Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И МЕРОМОРФНЫХ КРИВЫХ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Посвящается шестидесятилетию Анатолия Асировича Гольдберга

А. Э. Еременко, М. Л. Содин

В работе излагается новый метод доказательства 2-й основной теоремы Р. Неванлинны. Метод состоит в сведении 2-ой основной теоремы к некоторому утверждению теории потенциала. Этот подход также позволяет доказывать некоторые обобщения и аналоги 2-й основной теоремы. В частности, доказан аналог для отображений $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ и нелинейных дивизоров без каких-либо условий невырожденности (гипотеза Б. Шиффмана).

§ 1. Введение

Пусть $f : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} = \mathbb{P}^1$ — мероморфная функция. Представим ее в виде $f = f_0/f_1$, где f_k — целые функции без общих нулей. Изучение распределения a-точек функции f эквивалентно изучению нулей линейных комбинаций $f_0 - af_1$. Чтобы охватить случай $a = \infty$, нужно рассматривать более общие комбинации вида $a^0 f_0 + a^1 f_1$. Пусть задан набор из $q \geq 3$ векторов $a_k = (a_k^0, a_k^1)$, причем a_j и a_k линейно независимы при $j \neq k$. Положим

$$v = (\log|f_0|) \vee (\log|f_1|)$$

(здесь и далее символы $\vee$ и $\wedge$ означают соответственно верхнюю и нижнюю огибающую),

$$v_k = \log|a_k^0 f_0 + a_k^1 f_1|, \qquad 1 \leqslant k \leqslant q.$$

Функции v и v_k субгармонические в $\mathbb{C}$. Легко видеть, что для любых $j \neq k$ выполняется

$$v = v_j \vee v_k + O(1), \qquad z \to \infty \tag{1.1}$$

Согласно теореме А.Картана ([1], с.28), неванлинновская характеристика $T(r, f)$ представляется в виде

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})d\theta. \tag{1.2}$$

Ключевые слова: мероморфные функции, распределение значений, 2-я основная теорема Р. Неванлинны, субгармонические функции, мероморфные кривые.

Обозначая через $N(r, a_k)$ неванлинновскую функцию числа нулей целой функции $a_k^0 f_0 + a_k^1 f_1$, имеем по формуле Йенсена

$$N(r, a_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_k(re^{i\theta}) d\theta + O(1), \qquad r \to \infty \tag{1.3}$$

Мы хотим доказать 2-ю основную теорему Неванлинны в такой форме:

$$(q-2)T(r,f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r, a_k) + o(T(r,f)) \qquad \| \tag{1.4}$$

(знак $\|$ справа от формулы означает, что она справедлива при $r \to \infty$, пропуская некоторое множество E конечной логарифмической меры, т.е. $\int_E d\log t < \infty$). В силу (1.2) и (1.3) это то же самое, что

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=1}^{q} v_k(re^{i\theta}) - (q-2)v(re^{i\theta})\Big) d\theta \geq o(1) \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta \qquad \|$$

На самом деле будет доказано более сильное утверждение, а именно, что при условии (1.1) функция

$$\sum_{k=1}^{q} v_k - (q-2)v$$

„почти субгармонична". Этот результат будет выведен из следующего „неасимптотического" утверждения: если $u_1, \ldots, u_q$, u — субгармонические функции в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и для любых $j \neq k$ выполняется $u = u_j \vee u_k$, то функция

$$w = \sum_{k=1}^{q} u_k - (q-2)u$$

субгармоническая в Ω.

Переход от асимптотической формулировки к неасимптотической задаче из теории потенциала основан на компактности некоторых семейств субгармонических функций [2, 3]; (см. также [4], т.2, гл.16). В предыдущих работах авторов [5, 6] этот подход применялся для решения различных задач теории распределения значений, однако при этом, как и в [2, 3], рассматривались лишь функции конечного нижнего порядка. Описанный метод использует аналитичность функций f_0, f_1 лишь для заключения о субгармоничности функций v,v_k и поэтому удобен для различных обобщений.

Перейдем к точной формулировке результатов.

Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ — мероморфная кривая. Запишем ее в однородных координатах $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ так, чтобы целые функции f_j не обращались одновременно в 0. Рассмотрим субгармоническую функцию

$$v = \bigvee_{j=0}^{n} \log |f_j|.$$

Риссовскую меру μ функции v назовем мерой Картана кривой f. Положим $\mathcal{D}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$, $\mathcal{D}(r) = \mathcal{D}(0, r)$, $A(r) = A(r, f) = \mu(\overline{\mathcal{D}(r)})$. Характеристика Неванлинны $T(r) = T(r, f)$ определяется так:

$$T(r,f) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})d\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{A(t,f)}{t}dt + O(1),\ r \to \infty.$$

Пусть Q — однородный полином (форма) от $n+1$ переменной. Рассмотрим целую функцию $Q \circ f = Q(f_0, \dots, f_n)$. Обозначим через $n(r, Q) = n(r, Q, f)$ количество нулей функции $Q \circ f$ в круге $\mathcal{D}(r)$ с учетом кратности и положим

$$N(r,Q) = N(r,Q,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|Q \circ f(re^{i\theta})|d\theta =$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{n(t,Q)}{t}dt + O(1),\ r \to \infty,$$

если $Q \circ f \not\equiv 0$. Система форм $Q_1, \dots, Q_q$, $q > 2n$, называется допустимой, если любой набор из $n+1$ форм этой системы не имеет общих нулей в $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$.

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ мероморфная кривая, $Q_1, \dots, Q_q$ — допустимая система однородных форм степеней $d_k \geq 1$. Если целые функции $Q_k \circ f \not\equiv 0, 1 \leqslant k \leqslant q$, то*

$$(q-2n)A(r,f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} d_k^{-1} n(r, Q_k) + o(A(r,f)), \| \qquad (1.5)$$

$$(q-2n)T(r,f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} d_k^{-1} N(r, Q_k) + o(T(r,f)). \| \qquad (1.6)$$

Заметим, что $N(r, Q^m) = mN(r, Q)$ и величина $(\deg Q)^{-1}N(r, Q)$ инвариантна относительно замены $Q \mapsto Q^m$. Поэтому далее мы будем считать, что все формы Q_k имеют одинаковую степень d.

Соотношение (1.6) доказывает гипотезу, высказанную Б. Шиффманом [7]. Частные случаи этой гипотезы при некоторых очень сильных ограничениях на f доказаны в [7-9]. Если $d = 1$, то (1.6) представляет собой ослабленную форму гипотезы А.Картана [10]. В полном объеме доказательство гипотезы А.Картана недавно получил Е. И. Ночка [11]. Отметим, что (1.6) вытекает из (1.5). Этот элементарный факт (лемма 9), по-видимому, ранее не отмечался.

Следуя Б. Шиффману, положим

$$\delta(Q,f) = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r,Q)}{dT(r,f)},\ d = \deg Q.$$

Из (1.6) вытекает следующее соотношение дефектов: пусть S — допустимая система форм, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ — мероморфная кривая, $Q \circ f \not\equiv 0$ для всех $Q \in S$. Тогда

$$\sum_{Q \in S} \delta(Q, f) \leqslant 2n. \tag{1.7}$$

Соотношение дефектов (1.7) усиливает теорему пикаровского типа, доказанную в [12] (см. также [13]).

Приведем теперь „неасимптотическую“ теорему о субгармонических функциях, из которой выводится теорема 1.

Обозначим через I_k совокупность всех подмножеств множества $\{1, 2, \dots, q\}$ мощности $k, 0 \leqslant k \leqslant q$.

Теорема 2. *Пусть Ω — область в $\mathbb{C}; u, u_1, \dots, u_q$ — субгармонические функции в $\Omega, q > 2n, n \in \mathbb{N}$. Если для любого $I \in I_{n+1}$ выполняется*

$$u = \bigvee_{k \in I} u_k, \tag{1.8}$$

то функция

$$w \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{q} u_k - (q - 2n)u = \bigwedge_{I \in I_n} \sum_{k \in I} u_k + nu$$

— субгармоническая функция в Ω

Наш метод доказательства теоремы 1 позволяет рассматривать также формы Q, коэффициенты которых не константы, а мероморфные функции, характеристики которых растут медленно по сравнению с $T(r, f)$.

