием однозначности решения задачи обращения является то, чтобы числа α, β, γ и δ представлялись в виде

$$\alpha = \frac{1}{l_1}, \quad \beta = \frac{1}{l_2}, \quad \gamma = \frac{1}{l_3}, \quad \delta = \frac{1}{l_4}, \tag{26}$$

где l_1, l_2, l_3, l_4 — целые числа, бо́льшие единицы. Принимая во внимание неравенство (4), мы исключим из рассмотрения случай

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2.^*$$

Так же, как это мы делали в § 3 гл. III, мы должны рассмотреть тот интервал изменения λ, который содержит значения λ, соответствующие четырехугольникам, не имеющим налегающих сторон. Как было указано в § 4 настоящей главы, стороны такого четырехугольника не могут пересекаться.

Рассмотрим сторону AB. Если она проходит через вторую неподвижную точку подстановки S_1 или S_2, то мы будем называть ее *огибающей стороной.* В том предельном случае, когда вершина B является второй неподвижной точкой подстановки S_1 или вершина A — второй неподвижной точкой подстановки S_2, мы не будем называть сторону AB огибающей. Если четырехугольник не имеет налегающих сторон, то мы можем относительно его сторон сделать три предположения.

1. Четырехугольник не имеет огибающих сторон, и окружности, на которых лежат какие-либо противоположные стороны, не имеют общих точек.

2. Четырехугольник не имеет огибающих сторон, но по крайней мере одна пара противоположных сторон четырехугольника при продолжении пересекается или касается, причем общие точки лежат на продолжении сторон**.

3. Продолжение одной из сторон четырехугольника имеет общую точку с одной из трех сторон четырехугольника. Последнее обстоятельство, наверное, будет иметь место, если в четырехугольнике есть огибающие стороны. Предположим для

---

*В этом случае уравнение (2) интегрируется в квадратурах — см. Schlesinger [10, Bd. II, S. 256].

**Сюда же мы отнесем тот случай, когда две стороны лежат на одной и той же окружности.

определенности, что сторона AB имеет общую точку с окружностью C', на которой лежит одна из остальных трех сторон четырехугольника. Пусть E есть эта общая точка и b — ее координата. Если точка E является точкой пересечения, то отображения в стороне AB и окружности C' приведут к эллиптической подстановке S, входящей в группу уравнения (2). Отображая четырехугольник в стороне AB, мы получим значения η, соответствующие сопряженным значениям x. Если же мы совершим над плоскостью переменной η подстановку S, то получим значения η, которым будут соответствовать те же значения x, что и первоначальным значениям η. Отсюда непосредственно видно, что одинаковым значениям η будут соответствовать различные значения x. То же самое мы получим и в том случае, когда E есть точка касания. Подстановка S будет в этом случае параболической. Следовательно, в случае 3) задача обращения не может иметь однозначного решения.

Обозначим, как и раньше, буквою λ_0 то значение λ, при котором существует окружность C_0, ортогональная к сторонам четырехугольника и не пересекающая ни одну из этих сторон. Покажем, что при этом четырехугольник будет удовлетворять всем условиям пункта 1.

Из рассуждений § 5 видно, что при этом четырехугольник не будет иметь огибающих сторон. Предположим, что окружности, на которых лежат обе противоположные стороны четырехугольника, пересекаются. Совершим над плоскостью переменной η такое линейное преобразование, чтобы одна из точек пересечения превратилась в бесконечно далекую точку, другая — в начало координат и чтобы четырехугольник находился внутри ортогональной окружности C'_0. Окружность эта будет иметь центр в начале координат, и две противоположные стороны четырехугольника будут представлять собою отрезки радиусов окружности. Окружность C'_0 должна быть ортогональна и к двум другим сторонам четырехугольника, и потому эти последние должны представлять собою дуги окружности, и начало координат должно находиться вне этих окружностей. Одна из этих окружностей должна была бы быть обращена своей вогнутостью внутрь четырехугольника, и легко при этом убедиться в том, что сумма углов четырехугольника, прилежащих к этой стороне, должна быть больше π, чего не может быть при выполнении условий (26).

Если бы окружности, на которых лежат две противоположные стороны четырехугольника, касались, то точка касания должна была бы лежать на окружности C_0. Совершим над плоскостью η такое линейное преобразование, чтобы точка касания преобразовалась в бесконечно далекую точку, а окружность C_0 — в вещественную ось. Две противоположные стороны четырехугольника представятся при этом в виде отрезков, параллельных мнимой оси, две другие же стороны должны находиться на окружностях, имеющих центры на вещественной оси. Отсюда ясно, что одна из этих сторон должна была бы быть обращена своей вогнутостью внутрь четырехугольника, и мы опять придем к прежнему результату. Таким образом, наше утверждение доказано.

Покажем теперь, что если окружности, на которых лежат две противоположные стороны, имеют общие точки, то окружности, на которых лежат две другие стороны, таковых точек иметь не будут. Определим η по формуле (13) и будем непрерывно изменять параметр λ от значения λ_0. Четырехугольник будет при этом непрерывно меняться (см. § 4 гл. III). Если мы предположим, что при некотором значении λ обе пары окружностей, на которых лежат противоположные стороны, имеют общие точки, то будет существовать также и такое значение λ, при котором одна пара окружностей будет касаться, а другая — либо пересекаться, либо касаться.

Совершим над плоскостью η такое линейное преобразование, чтобы две касательные окружности перешли бы в две параллельные прямые. Из условия (26) непосредственно ясно, что две другие стороны четырехугольника должны быть обращены своей выпуклостью внутрь четырехугольника*. Если бы при этом окружности, на которых лежат эти стороны, имели бы общие точки, то центр, по крайней мере, одной из этих окружностей должен был бы находиться вне полуоси, ограниченной параллельными прямыми, но при этом легко видеть, что один из углов четырехугольника должен быть больше $\pi/2$, что противоречит условию (26). Следовательно, окружности эти не могут иметь общих точек.

§ **13.** Исследуем теперь более подробно изменение четырехугольника при указанном выше изменении параметра λ. Ограничимся при этом, как и при всех дальнейших рассуждениях,

---

*Одна из этих сторон может быть и прямой линией.

рассмотрением того случая, когда выполняется условие (24). Предположим еще для определенности, что $\alpha \neq \beta$ и пусть

$$\alpha > \beta. \tag{27}$$

Определим частное интегралов по формуле

$$\eta = \frac{i\bar{y}_0(x,\lambda)}{\bar{y}_a(x,\lambda)}, \tag{28}$$

причем оба интеграла мы будем считать вещественными в интервале $(0, a)$. При всех значениях λ, достаточно близких к λ_0, четырехугольник будет удовлетворять всем условиям пункта 1 предыдущего параграфа и будет иметь вид, указанный на рис. 18.

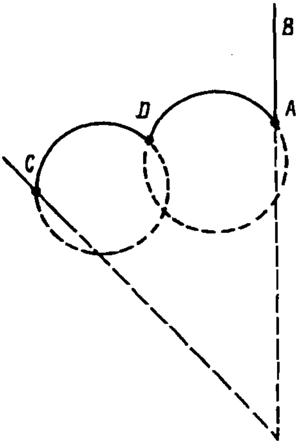

Рис. 18

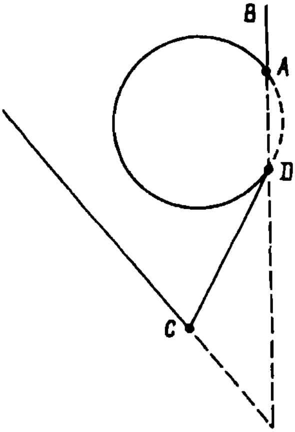

Рис. 19

Будем уменьшать параметр λ, начиная от значения $\lambda = \lambda_0$. Из теоремы 16 и рассуждений §§ 5 и 11 следует, что стороны AB и CD не сделаются при этом огибающими, а стороны BC и AD сделаются таковыми одновременно. При этом в силу неравенства (27) мы можем утверждать, что сначала сторона AD пройдет через вторую неподвижную точку подстановки S_1 и затем уже через вторую неподвижную точку подстановки S_4. Напомним при этом о том, что подстановка S_4 имеет первую неподвижную точку в вершине D.

Действительно, если вершина D находится во второй неподвижной точке подстановки S_1, т. е. лежит на мнимой оси, то из рассуждений § 11 следует, что вершина B, находящаяся в бесконечно далекой точке, должна совпадать со второй неподвижной точкой подстановки S_3, т. е. сторона CD должна быть прямой. Сторона эта не может проходить через бесконечно далекую точку, так как она не может быть огибающей. Принимая во внимание это, а также условие (27), можем утверждать, что вершина C должна находиться слева от вещественной оси, и четырехугольник будет иметь вид, указанный на рис. 19. При этом, как это непосредственно ясно, сторона BC не будет проходить через вторую неподвижную точку подстановки S_2, а сторона AD — через вторую неподвижную точку подстановки S_4. Изменим несколько прежние обозначения и будем теперь обозначать знаком λ_{-2} то значение параметра λ, которому соответствует рис. 19. При значениях λ, меньших λ_{-2}, сторона AD будет огибающей, и задача обращения не может иметь однозначного решения.

При значениях λ, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda_0 \geqslant \lambda > \lambda_{-2}, \tag{29}$$

стороны AD и CD будут обращены выпуклостью внутрь четырехугольника.

Действительно, принимая во внимание то, что четырехугольник при $\lambda = \lambda_0$ должен удовлетворять всем условиям пункта 1 § 12 и что одна из его вершин находится в бесконечно удаленной точке, можем утверждать, что указанное свойство будет существовать при $\lambda = \lambda_0$. При изменении λ в интервале (29) ни одна из указанных сторон не может быть прямой, так как при этом сторона AB или BC должна была бы сделаться огибающей, ибо вершина B, т. е. бесконечно удаленная точка, сделалась бы при этом второй неподвижной точкой подстановки S_1 или S_3.

Принимая во внимание непрерывность изменения сторон четырехугольника, можем утверждать, что стороны AD и CD, действительно, постоянно обращены выпуклостью внутрь четырехугольника.

Покажем теперь, что при выполнении условия (29) продолжение любой стороны четырехугольника не пересекает ни одной из трех остальных сторон четырехугольника. Это ясно по отношению к двум соседним сторонам, ибо при условии (29) четырехугольник не имеет налегающих сторон.

Рассмотрим теперь две противоположные стороны[28] и покажем, например, что продолжение стороны AB не может пересечь стороны CD. Точки D и C при условии (29) должны находиться слева от мнимой оси, и поэтому если указанное пересечение имеет место, то сторона DC должна два раза пересечь* продолжение стороны AB. Обозначим буквою E ту точку пересечения, которую мы встретим первой, идя по стороне DC от вершины D к вершине C. Точка C должна будет находиться внутри треугольника, ограниченного дугами AD и DE и прямой AE, и потому сторона BC должна пересечь одну из сторон этого треугольника. Она не может пересечь AD и DE, так как, как было упомянуто в § 4, в рассматриваемом случае стороны четырехугольника не могут пересекаться**. Но сторона BC не может пересечь и прямой AE, так как в этом случае она должна была бы пройти через вторую неподвижную точку подстановки S_2, и наше утверждение доказано.

Если мы применим к уравнению (2) преобразование, указанное в § 11, то стороны AB и CD преобразуются одна в другую, и мы можем утверждать также, что продолжение стороны CD не может пересечь стороны AB.

Покажем теперь, что продолжение стороны BC не может пересечь стороны AD. Вблизи точки C продолжение это будет находиться внутри окружности, на которой находится сторона CD, и вне окружности, на которой лежит сторона AD. Если это продолжение пересекает сторону AD, то оно должно сначала войти внутрь только что указанной окружности и затем, пересекая AD, войти внутрь четырехугольника. Заметим при этом, что продолжение это не может пересечь ни стороны CD, ни стороны AB, так как четырехугольник не имеет огибающих сторон. Следовательно, рассматриваемое продолжение может войти в четырехугольник или выйти из него только через сторону AD. Войдя в четырехугольник, оно уже два раза пересекло окружность, на которой лежит сторона AD, и потому продолжение это не может выйти из четырехугольника. Но это противоречит тому очевидному факту, что продолжение стороны BC вблизи точки B должно лежать вне четырехугольника.

Мы видим, таким образом, что продолжение стороны BC не может пересечь стороны AD. Пользуясь преобразованием, ука-

---

*Или коснуться, что не меняет доказательства.

**Отсюда можно непосредственно доказать наше утверждение.

занным в § 11, убедимся в том, что продолжение AD не может пересечь стороны BC.

§ **14.** Итак, из рассуждений предыдущего параграфа видно, что при выполнении условия (29) четырехугольник удовлетворяет условиям пункта 1 или 2 § 12.

Если λ достаточно близко к λ_0, то продолжения противоположных сторон четырехугольника не пересекаются, если же λ достаточно близко к λ_{-2}, то из рассмотрения рис. 19 ясно, что продолжения сторон AB и CD пересекутся.

Совершенно так же можно исследовать значения λ, бо́льшие λ_0, и установить интервал изменения:

$$\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2, \tag{29$_1$}$$

где λ_2 есть то значение λ, при котором стороны AB и CD становятся огибающими. При значениях λ, близких к λ_2, продолжения сторон AD и BC будут пересекаться.

Задача обращения может иметь однозначное решение, если λ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_2 \geqslant \lambda \geqslant \lambda_{-2}. \tag{30}$$

При всех других значениях λ четырехугольник будет иметь огибающие стороны, и задача обращения не может иметь однозначного решения.

Рассуждая совершенно так же, как и при доказательстве теоремы 8, мы можем доказать, что при различных значениях λ, удовлетворяющих условию (30), угол пересечения двух противоположных сторон не может быть одинаковым. Принимая во внимание непрерывность изменения этого угла, а также то обстоятельство, что при $\lambda = \lambda_0$ продолжения противоположных сторон не пересекаются, можем утверждать, что продолжения сторон AD и BC будут пересекаться лишь при выполнении условий (29_1), а продолжения сторон AB и CD — при выполнении условий (29).

Обозначим буквою $\lambda_{-2}^{(\varphi)}$ то значение параметра λ, при котором угол пересечения продолжения сторон AB и CD равен φ. При выполнении условия (29) вторая неподвижная точка подстановки S_4 может находиться как слева, так и справа от вещественной оси*. Первое обстоятельство будет иметь место при

---

*Применяя рассуждения теоремы 8, необходимо отдельно разобрать оба эти случая. Если $\varphi = 0$, то может встретиться лишь первый случай.

значениях λ, близких к λ_0, второе — при значениях λ, близких к λ_{-2} (см. рис. 18 и 19).

На рис. 20 мы имеем то положение четырехугольника, при котором эта неподвижная точка лежит на мнимой оси.

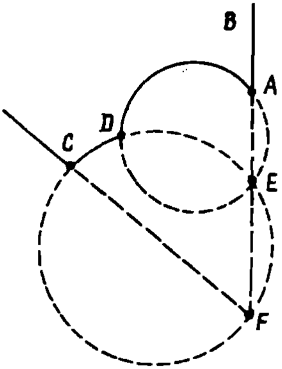

Рис. 20

Преобразование уравнения (2), указанное нами в § 11, приводит непосредственно к тому результату, что при этом и продолжения сторон AB, BC и CD пересекаются в одной и той же точке. Обозначим буквою λ_{-1} значение параметра λ, при котором имеет место рис. 20. Мы имеем

$$\lambda_{-1} = \lambda_{-2}^{(\pi - \alpha\pi - \beta\pi)}.$$

При уменьшении λ от λ_{-1} до λ_{-2} угол φ будет возрастать от значения $\pi(1 - \alpha - \beta)$ до значения $\pi(1 - \alpha + \beta)$. Таким образом, интервал (29) разбивается на три интервала: $(\lambda_{-2}, \lambda_{-1})$; $(\lambda_{-1}, \lambda_{-2}^{(0)})$; $(\lambda_{-2}^{(0)}, \lambda_0)$.

Совершенно так же можно исследовать интервал (29_1), и получим значение $\lambda = \lambda_1$, аналогичное значению λ_{-1}.

Задача обращения может иметь однозначное решение лишь в тех случаях, когда угол φ равен нулю или представляется в виде π/k, где k — целое положительное число. Получаемые при этом четырехугольники разделяются на семь типов*, и, принимая во внимание все сказанное выше, легко исследовать типы

---

*См. Klein [13, Bd. I, S. 309].

четырехугольников при различных значениях λ. Если вместо неравенства $\alpha > \beta$ мы имели бы $\alpha = \beta$, то на рис. 19 сторона CD пошла бы по продолжению стороны AB, и при этом существовала бы окружность C_{-1}, ортогональная к сторонам четырехугольника. При $\lambda = \lambda_2$ существовала бы также окружность C_1. В обоих этих случаях x был бы фуксовой функцией от η, существующей на всей плоскости, за исключением бесчисленного множества точек, лежащих на некоторой окружности.

При условии $\alpha > \beta$ значения λ, которым соответствуют окружности C_{-1} и C_1, лежат вне интервала (30), ибо прежде, чем мы дойдем до такого значения, либо $m(\lambda)$ обратится в бесконечность, либо $n(\lambda)$ — в нуль (или $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$), т. е. одна из сторон сделается огибающей (см. § 2).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

(Заметка* г-на В. Смирнова, представленная г-ном Адамаром)

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Пусть η — отношение его двух независимых интегралов. Изучение x как функции от η называется *проблемой обращения* для уравнения (1). Это приводит нас к, вообще говоря, многозначной функции

$$x = \varphi(\eta). \tag{2}$$

Особенно интересен случай однозначности этой функции, когда она автоморфна. Группа подстановок аргумента η будет группой этой автоморфной функции, и мы называем ее *группой уравнения* (1).

В этой заметке рассматривается уравнение с четырьмя сингулярными точками и регулярными интегралами. Мы будем рассматривать случай, когда разность корней определяющего фундаментального уравнения равна нулю для каждой сингулярной точки. Рассматриваемое уравнение может быть сведено к виду

$$\frac{d}{dx}\,[x(x-a)(x-1)y'] + (x+\lambda)y = 0, \tag{3}$$

где λ — произвольный параметр. Ограничиваясь случаем вещественных a и λ**, заметим, что для этого уравнения η отображает полуплоскость переменной x в четырехсторонник K,

---

*Заседание 6 сентября 1920 г.

**Можно предполагать, что $0 < a < 1$.

ограниченный дугами окружностей, углы которого равны нулю. Обратно, каждому четырехстороннику такого типа отвечает уравнение вида (3). Наша задача состоит в изучении функции (2) и группы уравнения (3) с точки зрения их зависимости от параметра λ. Используя с некоторыми модификациями классический метод Штурма, можно установить осцилляционные теоремы для уравнения (3)*. Это нам, в частности, дает доказательство существования значения $\lambda = \lambda_0$, для которого функция (2) будет фуксовой функцией с предельной окружностью. Изучая изменения четырехсторонника K в зависимости от λ, мы получаем следующие результаты.

Существуют два значения $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_{-1}$, такие, что, если $\lambda_1 > \lambda > \lambda_0$ или $\lambda_0 > \lambda > \lambda_{-1}$, то функция (2) — клейнова функция, область определения которой ограничена неаналитической кривой L. Если $\lambda = \lambda_{-1}$ или $\lambda = \lambda_1$, то эта область будет ограничена бесконечным числом окружностей. Если λ больше λ_1 или меньше λ_{-1}, то продолжения противоположных сторон четырехсторонника K пересекаются под углом φ. Можно показать, что φ — монотонная функция λ. Действительно, предположим, что двум разным значениям $\lambda > \lambda_1$ или $\lambda < \lambda_{-1}$ отвечает одно и то же значение φ. Продолжения сторон соответствующих двух четырехсторонников образуют два треугольника с углами $0, 0$ и φ.

Используя формулу $\eta_1 = (\alpha\eta + \beta)/(\gamma\eta + \delta)$, один из этих треугольников можно преобразовать в другой. При этом двум четырехсторонникам, полученным таким образом, отвечают две функции (2). Избавляясь от x, получим функцию $\eta_1 = \psi(\eta)$. Строя последовательность $\psi_2(\eta) = \psi[\psi(\eta)]$, $\psi_3(\eta) = \psi[\psi_2(\eta)]$, можно показать, что $\psi(\eta) = \eta$, откуда вытекает монотонность изменения φ. Пусть значения $\lambda = \lambda_{-1}^{(n)}$ и $\lambda = \lambda_1^{(n)}$ отвечают $\varphi = \pi/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если $\lambda = \lambda_{-1}^{(1)}$ или $\lambda = \lambda_1^{(1)}$, то функция (2) будет фуксовой без предельной окружности. Если $\lambda = \lambda_{-1}^{(n)}$ или $\lambda = \lambda_1^{(n)}$ $(n > 1)$, то функция (2) будет клейновой, причем ее группа содержит эллиптические подстановки периода n. Перечисленные случаи исчерпывают все случаи однозначности функции (2).