Пусть σ — возрастающая к $+\infty$ функция на $[0, \infty)$. Рассмотрим поле M_σ, состоящее из мероморфных функций $a(z)$,

$$T(r, a) = O(\sigma(r)),\ r \to \infty.$$

Пусть $K_\sigma \subset M_\sigma[x_0, \dots, x_n]$ — пространство однородных форм от $n + 1$ переменной над M_σ. Если $Q \in K_\sigma$, то через $Q(z)$ обозначаем форму над $\mathbb{C}$, получаемую подстановкой значения $z \in \mathbb{C}$ в коэффициенты формы Q. Конечная система $S \subset K_\sigma$ называется допустимой, если для любых $n + 1$ форм $Q_1, \dots, Q_{n+1} \in S$ и для некоторого $z \in \mathbb{C}$ система уравнений

$$Q_k(z)(w_0, \dots, w_n) = 0, 1 \leqslant k \leqslant n + 1$$

имеет лишь тривиальное решение $w_0 = \dots = w_n = 0$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Если это условие выполнено для одного $z \in \mathbb{C}$, то оно выполнено и для всех z, не принадлежащих некоторому дискретному множеству (см. § 6).

Для мероморфной кривой $f = (f_0, \dots, f_n)$ и формы $Q \in K_\sigma$ полагаем

$$(Q \circ f)(z) = Q(z)(f_0(z), \dots, f_n(z)).$$

Это мероморфная функция в $\mathbb{C}$. Обозначаем

$$N(r, Q) = N(r, Q, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Q \circ f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Теорема 3. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ — мероморфная кривая,*

$$\sigma(r) = \frac{T(r,f)}{\log^\tau T(r,f)}, \ \tau > 1, \tag{1.9}$$

$Q_1, \ldots, Q_q \in K_\sigma$ — допустимая система форм, $d_k = \deg Q_k, q > 2n$. Если $Q_k \circ f \not\equiv 0, 1 \leqslant k \leqslant q$, то выполняется проинтегрированная 2-я основная теорема (1.6).

Если $n = 1$ и $d_k = 1$, то заключение теоремы 3 превращается в результат, близкий к недавно доказанной Ч. Осгудом [14] и Н. Штейнмецом [15] гипотезе Р. Неванлинны. В теореме Осгуда–Штейнмеца вместо (1.9) требуется лишь

$$\sigma(r) = o(T(r,f)), \ r \to \infty,$$

а исключительное множество в (1.6) имеет конечную меру.

В важном случае, когда $\sigma(r) = \log r$ (т.е. K_σ — пространство однородных форм над полем рациональных функций), теорема 3 неприменима для кривых с медленно растущей характеристикой. Тем не менее справедлива

Теорема 4. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ — „трансцендентная" мероморфная кривая, т.е. $T(r,f) \neq O(\log r), r \to \infty$. Если $Q_1, \ldots, Q_q$ — допустимая система форм из $K_{\log}, d_k = \deg Q_k, q > 2n$, и $Q_k \circ f \not\equiv 0$, $1 \leqslant k \leqslant q$, то проинтегрированная 2-я основная теорема* (1.6) *выполняется при $r \to \infty, r \notin E$, где E — некоторое множество со свойством*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{\psi(\log \log r)} \int\limits_{E\cap[1,r]} d\log t = 0,$$

для произвольной функции ψ такой, что $\psi(x)/x$ стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$.

Нетрудно показать (см. начало § 5), что из условия $T(r,f) = O(\log r)$ следует существование представления $f = (f_0, \ldots, f_n)$, в котором все f_j многочлены. Такие кривые называем рациональными. Из теоремы 4 немедленно вытекает следующее утверждение типа теоремы Пикара.

Следствие. *Пусть $Q_1, \ldots, Q_{2n+1}$ — допустимая система форм с полиномиальными коэффициентами. Если мероморфная кривая $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n$ такова, что каждая из целых функций $Q_k \circ f, 1 \leqslant k \leqslant 2n+1$, имеет конечное число нулей, то f — рациональная кривая.*

План изложения таков. В § 2 доказывается неасимптотическая теорема 2, на которой основывается все дальнейшее. В § 3 содержится теорема 2′ — „устойчивая" форма теоремы 2. § 4 содержит специальное разбиение единицы типа непрерывного разбиения Дьедонне-Уитни (см.[4], т.1, § 1.4), нужное для доказательства теорем 1, 3 и 4. В § 5 доказывается теорема 1, а в § 6 — теоремы 3 и 4.

Авторы благодарят В. С. Азарина, А. А. Гольдберга, А. Ф. Гришина, А. Ю. Рашковского, С. Ю. Фаворова, А. Е. Фрынтова и всех участников семинара Б. Я. Левина за плодотворное обсуждение этой работы.

§ 2. Неасимптотическая теорема

Прежде всего покажем, что теорему 2 достаточно доказать для непрерывных функций u, u_k. Этим замечанием авторы обязаны В. С. Азарину. Для субгармонической функции v положим $v^\varepsilon(z) = \max\{v(\xi) : |z-\xi| \leqslant \varepsilon\}$. Легко видеть, что $v^\varepsilon(z) \to v(z)$, монотонно убывая, при $\varepsilon \to 0$. Если v субгармонична в области Ω, то v^ε субгармонична в области $\Omega^\varepsilon = \{z : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Докажем непрерывность функции v^ε. Если $|z_1 - z_2| < \delta$, то полагая $z' = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, получим

$$|v^\varepsilon(z_1) - v^\varepsilon(z_2)| \leqslant v^{\varepsilon+2\delta}(z') - v^{\varepsilon-2\delta}(z') = \\ = \max_{|\xi|=\varepsilon+2\delta} v(z'+\xi) - \max_{|\xi|=\varepsilon-2\delta} v(z'+\xi),$$

но $\max\limits_{|\xi|=\rho} v(z'+\xi)$ — выпуклая функция относительно $\log\rho$, следовательно, непрерывная функция. Из условия теоремы 2 следует, что

$$u^\varepsilon = (\bigvee_{k\in I} u_k)^\varepsilon = \bigvee_{k\in I} u_k^\varepsilon$$

в Ω^ε для любого $I \in I_{n+1}$. Если теорема 2 справедлива для непрерывных функций, то отсюда получается, что функция

$$w_\varepsilon \overset{\mathrm{df}}{=} \bigwedge_{I\in I_n} \sum_{k\in I} u_k^\varepsilon + nu^\varepsilon$$

субгармонична в Ω^ε. Далее, $w_\varepsilon \to w$, монотонно убывая, при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, w субгармонична.

Таким образом, далее можно считать, что функции u, u_k непрерывны. Для любого $I \subset \{1, 2, \ldots, q\}$ определим открытое множество

$$\mathcal{D}_I = \operatorname{int}\{z : u_k(z) < u(z), k \in I; u_k(z) = u(z), k \notin I\}.$$

Множества $\mathcal{D}_I$ попарно не пересекаются. Если $\mathcal{D}_I \neq \varnothing$, то $\operatorname{card} I \leqslant n$. Это следует из (1.8). Чтобы сделать ясной идею доказательства теоремы 2, предположим, что все множества $\mathcal{D}_I$ ограничены конечным числом кривых Жордана. Для любой пары I, $J \in I_n, \operatorname{card}(I \cup J) = m \leqslant 2n$, положим

$$u_{I,J} = \sum_{k\in I\cup J} u_k + (2n-m)u.$$

Это субгармоническая функция.

Имеем $w = u_{I,J}$ в $\mathcal{D}_I \cup \mathcal{D}_J$. Поэтому, если точка $z \in \Omega$ имеет окрестность V, пересекающуюся не более чем с двумя множествами $\mathcal{D}_I$, то w субгармонична в V. Легко видеть (см. далее лемму 3), что остальные точки образуют конечное множество. Поскольку w непрерывна, конечное множество устранимо и w субгармонична в Ω.

Общий случай требует более сложных рассуждений. Используемые далее понятия и теоремы из теории потенциала содержатся в книгах [16–18].

Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{C}$, $G(z_0, z)$ — ее функция Грина. При любом фиксированном $z_0 \in \mathcal{D}$ функция $z \mapsto G(z_0, z)$ может быть продолжена до субгармонической функции в $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ со свойством $G(z_0, z) = 0, z \notin \overline{\mathcal{D}}$. Такое продолжение единственно. Справедливо представление

$$G(z_0, z) = -\log|z - z_0| + \int\limits_{\mathbb{C}} \log|z - \xi|\omega(z_0, d\xi), \tag{2.1}$$

где $\omega(z_0, d\xi)$ — гармоническая мера на $\partial\mathcal{D}$, относительно точки z_0 и области $\mathcal{D}$.

Точка $a \in \partial\mathcal{D}$ называется достижимой из открытого множества $\mathcal{D}$, если существует кривая $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ такая, что $\gamma(t) \in \mathcal{D}$ при $0 \leqslant t < 1$ и $\gamma(1) = a$. Множество точек, достижимых из $\mathcal{D}$, — борелевское [19].

Лемма 1. *Пусть E — множество точек в $\mathbb{C}$, недостижимых из $\mathcal{D}$. Тогда $\omega(z_0, E) = 0$ для любого $z_0 \in \mathcal{D}$.*

Это утверждение известно (см. [20, 21]). Наиболее наглядное доказательство получается с помощью теоремы Какутани об интерпретации гармонической меры $\omega(z_0, E)$, как вероятности того, что броуновское движение, начинающееся в точке z_0, впервые покинет $\mathcal{D}$ через множество E [22].

Выражение „квазивсюду“ означает „всюду“, кроме некоторого множества нулевой емкости.

Функция v, определенная квазивсюду в области Ω, называется δ-субгармонической, если она представима в виде разности двух субгармонических в Ω функций. Риссовский заряд функции v — это разность соответствующих риссовских мер. Две δ-субгармонические функции считаются равными, если они совпадают квазивсюду. Класс δ-субгармонических функций замкнут относительно взятия верхних и нижних огибающих конечных семейств. В самом деле, достаточно показать, что операция $v \mapsto v^+$ сохраняет δ-субгармоничность. Но если $v = v_1 - v_2$, то $v^+ = (v_1 - v_2)^+ = v_1 \vee v_2 - v_2$.

Пусть Ω_1 — открытое множество, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Скажем, что v^* получена из v выметанием заряда из множества Ω_1, если $v^*(z) = v(z)$ при $z \in \Omega\backslash\Omega_1$, а $v^*|_{\Omega_1}$ — решение (обобщенной) задачи Дирихле в Ω_1 с граничными условиями $v(z)$, $z \in \partial\Omega_1$. Операция выметания сохраняет субгармоничность, а следовательно, и δ-субгармоничность [18].

Лемма 2. *Пусть v — непрерывная δ-субгармоническая функция в $\Omega = \mathcal{D}(R)$, $E = \{z \in \Omega, v(z) = 0\}$, $E^* \subset E$ — множество точек, недостижимых из $\Omega\backslash E$. Тогда сужение риссовского заряда ν функции v на E^* равно* 0.

Доказательство. Прежде всего сведем дело к случаю, когда v непрерывна и δ-субгармонична в $\mathcal{D}(R')$ с $R' > R$ и $v(z) = 0, |z| = R$. Пусть $0 < R_1 < R_2 < R_3 < R$, $m = \min\{v(z) : |z| \leqslant R_1\}$, $M = \max\{v(z) : |z| = R_3\}$. Выберем $A > 0$ настолько большим, чтобы выполнялось

$$A\log(R_1/R_2) < m, \qquad A\log(R_3/R_2) > M.$$

Определим теперь число B равенством $A\log(R_3/R_2) = B\log(R/R_3)$. Положим

$$v_1(z) = \begin{cases} \max\{v(z), A\log|z/R_2|, |z| \leqslant R_3, \\ B\log|R/z|, R_3 < |z| < \infty. \end{cases}$$

Очевидно, что функция v_1 непрерывная и δ-субгармоническая в $\mathbb{C}$, $v_1(z) = 0$ при $|z| = R$ и $v_1(z) = v(z)$ в $\mathcal{D}(R_1)$.

Далее считаем, что v δ-субгармонична в $\mathcal{D}(R')$, $R' > R$ и $v(z) = 0$ при $|z| = R$.

Покажем теперь, что доказательство сводится к случаю, когда $\Omega\backslash E$ — область. Пусть $\{\mathcal{D}_j\}$ — совокупность связных компонент множества $\Omega\backslash E$. Положим

$$v_j(z) = \begin{cases} v(z), & z \in \mathcal{D}_j, \\ 0, & z \notin \mathcal{D}_j. \end{cases}$$

Очевидно, что функция v_j непрерывна в $\mathcal{D}(R')$. Далее, v_j δ-субгармоническая функция, так как она получается применением к v выметания из $\Omega\backslash\overline{\mathcal{D}_j}$. Имеем $v = \sum v_j$ и $\nu = \sum \nu_j$, где ν_j — риссовские заряды функций v_j. Достаточно показать, что $\nu_j\big|_{E^*} = 0$.

Таким образом, лемму нужно доказать в случае, когда $\mathcal{D} = \Omega\backslash E$ — область, причем $v(z) = 0$ на $\partial\mathcal{D}$. Покажем, что в этом случае v — потенциал Грина:

$$v(z) = -\int_{\mathcal{D}} G(z_0, z)d\nu_{z_0}, \tag{2.2}$$

где G — функция Грина области $\mathcal{D}$.

В самом деле, $v = v_1 - v_2$, где v_i — субгармонические функции, причем $v_1 = v_2$ вне $\mathcal{D}$. Пусть h_i — наилучшая гармоническая мажоранта v_i в $\mathcal{D}$, тогда

$$h_i(z) = \overline{\lim_{\xi\to z, \xi\in\mathcal{D}}} \inf w(\xi),$$

где infimum берется по классу супергармонических в $\mathcal{D}$ функций $w(\xi)$ таких, что

$$\underline{\lim}_{\xi\to z, \xi\in\mathcal{D}} w(\xi) \geq v_i(z), z \in \partial\mathcal{D}, i = 1, 2.$$

Для функций v_1 и v_2 эти классы совпадают, поэтому $h_1 = h_2 = h$, а следовательно, в области $\mathcal{D}$ выполняется $v_i = h + \Pi_i, i = 1, 2$, где Π_i — потенциалы Грина, т.е. $v = v_1 - v_2 = \Pi_1 - \Pi_2$, что эквивалентно (2.2).