Перейдем теперь к изучению группы уравнения (3). Рассмотрим интервал $\lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1$; продолжая стороны K, получим

---

*См. König, Math. Ann., 1912, Bd. 71. S. 206–213.

другой четырехсторонник, которому отвечает уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-b)(x-1)y'\right]+(x+\mu)y=0 \qquad (3_1)$$

с однозначной функцией (2). Уравнения (3) и (3_1) имеют совпадающие группы, и области существования соответствующих функций (2) разделены кривой L. Можно доказать, что это — жорданова кривая, ограничивающая квадрируемую фигуру. Используя это обстоятельство и рассматривая для уравнений (3) и (3_1) функцию, обратную функции (2), можно показать, что при возрастании λ от λ_{-1} до λ_1 величина b уменьшается от 1 до 0. В силу того, что линия L — множество всех сингулярных точек группы, можно утверждать, что уравнения (3) и (3_1) являются единственными уравнениями вида (3), имеющими указанную группу с однозначной функцией (2).

Что касается других теорем о группе уравнения (3), а также изучения общего случая уравнения с четырьмя сингулярными точками и подробных доказательств, то их можно найти в моей диссертации "Задача обращения линейного дифференциального уравнения [второго порядка] с четырьмя [особыми] точками" (Петроград, 1918).

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ТЕОРИИ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Предисловие

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \qquad \text{(I)}$$

обозначим через η частное двух его независимых интегралов. Рассмотрение независимой переменной x как функции η называется *проблемой обращения* для уравнения (1). Эта проблема приводит нас к функции

$$x = \varphi(\eta), \qquad \text{(II)}$$

вообще говоря, многозначной. Случай однозначности этой функции представляет особенный интерес. Как известно, в этом случае она будет автоморфной функцией или одним из ее вырождений. Группа линейных подстановок, которые претерпевает η, когда x описывает замкнутые контуры, будет группой этой автоморфной функции. Эта группа называется *группой уравнения* (I).

Проблема обращения для дифференциального уравнения Гаусса изучалась Шварцем (Journal de Crelle, t. 75). В этом случае необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция (II) была однозначной, состоит в том, чтобы разность корней характеристического уравнения в каждой особой точке равнялась нулю или дроби $1/n$, где n — целое число.

Мы исследуем здесь проблему обращения для уравнения с четырьмя особыми точками и для его регулярных интегралов. Приведенное выше условие однозначности функции (II) является в этом случае только необходимым. Мы исследуем лишь случай, когда разность корней характеристического уравнения в каждой особой точке равна нулю. Этот случай аналогичен случаю Лежандра в общей теории уравнения Гаусса. Рассматриваемое уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\lambda)y = 0, \qquad \text{(III)}$$

где 0, a, 1 и ∞ суть особые точки и λ — произвольный параметр. Мы ограничимся случаем вещественных a и λ. В этом случае частное двух интегралов η преобразует часть плоскости x, расположенную выше вещественной оси, в односвязный четырехсторонник без точек ветвления, ограниченный четырьмя дугами окружности с нулевыми углами. Обратно, любому четырехстороннику такого вида соответствует уравнение вида (III). Наша задача состоит в изучении функции (II) и группы Г уравнения (III) в зависимости от параметра λ.

В своем знаменитом мемуаре "О группе линейных дифференциальных уравнений" (Acta mathematica, t. IV) Пуанкаре предложил метод (т. н. *метод непрерывности*) для решения вопросов этого рода. Мы будем руководствоваться этим методом при изучении уравнения (III).

Чтобы воспользоваться им, необходимо сначала установить для уравнения (I) осцилляционные теоремы, что мы делаем в главе I. Уравнение (III) изучалось с этой точки зрения Гильбертом ("Основы общей теории линейных интегральных уравнений") методом интегральных уравнений*. Мы воспользуемся здесь классическим методом Штурма.

В главе II мы установим все случаи однозначности функции (II).

В главе III мы изучаем группу Г уравнения (III) в зависимости от параметра λ и рассматриваем вопрос об определении уравнения (III) по заданной группе Г.

Настоящий мемуар составляет часть моей диссертации "Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками" (Петроград, 1918), которая содержит также исследование общего случая уравнения с четырьмя особыми точками.

Ввиду событий, происходящих на моей родине в настоящее время, я совершенно лишен математической литературы, что не позволяет мне привести необходимые ссылки.

Симферополь (Крым), август, 1920 г.

---

*Voir aussi König. Math. Ann., 1912, Bd. 71. S. 206–213.

Глава I

1. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с четырьмя особыми точками может быть приведено к виду

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right]+(x+\lambda)y=0, \tag{1}$$

если корни характеристических уравнений совпадают. Мы предположим, что a и λ вещественны и a заключено между 0 и 1. Последнее предположение не ограничивает общности задачи. В окрестности точки $x=0$ уравнение (1) имеет следующие интегралы:

$$\begin{cases} y_0(x,\lambda)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^k, \\ \bar{y}_0(x,\lambda)=y_0(x,\lambda)\log x+\varphi_0(x,\lambda), \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi_0(x,\lambda)$ — ряд по целым положительным степеням x. В окрестности особых точек $x=a,1,\infty$ мы имеем

$$\begin{cases} y_a(x,\lambda)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k(x-a)^k, \\ \bar{y}_a(x,\lambda)=y_a(x,\lambda)\log(x-a)+\varphi_a(x,\lambda), \\ y_1(x,\lambda)=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k(x-1)^k, \\ \bar{y}_1(x,\lambda)=y_1(x,\lambda)\log(x-1)+\varphi_1(x,\lambda), \\ y_\infty(x,\lambda)=\frac{1}{x}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}d_k\frac{1}{x^k}, \\ \bar{y}_\infty(x,\lambda)=y_\infty(x,\lambda)\log\frac{1}{x}+\varphi_\infty(x,\lambda). \end{cases} \tag{3}$$

Коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k — полиномы по λ; можно показать, что $y_0(x,\lambda)$, $y_a(x,\lambda)$, $y_1(x,\lambda)$ и $y_\infty(x,\lambda)$ — целые трансцендентные функции λ. Действительно, пусть ρ — радиус сходимости ряда $y_0(x,\lambda)$*. Если k достаточно велико, то

$$|a_k|<\frac{1}{(\rho-\varepsilon)^k},$$

---

*$\rho=a$ или 1.

где ε — фиксированное положительное число, меньшее ρ.

Положим $x = m$, где $|m| < \rho - \varepsilon$. Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k m^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k m^{k-1}$ представляют целые трансцендентные функции λ, так как они сходятся равномерно по λ; таким образом, начальные условия интеграла $y_0(x, \lambda)$ в неособой точке $x = m$ — целые трансцендентные функции λ; хорошо известно, что в этом случае сам интеграл также будет целой трансцендентной функцией λ. Вообще, пусть $y(x, \lambda)$ — интеграл уравнения (1). В окрестности точки $x = 0$ он имеет вид

$$\omega(\lambda) y_0(x, \lambda) \log x + \varphi(x, \lambda),$$

и если значения $y(x, \lambda)$, $y'(x, \lambda)$ — целые трансцендентные функции λ для некоторой точки $x = m$, то $\omega(\lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ — также целые трансцендентные функции λ. Обозначим через $\bar{y}_0(x, \lambda)$, $\bar{y}_a(x, \lambda)$, $\bar{y}_1(x, \lambda)$, $\bar{y}_\infty(x, \lambda)$ произвольные логарифмические интегралы, являющиеся целыми трансцендентными функциями λ. Пусть $y(x, \lambda)$ — вещественный интеграл на сегменте $(0, a)$ вещественной оси и пусть

$$\omega(\lambda) y_a(x, \lambda) \log(a - x) + \varphi(x, \lambda)$$

— его выражение в окрестности точки $x = a$.

Мы продолжим его за точку $x = a$, беря при $x > a$ выражение

$$\omega(\lambda) y_a(x, \lambda) \log(x - a) + \varphi(x, \lambda).$$

Будем называть это *вещественным продолжением*. Пусть η — частное независимых интегралов уравнения (1). Если описать замкнутый контур, отправляясь от неособой точки уравнения (1), η претерпевает линейную подстановку $(\alpha\eta + \beta)/(\gamma\eta + \delta)$. Множество всех таких подстановок образует группу Г уравнения (1). Для того, чтобы эта группа была фуксовой, необходимо и достаточно, чтобы существовал интеграл, голоморфный в двух смежных особых точках, или чтобы существовал интеграл, голоморфный в двух несмежных особых точках при условии, чтобы его продолжение через промежуточную особую точку было вещественным*.

Замена переменных

$$x_1 = \frac{a(x-1)}{x-a}, \quad y_1 = \frac{1}{x_1 - a} y \tag{4}$$

---

*См. Клейн. Math.Ann., 1892, Bd. 40.

переводит уравнение (1) в себя, переставляя сегменты $(0,a)$, $(1,\infty)$, $(a,1)$, $(\infty,0)$. Отсюда следует, что если существует интеграл, голоморфный в точках $x=0$, $x=a$, то существует также интеграл, голоморфный в точках $x=\infty$, $x=1$, а если существует интеграл, голоморфный в точках $x=a$, $x=1$, то существует также интеграл, голоморфный в точках $x=\infty$, $x=0$. Очевидно, что интеграл не может быть голоморфным в трех особых точках. Если группа Г фуксова, но не существует интеграла, голоморфного в двух смежных особых точках, то интеграл, голоморфный в произвольной особой точке, вещественно продолженный через любую смежную особую точку, будет голоморфен в следующей особой точке.

Таким образом, для того, чтобы группа Г была фуксовой, мы получаем следующие три условия:

1. Интеграл $y_0(x,\lambda)$ голоморфен при $x=a$.

2. Интеграл $y_a(x,\lambda)$ голоморфен при $x=1$.

3.[Интеграл] $y_0(x,\lambda)$, вещественно продолженный через точку $x=a$, голоморфен при $x=1$.

2. Изучим первое условие. Уравнение (1) дает

$$x(x-a)(x-1)\frac{dy_0(x,\lambda)}{dx}=-\int_0^x(x+\lambda)y_0(x,\lambda)dx\quad (0\leqslant x\leqslant a).\quad (5)$$

Пусть $\lambda<-a$. Второй член в этой формуле положителен, поскольку $y_0(x,\lambda)>0$. Но $y_0(x,\lambda)$ может стать отрицательным, лишь если сперва станет отрицательным $dy_0(x,\lambda)/dx$. Отсюда следует, что если $\lambda<-a$, то $y_0(x,\lambda)$ не имеет корней в интервале $(0,a)$. Обратно, если значение λ достаточно велико, то $y_0(x,\lambda)$ имеет корни в любом интервале (a',b'), содержащемся внутри $(0,a)$. Действительно, уравнение (1) можно привести к виду $y''+q(x)y=0$, и если значение λ достаточно велико, коэффициент $q(x)$ будет больше любого наперед заданного положительного числа, и известная теорема Штурма дает нам желаемый результат.

Обозначим через $y_{0\lambda}(x,\lambda)$ производную $y_0(x,\lambda)$ по λ. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy_{0\lambda}(x,\lambda)}{dx}\right]+(x+\lambda)y_{0\lambda}(x,\lambda)=-y_0(x,\lambda).$$

Из этого уравнения и из уравнения (1) получаем

$$x(x-a)(x-1)\left[\frac{dy_0(x,\lambda)}{dx}y_{0\lambda}(x,\lambda)-\frac{dy_{0\lambda}(x,\lambda)}{dx}y_0(x,\lambda)\right]= \\ =\int_0^x [y_0(x,\lambda)]^2dx. \quad (6)$$

Пусть $x = m$ — корень $y_0(x,\lambda)$ в интервале $(0,a)$. Формула (6) дает

$$\left[\frac{dy_0(x,\lambda)}{dx}y_{0\lambda}(x,\lambda)\right]_{x=m} > 0,$$

иначе говоря, корни $y_0(x,\lambda)$, содержащиеся в интервале $(0,a)$, убывают с ростом λ. Эти корни простые и не могут ни исчезнуть, ни появиться внутри интервала $(0,a)$.

Продолжим $y_0(x,\lambda)$ аналитически вдоль вещественной оси, и пусть

$$\alpha(\lambda)y_a(x,\lambda)\log(a-x)+\varphi_a(x,\lambda)$$

— выражение для этого интеграла в окрестности точки $x = a$. Коэффициент $\alpha(\lambda)$ не может быть равен нулю тождественно, так как в этом случае формула (6) дает

$$\int_0^a [y_0(x,\lambda)]^2dx = 0,$$

и $\alpha(\lambda)$ — целая трансцендентная функция λ.

Предположим, что с ростом λ $\alpha(\lambda)$ не обращается в нуль. В этом случае число корней $y_0(x,\lambda)$ в интервале $(0,a)$ не изменяется. Пусть $\lambda = \lambda'$ — корень $\alpha(\lambda)$. Этот корень простой, т.к. в противоположном случае формула (6) дает

$$\int_0^a [y_0(x,\lambda')]^2dx = 0.$$

Функция $\varphi_a(x,\lambda')$ отличается от $y_a(x,\lambda')$ лишь постоянным множителем, и формула (6) показывает, что знак $\varphi_a(x,\lambda')$ совпадает со знаком $\left.\frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda'}$. Предположим, например, что этот знак положителен.

Из выражения для $y_0(x,\lambda)$ в окрестности точки $x = a$ ясно, что $y_0(x,\lambda)$ положительна, если λ и x меньше и достаточно близки к λ' и a соответственно, и имеет для этих значений λ определенное число корней в интервале $(0,a)$. Эти корни уменьшаются, когда λ стремится к λ', и их число остается неизменным при

$\lambda = \lambda'$. При дальнейшем росте λ корни убывают, оставаясь в интервале $(0, a)$. Зафиксируем $x = a'' < a$ и выберем $\lambda = \lambda'' > \lambda'$, достаточно близкое к λ' и такое, что $y_0(a'', \lambda'') < 0$.

Устремим теперь x к a. Мы получим значение $x = a''' < a$, такое, что $y_0(a''', \lambda'') > 0$. Следовательно, интеграл $y_0(x, \lambda'')$ должен иметь по крайней мере один корень в интервале (a'', a'''), и так как можно зафиксировать a'' достаточно близко к a, этот корень отличен от упомянутых выше. Таким образом, когда λ, возрастая, проходит через корень $\alpha(\lambda)$, число корней $y_0(x, \lambda)$ в интервале $(0, a)$ возрастает на единицу.

В самом деле, предположим, что переход λ через λ' приводит к появлению двух корней: x' и x''. Если λ стремится к λ' сверху, то они стремятся к a, и из известной теоремы Штурма следует, что интеграл $y_a(x, \lambda)$ имеет корень, содержащийся между x' и x'' и также стремящийся к a. Но это невозможно, так как $y_a(a, \lambda') = 1$ и $y_a(x, \lambda)$ — голоморфная функция x и λ в окрестности $x = a$ и $\lambda = \lambda'$. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема I. *Существует бесконечно много значений параметра λ*

$$-a < \lambda_\pi < \lambda_{2\pi} < \cdots < \lambda_{n\pi} < \ldots,$$

таких, что интеграл $y_0(x, \lambda_{n\pi})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, продолженный на всю вещественную ось, голоморфен при $x = a$ и имеет $(n - 1)$ корней в интервале $(0, a)$, а числа $\lambda_{n\pi}$ суть единственные корни уравнения

$$\alpha(\lambda) = 0. \tag{7}$$

Пусть $\beta(\lambda) y_1(x, \lambda) \log(1 - x) + \varphi_1(x, \lambda)$ — выражение для интеграла $y_a(x, \lambda)$, продолженного на всю вещественную ось, в окрестности точки $x = 1$. Аналогично предыдущему можно доказать следующую теорему:

Теорема II. *Существует бесконечно много значений параметра λ*

$$-a > \lambda_{-\pi} > \lambda_{-2\pi} > \cdots > \lambda_{-n\pi} > \ldots,$$

таких, что интеграл $y_a(x, \lambda_{-n\pi})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, продолженный на всю вещественную ось, голоморфен в точке $x = 1$ и имеет $(n-1)$ корней в интервале $(a, 1)$; числа $\lambda_{-n\pi}$ суть единственные корни уравнения

$$\beta(\lambda) = 0. \tag{8}$$

Если $\lambda < -a$, $y_0(x, \lambda)$ не имеет корней в интервале $(0, a)$, а если $\lambda > -a$, $y_a(x, \lambda)$ не имеет корней в интервале $(a, 1)$.

В теореме I мы можем, очевидно, взять $y_a(x, \lambda)$ вместо $y_0(x, \lambda)$, а в теореме II — $y_1(x, \lambda)$ вместо $y_a(x, \lambda)$. Если $\lambda_{n\pi} < \lambda' < \lambda_{(n+1)\pi}$, интеграл $y_0(x, \lambda')$ имеет n корней в интервале $(0, a)$, а если $\lambda_{-n\pi} > \lambda'' > \lambda_{-(n+1)\pi}$, $y_a(x, \lambda'')$ имеет n корней в интервале $(a, 1)$.

3. Изучим теперь третье условие, указанное в конце $n^\circ 1$. Сделаем вещественное продолжение интеграла $y_0(x, \lambda)$ через точку $x = a$, и пусть

$$\gamma(\lambda) y_1(x, \lambda) \log(1 - x) + \psi_1(x, \lambda),$$

— его выражение в окрестности точки $x = 1$. Обозначим через $y_0(x, \lambda)$ в интервале $(a, 1)$ вещественное продолжение $y_0(x, \lambda)$ через точку $x = a$ в интервале $(0, 1)$.

Формула (6) была доказана для $x \leqslant a$. Для $x > a$ имеем

$$x(x-a)(x-1)\left[\frac{dy_0(x, \lambda)}{dx} y_{0\lambda}(x, \lambda) - \frac{dy_{0\lambda}(x, \lambda)}{dx} y_0(x, \lambda)\right] =$$

$$= \int_a^x [y_0(x, \lambda)]^2 dx + C,$$

где C — некоторая постоянная. Она равна пределу первого члена в этой формуле, когда x стремится к a сверху. Но этот предел не изменится, если x стремится к a снизу, т. е.

$$C = \int_0^a [y_0(x, \lambda)]^2 dx,$$

и, следовательно, формула (6) доказана для $x > a$. Она показывает, как и в предыдущем параграфе, что $\gamma(\lambda)$ не может равняться нулю тождественно, имеет простые корни и что если $\gamma(\bar{\lambda}) = 0$, то знак $\psi_1(1, \bar{\lambda})$ совпадает со знаком $\left.\frac{d\gamma(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}}$.

Пусть $\bar{\lambda}$, $\bar{\bar{\lambda}}$ — два соседних корня $\gamma(\lambda)$. Интегралы $y_0(x, \bar{\lambda})$ и $y_0(x, \bar{\bar{\lambda}})$ голоморфны в точках $x = 0$, $x = 1$, $y_0(0, \bar{\lambda}) = y_0(0, \bar{\bar{\lambda}}) = 1$, а в точке $x = 1$ знаки интегралов $\psi_1(\varphi, \bar{\lambda})$ и $\psi_1(\varphi, \bar{\bar{\lambda}})$ противоположны, так как противоположны знаки $\left.\frac{d\gamma(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}}$ и $\left.\frac{d\gamma(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\bar{\bar{\lambda}}}$. Отсюда следует, что интервал $(\bar{\lambda}, \bar{\bar{\lambda}})$ содержит по крайней мере один корень уравнений (7) или (8).