Отметим, что представление (2.2) справедливо всюду в $\mathbb{C}$. Подставляя (2.1) в (2.2), получаем

$$v(z) = \int_{\mathcal{D}} \log|z_0 - z|d\nu_{z_0} - \int_{\mathcal{D}} d\nu_{z_0} \int_{\mathbb{C}} \log|z - \xi|\omega(z_0, d\xi).$$

Определим заряд $\varkappa$ равенством

$$\varkappa(X) = \int_{\mathcal{D}} \omega(z_0, X)d\nu_{z_0} \tag{2.3}$$

для любого борелевского множества $X \subset \mathbb{C}$. Согласно обобщенной теореме Фубини [23, 16],

$$v(z) = \int_{\mathcal{D}} \log|z_0 - z|d\nu_{z_0} + \int_{\mathbb{C}} \log|z - \xi|d\varkappa_\xi. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что риссовский заряд функции v, суженный на $\Omega\backslash\mathcal{D}$, есть $\varkappa$. Из (2.3) и леммы 1 следует, что $\varkappa(E^*) = 0$, и мы получаем утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ — попарно не пересекающиеся открытые множества в $\mathbb{C}$. Тогда множество точек, достижимых одновременно из $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ — области. Покажем, что три различные точки z_1, z_2,z_3 не могут быть одновременно достижимы из всех трех областей. В противном случае нашлись бы точки $w_i \in \mathcal{D}_i$, $i = 1,2,3$, и открытые дуги $\Gamma_{ij} \subset \mathcal{D}_i$, соединяющие w_i с z_j, $1 \leqslant i,j \leqslant 3$. Эти дуги можно выбрать попарно не пересекающимися. Тогда точки w_i и z_j вместе с дугами Γ_{ij} образуют граф $K_{3,3}$, который, как известно, не может быть вложен в плоскость [24]. Противоречие доказывает наше утверждение для случая областей. В общем случае, если точка z достижима из $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, то она достижима из некоторых связных компонент $\mathcal{D}_i^* \subset \mathcal{D}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Для любой тройки компонент множество таких точек z конечно, поэтому множество точек, достижимых из $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, не более чем счетно. Лемма 3 доказана.

Для δ-субгармонической функции v обозначим через $\mu[v]$ ее риссовский заряд. Для любого заряда μ имеем разложение Жордана, $\mu = \mu^+ - \mu^-$, где μ^+ и μ^- — меры. Верхняя (нижняя) огибающая двух зарядов μ и ν определяется так:

$$\mu \vee \nu = (\mu - \nu)^+ + \nu, \mu \wedge \nu = \mu - (\mu - \nu)^+.$$

Это определение по индукции распространяется на конечные семейства зарядов. На множестве зарядов имеется естественное отношение порядка: $\mu \geq \nu$, если $\mu(X) \geq \nu(X)$ для любого борелевского множества X. Тогда

$$\bigvee_{j=1}^{m} \mu_j \qquad (\bigwedge_{j=1}^{m} \mu_j)$$

есть точная верхняя (нижняя) грань конечного семейства $\{\mu_j\}$ в смысле этого порядка.

Лемма 4. *Пусть $v_1, \ldots, v_m$ — непрерывные δ-субгармонические функции в области Ω. Тогда*

$$\mu[\bigwedge_{j=1}^{m} v_j] \geq \wedge_{1 \leqslant i<j \leqslant m} \mu[v_i \wedge v_j].$$

Доказательство. Ввиду локального характера леммы достаточно ограничиться случаем, когда Ω — круг.

Пусть сначала $m = 3$. Положим

$$w_i = \bigwedge_{j \neq i} v_j, \ \mathcal{D}_i = \{z \in \Omega : v_i(z) < w_i(z)\}, \ i = 1,2,3.$$

Очевидно, что $\mathcal{D}_i$ — попарно не пересекающиеся открытые множества. Если $E_i = \Omega\backslash\mathcal{D}_i$, то

$$v = \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant 3} v_j = w_i \text{ на } E_i.$$

Пусть $E_i^* \subset E_i$ — множество точек, недостижимых из $\mathcal{D}_i$. Согласно лемме 2, примененной к $v - w_i$, выполняется

$$\mu[\bigwedge_{j=1}^{3} v_j] = \mu[w_i] \text{ на } E_i^*, 1 \leqslant i \leqslant 3. \tag{2.5}$$

Далее, из леммы 3 следует, что

$$E_i^* \cup E_2^* \cup E_3^* = \Omega \backslash X,$$

где X — не более чем счетное множество. Для любой непрерывной δ-субгармонической функции v имеем $\mu[v](X) = 0$. Поэтому утверждение леммы при $m = 3$ вытекает из (2.5).

Теперь докажем лемму с произвольным $m \geq 3$ по индукции. (Следующее рассуждение принадлежит А. Ю. Рашковскому). В силу леммы 4 с $m = 3$ имеем

$$\begin{gathered}\mu[v_1 \wedge \cdots \wedge v_m] = \mu[(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-2}) \wedge v_{m-1} \wedge v_m] \geq \\ \geq \mu[(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-2}) \wedge v_{m-1}] \wedge \mu[(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-2}) \wedge \\ \wedge v_m] \wedge \mu[v_{m-1} \wedge v_m] = \mu[v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-1}] \wedge \\ \wedge \mu[v_1 \wedge \cdots \wedge v_{m-2} \wedge v_m] \wedge \mu[v_{m-1} \wedge v_m],\end{gathered}$$

последнее выражение не меньше, чем $\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \mu[v_i \wedge v_j]$ по предположению индукции. Лемма доказана.

Замечание 1. Отметим такое следствие из леммы 4. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ — непрерывные δ-субгармонические функции в Ω такие, что все функции $v_{ij} = v_i \wedge v_j$ субгармоничны. Тогда и функция $\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant m} v_i$ субгармоническая в Ω. Естественно возникают следующие вопросы:

1. Верна ли лемма 4 для произвольных δ-субгармонических функций (без условия непрерывности)?

2. Верна ли лемма 4 для δ-субгармонических функций в пространстве $\mathbb{R}^m, m \geq 3$? Этот вопрос относится и к самой теореме 2.

Лемма 5. (А. Ф. Гришин [25]). *Если $v \geq 0$ — δ-субгармоническая функция в Ω и на некотором борелевском множестве X $v(z) = 0$, то сужение риссовского заряда функции v на X есть неотрицательная мера.*

Доказательство теоремы 2. Как отмечалось в начале § 2, достаточно доказать теорему 2 для непрерывных функций.

Будем проводить индукцию по числу n. Если $n = 0$, $q \in \mathbb{N}$, то справедливость утверждения теоремы очевидна. Предположим, что теорема справедлива при $n = N - 1$ с любым $q > 2n$. Докажем ее при $n = N$, $q > 2n$.

Пусть $\xi \in \Omega$ — такая точка, что $u_j(\xi) < u(\xi)$ хотя бы для одного номера j. Не уменьшая общности, считаем, что $u_q(\xi) < u(\xi)$. По непрерывности это неравенство справедливо в некоторой окрестности $V \subset \Omega$ точки ξ. Имеем в этой окрестности

$$w = u_q + u + \{\sum_{k=1}^{q-1} u_k - (q - 1 - 2(N - 1))u\}. \tag{2.6}$$

Функции $u, u_1, \ldots, u_{q-1}$ удовлетворяют условию (1.8) теоремы 2 с $n = N - 1$. Поэтому в силу предположения индукции выражение в фигурных скобках в (2.6) — субгармоническая функция. Следовательно, w субгармонична в V.

Пусть теперь $X = \{z \in \Omega : u(z) = u_1(z) = \cdots = u_q(z)\}$. Покажем, что сужение риссовского заряда функции w на множество X — неотрицательная мера. (При этом нам уже не понадобится предположение индукции). Для любого $I \in I_N$ положим

$$u_I = \sum_{k \in I} u_k + Nu.$$

Для любых $I, J \in I_N$ имеем

$$u_I \wedge u_J \geq \sum_{k \in I} u_k + \sum_{k \in J} u_k \stackrel{\mathrm{df}}{=} u_{IJ} \quad \text{в } \Omega$$

и

$$u_I \wedge u_J = u_{IJ} = 2Nu \quad \text{на } X.$$

Применяя лемму 5 к множеству X и функции $u_I \wedge u_J - u_{IJ}$, получаем, что $\mu[u_I \wedge u_J]\,|_X$ — неотрицательная мера. Поскольку

$$w = \bigwedge_{I \in I_n} u_I,$$

из леммы 4 следует, что $\mu[w]|_X \geq 0$.

Теорема доказана.

Добавление. После того, как эта статья была подготовлена к печати, Б. Фугледе любезно сообщил авторам, что методы тонкой теории потенциала [27, 28] позволяют избавиться в лемме 2 от условия непрерывности функции v. При этом идея приведенного выше доказательства сохраняется. Это позволяет отказаться и в лемме 4 от требования непрерывности функций $v_1, \ldots, v_m$.