Выберем два соседних корня: $\lambda_{n\pi}$, $\lambda_{(n+1)\pi}$ уравнения (7). Значения $y_0(a, \lambda_{n\pi})$, $y_0(a, \lambda_{(n+1)\pi})$ имеют противоположные знаки, и интегралы $y_0(x, \lambda_{n\pi})$ и $y_0(x, \lambda_{(n+1)\pi})$ не имеют корней в интервале

$(a, 1)$, так как они голоморфны в точке $x = a$ и $\lambda_{(n+1)\pi} > \lambda_{n\pi} > -a$. Таким образом, можно утверждать, что $\gamma(\lambda_{n\pi})$ и $\gamma(\lambda_{(n+1)\pi})$ имеют противоположные знаки, т. е. что $\gamma(\lambda)$ имеет корень в интервале $(\lambda_{n\pi}, \lambda_{(n+1)\pi})$. Рассмотрим теперь интервал $(\lambda_{-(n+1)\pi}, \lambda_{-n\pi})$. Произвольный вещественный интеграл $y(x, \lambda_{-n\pi})$ с логарифмическими особенностями на концах интервала $(a, 1)$ имеет в этом интервале $(k+1)$ корней. В самом деле, положим

$$\eta(x, \lambda_{-k\pi}) = \frac{y_a(x, \lambda_{-k\pi})}{y(x, \lambda_{-k\pi})}$$

и пусть x_1 и x_{k-1} — первый и последний корни $y_a(x, \lambda_{-k\pi})$ в интервале $(a, 1)$. Функция $\eta(x, \lambda_{-k\pi})$ монотонна по x и

$$\eta(a, \lambda_{-k\pi}) = \eta(1, \lambda_{-k\pi}) = 0.$$

Следовательно, $y(x, \lambda_{-k\pi})$ имеет по корню в интервалах (a, x_1) и $(x_{k-1}, 1)$, и наше утверждение доказано. Интегралы $y_0(x, \lambda_{-k\pi})$ и $y_0(x, \lambda_{-(n+1)\pi})$ не имеют корней в интервале $(0, a)$, первый из них имеет $(n+1)$, а второй — $(n+2)$ корней в интервале $(a, 1)$, и, следовательно, $\gamma(\lambda_{-n\pi})$ и $\gamma(\lambda_{-(n+1)\pi})$ имеют противоположные знаки, т. е. $\gamma(\lambda)$ имеет корень в интервале $(\lambda_{-(n+1)\pi}, \lambda_{-n\pi})$. Аналогичным образом можно показать, что $\gamma(\lambda)$ имеет корень в интервале $(\lambda_{-\pi}, \lambda_{\pi})$ и, таким образом, мы получаем следующую теорему:

Теорема III. *Существует бесконечно много значений* $\lambda = \lambda^{(n)}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$:

$$\cdots < \lambda_{-(n+1)\pi} < \lambda^{(-n)} < \lambda_{-n\pi} < \cdots < \lambda^{(-1)} < \lambda_{-\pi} < \lambda^{(0)} <$$
$$< \lambda_{\pi} < \lambda^{(1)} < \lambda_{2\pi} \cdots < \lambda_{n\pi} < \lambda^{(n)} < \lambda_{(n+1)\pi} < \ldots,$$

таких, что интеграл $y_0(x, \lambda^{(n)})$, *вещественно продолженный через точку* $x = a$, *голоморфен в точке* $x = 1$ *и* $\lambda^{(n)}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *суть единственные корни уравнения*

$$\gamma(\lambda) = 0. \tag{9}$$

Теоремы I, II, III дают все вещественные значения λ, для которых группа Γ фуксова.

4. Пусть $\eta(x, \lambda)$ — частное двух независимых интегралов уравнения (1). Оно преобразует верхнюю полуплоскость R в односвязный четырехсторонник K без точек ветвления, ограниченный четырьмя последовательно соприкасающимися дугами окружностей (рис. 1). Будем говорить, что четырехсторонник K соответствует уравнению (1). Обратно, каждому четырехстороннику указанной формы соответствует уравнение вида (1). Вершины A, B, C и D соответствуют точкам $x = 0$, a, 1 и ∞. Если выбрать другое частное, мы получим четырехсторонник,

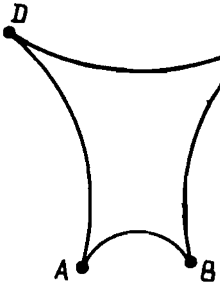

Рис. 1

который может быть получен из предыдущего линейным преобразованием $\eta_1 = (\alpha\eta + \beta)/(\gamma\eta + \delta)$. Обратно, двум четырехсторонникам, связанным таким преобразованием, соответствует одно и то же уравнение вида (1) или уравнения, независимые переменные которых связаны линейным преобразованием, причем всегда можно считать, что реализуется первая возможность.

Положим, например, $\eta(x, \lambda) = y_0(x, \lambda)/\bar{y}_0(x, \lambda)$ и рассмотрим сегмент $(0, a)$ вещественной оси плоскости x. Имеем $\eta(0, \lambda) = 0$, и корни $\eta(x, \lambda)$ совпадают с корнями $y_0(x, \lambda)$. Отсюда следует, что если $\lambda < \lambda_1$, сегменту $(0, a)$ соответствует в плоскости $\eta(x, \lambda)$ дуга, образующая лишь часть окружности; если $\lambda = \lambda_{n\pi}$, сегменту $(0, a)$ соответствует n-кратно пройденная окружность; если $\lambda_{n\pi} < \lambda < \lambda_{(n+1)\pi}$, этому сегменту соответствует n-кратно пройденная окружность и дуга, образующая часть окружности. В силу преобразования (4) можно утверждать, что аналогичные утверждения верны для сегмента $(1, \infty)$.

При $\lambda > \lambda_{-\pi}$, $\lambda = \lambda_{-n\pi}$ и $\lambda_{-n\pi} > \lambda > \lambda_{-(n+1)\pi}$ аналогичные утверждения имеют место для сегментов $(a, 1)$ и $(0, \infty)$. Таким образом, стороны K не самоперекрываются, лишь если λ содержится в интервале $\lambda_{-\pi} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\pi}$. Будем называть этот интервал *интервалом однозначного обращения* Λ. Если λ принадлежит этому интервалу, противоположные стороны K не могут пересекаться. В самом деле, если, например, стороны AB и CD пересекаются в точке M, то функция $x = \varphi(\eta)$, обратная к функции $\eta(x, \lambda)$, будет голоморфна внутри треугольника AMD и многозначна на границе, что невозможно. В этом случае можно аналогичным образом доказать, что четырехсторонник K представляет собой часть плоскости, расположенную внутри (или снаружи) контура $ABCDA$. Вершины его расположены на одной окружности T. Если одна из вершин удаляется на бесконечность, стороны, смежные с этой вершиной, суть параллельные прямые, и T также есть прямая линия. В общем случае под окружностью мы будем понимать вещественную окружность или прямую линию. Ортогональность T и сторон K — необходимое и достаточное условие для того, чтобы группа Г была фуксовой*. Если λ не принадлежит интервалу Λ, то K представляет собой многолистную поверхность без точек ветвления и противоположные стороны K самоперекрываются. Если аналитически продолжить функцию $\eta(x, \lambda)$ через один из сегментов вещественной оси, мы получим конформное преобразование нижней полуплоскости R_1 в четырехсторонник K_1, который может быть получен из K с помощью инверсии относительно стороны K, соответствующей указанному сегменту. Выполняя последовательно аналитическое продолжение $\eta(x, \lambda)$ через все сегменты вещественной оси, мы получим, таким образом, на плоскости $\eta(x, \lambda)$ решетку четырехсторонников. Если обратная функция к функции $\eta(x, \lambda)$

$$x = \varphi(\eta, \lambda) \tag{10}$$

однозначна, два любые соседние четырехсторонника образуют фундаментальную область группы Г, а решетка есть область, где эта группа действует собственно разрывно.

Глава II

1. Изучение x как функции от $\eta(x, \lambda)$ называется проблемой обращения для уравнения (1). Если эта функция (10) однозначна, она автоморфна, и ее группа совпадает с Г. Этот случай возможен, лишь если λ принадлежит интервалу Λ. В силу этого обстоятельства мы назвали этот интервал *интервалом однозначного обращения*. В этой главе мы исследуем этот интервал

---

*См. Клейн и Фрикке. Теория автоморфных функций. Т. II.

более подробно; мы будем всегда предполагать, что интервал λ принадлежит Λ.

Положим, например,

$$\eta(x,\lambda)=\frac{iy_0(x,\lambda)}{y_a(x,\lambda)}. \tag{11_1}$$

Тогда вершины A, B и C четырехсторонника K имеют координаты $\eta=0$, $\eta=\infty$ и $\eta=[\pi\alpha(\lambda)\beta(\lambda)+i\gamma(\lambda)]/\beta(\lambda)$. Вершина D будет расположена на сегменте AC, и ее координата также будет аналитической функцией λ. Положим $\lambda=\lambda^{(0)}$. Все вершины будут расположены на вещественной оси, т. е. $\gamma(\lambda^{(0)})=0$; эта ось ортогональна всем сторонам K, и функция (10), $x=\varphi(\eta,\lambda^{(0)})$, — фуксова функция, для которой вещественная ось является сингулярной линией. Пусть теперь λ убывает; рассмотрим интервал Λ', заданный неравенствами

$$\lambda_{-\pi}\leqslant\lambda\leqslant\lambda^{(0)}.$$

В этом интервале $\alpha(\lambda)<0$ и $\beta(\lambda)<0$, за исключением точки $\lambda_{-\pi}$, где $\beta(\lambda_{-\pi})=0$. Чтобы определить знак $\gamma(\lambda)$, заметим, что $y_0(x,\lambda_{-\pi})$ имеет в интервале $(a,1)$ один корень (гл. I, п° 3) и положительна в окрестности точки $x=a$. Отсюда вытекает, что $\gamma(\lambda_{-\pi})>0$, и, следовательно, $\gamma(\lambda)>0$ для $\lambda_{-\pi}\leqslant\lambda<\lambda^{(0)}$. Таким образом, если λ содержится внутри интервала Λ', K имеет форму, указанную на рис. 2. При $\lambda=\lambda_{-\pi}$ мы получим область, изображенную на рис. 3. В этом случае вершины D и C совпадают с A и B, и функция $x=\varphi(\eta,\lambda_{-\pi})$ будет фуксовой функцией, для которой вещественная ось не является сингулярной линией.

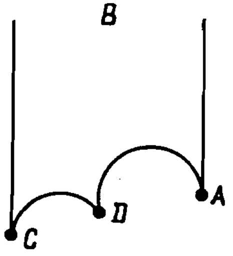

Рис. 2

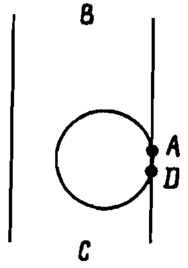

Рис. 3

Координаты вершин C и D, центры дуг AD и CD и радиусы этих дуг непрерывно изменяются вместе с λ. Продолжения сторон AD и BC не могут пересекаться. Продолжения сторон CD и AB не пересекаются, если λ достаточно близко к $\lambda^{(0)}$, и заведомо пересекаются, если значение λ достаточно близко к $\lambda_{-\pi}$. В следующем параграфе мы покажем, что различным значениям λ соответствуют также различные значения угла φ, под которым пересекаются продолжения сторон AB и CD. Таким образом, интервал Λ' разделяется на две части: $(\lambda_{-\pi}, \lambda_{-(0)})$ и $(\lambda_{-(0)}, \lambda^{(0)})$, где $\lambda = \lambda_{-(0)}$ соответствует случаю, когда указанные продолжения касаются друг друга. Если λ содержится внутри интервала $(\lambda_{-(0)}, \lambda^{(0)})$, эти продолжения не имеют общих точек, но если λ убывает от $\lambda_{-(0)}$ до $\lambda_{-\pi}$, угол φ возрастает от 0 до π. Обозначим через $\lambda_{-(\varphi_0)}$ значение λ, соответствующее значению $\varphi = \varphi_0$. Значения $\lambda_{-(\varphi)}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ образуют интервал $(\lambda_{-\pi}, \lambda_{-(0)})$. Аналогичным образом интервал Λ'', определенный неравенствами $\lambda^{(0)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\pi}$, разделяется на две части: $(\lambda^{(0)}, \lambda_{(0)})$, $(\lambda_{(0)}, \lambda_{\pi})$, где $\lambda = \lambda_{(0)}$ соответствует случаю, когда продолжения сторон BC и AD касаются друг друга. Если λ находится внутри интервала $(\lambda^{(0)}, \lambda_{(0)})$, эти продолжения не имеют общих точек, а если λ возрастает от $\lambda_{(0)}$ до λ_{π}, они пересекаются под углом ψ, который монотонно возрастает от 0 до π. Если λ принадлежит Λ'', продолжения сторон CD и AB не имеют общих точек.

Таким образом, весь интервал Λ разделяется на три части: Λ_1, Λ_2, Λ_3, определенные неравенствами:

$$\lambda_{-\pi} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{-(0)}, \quad \lambda_{-(0)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{(0)}, \quad \lambda_{(0)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\pi}$$

соответственно. Если λ принадлежит Λ_2, продолжения сторон четырехсторонника K не имеют общих точек. Этот интервал содержит значение $\lambda = \lambda^{(0)}$. Если λ принадлежит Λ_1, продолжения сторон K, соответствующих сегментам $(0, a)$ и $(1, \infty)$ вещественной оси плоскости x, пересекаются, а продолжения двух других сторон не пересекаются. Напротив, если λ принадлежит Λ_3, продолжения сторон, соответствующих сегментам $(a, 1)$ и $(\infty, 0)$, пересекаются, а продолжения двух других сторон не имеют общих точек.

2. Докажем теперь теорему, анонсированную в предыдущем параграфе.

Теорема IV. *Различным значениям λ, принадлежащим интервалу Λ, не могут соответствовать одинаковые значения угла φ (или ψ).*

Чтобы не прерывать дальнейшего изложения, сделаем сначала два замечания.

Первое замечание. Если на плоскости заданы два однолистных треугольника, ограниченных дугами окружностей, вершины и углы которых совпадают, то эти треугольники совпадают. Это утверждение может быть доказано либо геометрически, либо посредством связи, существующей между такими треугольниками и теорией дифференциального уравнения Гаусса.

Второе замечание. Два произвольных линейных дифференциальных уравнения второго порядка могут быть преобразованы одно в другое посредством преобразования вида

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega(x), \\ y_1 &= \omega_1(x)y, \end{aligned} \tag{12_1}$$

причем функция $\omega(x)$ может быть получена посредством исключения η из функций (10), соответствующих заданным уравнениям. Если эта функция линейна, будем считать, что заданные уравнения не отличаются. Если двум уравнениям вида (1) соответствует один и тот же четырехсторонник K, причем в обоих случаях точкам $x = 0, 1, \infty$ соответствуют одинаковые вершины K, исключение η приводит к функции ω, которая задает конформное отображение полуплоскости в себя, оставляющее неподвижными точки $x = 0, 1, \infty$, т. е. два заданных уравнения совпадают.

Вернемся теперь к доказательству теоремы IV. Предположим, что двум значениям $\lambda = \lambda'$, $\lambda = \lambda''$ соответствует одно и то же значение φ. Уравнениям

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\lambda')y = 0, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x(x-a)(x-1)\frac{dy}{dx}\right] + (x+\lambda'')y = 0 \tag{12}$$

соответствует четырехсторонник[29], изображенный на рис. 4. Треугольники $A_1D_1M_1$ и $A_2D_2M_2$ имеют углы 0, 0, φ. Преобразуем плоскость четырехсторонника $A_2B_2C_2D_2$ посредством формулы $\eta_1 = (\alpha\eta + \beta)/(\gamma\eta + \delta)$ и выберем коэффициенты таким образом, чтобы треугольник $A_2D_2M_2$ совпал с треугольником $A_1D_1M_1$ (первое замечание). Это преобразование эквивалентно другому выбору частного двух интегралов уравнения (12).

Обозначим через K_1 четырехсторонник $A_1B_1C_1D_1$, а через K_2 — четырехсторонник, соответствующий уравнению (12), полученный в результате преобразования. Изобразим K_2 на плоскости K_1. Сторона A_2D_2 совпадает со стороной A_1D_1, а стороны A_2B_2 и D_2C_2 наложатся на стороны A_1B_1 и D_1C_1. Вершина C_2 не может совпасть с C_1 в силу второго замечания. Можно считать, что C_2 находится на стороне C_1D_1, так как если C_2 находится на продолжении C_1D_1, мы можем преобразовать не четырехсторонник $A_2B_2C_2D_2$, а четырехсторонник $A_1B_1C_1D_1$. Таким образом, мы получаем рис. 5, где B_3 и C_3 означают преобразованные вершины B_2 и C_2.

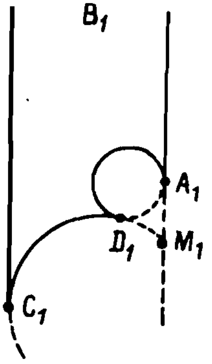

Рис. 4

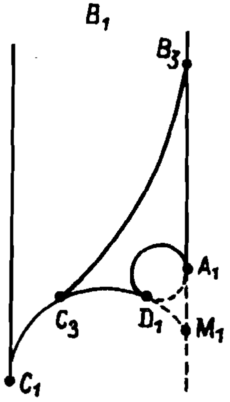

Рис. 5

Исключение x из $\eta(x, \lambda')$ и $\eta_1(x, \lambda'')$ приводит к функции $\eta_1 = \rho(\eta)$, задающей конформное отображение K_1 на K_2; при этом преобразованные вершины A_1, B_3, C_3, D_1 переходят соответственно в вершины A_1, B_1, C_1, D_1. Сделаем инверсии K_1 относительно сторон A_1B_1, A_1D_1 и D_1C_1. Мы получим, таким образом, область E, составленную из четырех четырехсторонников. Функция $\rho(\eta)$ голоморфна в E за исключением вершин, она принимает каждое значение один раз и отображает E в область, образованную K_2 и его инверсиями относительно сторон A_1B_3,

A_1D_1 и D_1C_3. Таким образом, функции

$$\begin{aligned}
\rho_1(\eta) &= \rho(\eta);\\
\rho_2(\eta) &= \rho[\rho_1(\eta)];\\
\rho_3(\eta) &= \rho[\rho_2(\eta)], \ldots;\\
\rho_n(\eta) &= \rho[\rho_{n-1}(\eta)] \ldots .
\end{aligned}$$

голоморфны и ограничены в E и принимают каждое свое значение один раз.

В силу принципа Монтеля можно выделить из этой последовательности подпоследовательность, сходящуюся к предельной функции $P(\eta)$. Сходимость равномерна в каждой области, расположенной внутри E, и $P(\eta)$ голоморфна в E и принимает каждое значение один раз или равна постоянной. Последняя возможность исключается, так как если η лежит на сторонах A_1B_1 или D_1C_1, то значения $\rho_n(\eta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ лежат соответственно на сторонах A_1B_3 или D_1C_3. Функция $P(\eta)$ преобразует ось A_1D_1 в себя, и могут представиться следующие два случая.

Первый случай. На дуге A_1D_1 существует точка $\eta = \eta_0$, такая, что $\eta_0 = P(\eta_0)$. В окрестности этой точки имеем

$$\rho(\eta) - \eta_0 = a_1(\eta - \eta_0) + a_2(\eta - \eta_0)^2 + \ldots,$$

где a_1 — вещественное положительное число, и

$$\rho_n(\eta) - \eta_0 = a_1^n(\eta - \eta_0) + \ldots .$$

Отсюда следует, что $a_1 = 1$, так как в противном случае $\lim_{n\to\infty} \rho'_n(\eta_0) = 0$ или ∞, но это невозможно, так как мы видели, что предельная функция $P(\eta)$ голоморфна внутри E и принимает каждое свое значение один раз*. Таким образом, мы имеем

$$\rho(\eta) - \eta_0 = (\eta - \eta_0) + a_k(\eta - \eta_0)^k + \ldots \qquad (k > 1),$$

где a_k — первый ненулевой коэффициент после a_1. Такой коэффициент заведомо существует, так как в противоположном случае K_1 и K_2 совпадали бы. Для $\rho_n(\eta)$ имеем

$$\rho_n(\eta) - \eta_0 = (\eta - \eta_0) + na_k(\eta - \eta_0)^k + \ldots,$$

т. е. $\lim_{n\to\infty} \rho_n^{(k)}(\eta_0) = \infty$, но это невозможно, и мы можем утверждать, что первый случай не может реализоваться.

---

*Производные предельной функции суть пределы производных функций, сходящихся к предельной функции.