§ 3. „Устойчивый" вариант теоремы 2

Положим $\|\psi\| = \int\limits_{\mathcal{D}(1)} |\psi| dxdy$. Через $B(L)$ обозначим множество непрерывных функций ψ , таких, что $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\operatorname{supp}(\psi) \subset D(1)$, $|\operatorname{grad} \psi| \leqslant L$.

Теорема 2′. *Пусть $L, M > 0$, $q, n \in \mathbb{N}$, $q > 2n$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется число $\alpha = \alpha(\delta, L, M, q, n) > 0$ со следующим свойством. Если U — субгармоническая, а $U_1, \ldots, U_q$ — δ-субгармонические в $\mathcal{D}(2)$ функции с риссовскими зарядами $\nu \geq 0, \nu_1, \ldots, \nu_q$ соответственно, причем*

$$\begin{gathered}
(\nu + \sum_{k=1}^{q} \nu_k)\overline{(\mathcal{D}(1))} \leqslant M, \\
\| \bigvee_{k \in I} U_k - U \| \leqslant \alpha, \forall I \in I_{n+1}, \\
\sum_{k=1}^{q} \nu_k^- \overline{(\mathcal{D}(1))} \leqslant \alpha,
\end{gathered} \tag{3.1}$$

то для заряда $\varkappa = \sum_{k=1}^{q} \nu_k - (q-2n)\nu$ *выполняется*

$$\int \psi d\varkappa \geq -\delta, \forall \psi \in B(L).$$

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда найдутся число $\delta > 0$, последовательность векторов $(U^j, U_1^j, \ldots, U_q^j)$, $j \in \mathbb{N}$, со свойствами (3.1) и

$$\| \bigvee_{k \in I} U_k^j - U^j \| \to 0,\ j \to \infty,\ I \in I_{n+1}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{k=1}^{q} (\nu_k^j)^- \overline{(\mathcal{D}(1))} \to 0,\ j \to \infty, \tag{3.3}$$

и последовательность функций $\psi^j \in B(L)$, для которых выполняется

$$\int \psi^j d\varkappa^j \leqslant -\delta,\ j \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Класс $B(L)$ равностепенно непрерывен, поэтому, переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $\psi^j \rightrightarrows \psi, 0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi \in C(\overline{\mathcal{D}(1)})$. Тогда в силу (3.1) при $j \to \infty$

$$|\int \psi d\varkappa^j - \int \psi^j d\varkappa^j| \leqslant |\varkappa^j| \overline{(\mathcal{D}(1))} \max_{\overline{\mathcal{D}(1)}} |\psi - \psi^j| \to 0,$$

и из (3.4) следует, что

$$\int \psi d\varkappa^j \leqslant -\delta/2,\ j \geq j_0. \tag{3.5}$$

Учитывая (3.1), (3.3) и выбирая, если нужно подпоследовательность, считаем, что при $j \to \infty$

$$\begin{gathered} \nu^j \to \nu^0 \geq 0,\ \nu_k^j \to \nu_k^0 \geq 0, \\ \varkappa^j \to \varkappa^0 = \sum_{k=1}^{q} \nu_k^0 - (q-2n)\nu^0. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Сходимость понимается в слабой топологии пространства зарядов, сопряженного к пространству $C(\overline{\mathcal{D}(1)})$. Из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\int \psi d\varkappa^0 \leqslant -\delta/3. \tag{3.7}$$

Обозначим через $G * \lambda$ потенциал Грина заряда λ в круге $\mathcal{D}(1)$. Из слабой сходимости мер следует сходимость потенциалов в L_1, поэтому из (3.6) вытекает, что

$$\begin{gathered} G * \nu^j \to G * \nu^0, \qquad G * \nu_k^j \to G * \nu_k^0, \\ G * \varkappa^j \to G * \varkappa^0 \text{ в } L_1(\mathcal{D}(1)). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Перепишем условие (3.2) в виде

$$\| \bigvee_{k\in I} (U_k^j - U^j)\| \to 0,\ j\to\infty,\ I\in I_{n+1}. \tag{3.9}$$

Пусть

$$U_k^j - U^j = H_k^j - G*(\nu_k^j - \nu^j),$$

где H_k^j — некоторые функции, гармонические в $\mathcal{D}(1)$. Из (3.8) и (3.9) следует, что

$$\| \bigvee_{k\in I} H_k^j\| \leqslant \text{const}, j\in\mathbb{N}, I\in I_{n+1}, \tag{3.10}$$

следовательно, гармонические функции H_k^j равномерно ограничены сверху на компактах в $\mathcal{D}(1)$. Выбирая подпоследовательность, считаем, что $H_k^j \to H_k$, $j\to\infty$, равномерно на компактах, причем некоторые из функций H_k могут тождественно равняться $-\infty$. Считаем, что $H_k \not\equiv -\infty$ при $1\leqslant k\leqslant q'\leqslant q$ и $H_k\equiv-\infty$ при $q'<k\leqslant q$. Из (3.10) вытекает, что $q-q'\leqslant n$. Положим $n'=n-(q-q')\geq 0$. Тогда $q'-2n'\geq 0$. Покажем, что субгармонические функции $u=-G*\nu^0$, $u_k = H_k - G*\nu_k^0$, $1\leqslant k\leqslant q'$ удовлетворяют условиям теоремы 2 с числами q', n' вместо q и n. В самом деле,

$$\|(U_k^j - U^j) - (u_k - u)\| \to 0,\ j\to\infty,\ 1\leqslant k\leqslant q', \tag{3.11}$$

Заметим, что отображение $(w_1, w_2)\mapsto w_1\vee w_2$ непрерывно в L_1. Поэтому из (3.9) и (3.11) следует, что для любого $I\in I_{n'+1}\cap\{1,2,\dots,q'\}$ выполняется

$$\| \bigvee_{k\in I}(u_k - u)\| = 0,\ \text{ т.е. }\ u = \bigvee_{k\in I} u_k.$$

Применяя теорему 2 к функциям $u, u_1, \dots, u_{q'}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{q'} \nu_k^0 - (q'-2n')\nu^0 \geq 0,$$

следовательно,

$$\varkappa^0 = \sum_{k=1}^{q}\nu_k^0 - (q-2n)\nu^0 = \sum_{k=1}^{q'}\nu_k^0 - (q'-2n')\nu^0 + \sum_{k=q'+1}^{q} \nu_k^0 + \{(q'-2n') - (q-2n)\}\nu^0.$$

Выражение в фигурных скобках неотрицательно:

$$q'-2n'-q+2n = q'-2n+2q-2q'-q+2n = q-q'\geq 0.$$

Поэтому $\varkappa^0\geq 0$, что противоречит (3.7). Теорема доказана.

§ 4. Разбиение единицы

Мы используем конструкцию непрерывного разбиения единицы, восходящую к Уитни и Дьедонне (см.[4], § 1.4.).

Через c, c_j обозначаем абсолютные постоянные, $s \asymp t$ означает, что найдутся положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 t \leqslant s \leqslant c_2 t$.

Зафиксируем до конца этого параграфа числа $r > 0$ и Δ, $0 < \Delta < r/2$, $r' = r + \Delta$. Для каждой точки $z \in \mathcal{D}(r')$ положим

$$|\xi|_z = \frac{2|\xi|}{r' - |z|}, \qquad \xi \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

Тогда по терминологии монографии [4], § 1.4 $|\cdot|_z$ является медленно меняющейся метрикой на $\mathcal{D}(r')$, а именно из $z \in \mathcal{D}(r')$, $|z - z_1|_z < 1$ следует, что $z_1 \in \mathcal{D}(r')$, и

$$\frac{1}{2}|\xi|_z \leqslant |\xi|_{z_1} \leqslant 2|\xi|_z,\ \xi \in \mathbb{C} \tag{4.2}$$

(см. [4], с.43).

Лемма 6. *Существует конечный набор точек $z_j \in \mathcal{D}(r')$, $1 \leqslant j \leqslant p$ со следующими свойствами:*

1) $p \leqslant cr/\Delta$;
2) *круги* $\mathcal{D}_j = \{z : |z - z_j|_{z_j} \leqslant 1\} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{D}(z_j, \rho_j)$ *содержатся в* $\mathcal{D}(r')$;
3) *любая точка* $z \in \mathcal{D}(r')$ *принадлежит не более чем* c_1 *кругам* $\mathcal{D}_j$;
4) *если для некоторого* $m \in \mathbb{N}\mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}(r' - 2^{m-1}\Delta) \neq \emptyset$, *то* $\rho_j \geq c_2 2^m \Delta$;
5) *существуют неотрицательные функции* $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathcal{D}_j)$ *такие, что*

$$\sum \varphi_j = 1 \tag{4.3}$$

на $\mathcal{D}(r)$, *и для функции* $\psi_j(z) = \psi_j(\rho_j z + z_j) \in C_0^\infty(\mathcal{D}(1))$ *справедливо*

$$|\operatorname{grad} \psi_j(z)| \leqslant c_3. \tag{4.4}$$

Доказательство. Согласно теореме 1.4.10 из [4], найдется последовательность $z_j \in \mathcal{D}(r')$ такая, что круги $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}(z_j, \rho_j) = \{z : |z - z_j|_{z_j} < 1\}$ образуют покрытие $\mathcal{D}(r')$ кратности, не превышающей абсолютной постоянной c_1. Далее, по этой же теореме можно выбрать неотрицательные функции $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathcal{D}_j)$, удовлетворяющие условию (4.3) на $\mathcal{D}(r')$, и такие, что

$$|\operatorname{grad} \varphi_j(z)| \leqslant c_3 |1|_{z_j} \asymp \rho_j.$$

Оставим в рассмотрении только такие индексы j, для которых $\mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}(r) \neq \emptyset$. Тогда (4.3) по-прежнему выполняется на $\mathcal{D}(r)$. Пусть при некотором $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}(r' - 2^{m-1}\Delta) \neq \emptyset$. Тогда, выбрав точку $z \in \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}(r' - 2^{m-1}\Delta)$, получим

$$|z_j| - (r' - 2^{m-1}\Delta) \leqslant |z - z_j| \leqslant \frac{r' - |z_j|}{2},$$

$$|z_j| \leqslant r - 2^{m-2}\Delta,$$

откуда

$$\rho_j = \frac{r' - |z_j|}{2} \geq 2^{m-3}\Delta,$$

и свойство 4) доказано.

Оценим теперь число p таких индексов, что $\mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}(r' - 2^{m-1}\Delta) \neq \emptyset$. Рассмотрим кольцо

$$K_m = \{z : r' - 2^m\Delta \leqslant |z| < r' - 2^{m-1}\Delta\},$$
$$m = 1, 2, \ldots, l, \; l = [\log_2 \frac{r'}{\Delta}] + 1;$$

пусть $J_m = \{j : \mathcal{D}_j \cap K_m \neq \emptyset\}$. Сравнивая площади, оценим $\operatorname{card}(J_m)$. Если $j \in J_m$, то в силу свойства 4) $\rho_j \geq c_2 2^m \Delta$, поэтому пл.$(\mathcal{D}_j) \geq c_2 2^{2m}\Delta^2$. С другой стороны, пл.$(K_m) \leqslant c_2 2^m \Delta r$. Поэтому $\operatorname{card}(J_m) \leqslant cr/2^m\Delta$, а следовательно,

$$p \leqslant \sum_{m=1}^{l} \operatorname{card}(J_m) \leqslant c\frac{r}{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = c\frac{r}{\Delta}.$$

Лемма доказана.

Зафиксируем конечную неотрицательную меру μ на $\mathcal{D}(r')$, (в дальнейшем μ будет мерой Картана кривой f) и положим

$$a_j = \int \varphi_j \, d\mu. \tag{4.5}$$

Лемма 7. *Во введенных выше обозначениях справедливы следующие утверждения.*

1) *Пусть $K > 0$, $J_K = \{j : 1 \leqslant j \leqslant p, a_j \leqslant K\}$. Тогда*

$$\sum_{j \in J_K} a_j \leqslant C\frac{Kr}{\Delta}.$$

2) *Пусть ν — неотрицательная мера на $\mathcal{D}(r')$, $J_{\nu,\beta} = \{j : 1 \leqslant j \leqslant p, \; \nu(\mathcal{D}_j) \geq \beta a_j\}$. Тогда*

$$\sum_{j \in J_{\nu,\beta}} a_j \leqslant \frac{c}{\beta}\nu(\mathcal{D}(r')).$$

Доказательство. В силу свойств 1) – 3) разбиения и (4.3) имеем

$$\sum_{j \in J_{\nu,\beta}} a_j \leqslant \frac{c}{\beta} \sum_{j \in J_{\nu,\beta}} \nu(\mathcal{D}_j) \leqslant \frac{c}{\beta}\nu(\mathcal{D}(r')),$$
$$\sum_{j \in J_K} a_j \leqslant cK \operatorname{card}(J_K) \leqslant cKp = c\frac{Kr}{\Delta}.$$

Лемма доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 1

Пусть

$$v = \bigvee_{j=0}^{n} \log |f_j|,$$

μ — риссовская мера функции v (мера Картана кривой f), $A(r, f) = \mu(\overline{\mathcal{D}(r)})$. Тогда

$$T(r, f) = \int_{r_0}^{r} \frac{A(t, f)}{t}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} v(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Пусть $\{Q_k\}_{k=1}^{q}$ — допустимая система однородных многочленов степени d. Полагаем $v_k = \log |Q_k(f_0, \dots, f_n)|$ и обозначаем через μ_k риссовскую меру функции v_k, $1 \leqslant k \leqslant q$, $n(r, Q_k) = \mu_k(\overline{\mathcal{D}(r)})$,

$$N(r, Q_k) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, Q_k)}{t}\, dt.$$

Из допустимости системы $S = \{Q_k\}$ вытекает, что для любого $I \in I_{n+1}$ выполняется

$$c_1 \bigvee_{j=0}^{n} |f_j|^d \leqslant \bigvee_{k \in I} |Q_k(f_0, \dots, f_n)| \leqslant c_2 \bigvee_{j=0}^{n} |f_j|^d,$$

где $0 < c_1 < c_2 < \infty$ — постоянные, зависящие лишь от системы S. Поэтому

$$\Big| \bigvee_{k \in I} v_k - dv \Big| \leqslant c(S), I \in I_{n+1}. \tag{5.1}$$

Рассмотрим сперва „тривиальный“ случай, когда f — рациональная кривая степени L, т.е. $\lim\limits_{r \to \infty} A(r, f) = L$. В этом случае

$$T(r, f) = L \log r + O(1), r \to \infty.$$

Покажем, что можно выбрать представление $f = (f_0, \dots, f_n)$, в котором f_j, $o \leqslant j \leqslant n$ — многочлены, причем $\max\limits_{o \leqslant j \leqslant n} \deg f_j = L$.

В самом деле, пусть $f = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n)$ — какое-либо представление кривой f,

$$\tilde{v} = \bigvee_{j=0}^{n} \log |\tilde{f}_j|, \qquad L = \mu(\mathbb{C}) < \infty.$$

Тогда $\tilde{v} = v + H$, где H — гармоническая функция,

$$v(z) = \int_{\mathcal{D}(1)} \log |z - \xi|\, d\mu_\xi + \int_{\{|\xi| \geq 1\}} \log |1 - \frac{z}{\xi}|\, d\mu_\xi.$$

Пусть $g = H + i\tilde{H}$, где $\tilde{H}$ — гармонически сопряженная к H функция, $f_j = \tilde{f}_j e^{-g}$. Тогда

$$\bigvee_{j=0}^{n} \log |f_j| = v.$$

Далее, при $r \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f_j(re^{i\theta})|d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta = L\log r + O(1),$$

поэтому f_j — многочлены, степени которых не выше, чем L. Очевидно, что $\max\limits_{o\leqslant j\leqslant n} \deg f_j = L$.