Второй случай. Когда точка η описывает дугу DA в некотором направлении, точка $\rho(\eta)$, описывающая ту же дугу в том же направлении, находится все время впереди или позади точки η. Выберем внутри дуги AD точку $\eta = \eta_0$ и пусть $\eta_n = \rho_n(\eta_0)$ ($n = 1, 2, \ldots$). Точки η_0, η_1, $\eta_2, \ldots$ расположены на дуге AD одна за другой и, значит, стремятся к некоторой определенной точке η'. Функция $\rho(\eta)$ преобразует дугу $\eta_0\eta_1$ в $\eta_1\eta_2$, а эту последнюю — в $\eta_2\eta_3$, и т. д. Отсюда следует, например, что

$$P(\eta_0) = P(\eta_1) = P(\eta_2) = \cdots = \eta',$$

но мы видели, что функция $P(\eta)$ принимает каждое свое значение лишь один раз. Таким образом, второй случай также не может реализоваться, и теорема IV доказана.

3. Рассмотрим теперь группу Γ и проблему обращения для уравнения (1). Предположим сначала, что λ принадлежит интервалу Λ_2. При этом четырехсторонник K имеет форму, изображенную на рис. 6. Последовательные инверсии четырехсторонников относительно их сторон приводят все время к новым четырехсторонникам, и решетка этих четырехсторонников образует односвязную область A, ограниченную кривой L.

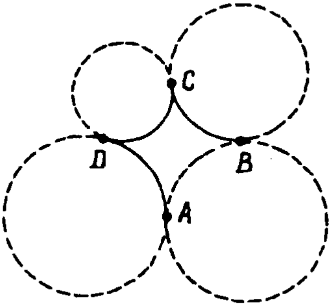

Рис. 6

Если $\lambda = \lambda^{(0)}$, эта кривая есть окружность; в остальных случаях эта кривая неаналитична. В первом случае функция (10) фуксова, а в остальных случаях это клейнова функция с сингулярной линией L.

За исключением случая $\lambda = \lambda^{(0)}$ группа Γ содержит параболические, гиперболические и локсодромические подстановки. При $\lambda = \lambda^{(0)}$ локсодромические преобразования отсутствуют. Не существует никаких соотношений между подстановками группы Γ^*.

Сделаем инверсию K относительно его стороны CD и пусть A', B' — образы вершин A, B. Мы получим шестиугольник $ABCA'B'DA$, который является фундаментальной областью группы Γ. Стороны AB и $A'B'$ связаны подстановкой $\sigma = S_3^{-1}S_2^{-1}$, где S_2, S_3 суть подстановки, соответствующие обходам вокруг точек $x = a$ и $x = 1$, исходя из точки верхней полуплоскости R, причем σ — гиперболическая подстановка.

Рассмотрим теперь интервал Λ_1. Случай $\lambda = \lambda_{-\pi}$ уже рассматривался. В этом случае форма K приведена на рис. 3, функция (10) фуксова без сингулярной окружности и подстановка σ тождественная.

Последовательные инверсии K всегда приводят к новым четырехсторонникам, если рассматривать инверсии относительно сторон AB и CD как совпадающие. Следовательно, все соотношения между подстановками из группы Γ являются в этом случае следствиями соотношения $S_2S_3 = 1$.

Выберем теперь в интервале Λ_1 значение $\lambda = \lambda_{-(0)}$; в этом случае A — односвязная область, ограниченная бесконечным числом окружностей, функция (10) клейнова, σ — параболическая подстановка и не существует никаких соотношений между подстановками из группы Γ.

Наконец, рассмотрим общий случай. Функция (10) может быть однозначной, лишь если $\varphi = \pi/n$ $(n = 2, 3, \ldots)$, т. е. если $\lambda = \lambda_{(-\pi/n)}$. В этом случае область A — бесконечносвязная и ограниченная бесконечным числом окружностей, функция (10) клейнова и σ — эллиптическая подстановка порядка n. Если мы преобразуем шестиугольник $ABCA'B'DA$ посредством подстановки $\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}$, то получим кольцевую область, ограниченную $4n$ дугами окружностей. Последовательные инверсии этой области дают всегда новые кольцевые области, и можно поэтому утверждать, что все соотношения между подстановками в группе Γ следуют из соотношения $(S_2S_3)^n = 1$.

Интервал Λ_3 приводит к тем же случаям, что и Λ_1. Функция (10) однозначна, если $\lambda = \lambda_\pi$, $\lambda_{+(0)}$ или $\lambda_{-(\pi/n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Вместо сторон AB и CD следует рассматривать стороны BC и AD, а вместо подстановки σ — подстановку $\tau = S_2^{-1}S_1^{-1}$, где S_1

---

*См. Клейн и Фрикке. Теория автоморфных функций. Т.I.

соответствует обходу вокруг точки $x = 0$.

Предыдущие рассмотрения приводят к следующей теореме:

Теорема V. *Существует значение $\lambda = \lambda^{(0)}$, при котором функция* (10) *фуксова с сингулярной окружностью. Существуют два значения: $\lambda_{-(0)}$ и $\lambda_{(0)}$, такие, что $\lambda_{-(0)} < \lambda^{(0)} < \lambda_{(0)}$, и если λ принадлежит интервалу $(\lambda_{-(0)}, \lambda_{(0)})$, за исключением точки $\lambda = \lambda^{(0)}$, функция* (10) *клейнова с областью существования, ограниченной неаналитической кривой L. Если $\lambda = \lambda_{-(0)}$ или $\lambda = \lambda_{(0)}$, эта функция клейнова с односвязной областью существования, ограниченной бесконечным числом окружностей. Существует два значения: $\lambda = \lambda_{\pi} > \lambda_{(0)}$ и $\lambda = \lambda_{-\pi} < \lambda_{-(0)}$, для которых функция* (10) *фуксова без сингулярной окружности, и имеют место следующие соотношения:*

$$S_2S_3 = 1 \quad (\lambda = \lambda_{-\pi}); \qquad S_1S_2 = 1 \quad (\lambda = \lambda_{\pi}).$$

В интервале $(\lambda_{-\pi}, \lambda_{-(0)})$ существует возрастающая последовательность $\lambda_{-(\pi/2)}$, $\lambda_{-(\pi/3)}$, $\lambda_{-(\pi/4)}, \ldots$, сходящаяся к $\lambda_{-(0)}$ и такая, что если $\lambda = \lambda_{-(\pi/n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, функция (10) *— клейнова и ее область существования бесконечносвязна и ограничена бесконечным числом окружностей, а группа Γ содержит эллиптические подстановки порядка n. Эти подстановки имеют вид $S(S_2S_3)^kS^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, где S — произвольная подстановка из группы Γ.*

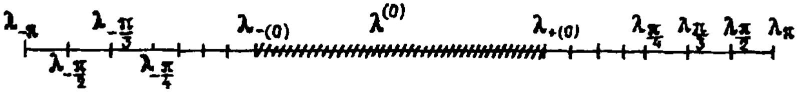

Рис. 7

В интервале $(\lambda_{(0)}, \lambda_{\pi})$ существует возрастающая последовательность $\lambda_{(\pi/2)}$, $\lambda_{(\pi/3)}, \ldots$, сходящаяся к $\lambda_{(0)}$ и такая, что если $\lambda = \lambda_{(\pi/n)}$, $(n = 2, 3, \ldots)$, функция (10) *клейнова, ее область существования имеет те же свойства, что и при $\lambda = \lambda_{(\pi/n)}$, а группа Γ содержит эллиптические подстановки $S(S_1S_2)^kS^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ порядка n. Перечисленные случаи исчерпывают все случаи, когда функция* (10) *однозначна.*

Мы указываем описанные значения λ на рис. 7.

Глава III

1. В этой главе мы изучим более подробно группу Г. Если λ принадлежит интервалу Λ_2, продолжения сторон K образуют новый четырехсторонник K', который мы назовем *дополнительным четырехсторонником.* Можно всегда предполагать, что точка $\eta = \infty$ находится внутри K' (см. рис. 6). Если сделать инверсию K и K' относительно его сторон, мы получим две решетки четырехсторонников, разделенных двенадцатью окружностями. Если снова сделать инверсию относительно сторон, расположенных на этих окружностях, мы получим две решетки четырехсторонников, разделенных тридцатью шестью окружностями, и т. д. В пределе мы получим две решетки: A и B, разделенные кривой L. Если $\lambda = \lambda^{(0)}$, L — окружность, в остальных случаях — это неаналитическая жорданова кривая*.

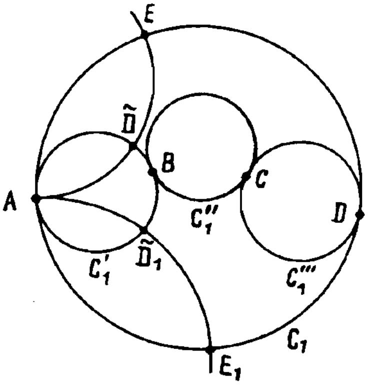

Рис. 8

Эта кривая является пределом цепочек окружностей, последовательно касающихся друг друга. Каждая цепочка составляет часть предыдущей, причем каждая окружность C_1 заменяется тремя окружностями: C_1', C_1'', C_1''', как показано на рис. 8. Мы хотим показать, что площадь цепочек стремится к нулю, т. е. что область A квадрируема.

---

*Клейн и Фрикке. Теория автоморфных функций. Т. I.

Делая произвольное число инверсий, мы заменяем, например, окружность C'_1 цепочкой окружностей с кругами A и B. Покажем, что существует положительное число $q < 1$, такое, что отношение площади этой цепочки к площади C'_1 становится меньше q после достаточно большого числа инверсий. Преобразование $\eta_1 = a\eta + b$ не меняет этого отношения, поэтому можно считать, что точка A имеет координату $\eta = 0$, линия центров C_1 и C'_1 — вещественная ось и диаметр C_1 равен 1. Проведем через точку A две окружности: C', C'', ортогональные к C'_1 и вырезающие четверть этой окружности. Мы получаем треугольники $A\widetilde{D}E$ и $A\widetilde{D}_1E_1$ (см. рис. 8). Покажем, что круги C''_1, C'''_1 не могут иметь общих точек с обоими этими треугольниками. Пусть $1/m$ $(m > 1)$ — диаметр окружности C'_1. Сделаем преобразование $\eta_1 = 1/\eta$ и пусть $\eta_1 = \eta'_1 + i\eta''_1$.

Окружности C_1, C'_1, C' и C'' переходят на плоскости η_1 в прямые линии $\eta'_1 = 1$, $\eta'_1 = m$, $\eta''_1 = -m$, $\eta''_1 = m$. Круги C''_1 и C'''_1 должны оказаться внутри полосы, ограниченной прямыми $\eta'_1 = 1$ и $\eta'_1 = m$; поэтому их диаметры меньше $(m - 1)$. Но треугольники ADE, AD_1E_1 на плоскости η_1 образуют часть этой полосы, расположенную выше прямой $\eta''_1 = m$ и ниже прямой $\eta''_1 = -m$, и, следовательно, круги C''_1 и C'''_1 не могут иметь общих точек с обоими треугольниками одновременно.

Предположим, например, что треугольник ADE (см. рис. 8) не имеет общих точек с C''_1 и C'''_1. Сделав достаточно большое число инверсий относительно окружностей, проходящих через точку A, можно заполнить четырехсторонниками решетки B сколь угодно большую часть лунки AD; поэтому для круга C'_1 можно взять в качестве числа q, существование которого мы хотим доказать, число q_0, удовлетворяющее неравенству $1/2 + 1/\pi < q_0 < 1$, так как площадь лунки равна $\pi/2 - 1$. То же число q_0 подходит и для C'''_1.

Рассмотрим теперь круг C''_1. Сделав инверсию по отношению к этому кругу, мы получим внутри него три круга. К двум из них, аналогичным C'_1 и C'''_1, можно применить предыдущее рассуждение. Сделав инверсию по отношению к третьему кругу, мы снова получим три круга, и т. д. Очевидно, что площадь кругов, расположенных в середине, стремится к нулю; следовательно, можно утверждать, что число q_0 годится также и для круга C''_1. Из существования такого числа q_0 немедленно следует, что площадь цепочки кругов, т. е. сумма квадратов радиусов кругов, составляющих цепочку, стремится к нулю.

2. Любое уравнение вида (1) полностью определено, если задать значения a и λ; мы обозначим такое уравнение символом $[a, \lambda]$, предполагая всегда, что a и λ вещественны и $0 < a < 1$.

Если замена переменной вида

$$x_1 = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad y_1 = \omega_1(x) y \tag{13}$$

переводит уравнение $[a, \lambda]$ в уравнение такого же вида, то преобразованное уравнение есть также $[a, \lambda]$ или $[1 - a, -(1 + \lambda)]$, и можно считать, что α, β, γ и δ вещественны. Если $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, то четырехсторонники, отвечающие уравнениям, связанным преобразованием (13), связаны линейным преобразованием. Если $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, эти четырехсторонники связаны линейным преобразованием второго рода, т. е. преобразованием вида $\eta_1 = (a\bar{\eta} + b)/(c\bar{\eta} + d)$, где $\bar{\eta}$ — комплексное число, сопряженное с η.

Обратные утверждения также очевидны. В случае $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ четырехсторонник, отвечающий одному уравнению, связан линейным преобразованием первого рода с каждым четырехсторонником, смежным с четырехсторонником, отвечающим другому уравнению. Рассматривая значения x и x_1, соответствующие вершинам четырехсторонников, и соответствие между этими вершинами, легко найти подстановку $x_1 = (\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)$ и вид преобразованного уравнения, что мы и сделаем [далее].

Вернемся теперь к рассмотрению четырехсторонников K и K', и пусть $[a, \lambda]$ и $[b, \mu]$ — соответствующие уравнения. Будем всегда предполагать, что вершины A, C и D двух четырехсторонников соответствуют значениям $x = 0, 1, \infty$, и, следовательно, K' есть конформный образ нижней полуплоскости R_1.Если изменить λ, то b и μ также будут меняться. Покажем, что двум разным значениям λ не могут соответствовать одинаковые значения b.

Предположим, что, напротив, $[a, \lambda']$, $[b, \mu']$ и $[a, \lambda'']$, $[b, \mu'']$ — две пары соответственных уравнений. Пусть η — частное интегралов уравнений $[a, \lambda']$ и $[b, \mu']$, K и K' — соответствующие четырехсторонники, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — решетки четырехсторонников на плоскости η, L — их сингулярный контур (см. п°. 1). Если сделать n инверсий K и K' относительно свободных сторон, мы получим цепочку, состоящую из $4 \cdot 3^n$ кругов. Пусть $C_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, 4 \cdot 3^n$) — ограничивающие их окружности, $\rho_n^{(k)}$ — их радиусы, δ_n, δ_n' и δ_n'' — контур этой цепочки и его части, содержащиеся в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Наконец, пусть $\bar{\eta}$ — частное интегралов уравнений $[a, \lambda'']$ и $[b, \mu'']$, а $\overline{K}$, $\overline{K}'$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{L}$, $\overline{C}_n^{(k)}$, $\overline{\rho}_n^{(k)}$, $\overline{\delta}_n$, $\overline{\delta}_n'$, $\overline{\delta}_n''$ — аналогичные объекты для точки $\bar{\eta}$. Исключение переменной x приведет к двум функциям: $\bar{\eta} = \varphi(\eta)$ и $\bar{\eta} = \psi(\eta)$, которые преобразуют K и K' в $\overline{K}$ и $\overline{K}'$, причем вершины K и K' соответствуют вершинам $\overline{K}$ и $\overline{K}'$. Следовательно, эти функции аналитичны соответственно в A и B, переводят их в $\overline{A}$ и $\overline{B}$, принимают одинаковые значения на L и переводят его в $\overline{L}$.

Пусть $\bar{\eta} = \Phi(\eta)$ — функция, которая в A совпадает с $\varphi(\eta)$, в B совпадает с $\psi(\eta)$ и принимает на контуре L общее значение $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$. [Функция] $\Phi(\eta)$ голоморфна внутри A и B, за исключением одного полюса, содержащегося в K', и задает непрерывное преобразование плоскости в себя. Пусть η_0 — произвольная точка, содержащаяся внутри K. Очевидно, что

$$\int_{\delta_0} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta = \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Но имеем

$$\int_{\delta_n} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta = \sum_{k=1}^{4\cdot 3^n} \int_{C_n^{(k)}} \frac{\Phi(\eta) - \Phi(\eta_n^{(k)})}{\eta - \eta_0} d\eta,$$

где $\eta_n^{(k)}$ — произвольная фиксированная точка на $C_n^{(k)}$. Следовательно,

$$\left| \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta \right| \leqslant \frac{2\pi}{\rho} \sum_{k=1}^{4\cdot 3^n} \overline{\rho}_n^{(k)} \rho_n^{(k)} \leqslant \frac{\pi}{\rho} \sum_{k=1}^{4\cdot 3^n} \left(\rho_n^{(k)2} + \overline{\rho}_n^{(k)2} \right),$$

где ρ — минимальное расстояние от η_0 до контура δ_0 (и значит, ρ не превосходит расстояния от η_0 до δ_n). Мы доказали, что

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{4\cdot 3^n} \rho_n^{(k)2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{4\cdot 3^n} \overline{\rho}_n^{(k)2} = 0,$$

но левая часть формулы (14) не зависит от n, и, следовательно,

$$\int_{\delta_0} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta = \int_{\delta_n} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

В силу этой формулы можно написать:

$$\Phi(\eta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_0'} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_0''} \frac{\Phi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta,$$

т. е. функция $\varphi(\eta)$ продолжается через контур L, исключая, быть может, вершины K. Аналогичным образом можно показать, что функция $\psi(\eta)$ также продолжима. Но значения этих функций на L совпадают, и значит, можно утверждать, что $\Phi(\eta)$ аналитична на всей плоскости за исключением, быть может, вершин K. Но в этих вершинах она непрерывна и, значит, тоже голоморфна. Таким образом, $\Phi(\eta)$ аналитична на всей плоскости и переводит ее в себя. Следовательно, $\bar{\eta} = (\alpha\eta+\beta)/(\gamma\eta+\delta)$, и легко показать, что уравнение $[a, \lambda'']$ должно совпадать с $[a, \lambda']$, т. е. $\lambda'' = \lambda'$, но это противоречит предположению.

Рассмотрим, например, уравнение $[a, \lambda^{(0)}]$, в этом случае K' может быть получен из K инверсией относительно окружности, которая проходит через вершины K и K', и произвольный четырехсторонник K'_1, примыкающий к K', может быть получен из K линейным преобразованием, причем уравнением, соответствующим $[a, \lambda^{(0)}]$, будет оно само.

Предположим теперь, что соответствующие уравнения суть $[a, \lambda]$ и $[1-a, \mu]$. Преобразуем уравнение $[1-a, \mu]$ с помощью преобразования (13), выбрав $x_1 = 1-x$, в уравнение $[a, -(1+\mu)]$. Исключая независимые переменные, мы получим функцию $\bar{\eta} = \varphi(\eta)$, которая преобразует K' в K, и функцию $\bar{\eta} = \psi(\eta)$, которая преобразует K в K' таким образом, что вершины A, B, C и D соответствуют вершинам C, B, A и D. Функция $\varphi(\eta)$ переводит B в A, а $\psi(\eta)$ переводит A в B. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, можно показать, что $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ — это одна и та же линейная функция $\bar{\eta} = (\alpha\eta+\beta)/(\gamma\eta+\delta)$. Следовательно, уравнение $[a, -(1+\mu)]$ должно совпадать с $[a, \lambda]$, уравнение $[1-a, \mu]$ связано с $[a, \lambda]$ преобразованием вида (13) и $\mu = -(1+\lambda)$.

В следующем параграфе мы докажем, что если $[a, \lambda]$ и $[b, \mu]$ — соответствующие уравнения и λ меняется от $\lambda_{-(0)}$ до $\lambda_{(0)}$, то b и μ — непрерывные функции λ и b меняется от 1 до 0. Из рассмотрений настоящего параграфа немедленно следует, что b — монотонная функция λ, и, значит, уравнение $[b, \mu]$ может быть связано с уравнением $[a, \lambda]$ преобразованием вида (13) только в двух случаях, если $\lambda = \lambda^{(0)}$ или $b = 1-a$. В первом случае $b = a$. Оба случая совпадают, если $a = 1/2$.

3. Сделаем сначала одно замечание. Если сделать замену $y = z/\sqrt{p(x)}$ в уравнении (1), где $p(x) = x(x-a)(x-1)$, это уравнение примет вид

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{4(x+\lambda)p(x) + [p'(x)]^2 - 2p''(x)p(x)}{4[p(x)]^2}z = 0. \qquad (16)$$

Из известной теоремы Штурма можно легко заключить, что существует два фиксированных числа: m' и m'', не зависящих от a, таких, что каждый интеграл уравнения (16) имеет по крайней мере один корень в интервале $(0, a)$, если $\lambda > m'$, и в интервале $(a, 1)$, если $\lambda < m''$, т. е. интервал однозначной обратимости Λ всегда остается внутри фиксированного интервала.

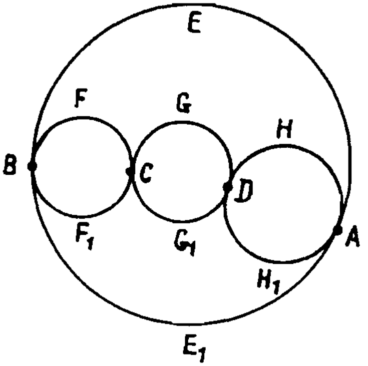

Рис. 9

Вернемся теперь к изучению соответствующих уравнений $[a, \lambda]$ и $[b, \mu]$. Если положить $\eta = iy_0(x, \lambda)/y_a(x, \lambda)$, как в п°. 1 гл. II, то K и K' находятся внутри полосы шириной $-\pi\alpha(\lambda)$, одна из сторон которой — мнимая ось. Если λ изменяется в интервале Λ_2, то можно, очевидно, найти часть плоскости η, которая не принадлежит ни K, ни K', ни смежным четырехсторонникам, и, сделав подходящее линейное преобразование с постоянными коэффициентами плоскости η, можно утверждать, что K и K' находятся внутри фиксированной окружности и смежные четырехсторонники находятся на конечном расстоянии, когда λ меняется в интервале Λ_2 (рис. 9). Таким образом, на рис. 9 стороны AEB и AE_1B и вершины A и B фиксированы, а координаты других вершин — аналитические функции λ.

Предположим теперь, что λ, меняясь в интервале Λ_2, стремится к значению λ', отличному от $\lambda_{(0)}$ и $\lambda_{-(0)}$. Этому значению

λ' соответствует определенное положение K и K' и определенные значения $b = b'$ и $\mu = \mu'$. Обозначим через A', B' ... точки на рис. 9 в случае, когда $\lambda = \lambda'$.

Мы хотим показать, что когда λ стремится к λ', b и μ стремятся к b' и μ'. В противном случае, когда λ стремится к λ', можно выделить две последовательности значений b и μ: b_n, μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящиеся к b'' и μ'', причем по крайней мере одно из этих чисел отлично от b' и μ'. Для большей ясности обозначим через $\eta(x, a, \lambda)$ и $\eta(x, b, \mu)$ частные интегралов уравнений $[a, \lambda]$ и $[b, \mu]$ в случае, изображенном на рис. 9. Предположим сначала, что значение b'' отлично от 0 и 1. Возьмем нижнюю полуплоскость R_1, приклеим к ней вдоль сегментов $(\infty, 0)$, $(0, b'')$, $(b'', 1)$ и $(1, \infty)$ четыре экземпляра верхней полуплоскости R и выбросим точки $x = 0$, b'', 1 и ∞. Пусть S — полученная таким образом поверхность. Вырежем из этой поверхности круг γ_n, описанный вокруг точки $x = b''$, причем его радиус ρ_n, который убывает и стремится к нулю с ростом n, таков, что b_n находится внутри γ_n. Пусть S_n — полученная таким образом поверхность. Функции $\eta(x, b_n, \mu_n)$ голоморфны и ограничены на S_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому в силу принципа Монтеля можно, не ограничивая общности, предположить, что $\eta(x, b_n, \mu_n)$ стремится на S к предельной функции $H(x)$, голоморфной на S. В каждой области, расположенной внутри S, $\eta(x, b_n, \mu_n)$ стремится к пределу равномерно, и ее производные $\eta^{(k)}(x, b_n, \mu_n)$ стремятся к $H^{(k)}(x)$. Функция $\eta(x, b_n, \mu_n)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{2(x+\mu_n)}{x(x-b_n)(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{[x(x-b_n)(x-1)]'^2}{[x(x-b_n)(x-1)]^2}, \tag{17}$$

и, следовательно, $H(x)$ удовлетворяет такому же уравнению с b'' и μ'' вместо b_n и μ_n. [Далее] мы увидим, что $H(x)$ непостоянна, следовательно, $H(x) = \eta(x, b'', \mu'')$, и эта функция преобразует полуплоскость R_1 в четырехсторонник K'', аналогичный K'. Но когда λ стремится к λ', вершины C и D и стороны AH_1D, DG_1C и CF_1B стремятся к определенным пределам. Например, сторона AH_1D стремится к стороне $A_1'H_1'D_1'$ четырехсторонника, соответствующего значениям $b = b'$ и $\mu = \mu'$, и значения предельной функции $H(x)$ на сегменте $(\infty, 0)$ должны лежать на этой стороне $A_1'H_1'D_1'$. Значения функции $H(x)$ на сегментах $(\infty, 0)$ и $(b'', 1)$ должны, например, лежать на сторонах $A'H_1'D'$ и $B'F_1'C'$, и, следовательно, $H(x)$ не может быть постоянной. Отсюда следует также, что четырехсторонник K'' должен совпадать с четырехсторонником K', соответствующим значениям $b = b'$ и $\mu = \mu'$, т. е. что мы должны иметь $b'' = b'$ и $\mu'' = \mu'$, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно показать, что b'' не может быть равно ни нулю, ни единице. Если предположить, например, что $b'' = 0$, то мы имеем лишь три интеграла на вещественной оси и $H(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{H'''(x)}{H'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{H''(x)}{H'(x)}\right]^2 = \frac{-2\mu}{x^2} + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2\mu''}{x(x-1)}. \tag{18}$$

Следовательно, $H(x)$ есть частное интегралов уравнения Гаусса, и разности корней характеристического уравнения для этого уравнения суть

$$\begin{aligned} &\alpha = \sqrt{4\mu + 1} && (\text{для } x = 0); \\ &\beta = 0 && (\text{для } x = 1); \\ &\gamma = 0 && (\text{для } x = \infty). \end{aligned}$$

Если бы α было чисто мнимым, $H(x)$ принимало бы свои значения на сегменте $(0, 1)$ бесконечное число раз, но это невозможно, так как функции $\eta(x, b_n, \mu_n)$ принимают каждое свое значение по одному разу. Если бы значение $\sqrt{4\mu'' + 1}$ было вещественным, функция $H(x)$ должна была бы преобразовывать полуплоскость R_1 в треугольник с вещественными вершинами, стороны которого должны находиться на сторонах $B'F_1'C'$, $C'G_1'D'$ и $D'H_1'A'$. Но это невозможно, т. к. эти стороны не могут образовывать треугольника. Аналогичным образом можно исключить возможность $b'' = 0$. Таким образом, мы доказали непрерывность b и μ, когда λ меняется в интервале Λ_2.

Предположим теперь, что λ стремятся к $\lambda_{-(0)}$, которое играет в этом случае роль λ'. В пределе сторона $C'G_1'D'$ касается стороны $A'E_1'B'$, и можно показать, что в этом случае b и μ стремятся соответственно к 1 и $-1/4$. Пусть I' — точка касания $C'G_1'D'$ и $A'E_1'B'$. Предыдущее рассуждение годится и в данном случае. Если предположить, что b'' отлично от 0 и 1, стороны $A'E_1'B'$, $B'F_1'C'$, $C'G_1'D'$ и $D'H_1'A'$ должны образовывать четырехсторонник, но они образуют два треугольника: $A'D'I$ и $B'C'I'$. Если предположить, что $b'' = 0$, стороны $B'F_1'C'$, $C'G_1'D'$ и $D'H_1'A'$ должны, как мы видели, образовывать треугольник, но это невозможно, если $C'G_1'D'$ касается $A'E_1'B'$. Следовательно,

b стремится к 1, и функция $H(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{H'''(x)}{H'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{H''(x)}{H'(x)}\right]^2 = \frac{1}{2x^2} + \frac{-2\mu''}{(x-1)^2} + \frac{2\mu''}{x(x-1)} \tag{19}$$

и преобразует полуплоскость R_1 в треугольник $A'D'I'$. Углы этого треугольника равны 0, и мы должны иметь $\sqrt{4\mu''+1} = 0$, т. е. $\mu'' = -1/4$. Аналогично можно показать, что если λ стремится к $\lambda_{(0)}$, то b и μ стремятся соответственно к 0 и $-1/4$. В этом случае касаются друг друга стороны $B'F_1'C'$ и $A'H_1'D'$. Пусть K' — их точка касания. Функция $H(x)$ преобразует полуплоскость R_1 в треугольник $C'K'D'$. Рассуждения двух последних параграфов приводят к следующей теореме:

Теорема VI. *Если в уравнении $[a,\lambda]$ λ непрерывно возрастает от $\lambda_{-(0)}$ до $\lambda_{(0)}$, то в соответствующем уравнении $[b,\mu]$ значения b и μ изменяются непрерывным образом и b убывает от* 1 *до* 0.

При этом уравнение $[b,\mu]$ может быть получено из $[a,\lambda]$ преобразованием вида (13) лишь в двух следующих случаях:

1°. $\lambda = \lambda^{(0)}$*; в этом случае $b = a$;*

2°. $b = 1 - a$.

Эти случаи совпадают при $a = 1/2$.

4. Пусть S_1, S_2 и S_3 — подстановки из группы Γ уравнения $[a,\lambda]$, соответствующие простым петлям, выходящим из точки полуплоскости R и окружающим точки 0, a и 1. Эти подстановки порождают группу Γ, и мы их назовем *образующими первого рода*, чтобы отличать их от образующих второго рода, соответствующих петлям, исходящим из точки полуплоскости R_1.

Соответственные уравнения $[a,\lambda]$ и $[b,\mu]$, очевидно, имеют одну и ту же группу Γ. Пусть S_1, S_2, S_3 — образующие первого рода группы уравнения $[a,\lambda]$. Для уравнения $[b,\mu]$ S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_3^{-1} будут образующими второго рода. Предположим, что существует еще одно уравнение $[c,\nu]$ с той же группой, причем ν принадлежит интервалу однозначной обратимости. Группа Γ не содержит эллиптических подстановок, и ее сингулярные точки образуют линию L, которая разделяет плоскость на две области: A и B. Пусть x_1 — независимая переменная и η — частное интегралов для уравнения $[c,\nu]$. Имеем $x_1 = \varphi_1(\eta)$, где φ_1 — функция, аналитическая в A или B. Предположим, например, что $\varphi_1(\eta)$ аналитична в A, и пусть $x = \varphi(\eta)$ — функция (10) для уравнения $[a, \lambda]$. Исключая η, мы получим аналитическую функцию $x_1 = \chi(x)$. Одинаковым значениям x соответствуют значения η, связанные подстановками из группы Г, и, следовательно, одинаковые значения x_1. Эта функция $\chi(x)$ может иметь особые точки $x = 0$, a, 1 и ∞.

Легко отыскать внутри $\mathcal{A}$ линии, которым соответствуют простые петли, описанные вокруг точек $x = 0, a, 1$ и ∞; следовательно, $\chi(x)$ — однозначная функция. Обратно, совпадающим значениям x_1 соответствуют совпадающие значения x, и $\chi(x)$ принимает каждое значение, за исключением $x_1 = 0$, c , 1 и ∞, один раз. Таким образом, можно утверждать, что одна из точек $x = 0$, a, 1 и ∞ является простым полюсом, а остальные точки — неособые, и, следовательно, эта функция имеет вид $\chi = (\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)$.

Итак, мы показали, что если уравнение $[c, \nu]$, где ν принадлежат интервалу однозначной обратимости, имеет группу Г, то это уравнение связано преобразованием вида (13) с уравнением $[a, \lambda]$ или $[b, \mu]$. Заметим еще, что сингулярные точки группы суть неподвижные точки неэллиптических элементов группы и точки накопления этих неподвижных точек, и, следовательно, они определяются самой группой.

Предыдущие рассуждения справедливы во всех случаях, когда функция (10) однозначна. Предположим, что в уравнении $[a, \lambda]$ $\lambda = \lambda_{\pm(\pi/n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Сингулярные точки группы Г разбивают в этом случае область $\mathcal{B}$ на бесконечное количество кругов. Если другое уравнение $[c, \nu]$, обращение которого приводит к однозначной функции $x_1 = \varphi_1(\eta)$, имеет ту же группу Г, что и уравнение $[a, \lambda]$, то функция $\varphi_1(\eta)$ аналитична в области $\mathcal{A}$, и, повторяя предыдущее рассуждение, можно показать, что уравнение $[c, \nu]$ связано с уравнением $[a, \lambda]$ преобразованием (13).

До сих пор мы предполагали, что Г — группа уравнения вида (1). Легко получить необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная группа Г была группой такого уравнения. Очевидно, что Г должна содержать три параболических подстановки, порождающие Г. Пусть S_1, S_2 и S_3 — образующие первого рода, соответствующие петлям вокруг точек $x = 0$, a и 1. Их неподвижные точки должны быть различны*, и сделав подходящее линейное преобразование плоскости, можно пред-

---

*Легко по отдельности рассмотреть случаи $\lambda = \lambda_\pi$ и $\lambda = \lambda_{-\pi}$.

полагать, что эти точки суть соответственно $\eta = 1$, ∞ и 0.

Подстановки S_1, S_2 и S_3 примут вид

$$\frac{1}{\eta_1 - 1} = \frac{1}{\eta - 1} + b \quad (S_1); \qquad \eta_1 = \eta + c \quad (S_2);$$
$$\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta} + a \quad (S_3). \tag{20}$$

Соответствующий четырехсторонник должен иметь в качестве двух сторон параллельные прямые, и его вершины должны находиться в точках $\eta = 1$, ∞, 0 и m, где m — вещественное число, заключенное между нулем и единицей. Положим $c = c' + ic''$. Из простых геометрических рассуждений следует, что $a = -2c'/(mc)$, $b = -2c'/[(1-m)c]$, т. е. a и b должны иметь вид

$$a = \frac{K_1}{c}, \quad b = \frac{K_2}{c}, \tag{21}$$

где K_1 и K_2 — вещественные числа одного знака, и удовлетворяется уравнение

$$abc + ac + bc - ab = 0. \tag{22}$$

Это уравнение выражает тот факт, что подстановка $S_1 S_2 S_3$, соответствующая петле вокруг точки $x = \infty$, — параболическая. Ее неподвижная точка есть $m = b/(a+b)$. Легко получить еще следующие условия типа неравенств, которые выражают тот факт, что противоположные стороны четырехсторонника не имеют общих точек в плоскости η:

$$\frac{b}{a+b} < \frac{c'}{2}, \qquad \text{если } c' > 0; \tag{23$_1$}$$

$$\frac{a}{a+b} < -\frac{c'}{2}, \quad \text{если } c' < 0. \tag{23$_2$}$$

Обратно, легко показать, что если a, b и c удовлетворяют условиям (21), (22) и (23), то существует четырехсторонник с вершинами $\eta = 0$, $b/(a+b)$, 1 и ∞, такой, что для соответствующего уравнения подстановки (20) суть образующие первого рода. Условия того, что продолжения сторон не пересекаются, имеют, очевидно, вид

$$\frac{a}{a+b} < \frac{c'}{2}, \qquad \text{если } c' > 0; \tag{24$_1$}$$

$$\frac{b}{a+b} < -\frac{c'}{2}, \quad \text{если } c' < 0. \tag{24$_2$}$$

Из предыдущих рассмотрений вытекает следующая теорема:

Теорема VII. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы заданная группа* Γ *была группой уравнения* $[a, \lambda]$, *состоит в том, что эта группа должна содержать три параболических образующих* σ_1, σ_2 *и* σ_3, *таких, что, после подходящего выбора подстановки* S, *подстановки* $S\sigma_1S^{-1}$, $S\sigma_2S^{-1}$, $S\sigma_3S^{-1}$ *имеют вид* (20), *причем* a, b, *и* c *удовлетворяют условиям* (21), (22) и (23).

Если, кроме того, имеет место условие (24), *то существуют, вообще говоря, два различных* уравнения вида* (1) *с заданной группой* Γ.

Во всех остальных случаях, при условии однозначной обратимости уравнения, существует только одно уравнение вида (1) *с заданной группой* Γ.

Если Γ *— фуксова группа, собственно разрывная на окружности, которая ей соответствует, она должна содержать две образующие* σ_1 *и* σ_2, *которые можно привести к виду*

$$\eta_1 = \eta + 1, \qquad \frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta} + a,$$

где a *— вещественное число,* $a > 2$. *В этом случае существует единственное уравнение вида* (1) *с заданной группой* Γ.

5. В предыдущих параграфах мы предполагали, что параметр λ дифференциального уравнения принадлежит интервалу однозначной обратимости. В этом параграфе мы укажем некоторые результаты, относящиеся к общему случаю.

Рассмотрим сначала случай, когда выполнено условие (24). В этом случае мы получаем два четырехсторонника и два уравнения $[a, \lambda]$ и $[b, \mu]$, где λ и μ принадлежат интервалу однозначной обратимости. Применим к каждому из четырехсторонников операцию трансверсального пополнения (adjonction transversale) плоскости. Для этого соединим две точки, расположенные на противоположных сторонах четырехсторонника, линией, проходящей внутри четырехсторонника, сделаем разрез вдоль этой линии и такой же разрез на втором экземпляре плоскости и склеим их вдоль разреза (см. диссертацию Иленбурга (Геттинген)).

Можно применить эту операцию к паре противоположных сторон произвольное число раз. При этом каждый четырехсто-

---

*Мы называем различными уравнения, которые нельзя преобразовать друг в друга посредством преобразования вида (13).

ронник порождает две серии четырехсторонников, и мы получаем соответствующие уравнения $[a_n, \lambda^{(n)}]$, $[a_{-n}, \lambda^{(-n)}]$, $[b_n, \mu^{(n)}]$, $[b_{-n}, \mu^{(-n)}]$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$*. Например, уравнение $[a_n, \lambda^{(n)}]$ соответствует четырехсторожнику, в котором стороны AB и CD накладываются на себя n раз. Уравнения $[a_n, \lambda^{(n)}]$ и $[a_{-n}, \lambda^{(-n)}]$ имеют те же образующие группы, что и уравнение $[a, \lambda]$, а уравнения $[b_n, \mu^{(n)}]$ и $[b_{-n}, \mu^{(-n)}]$ — те же образующие группы, что и уравнение $[b, \mu]$. Таким образом, мы получим все уравнения вида (1) с заданной группой Г.

В самом деле, в рассматриваемом случае Г не содержит эллиптических подстановок и ее сингулярные точки образуют линию L, которая разделяет плоскость на две части. Если уравнение $[c, \nu]$ имеет группу Г, в соответствующем четырехсторожнике K'' противоположные стороны и их продолжения не могут иметь общих точек на плоскости η**. K'' может иметь самоперекрывающиеся стороны, но простой контур этого четырехсторонника образует четырехсторонник K без самоперекрывающихся сторон, которому соответствует уравнение с этой же группой Г, обращение которого приводит к однозначной функции. В силу теоремы VII это уравнение можно получить из уравнений $[a, \lambda]$ и $[b, \mu]$ преобразованием вида (13), и уравнение $[c, \nu]$ можно получить таким же преобразованием из одного из вышеуказанных уравнений.

Рассмотрим теперь случай, когда продолжения противоположных сторон касаются друг друга. Предполагая, что точка $\eta = \infty$ находится внутри четырехсторонника, мы получаем рис. 10. Кроме четырехсторонника K с простым контуром $AGBHCFDIA$ окружности образуют еще четырехсторонник K' с контуром $AEDCFDCEBAGBA$, две стороны которого один раз самоперекрываются. Мы можем сделать трансверсальное пополнение в двух этих четырехсторонниках только относительно сторон, расположенных на окружностях $AGBA$ и $DFCD$. В самом деле, применяя рассуждения, посредством которых мы доказали в п. 4 гл. I, что противоположные стороны не могут иметь общих точек на плоскости η, можно доказать аналогичное утверждение для самоперекрывающихся сторон.

---

*Обозначения $\lambda^{(n)}$, $\lambda^{(-n)}$ отличаются от аналогичных обозначений в гл. I.

**Далее мы увидим, что в случае существования перекрывающихся сторон две другие стороны могут иметь общие точки на плоскости η.