Из неравенства (5.1) следует, что среди многочленов $Q_k(f_0,\dots,f_n)$, $1 \leqslant k \leqslant q$, не более чем n имеют степень, меньшую, чем dL. Пусть степени многочленов $Q_1(f_0,\dots,f_n), \dots, Q_{q-n}(f_0,\dots,f_n)$ равны dL. Тогда, во-первых, при $r \geq r_0$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{q} n(r,Q_k) \geq \sum_{k=1}^{q-n} n(r,Q_k) = d(q-n)L =$$
$$= d(q-n)\lim_{\rho\to\infty} A(\rho,f) \geq d(q-n)A(r,f),$$

и, во-вторых,

$$d(q-n)T(r,f) = d(q-n)L\log r + O(1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{q-n} N(r,Q_k) + O(1) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r,Q_k) + O(1), r \to \infty,$$

что и требовалось.

Перейдем теперь к основному случаю, когда $A(r,f) \to \infty$, $r \to \infty$.

Покажем, что из (5.1) вытекает непроинтегрированная 2-я основная теорема,

$$(q-2n)\,dA(r,f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} n(r,Q_k) + o(A(r,f)), \qquad \| \tag{5.2}$$

а затем с помощью элементарной леммы 9 проинтегрируем (5.2).

Зафиксируем числа $\eta > 1$ и $\varepsilon > 0$. Положим $A(r) = A(r,f)$, $r' = r + \Delta$, где $\Delta = \Delta(r)$ определяется формулой

$$\Delta = r/\log^{\eta} A(r). \tag{5.3}$$

Назовем число r неисключительным, если

$$A(r') \leqslant (1+\varepsilon)A(r). \tag{5.4}$$

Лемма 8. *Когда r пробегает неисключительные значения, соответствующие r', пробегают $\mathbb{R}\backslash E$, где E – множество конечной логарифмической меры.*

Доказательство. Воспользуемся следующей теоремой Бореля–Неванлинны ([1], гл. III, теорема 1.2). Пусть h и g — непрерывные неограниченно возрастающие функции на $[r_0,\infty)$, причем $\int^{\infty} g(x)\,dx < \infty$. Тогда

$$h(t + g(h(t))) \leqslant h(t) + 1,$$

вне некоторого множества попарно не пересекающихся отрезков с конечной суммарной длиной. Полагая $h(t) = H(e^t)$, $r = e^t$, и пользуясь неравенством

$$\exp(t + g(h(t))) \geq e^t(1 + g(h(t))),$$

получаем

$$H(r + rg(H(r)) \leqslant H(r) + 1. \qquad \|$$

Выберем теперь $g(x) = x^{-\tau}$, $H(r) = \log^\tau A(r)$, где $\tau = \sqrt{\eta} > 1$. Получим

$$A(r + \frac{r}{\log^\eta A(r)}) \leqslant (1 + \varepsilon)A(r). \qquad \| \tag{5.5}$$

Положим теперь $r' = \gamma(r)$. Функция $\gamma(r)$ может не быть монотонной.

Пусть $I' = [r'_1, r'_2]$, $r'_1 < r'_2$, — такой отрезок, что его γ-прообраз состоит из исключительных значений. Одна из связных компонент прообраза $\gamma^{-1}(I')$ — это отрезок $I = [r_1, r_2]$, $r_1 < r_2$, такой, что $\gamma(r_i) = r'_i$, $i = 1, 2$. Имеем

$$\int_{I'} d\log t = \log \frac{r'_2}{r'_1} = \log \frac{r_2}{r_1} +$$

$$+\eta \log \frac{\log A(r_1)}{\log A(r_2)} < \log \frac{r_2}{r_1} = \int_I d\log t.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Напомним, что мы рассматриваем субгармонические функции $v, v_1, \ldots, v_q$ с риссовскими мерами $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_q$, причем выполняется соотношение (5.1). Числа $\eta > 1$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы. Рассмотрим неисключительное значение r. Ему соответствуют r' и Δ, удовлетворяющие (5.3) и (5.4). Применяя лемму 6, получим конечные последовательности точек $z_j \in \mathcal{D}(r')$, чисел $\rho_j > 0$ и финитных функций φ_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, удовлетворяющих условиям 1)–5) леммы 6. Имеем в силу 1) и (5.3)

$$p \leqslant c\frac{r}{\Delta} \leqslant c \log^\eta A(r). \tag{5.6}$$

Положим $J = \{1, \ldots, p\}$, а через $J^* \subset J$ обозначим множество таких номеров j, для которых

$$a_j = \int \varphi_j \, d\mu \geq A(r)/\log^\tau A(r), \; \tau = \eta^2 > \eta, \tag{5.7}$$

$$(\mu + \sum_{k=1}^{q} \mu_k)(\overline{\mathcal{D}_j}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} a_j. \tag{5.8}$$

Применим теперь лемму 7 с $\beta = \frac{1}{\varepsilon}$, $K = A(r)/\log^\tau A(r)$, $\nu = \mu + \sum_{k=1}^{q} \mu_k$. Получим, что для исключительных номеров $J \backslash J^*$ справедливо при $r \geq r_0$

$$\sum_{j \in J \backslash J^*} a_j \leqslant C\varepsilon(A(r', f) + \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r'))). \tag{5.9}$$

Пересадим функции v, v_k из круга $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}(z_j, \rho_j)$ в стандартный круг $\mathcal{D}(1)$, нормировав их на a_j. А именно для $j \in J^*$ рассмотрим следующие функции, субгармонические в $\mathcal{D}(2)$;

$$U_k^j = \frac{1}{a_j} v_k(\rho_j z + z_j),\ 1 \leqslant k \leqslant q,$$

$$U^j = \frac{d}{a_j} v(\rho_j z + z_j).$$

Покажем, что эти функции удовлетворяют условиям теоремы $2'$ при $r \geq r_1$, где число r_1 зависит от системы S и функции $A(r)$.

В самом деле, из (5.8) вытекает (3.1) с $M = 1/\varepsilon$. В силу (4.4) функции $\psi_j(z) = \varphi_j(\rho_j z + z_j)$ принадлежат $B(L)$, где L — абсолютная постоянная, а в силу (5.1) и (5.7) выполняется

$$\| \bigvee_{k \in I} U_k^j - U^j \| \leqslant \frac{c}{a_j} \max_{z \in \overline{D}_j} \Big| \bigvee_{k \in I} v_k - dv \Big| \leqslant \frac{c(S)}{a_j} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1(S)}{A(r, f)} \log^\tau A(r, f) \leqslant \alpha(\varepsilon, L, 1/\varepsilon, q, n), r \geq r_1.$$

Таким образом, согласно теореме $2'$, выполняется

$$\int \psi_j \, d\varkappa^j \geq -\varepsilon, j \in J^*, \qquad (5.10)$$

где $\varkappa^j$ — риссовский заряд функции

$$\sum_{k=1}^{q} U_k^j - (q - 2n) U^j,$$

или после подстановки $z \mapsto \frac{z - z_j}{\rho_j}$, $a_j = \int \varphi_j \, d\mu$,

$$d(q - 2n) \int \varphi_j \, d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{q} \int \varphi_j \, d\mu_k + \varepsilon \int \varphi_j \, d\mu,$$

$j \in J^*$. Суммируя по j, $1 \leqslant j \leqslant p$, и используя (5.9), (4.5), получаем

$$d(q - 2n) \int \Phi \, d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{q} \int \Phi \, d\mu_k + \varepsilon \int \Phi \, d\mu +$$

$$+ c\varepsilon (A(r') + \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r'))),$$

где

$$\Phi = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j.$$

Учитывая, что $\Phi(z) \equiv 1$ в $\mathcal{D}(r)$ и $\Phi(z) \equiv 0$ вне $\mathcal{D}(r')$ в силу леммы 6, получаем

$$d(q-2n)A(r) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r')) + c\varepsilon(A(r') + \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r'))).$$

Применяя (5.4), получаем

$$d(q-2n)A(r') \leqslant (1+c\varepsilon) \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r')). \tag{5.11}$$

Это неравенство выполняется вне множества значений r' конечной логарифмической меры (по лемме 8).