Таким образом, в рассматриваемом случае мы получаем уравнения $[a, \lambda]$ и $[b_1, \mu^{(1)}]$, соответствующие двум вышеуказанным четырехсторонникам, причем $\mu^{(1)}$ не принадлежит интервалу однозначной обратимости, и две серии уравнений $[a_n, \lambda^{(n)}]$ и $[b_n, \mu^{(n)}]$, соответствующие четырехсторонникам, полученным трансверсальным пополнением. Все эти уравнения имеют одну и ту же группу Г, которая не содержит эллиптических подстановок и сингулярные точки которой образуют бесконечное число окружностей, ограничивающих односвязную область.

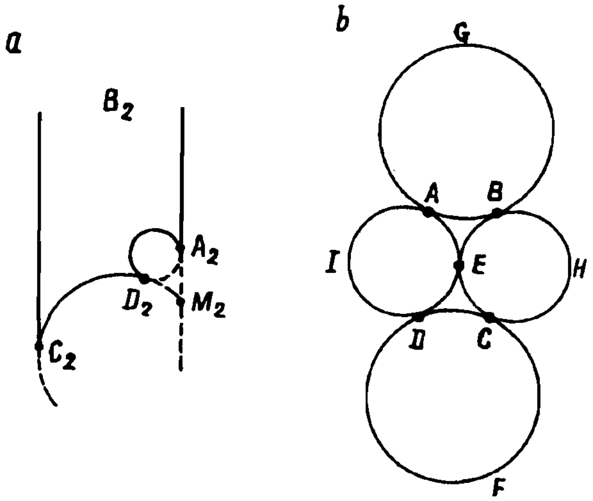

Рис. 10

Обратно, если уравнение $[c, \nu]$ имеет группу Г, то окружности, образующие соответствующий четырехсторонник, расположены так, как указано на рис. 10. Они образуют также четырехсторонник без самоперекрывающихся сторон, и соответствующее уравнение в силу теоремы VII не отличается от уравнения $[a, \lambda]$. Следовательно, этот четырехсторонник без самоперекрывающихся сторон связан с четырехсторонником K линейным преобразованием первого или второго рода, а значит, четырехсторонник, соответствующий уравнению $[c, \nu]$, связан тем же линейным преобразованием с одним из четырехсторонников K, K' или с четырехсторонником, полученным из K или K' с помощью трансверсального пополнения. Следовательно, уравнение $[c, \nu]$ может быть получено преобразованием вида (13) из одного из уравнений $[a, \lambda]$, $[a_n, \lambda^{(n)}]$, $[b_n, \mu^{(n)}]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Наконец, если Г — фуксова группа, собственно разрывная на окружности, которая ей соответствует, и если выполнены условия теоремы VII, то существует единственный четырехсторонник K без самоперекрывающихся сторон и четырехсторонники, полученные из него при помощи трансверсального пополнения относительно сторон, представляющих собой полные окружности*, и соответствующие уравнения суть все различные уравнения, имеющие группу Г.

Таким образом, мы нашли все уравнения вида (1), имеющие одинаковую группу Г, в случае, когда эта группа не содержит эллиптических подстановок. Если эта группа содержит эллиптические подстановки, две из окружностей, образующих четырехсторонник, пересекаются. В этом случае, как и в предыдущем, мы получаем два четырехсторонника: K и K'. Углубленное изучение этого случая требует предварительного изучения группы Г в зависимости от величины φ — угла, под которым пересекаются указанные окружности.

Во всех случаях окружности, образующие четырехсторонник, образуют также четырехсторонник без самоперекрывающихся сторон, и, следовательно, условия, указанные в теореме VII, годятся и в общем случае.

---

*В гл. I мы видели, что лишь противоположные стороны четырехсторонника могут быть перекрывающимися.

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

п°1. Рассмотрим два линейных уравнения с рациональными коэффициентами и правильными интегралами

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} + p(x_1)\frac{dy_1}{dx_1} + q_1(x_1)y_1 = 0. \tag{2}$$

Как известно, существует преобразование вида

$$x = r(x_1); \quad y = s(x_1)y_1, \tag{3}$$

где $r(x_1)$ и $s(x_1)$ — аналитические функции. В настоящей статье мы исследуем те случаи, когда $r(x_1)$ есть рациональная функция, и показываем, что задача разыскания уравнений, допускающих такое рациональное преобразование, сводится к некоторой задаче топологического характера, причем решение последней задачи дает не только доказательство существования рационального преобразования в тех случаях, когда оно действительно возможно, но и способ непосредственного построения рациональной функции $r(x_1)$.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $r(x_1)$ — рациональная функция. Функция $s(x_1)$ существенной роли не играет.

Уравнение $r(x_1) = C$ при любом (конечном или бесконечном) значении постоянной C имеет одно и то же число ρ корней, и это число ρ мы будем называть *порядком* $r(x_1)$. Пусть значению $x_1 = d$ соответствует $x = c$, причем имеет место разложение

$$x - c = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(x_1 - d)^{k+s}. \tag{4}$$

Такое значение $x = c$ мы будем называть *кратности* k, *если* $k > 1$, *и простым, если* $k = 1$. Понятно, как надо изменить это определение, если одно из чисел c, d или оба равны бесконечности. Если в уравнении (1) для точки c разность корней фундаментального определяющего уравнения равна ω, то в уравнении (2) в точке d она будет $k\rho$, причем присутствие логарифма в одном из интегралов уравнения (1) влечет за собою присутствие логарифма и в одном из интегралов уравнения (2).

Перейдем теперь для выяснения нашего метода к рассмотрению частной задачи.

n°2. Положим, что уравнение (1) есть уравнение Gauss'а, причем будем считать для определенности, что его особые точки суть 0, 1 и ∞. Такие уравнения характеризуются тремя разностями: λ, μ, ν корней фундаментального определяющего уравнения в особых точках, и мы будем это уравнение обозначать символом (λ, μ, ν). Относительно уравнения (2) предположим, что оно есть уравнение с четырьмя особыми точками:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \tag{5}$$

и с равными корнями фундаментального определяющего уравнения в каждой особой точке. Такое уравнение может быть написано, например, в виде

$$\frac{d}{dx_1}\left[(x_1-a_1)(x_1-a_2)(x_1-a_3)\frac{dy_1}{dx_1}\right]+(x_1+\sigma)y_1=0, \tag{6}$$

причем a_4 находится на бесконечности.

Из сказанного в n° 1 следует, что числа λ, μ, ν могут быть только или нулями или обратны целому числу, причем по крайней мере одно из них должно быть нулем.

В настоящем n° рассмотрим случай уравнения $(0,0,0)$. Рациональная функция $r(x_1)$ должна при этом обладать следующими свойствами:

1. Значения $x_1 = a_1$, a_2, a_3, a_4, и только эти значения, должны давать значения $x = 0$, 1 и ∞.

2. Никакие значения x_1, кроме, может быть, только что указанных, не должны давать кратных значений x.

Пусть ρ — порядок $r(x_1)$. Разобьем плоскость x вещественною осью на две полуплоскости. Каждой из них соответствует на плоскости x_1 криволинейный треугольник с вершинами в точках (5), и вся плоскость x_1 покрыта 2ρ такими треугольниками, причем вокруг каждой из точек (5) их лежит четное число. Положим теперь, наоборот, что плоскость x_1 разбита каким-нибудь образом на четное число треугольников с вершинами в некоторых точках a_1, a_2, a_3, a_4, причем вокруг каждой из этих вершин лежит четное число треугольников. Покажем, что всякому такому разбиению соответствует определенное рациональное преобразование уравнения $(0, 0, 0)$ в уравнение типа (6). Возьмем для этого ряд полуплоскостей x и будем сшивать их по отрезкам $(\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ вещественной оси, руководствуясь схемой построенной сети треугольников на плоскости x_1. На плоскости x получится некоторая риманова поверхность R рода 0, а потому будет существовать функция $x_1 = \varphi(x)$, принимающая на R всякое значение один лишь раз, и обратная функция $x = r(x_1)$ будет рациональной функцией, обладающей указанными выше двумя свойствами и дающей требуемое рациональное преобразование. Функций $x_1 = \varphi(x)$ существует бесчисленное множество, но любые две из них, как известно, связаны дробно-линейным преобразованием, а потому построенная схема треугольников приводит по существу лишь к одному рациональному преобразованию.

Таким образом, задача свелась к построению на плоскости сети треугольников с указанными выше свойствами.

Нетрудно показать, на чем мы не останавливаемся, что существует лишь одна схема такой сети треугольников, причем у этой сети $\rho = 2$, и вокруг двух вершин, например a_1 и a_2, лежит по четыре треугольника, а вокруг a_3 и a_4 — по два. Не ограничивая общности, можем считать, что при $x_1 = a_1 = \infty$ $r(x_1) = \infty$; при $x = a_2$ $r(x_1) = 1$; при $x = a_3 = 0$ и при $x = a_4 = 1$ $r(x_1) = 0$. Очевидно, что $r(x_1)$ должно быть второго порядка, и так как $x_1 = \infty$ дает двойное значение $x = \infty$, то $r(x_1)$ есть полином второй степени с корнями $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, т. е. $r(x_1) = kx_1(x_1 - 1)$, причем $a_2 = 1/2$, ибо $x_1 = 1/2$ дает двойное значение x. Условие $r_1(1/2) = 1$ дает $k = -4$, и окончательно

$$r(x_1) = -4x_1(x_1 - 1).$$

п°3. Рассмотрим теперь случай уравнения $(0, 0, 1/n)$, где n — целое число, большее единицы. На основании сказанного в п°1 можем утверждать, что $r(x_1)$ должна в этом случае обладать следующими свойствами:

1. Значения $x_1 = a_1$, a_2, a_3, a_4, и только эти значения, должны давать $x = 0$ и 1.

2. Все корни уравнения $r(x_1) = \infty$ должны иметь одну и ту же кратность n.

3. Никакие значения x_1, кроме упомянутых в двух предыдущих пунктах, не должны давать кратных значений x.

Вопрос приводится опять к построению сети треугольников. Две вершины каждого треугольника, соответствующие точкам $x = 0$ и 1, назовем *вершинами первого рода*, а третью — *вершиною второго рода*. Все вершины первого рода должны совпадать с одной из точек a_1, a_2, a_3, a_4, а вершины второго рода должны быть отличны от этих точек. Около каждой вершины второго рода должно находиться одно и то же число $2n$ треугольников и около каждой вершины первого рода — четное число треугольников. Наоборот, всякая такая схема сети треугольников приводит к определенному рациональному преобразованию.

Укажем в настоящем случае построение всех возможных схем сетей треугольников. Стороны, соединяющие две вершины первого рода, назовем *сечениями первого рода*, остальные стороны — *сечениями второго рода*. Будем пока строить лишь сечения первого рода. Предположим сначала, что имеются два сечения первого рода с общими концами. Можно считать, что эти концы суть точки a_1 и a_2. Этими двумя сечениями вся плоскость разобьется на два двуугольника, и легко показать, что внутри одного из них должна лежать точка a_3 и внутри другого — точка a_4. Кроме того, легко показать, что вершины a_3 и a_4 должны соединяться сечениями первого рода лишь с одной из точек a_1 и a_2. Мы получаем, таким образом, две возможные схемы, смотря по тому, будут ли a_3 и a_4 соединены сечениями первого рода с одной и той же или разными из точек a_1 и a_2. Приведенные сечения первого рода разобьют всю плоскость на две односвязные части. Поставив в каждой из этих частей одну вершину второго рода и соединив ее сечениями второго рода со всеми вершинами, лежащими на контуре соответствующей односвязной части, получим полную схему треугольников.

Предположим теперь, что никакие два сечения первого рода не образуют двуугольника. Нетрудно видеть, что три сечения первого рода не могут образовать треугольника. Возможная схема получится, если сечения первого рода образуют четырехугольник, причем, как и выше, надо еще добавить две вершины второго рода.

Теперь остается рассмотреть те случаи, когда сечения первого рода вовсе не разбивают плоскость на части. В этих случаях будет одна вершина второго рода и два или три сечения первого рода. Но случай двух сечений, как легко видеть, невозможен;

что же касается трех сечений, то они могут или выходить из общей вершины или следовать одно за другим.

Таким образом, мы получим в рассматриваемом случае всего пять схем. В этих схемах число n принимает соответственно значения: 2; 2; 2; 3; 3. Нетрудно, как и в п°2, построить рациональную функцию $r(x_1)$ для каждой из схем.

п°4. Рассмотрим, наконец, случай уравнения $(0, 1/m, 1/n)$, где m и n — целые числа, большие единицы. При этом $r(x_1)$ должна обладать следующими свойствами:

1. Значения $x_1 = a_1$, a_2, a_3, a_4, и только они должны давать $x = 0$.

2. Все корни уравнения $r(x_1) = 1$ должны иметь одну и ту же кратность m, а корни $r(x_1) = \infty$ — кратность n.

3. Никакие значения x_1, кроме упомянутых в двух первых пунктах, не должны давать кратных значений x.

В данном случае в каждом треугольнике должна быть одна вершина первого рода, совпадающая с одной из четырех точек a_1, a_2, a_3, a_4, и две вершины второго рода; эти вершины второго рода разбиваются на два класса: вокруг одних должно находиться одно и то же число треугольников $2m$ и вокруг других — $2n$.

Назовем *сечениями первого рода стороны треугольников, выходящие из вершин первого рода, а остальные стороны назовем сечениями второго рода.* Уничтожим мысленно сечения первого рода. Тогда оставшиеся сечения второго рода должны разбить всю плоскость на четыре связные части так, чтобы на контуре каждой из этих частей чередовались вершины второго рода порядков m и n, причем через вершину порядка m (или n) должно проходить m (или n) сечений второго рода. Таким образом, вместо построения сети треугольников, нам достаточно построить схемы деления плоскости на четыре связные части при условии чередования на контуре этих частей вершин порядков m и n. Для полного построения сети треугольников достаточно в каждой из этих четырех частей поставить по вершине первого рода и соединить ее со всеми вершинами второго рода, лежащими на контуре. Мы не будем останавливаться на построении всех возможных схем, что нетрудно сделать. Укажем лишь одну из них и построим для нее $r(x_1)$. Это схема, при которой две точки плоскости α и β соединены четырьмя сечениями второго рода. Здесь $\rho = 4$, точки α и β дают значения $x = \infty$ и 1 четвертой кратности, и точки $x_1 = a_1$, a_2, a_3, a_4 дают простые значения $x = 0$. Не ограничивая общности, можем считать, что три из точек a_s равны 0,1, ∞, и обозначим четвертую через a. Преобразование надо искать в виде

$$x = \frac{kx_1(x_1 - a)(x_1 - 1)}{(x_1 - \alpha)^4},$$

где k, a и α определятся из условия, что уравнение $r(x_1) = 1$ имеет четырехкратный корень. Это условие дает три решения:

$$\begin{array}{llll} a = -1, & \alpha = i, & \beta = -i, & k = -8i; \\ a = 2, & \alpha = -1 + i, & \beta = -1 - i, & k = -8i; \\ a = \dfrac{1}{2}, & \alpha = \dfrac{-1 + i}{2}, & \beta = \dfrac{-1 - i}{2}, & k = -4i. \end{array}$$

Все эти случаи приводятся к одному дробно-линейным преобразованием переменной x_1.

n°5. Рассмотрим теперь тот случай, когда уравнение (1) есть какое-либо уравнение с четырьмя особыми точками и уравнение (2) есть по-прежнему уравнение типа (6). Можно всегда считать, что три особые точки уравнения суть 0, 1 и ∞. При этом уравнение (1), кроме четырех разностей корней фундаментального определяющего уравнения, будет зависеть еще от двух параметров — четвертой особой точки и добавочного параметра (akzessorische Parameter). Для краткости обозначим уравнение символом (R, λ, μ, ν), где R, λ, μ, ν — упомянутые разности корней. Как и выше, эти четыре числа могут быть или нули, или обратны целым числам, причем хоть одно из них должно быть нулем.

Возьмем сначала уравнение (1) типа $(0, 0, 0, 0)$. Задача приводится к построению сети четырехугольников с вершинами в четырех точках:

$$a_1, a_2, a_3, a_4. \tag{7}$$

Очевидно, что возможна лишь одна схема: два четырехугольника, из которых один внутри и другой вне замкнутого контура a_1, a_2, a_3, a_4. При этой схеме $\rho = 1$, и ей соответствует просто дробно-линейное преобразование независимого переменного.

Если уравнение (1) будет типа $(0, 0, 0, 1/n)$, то задача приведется к построению сети четырехугольников, причем каждый из них должен иметь три вершины первого рода в точках (7) и одну вершину второго рода, окруженную $2n$ четырехугольниками. Пусть n_1 — общее число этих вершин второго рода. Имеем, очевидно, $\rho = nn_1$. Применяя известную формулу Riemann'а, связывающую число точек разветвления и число листов поверхности рода нуль, получим

$$2\rho = n_1(n-1) + 3\rho - 4 + 2$$

или

$$2\rho = n_1 + 2. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что $n \geqslant 2$, будем иметь $4n_1 \leqslant 2\rho$, что в силу (8) дает $\rho \leqslant 4/3$, а это нелепо. Итак, в рассматриваемом случае рациональное преобразование невозможно.

n°6. Положим теперь, что уравнение (1) будет типа $(0, 1/l, 1/m, 1/n)$. При этом каждый четырехугольник должен иметь одну вершину первого рода и три вершины второго рода, причем эти последние вершины должны быть соответственно окружены $2l$, $2m$ и $2n$ четырехугольниками и идти в определенном порядке при обходе контура четырехугольника.

Пусть общее число этих вершин равно соответственно l_1, m_1, n_1, и обозначим, как всегда, через 2ρ общее число четырехугольников. Имеем очевидные равенства:

$$\rho = ll_1 = mm_1 = nn_1.$$

Применение формулы Riemann'а в этом случае дает

$$2\rho = l_1 + m_1 + n_1 + 2, \tag{9}$$

и, принимая во внимание, что l, m и n должны быть $\geqslant 2$, будем иметь неравенство

$$\frac{4}{3}(l_1 + m_1 + n_1) \leqslant 2\rho,$$

и в силу (9) получим $\rho \leqslant 4$. Но каждая из четырех вершин первого рода должна быть окружена по крайней мере двумя четырехугольниками, откуда $\rho \geqslant 4$, и, следовательно, во всех предыдущих формулах возможен лишь случай равенства.

Итак, в рассматриваемом случае должно быть:

$$\rho = 4; \quad l = m = n = 2; \quad l_1 = m_1 = n_1 = 2,$$

и каждая вершина первого рода должна быть окружена двумя четырехугольниками. Нетрудно показать, что при этом получится одна определенная схема сети четырехугольников.

п°7. Рассмотрим, наконец, тот случай, когда уравнение (1) будет типа $(0, 0, 1/m, 1/n)$. Каждый четырехугольник должен содержать две вершины первого рода и две вершины второго рода, причем эти последние должны быть окружены соответственно $2m$ и $2n$ четырехугольниками. Имеем, как и в предыдущем п°, равенства:

$$\rho = mm_1 = nn_1; \quad 2\rho = m_1 + n_1 + 2$$

и неравенство

$$\frac{4(m_1 + n_1)}{2} \leqslant 2\rho,$$

что дает $\rho \leqslant 2$, и единственно возможен случай, при котором

$$\rho = 2, \quad m = n = 2, \quad m_1 = n_1 = 1,$$

и вокруг каждой вершины первого рода лежит по два четырехугольника. При этом получится одна определенная схема сети из четырех четырехугольников. Все четырехугольники будут иметь общие вершины в двух точках: α и β (вершины второго рода), а остальные их вершины будут находиться в точках a_1, a_2, a_3, a_4.

Заметим, что в рассматриваемом случае, как и в случае п°6, положение особых точек и значение добавочного параметра в уравнении (1) можно выбирать произвольно.

Составим рациональное преобразование, соответствующее схеме настоящего п°. Пусть три особые точки уравнения (1) суть 0, 1, ∞, и обозначим координату четвертой через b. Можем считать, что в точках 0 и ∞ разность корней фундаментального определяющего уравнения равна 1/2, а в остальных двух — нулю. Кроме того, не ограничивая общности, можно считать, что значения $x_1 = 0$ и $x_1 = \infty$ дают $x = 0$ и $x = \infty$, а значение $x_1 = 1$ дает $x = 1$. Получим преобразование $x = x_1^2$. Полагая еще $y = x_1^{1/2} y_1$, получим из уравнения $(0, 0, 1/2, 1/2)$ уравнение $(0, 0, 0, 0)$ с особыми точками ± 1 и $\pm\sqrt{b}$.

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ГРУПП ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО-БОЛИАИ

1. Все прерывные группы движения на плоскости Евклида хорошо известны, и каждой такой группе соответствует фундаментальный многоугольник, стороны которого связаны попарно производящими преобразованиями группы. На плоскости Лобачевского-Болиаи прерывные группы движения могут обладать гораздо большей сложностью своей структуры. В частности, могут существовать такие группы, фундаментальный многоугольник которых ни при каком способе его построения не будет ограничен конечным числом сторон. Настоящая работа и посвящена рассмотрению того случая, когда число сторон фундаментального прямоугольника (области) некоторой прерывной группы движения на плоскости Лобачевского-Болиаи содержит бесчисленное множество сторон.

Как известно, движение на плоскости Лобачевского-Болиаи определяется дробно-линейным преобразованием (подстановкой)

$$Sz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

с вещественными коэффициентами и определителем, равным единице:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

если принять известную интерпретацию Poincaré.

Согласно этой интерпретации точками являются точки верхней полуплоскости $y > 0$ плоскости $z = x + yi$, прямыми — полуокружности или полупрямые, находящиеся в упомянутой полуплоскости и ортогональные вещественной оси, длина кривой выражается интегралом $\int ds/y$, где $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, и углы измеряются так же, как и на плоскости Евклида. Если A — точка верхней полуплоскости и $\overline{A}$ — симметричная с ней точка нижней полуплоскости, то семейство окружностей с центром в точке A в смысле геометрии Лобачевского-Болиаи есть семейство окружностей в смысле геометрии Евклида, относительно которых точки A и $\overline{A}$ находится в инверсии, т. е. семейство окружностей, ортогональных к окружностям, проходящим через точки A и $\overline{A}$. В частности, если точка A имеет координаты $x = 0$ и $y = 1$, то это семейство будет:

$$x^2 + y^2 - 2ky + 1 = 0 \qquad (k > 1). \tag{1}$$

Из этого уравнения следует, что если расстояние в смысле Лобачевского – Болиаи точки (x, y) от точки $(0, 1)$ увеличивается от 0 до $+\infty$, то выражение

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{y} = 2i\frac{z\bar{z} + 1}{z - \bar{z}} \tag{2}$$

увеличивается от 2 до $+\infty$. Следуя Hurwitz'у (Automorphe Functionen von beliebig vielen Variabeln// Math. Ann., 1905. Bd. 61. S. 325), назовем это выражение *высотою точки* $z = x + yi$ и будем обозначать символом $H(z)$.

Пусть A' есть точка, которая получается из A в результате преобразования $S^{-1}z$. Перпендикуляр к середине отрезка AA' делит плоскость Лобачевского – Болиаи на две части, причем точки той части плоскости, где находится точка A', обладают тем свойством, что в результате применения преобразования S они удаляются от точки A, т. е. для них

$$H(Sz) > H(z), \tag{3}$$

и уравнение проведенного перпендикуляра будет

$$H(Sz) = H(z). \tag{4}$$

Из (2) следует

$$\begin{aligned} H(Sz) &= \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2) + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)x + (\beta^2 + \delta^2)}{y} = \\ &= \frac{(\alpha x + \beta)^2 + (\gamma x + \delta)^2 + (\alpha^2 + \gamma^2)y^2}{y}, \end{aligned} \tag{5}$$

а неравенство (3) и уравнение (4) можно написать так:

$$(\alpha^2 + \gamma^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)x + (\beta^2 + \delta^2 - 1) \geqslant 0.$$

Окружности (1) будем в дальнейшем называть *окружностями высоты*.

Пусть имеется бесконечная группа Г движений на плоскости Лобачевского – Болиаи:

$$S_v z = z, \quad S_n z = \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$\alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = 1,$$

и положим, что эта группа собственно прерывна, т. е. не содержит бесконечно малой подстановки. Последнее требование равносильно тому, что группа содержит лишь конечное число подстановок, коэффициенты которых по абсолютному значению меньше любого заданного положительного числа.

Точки M_1, $M_2, \ldots$, которые получаются из некоторой точки M при применении преобразований группы Г, назовем *эквивалентными* относительно Г. Вся эта совокупность точек M, M_1, $M_2, \ldots$, может быть получена из любой из этих точек при помощи преобразований группы.

Прерывной группе Г соответствует фундаментальная область, которая может быть получена следующим образом: возьмем на плоскости Лобачевского – Болиаи некоторую точку A и из всякой совокупности эквивалентных точек M, M_1, $M_2, \ldots$ причислим фундаментальной области ту точку или те точки, если их будет несколько, расстояние которых до A имеет наименьшее значение*. Такая нормальная фундаментальная область определяется совокупностью неравенств

$$H(S_n z) - H(z) \geqslant 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

или

$$(\alpha_n^2 + \gamma_n^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2(\alpha_n \beta_n + \gamma_n \delta_n)x + (\beta_n^2 + \delta_n^2 - 1) \geqslant 0. \quad (6)$$

Причем за точку A мы принимаем точку с координатами $x = 0$, $y = 1$. Уравнению

$$(\alpha_n^2 + \gamma_n^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2(\alpha_n \beta_n + \gamma_n \delta_n)x + (\beta_n^2 + \delta_n^2 - 1) = 0 \quad (7)$$

соответствует на плоскости Лобачевского – Болиаи перпендикуляр, восстановленный к середине отрезка, соединяющего точку A с той точкой, которая получается из A при помощи преобразования S_n^{-1}. Предполагая, что точка A не является неподвижной точкой ни одной из подстановок группы, можем утверждать, что уравнению (7) соответствует вполне определенная

---

*Fubini G. Jntroduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe.—Pisa, 1908. Fricke und Klein. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen.— Leipzig, 1897–1912. Bd. I, II. Giraud. Leçons sur les fonctions automorphes.—Paris, 1920.

прямая на плоскости Лобачевского – Болиаи, и при различных значениях n эти прямые будут различны. Действительно, если бы при $n = n_1$ и $n = n_2$ эти прямые совпадали бы, то преобразование $S_{n_2}S_{n_1}$ имело бы неподвижную точку A.

В дальнейшем мы будем пользоваться терминологией, соответствующей плоскости Евклида. При этом уравнениям (7) соответствуют окружности или прямые, ортогональные вещественной оси. Мы будем называть их *фундаментальными окружностями* и обозначать буквою C_n. Контур фундаментальной области $\mathcal{F}$ может состоять из дуг фундаментальных окружностей, отдельных точек вещественной оси и отрезков вещественной оси, причем последнее будет иметь место лишь в том случае, когда группа собственно прерывна на вещественной оси.

Применяя к области $\mathcal{F}$ преобразования группы, получим области $S_n\mathcal{F}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, которые вместе с $\mathcal{F}$ заполнят всю верхнюю полуплоскость и не будут иметь общих внутренних точек. Каждая из областей $S_n\mathcal{F}$ может служить фундаментальной областью группы, и роль точки A для области $S_n\mathcal{F}$ играет точка A_n, которая получается из A при помощи преобразования S_n.

Свойства нормальной фундаментальной области вполне изучены в том случае, когда область имеет конечное число сторон. Цель настоящей статьи — рассмотреть тот случай, когда число сторон фундаментальной области бесконечно велико. В следующем параграфе мы напомним некоторые известные свойства фундаментальной области, необходимые нам в дальнейшем.

2. Если среди значений

$$H(z), \quad H(S_1z), \quad H(S_2z), \ldots \tag{8}$$

будет одно наименьшее: $H(z)$, то z есть внутренняя точка области. Если среди этих значений будет два наименьших: $H(z)$ и $H(S_mz)$, то $\mathcal{F}$ имеет две стороны, связанные подстановкой S_mz, и на одной из этих сторон лежит точка z. Если среди значений (8) будет $(k+1)$ наименьших: $H(z)$, $H(S_{m_1}z)$, $H(S_{m_2}z)\ldots$, $H(S_{m_k}z)$, причем $k > 1$, то z находится в вершине области $\mathcal{F}$. Из выражения для высоты (5) и прерывности группы вытекает непосредственно, что k во всяком случае будет числом конечным. Сказанным исчерпывается все существенное, что нам необходимо было сказать о точках, лежащих в верхней полуплоскости, и по отношению к этим точкам случай области с бесчисленным множеством сторон не отличается от случая области с конечным числом сторон. Специального исследования в случае бесчисленного множества сторон потребуют лишь точки контура фундаментальной области $\mathcal{F}$, лежащие на вещественной оси. Прежде чем переходить к исследованию этих точек контура, обратим внимание еще на два обстоятельства.

Если $\mathcal{B}$ — замкнутая область, лежащая в верхней полуплоскости и не имеющая общих точек с вещественною осью, то существует такое положительное число μ, что $H(z) < \mu$ для всех z в области $\mathcal{B}$. С другой стороны, из выражения

$$H(S_n z) = \frac{(\alpha_n x + \beta_n)^2 + (\gamma_n x + \delta_n)^2 + (\alpha_n^2 + \gamma_n^2)y^2}{y}$$

и из того, что при возрастании n наибольшее из абсолютных значений коэффициентов α_n, β_n, γ_n, δ_n возрастает беспредельно, следует, что $H(S_n z)$ для всех z, лежащих в $\mathcal{B}$, равномерно стремится к бесконечности, и через область может пройти лишь конечное число фундаментальных окружностей, т. е. никакая точка верхней полуплоскости не может быть точкой сгущения фундаментальных окружностей.

Стороны $\mathcal{F}$ могут быть обращены вогнутостью к $\mathcal{F}$ лишь в том случае, когда $\alpha_n^2 + \gamma_n^2 < 1$. Покажем, что таких сторон может быть лишь конечное число. Пусть имеется такая сторона, принадлежащая некоторой фундаментальной окружности C_m, и пусть группа содержит бесконечную последовательность подстановок:

$$S_{m_n} z = \frac{\alpha_{m_n} z + \beta_{m_n}}{\gamma_{m_n} z + \delta_{m_n}},$$

для которых $\alpha_{m_n}^2 + \gamma_{m_n}^2 < 1$. Сумма $(\beta_{m_n}^2 + \delta_{m_n}^2)$ должна стремиться к бесконечности при возрастании n, а потому, начиная с некоторого значения n, будет соблюдено неравенство

$$\left(\alpha_{m_n}^2 + \gamma_{m_n}^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(\alpha_{m_n}\beta_{m_n} + \gamma_{m_n}\delta_{m_n}\right)x + \\ + \left(\beta_{m_n}^2 + \delta_{m_n}^2 - 1\right) > 0$$

для всех точек (x, y), лежащих на окружности C_m, т. е., начиная с некоторого значения n, все окружности C_{m_n} будут находиться вне окружности C_m и не могут принимать участия в образовании фундаментальной области $\mathcal{F}$, откуда и следует, что число сторон, обращенных вогнутостью к $\mathcal{F}$, будет конечно. Эти стороны должны пересекать мнимую ось $x = 0$ в точке с ординатой больше единицы, и из элементарных геометрических соображений нетрудно видеть, что упомянутые выше стороны, обращенные вогнутостью к $\mathcal{F}$, должны составлять одну связную часть контура $\mathcal{F}$. Прямолинейных сторон у $\mathcal{F}$ может быть не больше двух, и если они есть, то они непосредственно примыкают к той части контура, которая состоит из сторон, обращенных вогнутостью к $\mathcal{F}$. Всю описанную часть контура $\mathcal{F}$ обозначим буквою $\mathcal{L}$, а остальной контур, состоящий из сторон, обращенных выпуклостью к $\mathcal{F}$, и из точек, лежащих на вещественной оси, обозначим через $\mathcal{K}$. Часть контура, обозначенная буквою $\mathcal{L}$, может и вовсе отсутствовать. Для нашего исследования представляет очевидный интерес только часть $\mathcal{K}$ контура.

3. Причислим пока к контуру $\mathcal{K}$ только стороны $\mathcal{F}$, лежащие как в верхней полуплоскости, так и на вещественной оси (если последние имеются), вершины, лежащие в верхней полуплоскости, и те вершины, лежащие на вещественной оси, в которых сходятся две стороны. При этом контур $\mathcal{K}$ разобьется на связные части. Если такая связная часть контура $\mathcal{K}$ содержит бесчисленное множество сторон, она имеет, по крайней мере с одной стороны, предельную точку. Такие предельные точки также надо причислить к контуру $\mathcal{K}$, и мы их назовем *предельными точками первого рода.* Если совокупность этих предельных точек первого рода есть незамкнутая совокупность, то к контуру $\mathcal{K}$ надо причислить предельные точки этой совокупности, которые мы будем называть *предельными точками второго рода.* Всякая такая точка является точкой сгущения бесконечной последовательности упомянутых выше связных частей контура $\mathcal{K}$. Введенные предельные точки также будем называть *вершинами области $\mathcal{F}$.* Заметим при этом, что, рассматривая характер какой-либо вершины, лежащей на вещественной оси, мы должны принимать во внимание часть контура, лежащую вблизи этой вершины с одной определенной стороны от нее. Принимая это во внимание, мы можем установить семь видов вершин, лежащих на вещественной оси:

1) вершины первого вида получаются при касании двух фундаментальных окружностей;

2) вершины второго вида получаются при пересечении фундаментальной окружности со стороной, лежащей на вещественной оси;

3) вершины третьего вида с одной стороны являются кон-

цом определенной стороны области $\mathcal{F}$, а с другой стороны — предельной точкой первого рода;

4) вершины четвертого вида являются концом определенной стороны и предельной точкой второго рода;

5) вершины пятого вида с обеих сторон являются предельной точкой первого рода;

6) вершины шестого вида с одной стороны является предельной точкой первого рода, а с другой — второго рода;

7) вершины седьмого вида с обеих сторон являются предельными точками второго рода.

Заметим, что виды 3 и 4 подразделяются на случаи (а) и (б), причем в случае (а) вершина является концом дуги фундаментальной окружности, а в случае (б) — концом стороны, лежащей на вещественной оси.

В дальнейшем мы докажем, что каждый из указанных видов вершин действительно может встретиться.

Пусть M — предельная точка первого или второго рода, причем, не ограничивая общности, предполагаем ее лежащей на конечном расстоянии, и пусть

$$\left(\alpha_{m_n}^2 + \gamma_{m_n}^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(\alpha_{m_n}\beta_{m_n} + \gamma_{m_n}\delta_{m_n}\right)x + \\ + \left(\beta_{m_n}^2 + \delta_{m_n}^2 - 1\right) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

— уравнение фундаментальных окружностей, дуги которых дают последовательность сторон области $\mathcal{F}$, стремящуюся с одной определенной стороны к точке M. Пусть P_n и Q_n — точки пересечения этих окружностей с вещественной осью. В силу монотонности изменения P_n и Q_n абсцисса центра и радиус упомянутых окружностей имеют конечные пределы, причем из двух точек P_n и Q_n та точка, которая ближе к M, стремится, очевидно, к этой точке M.

Из сказанного следует, что отношение

$$\frac{\beta_{m_n}^2 + \delta_{m_n}^2 - 1}{\alpha_{m_n}^2 + \gamma_{m_n}^2 - 1}$$

должно иметь конечный предел, а отношение

$$\frac{\alpha_{m_n}^2 + \beta_{m_n}^2 + \gamma_{m_n}^2 + \delta_{m_n}^2 - 1}{\left(\alpha_{m_n}^2 + \gamma_{m_n}^2 - 1\right)^2},$$

выражающее квадрат радиуса фундаментальной окружности, должно стремиться к нулю, т. е. если последовательность сторон фундаментальной области стремится к предельной точке M, то соответствующие фундаментальные окружности стремятся к этой точке, беспредельно сжимаясь. Очевидно, как надо изменить сказанное, если M есть бесконечно далекая точка.

Из сказанного непосредственно вытекает, что любая окружность, ортогональная вещественной оси в точке M и имеющая центр по ту сторону от M, по отношению к которой точка M является предельной точкой, обладает тем свойством, что все ее точки, достаточно близкие к точке M и находящиеся в верхней полуплоскости, принадлежат области $\mathcal{F}$.

Если S_k — гиперболическая подстановка, то, проводя фундаментальные окружности $H(S_k z) = H(z)$ и $H(S_k^{-1} z) = H(z)$, убедимся в том, что неподвижные точки гиперболической подстановки группы не могут принадлежать контуру $\mathcal{F}$. Если же S_k есть параболическая подстановка с неподвижной точкой M, то упомянутые только что две фундаментальные окружности пройдут обе через точку M, т. е. неподвижная точка параболической подстановки может находиться только в вершине первого вида. Кроме того, как известно, из всякой совокупности эквивалентных относительно группы Г неподвижных точек параболических подстановок этой группы по крайней мере одна точка является вершиной области $\mathcal{F}$*.

Рассмотрим теперь распределение вершин, лежащих на вещественной оси, по циклам эквивалентных вершин. В случаях вершин вида 3(б), 4(б), 5, 6 и 7 точки любой окружности, ортогональной к вещественной оси в этой вершине, достаточно близкие к этой вершине и находящиеся в верхней полуплоскости, принадлежат, как мы знаем, области $\mathcal{F}$. Отсюда следует, что в упомянутых случаях вершина не может иметь эквивалентной себе вершины области $\mathcal{F}$. Во всех же остальных случаях будет существовать по крайней мере еще одна эквивалентная вершина.

Распределение вершины по циклам эквивалентных вершин совершается так же, как и в случае области с конечным числом сторон, а именно, если B — некоторая вершина и BC — прилегающая сторона, то следующая эквивалентная B вершина цикла лежит на конце стороны, эквивалентной BC, причем направление на этой стороне по отношению к области $\mathcal{F}$ должно

---

*Fubini G. [11, p. 208]; Giraud G. Leçons sur les fonctions automorphes.—Paris, 1920, p. 101.

совпадать с направлением BC от B к C**. Этот процесс составления цикла вершин, эквивалентных B, заканчивается, если мы приходим в вершину, которая с другой стороны является концом отрезка вещественной оси или предельной точкой. Цикл может содержать конечное или бесконечное число вершин, и существенным является доказать, что и в последнем случае после конечного числа операций упомянутого выше процесса мы придем к любой вершине, эквивалентной исходной. Докажем это.

Положим, что вершина B_1 области $\mathcal{F}$ эквивалентна вершине B и переходит в нее путем подстановки S_k группы Г. Пусть BC и B_1C_1 — стороны $\mathcal{F}$, лежащие в верхней полуплоскости, и BC_2 — то положение, которое занимает B_1C_1 после преобразования S_k. Надо доказать, что внутри угла CBC_2 находится конечное число областей $S_n\mathcal{F}$, имеющих точку B вершиной. Если бы их было бесчисленное множество, то, принимая во внимание, что все они должны иметь вершины на вещественной оси, отличные от B, и не могут иметь общих внутренних точек со сторонами BC и BC_2, мы могли бы утверждать существование точки сгущения областей $S_n\mathcal{F}$ в верхней полуплоскости, чего быть не может.

Если цикл конечен и все его вершины первого вида, то эти вершины — неподвижные точки параболических подстановок группы.

Если S_k — параболическая подстановка, то, как мы упоминали, фундаментальные окружности $H(S_k z) = H(z)$ и $H(S_k^{-1} z) = H(z)$ должны проходить через неподвижную точку этой подстановки. Принимая это во внимание, можем утверждать, что если образование цикла по крайней мере с одной стороны заканчивается вершиной, которая является концом отрезка вещественной оси или предельной точкой, то вершины такого цикла не могут быть неподвижными точками параболических подстановок группы.

Положим теперь, что мы имеем цикл, бесконечный в обе стороны и, следовательно, состоящий из вершин только первого вида. Докажем, что и в этом случае вершины эти не могут быть неподвижными точками параболических подстановок. Положим, что B — вершина нашего цикла, являющаяся неподвижной точкой параболической подстановки S_k группы. Пусть BC_1

**Fubini G. [11, p. 207]; Giraud G, p. 96.

и BC_2 — стороны $\mathcal{F}$, а BC_1' и BC_2' — преобразования этих сторон при помощи S_k. Из бесконечности цикла следует, что внутри угла $C_1'BC_2'$ находится бесчисленное множество областей $S_n\mathcal{F}$, имеющих вершину в точке B и не имеющих общих точек со сторонами BC_1' и BC_2'. Как и выше, это приводит нас к нелепому заключению о существовании точки сгущения областей $S_n\mathcal{F}$ в верхней полуплоскости.

Если цикл с обеих сторон заканчивается концами отрезков вещественной оси, то вершины цикла суть точки собственной прерывности группы $\mathcal{F}$. Если же цикл бесконечен или с обеих сторон заканчивается предельными точками, то его вершины не есть точки собственной прерывности группы.

4. Укажем теперь такой прием построения групп, из которого вытекает возможность осуществления предельных вершин и циклов указанного выше типа.

В дальнейшем термином *точка a вещественной оси* мы будем обозначать точку оси с абсциссою a и *полуокружностью ab* будем называть полуокружность верхней полуплоскости, ортогональную вещественной оси и имеющую концы a и b на этой оси. Прием построения групп, который мы хотим указать, вытекает из решения некоторой задачи, которую мы сейчас формулируем. На вещественной оси дана точка a и требуется построить точки b, c, d, e так, чтобы разности

$$b-a, \quad e-b, \quad d-c, \quad e-d \tag{9}$$

были одного знака и чтобы выполнялось следующее условие: существует такое преобразование Sz, которое преобразует полуокружность ab в полуокружность dc, причем уравнение полуокружности ab может быть написано в виде $H(Sz) = H(z)$; кроме того, существует такое преобразование σz, которое преобразует полуокружность bc в полуокружность ed, причем уравнение полуокружности bc может быть написано в виде $H(\sigma z) = H(z)$.

Написав преобразование Sz в виде

$$Sz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

получим из первого условия следующие равенства:

$$d = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}, \tag{10}$$

$$c = \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta}, \tag{11}$$

$$(\alpha^2 + \gamma^2 - 1)a^2 + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)a + (\beta^2 + \delta^2 - 1) = 0, \tag{12}$$

$$(\alpha^2 + \gamma^2 - 1)b^2 + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)b + (\beta^2 + \delta^2 - 1) = 0, \tag{13}$$

$$\alpha\delta - \gamma\beta = 1. \tag{14}$$

Возводя равенство (10) почленно в квадрат, в силу (12) получим

$$(\gamma a + \delta)^2(d^2 + 1) = a^2 + 1. \tag{15}$$

Точно так же из (11) и (13) получим

$$(\gamma b + \delta)^2(c^2 + 1) = b^2 + 1. \tag{16}$$

Полагая

$$A = \frac{a^2 + 1}{d^2 + 1}, \quad B = \frac{b^2 + 1}{c^2 + 1}$$

и пользуясь равенствами (10), (11), (15) и (16), получим следующие выражения для коэффициентов преобразования Sz:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\sqrt{A} \mp c\sqrt{B}}{a - b}, \quad & \beta &= \frac{\pm ac\sqrt{B} - bd\sqrt{A}}{a - b}, \\ \gamma &= \frac{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}{a - b}, \quad & \delta &= \frac{\pm a\sqrt{B} - b\sqrt{A}}{a - b}. \end{aligned} \tag{17}$$

В этих выражениях для радикалов берутся арифметические значения, и знаки надо удерживать или везде верхние, или везде нижние. При этом равенства (10), (11), (12) и (13) выполняются. Остается удовлетворить равенству (14), которое дает

$$\pm\frac{d - c}{a - b}\sqrt{A}\sqrt{B} = 1. \tag{18}$$

Принимая во внимание, что разности (9) должны быть одинакового знака, заключаем отсюда, что в формулах (17) везде надо брать нижние знаки.

Уравнение (18) является единственным условием, которым связаны a, b, c и d. Выбирая b и c так, чтобы разности $(b - a)$ и $(c - b)$ были одного знака, и возводя уравнение (18) почленно в квадрат, получим квадратное уравнение для определения d. Полагая $d = c + x$, будем иметь

$$(k-1)x^2 + 2kcx + k(c^2+1) = 0, \tag{19}$$

где

$$k = \frac{(b-a)^2(c^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)},$$

причем x должен быть такого же знака, что и разности $(b-a)$ и $(c-b)$. Уравнение (19) дает

$$x_1 = \frac{(b-a)(c^2+1)}{ab+1+ac-bc}, \quad x_2 = \frac{(b-a)(c^2+1)}{ac-bc-ab-1}.$$

Знаменатель в выражении x_2 может быть написан в виде $-(b-a)(c-b)-b^2-1$ и имеет, очевидно, знак минус, т. е. x_2 по знаку противоположно $(b-a)$ и для нас не годится. Итак, должно быть:

$$x = \frac{(b-a)(c^2+1)}{ab+1+ac-bc}. \tag{20}$$

Отсюда следует, что выбор b и c должен быть ограничен неравенством

$$ab+1+ac-bc > 0. \tag{21}$$

Имея точки b, c и d, мы сможем определить e из уравнения, аналогичного уравнению (18), и коэффициенты преобразования — из уравнений, аналогичных уравнениям (17). При этом вместо неравенства (21) будет иметь место неравенство

$$bc+1+bd-cd > 0. \tag{22}$$

Подставляя в левую часть $d = c + x$ и пользуясь неравенством (21), приведем неравенство (22) к виду

$$1+2ac-c^2 > 0. \tag{23}$$

Но неравенство (21) можно переписать так:

$$(c-a)(c-b) + (1+2ac-c^2) > 0,$$

откуда видно, что оно есть следствие неравенства (23).

Мы приходим, таким образом, к следующему результату: выбирая c согласно неравенству (23), и b — любым образом между a и c, мы сможем определить цепь, состоящую из четырех полуокружностей (ab, bc, cd и de), и коэффициенты преобразований Sz и σz так, чтобы выполнялись условия, указанные в начале настоящего п°.

Вычисляя e через a, b и c, получим выражение для длины отрезка вещественной оси, занятого цепью четырех полуокружностей:

$$e - a = \frac{(c-a)(ac+1)}{1+2ac-c^2}.$$

Полагая $c = a + \varepsilon$, получим для ε условие:

$$\varepsilon^2 < a^2 + 1 \tag{24}$$

и

$$e - a = \frac{\varepsilon(a^2+1+a\varepsilon)}{a^2+1-\varepsilon^2}.$$

При увеличении ε от $-\sqrt{a^2+1}$ до $+\sqrt{a^2+1}$ правая часть написанного равенства увеличивается от $-\infty$ до $+\infty$, так что любому заданному значению $(e-a)$ соответствует одно определенное значение ε, удовлетворяющее условию (24).

Построение цепи четырех полуокружностей можно производить в обе стороны от точки a. Кроме того, конечную точку цепи e можно принимать за начальную точку новой цепи четырех полуокружностей, и т. д.

Положим, что мы построили несколько или даже бесчисленное множество цепей указанного вида, и им соответствуют преобразования

$$S_1z, \sigma z, S_2z, \sigma_2 z, \ldots \tag{25}$$

Построенные полуокружности являются контуром некоторой области $\mathcal{F}$ верхней полуплоскости. Нетрудно видеть, что эта область есть фундаментальная область группы Г, для которой подстановки (25) суть производящие подстановки. Действительно, с одной стороны, фундаментальные окружности, соответствующие подстановкам S_nz и σ_nz, образуют контур $\mathcal{F}$. С другой же стороны, применяя к $\mathcal{F}$ преобразования S_nz и σ_nz, будем получать области, не имеющие общих внутренних точек, т. е. внутри области $\mathcal{F}$ нет точек, эквивалентных относительно группы Г. Из указанных двух обстоятельств и вытекает, что область $\mathcal{F}$ служит для группы Г фундаментальной областью. Принимая во внимание, что длина $(e-a)$ цепи четырех окружностей может принимать любое заданное значение, мы можем любой заданный отрезок вещественной оси заполнить конечным или бесконечным числом цепей, состоящих из четырех полуокружностей. В случае бесконечного числа цепей один или оба конца, по желанию, будут предельными вершинами. Таким образом мы можем осуществить вершины любого из семи видов, указанных в п°3.

Из предыдущего вытекает также следующая теорема: *если $\mathcal{E}$ есть некоторая замкнутая, всюду прерывная совокупность точек вещественной оси, то всегда можно построить такую фундаментальную область, предельные вершины которой и образуют совокупность $\mathcal{E}$.*

Действительно, совокупность $\mathcal{E}$ можно, как известно, получить выкидывая точки вещественной оси, находящиеся внутри некоторого конечного или счетного множества отрезков. Строя на каждом из этих отрезков бесчисленное множество цепей из четырех полуокружностей так, чтобы концы отрезка были предельными точками этих полуокружностей, мы и получим искомую фундаментальную область.

Если мы возьмем связную часть контура построенной области $\mathcal{F}$, состоящую из бесчисленного множества полуокружностей и ограниченную или двумя предельными вершинами или одной предельной вершиной и концом отрезка вещественной оси, то, следуя обычному правилу составления цикла вершин, убедимся в том, что все вершины, заключающиеся во взятой части контура, образуют один бесконечный цикл и не могут быть поэтому неподвижными точками параболических подстановок группы. Если взять часть контура, состоящую из конечного числа полуокружностей и ограниченную отрезками вещественной оси, то все вершины этой части контура также составят один цикл и будут точками собственной прерывности группы. Таким образом, среди вершин не будет неподвижных точек параболических подстановок, и, следовательно, группа будет состоять лишь из гиперболических подстановок.

Вместо того, чтобы пользоваться при образовании контура области $\mathcal{F}$ цепями, состоящими из четырех полуокружностей, мы могли бы строить цепи из двух полуокружностей, связанных между собой некоторой параболической подстановкой и взаимно касающихся в неподвижной точке этой подстановки. При этом параболическая подстановка, дающая цепь из двух полуокружностей на данном отрезке вещественной оси, определяется путем вычислений, аналогичных тем вычислениям, при помощи которых мы определяли гиперболические подстановки S и σ.

5. Фундаментальная область группы, образованная по правилу, описанному нами в п°1, называется обычно *нормальной фундаментальной областью* с центром в точке A. Мы выбирали центр в определенной точке с координатами $x = 0$, $y = 1$, чтобы пользоваться вполне определенным выражением высоты точки. Но, конечно, мы могли бы выбрать центр фундаментальной области и в любой точке верхней полуплоскости. Такое изменение центра фундаментальной области не повлияло бы, конечно, на полученные нами результаты. В вопросах униформизации многозначных функций и при исследовании проективной группы линейного дифференциального уравнения второго порядка фундаментальная область бывает часто непосредственно ясна. Так, например, при униформизации алгебраической функции эта область представляет собою конформное изображение поверхности Римана с соответствующими разрезами при помощи униформизирующей переменной. Эта фундаментальная область $\mathcal{G}$ не будет, вообще говоря, совпадать с нормальной фундаментальной областью. Существенным представляется доказать, что если мы получим каким-нибудь образом фундаментальную область $\mathcal{G}$ группы с конечным числом сторон, то и нормальная фундаментальная область $\mathcal{F}$ той же группы будет иметь конечное число сторон.

Если область $\mathcal{G}$ не имеет вершин на вещественной оси, то наше утверждение очевидно. Действительно, в этом случае все точки будут иметь высоту, меньшую некоторого определенного положительного числа λ. В силу определения нормальной фундаментальной области (см. n°1), все точки области $\mathcal{F}$ и подавно должны иметь высоту, меньшую λ, откуда следует, что и $\mathcal{F}$ не может иметь вершин на вещественной оси. При этом число сторон у $\mathcal{F}$ должно быть конечно, ибо всякая точка сгущения сторон может лежать лишь на вещественной оси.

Положим теперь, что фундаментальная область $\mathcal{G}$ имеет вершины на вещественной оси. Эти вершины или суть точки собственной прерывности группы или неподвижные точки параболической подстановки группы. Относительно вершин первой категории у $\mathcal{G}$ можно утверждать, что или область $\mathcal{F}$ не содержит вовсе вершин, им эквивалентных, или, если и содержит, то вершины эти образуют конечный цикл. Относительно вершин второй категории области $\mathcal{G}$ можно утверждать, что область $\mathcal{F}$ содержит эквивалентные им вершины и эти вершины, как мы видели, образуют конечный цикл. Таким образом, можно утверждать, что область $\mathcal{F}$ имеет лишь конечное число вершин на вещественной оси, эквивалентных вершинам области $\mathcal{G}$. Эти вершины области $\mathcal{F}$, как и у $\mathcal{G}$, разделим на вершины первой и второй категорий. В каждой вершине первой категории у $\mathcal{F}$ построим достаточно малый круг, имеющий центр в этой вершине. Точно так же в каждой вершине второй категории у $\mathcal{F}$ построим достаточно малый круг, касательный к вещественной оси в этой вершине. Нетрудно показать, на чем мы не останавливаемся, что если исключить из $\mathcal{G}$ точки, эквивалентные тем точкам $\mathcal{F}$, которые принадлежат построенным кругам, то оставшаяся часть $\mathcal{G}$ будет иметь расстояние от вещественной оси, большее нуля, т. е. высоты всех оставшихся точек области будут больше некоторого положительного числа λ. Отсюда, как и выше, непосредственно следует, что нормальная фундаментальная область $\mathcal{F}$ не может иметь на вещественной оси вершин, кроме упомянутых выше, эквивалентных вершинам области $\mathcal{G}$, и, следовательно, не может иметь бесчисленного множества сторон.

6. Наличие бесчисленного множества сторон у фундаментальной области группы Г может существенным образом влиять на основные свойства автоморфных функций $f(z)$, не меняющихся при преобразованиях группы Г. Не касаясь подробно этого вопроса, мы укажем только на одну существенную разницу по сравнению со случаем фундаментальной области с конечным числом сторон.

Если область $\mathcal{F}$ имеет конечное число сторон, то, как известно, доказывается, что всякая автоморфная функция $f(z)$, соответствующая группе Г, принимает в области $\mathcal{F}$ всякое значение одинаковое число раз. Это предложение получается, как известно, из рассмотрения интеграла

$$\int \frac{f'(z)}{f(z) - m} dz,$$

где m — некоторая постоянная, и путь интегрирования есть контур $\mathcal{F}$. При этом вершины области $\mathcal{F}$ обходятся по соответственным образом выбранным малым дугам окружностей*.

Если область $\mathcal{F}$ имеет бесчисленное множество сторон, то предыдущее доказательство не применимо без дополнительного исследования по двум причинам: во-первых, ввиду неопределенности поведения функций $f(z)$ и $f'(z)$ вблизи тех вершин $\mathcal{F}$, которые являются предельными точками, и, во-вторых, ввиду того, что совокупность таких вершин может иметь меру больше нуля. Заметим при этом, что, не ограничивая общности, мы можем предположить, что нормальная фундаментальная область

---

*Fubini G. [11, p. 313].

$\mathcal{F}$ находится на конечном расстоянии, и тогда нетрудно доказать, что ее контур будет спрямляемым.

Нетрудно построить примеры таких групп, для которых существует автоморфная функция $f(z)$, голоморфная во всех точках верхней полуплоскости, имеющая в каждой точке контура области $\mathcal{F}$, лежащей на вещественной оси, конечные предельные значения и ограниченная во всей верхней полуплоскости. Такой пример, как нетрудно видеть, мы получим, рассматривая функцию $f(z)$, совершающую конформное преобразование треугольника, ограниченного полупрямыми $x = 0$, $x = 1$ и полуокружностью

$$x^2 + y^2 - x = 0,$$

на треугольник, ограниченный отрезками координатных осей от начала координат до точек $(1, 0)$, $(0, 1)$ и дугой окружности:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Точно так же функция $f(z)$, совершающая конформное преобразование треугольника, ограниченного дугами окружностей с углами $\pi/2$, $\pi/3$, 0, на такой же треугольник с углами $\pi/2$, $\pi/3$, π/n, приводит при целом n, большем 6, к известным подгруппам модулярной группы, для которых $f(z)$ является ограниченной автоморфной функцией.

ПРИМЕЧАНИЯ СОСТАВИТЕЛЕЙ

С. 14. [1] Независимые интегралы линейного дифференциального уравнения в современной терминологии называются линейно независимыми решениями.

С. 14. [2] Такие особые точки называются регулярными особыми точками (см. Л. Форд. "Автоморфные функции". — М.-Л., ОНТИ, 1936).

С. 21. [3] Однозначно-обратимые голоморфные функции называются однолистными.

С. 21. [4] Подразумевается непрерывность вне множества полюсов.

С. 23. [5] Этот принцип называется также теоремой Монтеля.

С. 25. [6] Такие контуры называются теперь гомотопными.

С. 25. [7] Группа уравнения в современной терминологии именуется группой монодромии линейного дифференциального уравнения и представляет собой гомоморфизм фундаментальной группы области с выколотыми особыми точками в группу $GL\ (2, \mathbb{C})$, заданный с точностью до сопряжения в $GL\ (2, \mathbb{C})$.

С. 25. [8] Производящие подстановки называются теперь образующими группы монодромии.

С. 25. [9] Проективная группа уравнения — это образ группы монодромии при естественной проекции:

$$GL(2,\mathbb{C}) \to PGL(2,\mathbb{C}) = PSL(2,\mathbb{C}).$$

С. 25. [10] Левая часть уравнения (10) есть $-2S(\eta)$, где $S(\eta) = \eta'''/\eta' - (3/2)(\eta''/\eta')^2$, называется производной Шварца и обладает рядом замечательных свойств (см. Л. Форд. "Автоморфные функции". — М.-Л., ОНТИ, 1936).

С. 27. [11] В связи с материалом, изложенным в § 9, см. также Л. Форд. "Автоморфные функции". — М.-Л., ОНТИ, 1936.

С. 29. [12] Изложение материала гл. I на современном языке см. в книгах А. Бердона "Геометрия дискретных групп" (М., Наука, 1986) и И. Кра "Автоморфные формы и клейновы группы" (М., Мир, 1975).

С. 35. [13] То есть, конечно, порождена.

С. 35. [14] Или сопряженной.

С. 40. [15] При указании пределов Владимир Иванович пользуется знаком равно ($\lim_{n=\infty} \beta_n$). В современной математической литературе в подобных случаях ставится стрелка ($\lim_{n\to\infty} \beta_n$).

С. 40. [16] В современной терминологии прерывные группы именуются дискретными.

С. 41. [17] Другими словами, действует дискретно (или разрывно) в точке z_0.

С. 42. [18] Здесь и далее квадратными скобками обозначено вмешательство редактора.

С. 44. [19] То есть действует дискретно.

С. 44. [20] Или область разрывности.

С. 44. [21] Особенные точки называются предельными точками, а их совокупность — предельным множеством дискретной группы.

С. 94. [22] На рис. 1 (и в дальнейшем на других рисунках) бесконечно удаленные точки (J на рис. 1, E — на других рисунках), о которых автор говорит, в тексте не показаны.

С. 100. [23] Рассмотрение конфигураций, обсуждаемых с помощью рис. 4, зависит от особых точек уравнения и типа применяемых подстановок.

С. 111. [24] Точка P и контур $\mathcal{L}$ на рис. 6 не показаны; ситуация описана словесно.

С. 121. [25] Здесь и далее в этой главе имеется в виду формула (1) гл. II.

С. 130. [26] Везде далее также имеется в виду формула (1) гл. II.

С. 151. [27] Автор имеет в виду рассмотрение случая $\alpha = 1/2$.

С. 208. [28] Словесное описание ситуации иллюстрируется рис. 18.

С. 228. [29] Четырехугольник $ABCD$ на рис. 4 не изображен, но все рассуждения автора будут понятны читателю с учетом рис. 5.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Смирнов Владимир Иванович

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Редактор *Т. В. Мызникова*
Художественный редактор *Е. И. Егорова*
Технический редактор *А. В. Борщева*
Корректор *К. Я. Герловина, Г. В. Маркичева*

ИБ № 4126

Издание подготовлено в $\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-TEX

Лицензия ЛР №040050 от 05.08.91 г.

Подписано в печать 30.11.95. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,27. Усл. кр.-отт. 16,44. Уч.-изд. л. 14,23. Тираж 500 экз. Заказ 3030.
Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Санкт-Петербургская типография № 1 ВО "Наука"
199034, С.-Петербург В-34, 9 линия, 12

Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
42	8-я сверху	отличны от z_a.	отличны от z_0.
50	9-я сверху	окружностей C.	окружностей C_2.
52	2-я снизу	Так как	То есть
70	12-я снизу	$\lim \frac{a_k}{m_k} =$	$\lim \frac{a_k}{m_n} =$
78	4-я сверху	μ_3	μ_s
96	7-я сверху	$\eta = \frac{iy_2(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)}$.	$\eta = \frac{iy_a(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)}$.
97	2-я сверху	(μ_1, λ_0)	(μ_{-1}, λ_0)
102	2-я снизу	I_2	J_2
125	9-я сверху	$\lambda = \lambda'_1$	$\lambda = \lambda'$,
126	17-я сверху	σ_{n-1},	σ_n,
127	Рис. 8	G_n	σ_n
274	12-я снизу	То есть, конечно, порождена	То есть конечно порождена

Зак. 3030