Пусть теперь $\varepsilon_j \to 0$, E_j — множество, на котором не выполняется (5.11) с $\varepsilon = \varepsilon_j$. Выберем r_j так, чтобы

$$\int\limits_{E_j \cap [r_j, \infty)} d\log t < 2^{-j}, \; r_1 < r_2 < \dots \tag{5.12}$$

Рассмотрим функцию $\varepsilon(r) = \varepsilon_j$ при $r_j < r \leqslant r_{j+1}$. Тогда (5.11) выполняется с $\varepsilon = \varepsilon(r)$ вне множества

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap [r_j, r_{j+1}]) \cup [0, r_1],$$

которое имеет конечную логарифмическую меру в силу (5.12).

Таким образом, доказано (5.2) или, что то же самое, (1.5).

Для вывода (1.6) из (1.5) используется следующая лемма, имея в виду доказательства теорем 3 и 4, мы приведем ее в виде более общем, чем нужно для вывода (1.6) из (1.5). Для множества $e \subset \mathbb{R}_+$ положим $e(x) = e \cap [0, x]$, $e(\rho, x) = e \cap [\rho, x]$.

Лемма 9. *Пусть $e \subset \mathbb{R}_+$ — измеримое множество, $\varepsilon > 0$. Тогда найдется множество $e^* \subset \mathbb{R}_+$ такое, что для любого $s > 0$ справедливо*

$$|e^*(s)| \leqslant \frac{4}{\varepsilon}|e(s)|, \tag{5.13}$$

и для произвольной неотрицательной неубывающей функции $a(x)$ и любых чисел $r \in \mathbb{R}_+ \backslash e^*$, $\rho < r$ выполняется

$$\int\limits_{e(\rho,r)} a(x)\,dx < \varepsilon \int\limits_{[\rho,r]} a(x)\,dx. \tag{5.14}$$

Доказательство (С.Ю.Фаворов). Положим

$$e^* = \{r \in \mathbb{R}_+ : \exists x = x(r) < r \qquad |e(x,r)| > \varepsilon(r-x)\}.$$

Покажем, что выполнено (5.13). Множество $e^*(s)$ „не зависит“ от $e\backslash e(s)$, так как при $r \leqslant s\, e(x,r) = e(s) \cap [x,r]$. Рассмотрим покрытие

$$e^*(s) \subset \bigcup_{r\in e^*(s)} (x(r), 2r - x(r)).$$

Длина интервалов этого покрытия ограничена:

$$2r - x(r) - x(r) = 2(r - x(r)) \leqslant \frac{2|e(s)|}{\varepsilon}.$$

Поэтому можно выбрать подпокрытие, кратность которого не больше двух ([1], с.388). Пусть r_n — центры интервалов этого подпокрытия. Имеем

$$|e^*(s)| \leqslant 2\sum_n (r_n - x(r_n)) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\sum_n |e(x(r_n), r_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{\varepsilon}|e(s)|.$$

Теперь докажем (5.14). Положим $\lambda(x) = |e(x,r)|$ при фиксированном $r \in \mathbb{R}_+\backslash e^*$. Тогда $\lambda(x) \leqslant \varepsilon(r-x)$ и

$$\varepsilon \int\limits_{[\rho,r]} a(x)\,dx - \int\limits_{e(\rho,r)} a(x)\,dx = \int\limits_{\rho}^{r} a(x) d(\lambda(x) - \varepsilon(r-x)) =$$
$$= -\int\limits_{\rho}^{r} (\lambda(x) - \varepsilon(r-x))\,da(x) - a(\rho)(\lambda(\rho) - \varepsilon(r-\rho)) =$$
$$= \int\limits_{\rho}^{r} (\varepsilon(r-x) - \lambda(x))\,da(x) + a(\rho)(\varepsilon(r-\rho) - \lambda(\rho)) \geq 0,$$

что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Положим в лемме 9 $\rho = 0$, $a(x) = A(\exp x)$, $e = \{x \in (0,\infty) : \exp x \in E\}$, где E — исключительное множество конечной логарифмической длины в непроинтегрированной 2-й основной теореме (5.2). Тогда e — множество конечной длины, и множество e^*, построенное в лемме 9, также имеет конечную длину, и $E^* = \{r \in [1,\infty) : \log r \in e^*\}$ — множество конечной логарифмической длины. Тогда в силу (5.14)

$$\int\limits_{E(r)} \frac{A(t)}{t}\,dt \leqslant \varepsilon \int\limits_{1}^{r} \frac{A(t)}{1}\,dt \leqslant \varepsilon T(r,f),\ r \notin E^*. \tag{5.15}$$

Деля (5.2) на r и интегрируя с использованием (5.15), получаем

$$d(q-2n)T(r,f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r,Q_k) + \varepsilon T(r,f). \qquad \|$$

Остается заменить число $\varepsilon > 0$ функцией $\varepsilon(r) \to 0$ так же, как это было сделано выше при доказательстве соотношения (5.2). Теорема доказана.

§ 6. Случай непостоянных коэффициентов

Напомним определения. Пусть σ — возрастающая к $+\infty$ функция на $[0,\infty), M_\sigma$ — поле мероморфных функций $a(z)$ таких, что

$$T(r,a) = O(\sigma(r)),\ r \to \infty.$$

Через B_σ обозначим множество непрерывных функций $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|d\theta = O(\sigma(r)),\ r \to \infty.$$

Если $g \in M_\sigma$, то $\log|g| \in B_\sigma$. Для поля K через $K[x_0,\ldots,x_n]$ обозначаем кольцо многочленов от $(n+1)$-й переменной над K. Для многочлена $F \in M_\sigma[x_0,\ldots,x_n]$ через $F(z) \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$ обозначаем многочлен над $\mathbb{C}$, получаемый подстановкой фиксированного значения $z \in \mathbb{C}$ в коэффициенты F. Далее, для любого многочлена $F \in M_\sigma[x_0,\ldots,x_n]$ степени d выполняется

$$|F(z)(w_0,\ldots,w_n)| \leqslant H(z)\|w\|^d,\ \log H \in B_\sigma, \tag{6.1}$$

где $w = (w_0,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \|w\| = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant n} |w_j|$.

Пусть $S = \{Q_k\}_{k=1}^q$, $q > 2n$, — система однородных форм из $M_\sigma[x_0,\ldots,x_n]$ степени d. Система S называется допустимой, если для любого набора $I \in I_{n+1}$ найдется такое $z \in \mathbb{C}$, что система уравнений

$$Q_k(z)(w) = 0,\ k \in I, \tag{6.2}$$

имеет лишь тривиальное решение $w = 0$ в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Зафиксируем $I \in I_{n+1}$ и рассмотрим однородные формы $Q_k(z) \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$, $k \in I$, из системы S. Нам потребуется понятие результата системы $n+1$ форм от $n+1$ переменной (см., например, [26], гл. XI). Результат $R_I(z)$ это целочисленный многочлен от коэффициентов форм $Q_k(z)$, $k \in I$, такой, что условие $R_I(z) = 0$ необходимо и достаточно для существования нетривиального решения $w \in \mathbb{C}^{n+1}$, $w \neq 0$ у системы (6.2), существование такого многочлена доказывается в [26], гл. XI. Из определения результата и известных свойств неванлинновской характеристики ([1], гл. I) следует, что $R_I \in M_\sigma$. Таким образом, допустимость системы S означает, что $R_I(z) \not\equiv 0$ для любого набора $I \in I_{n+1}$, следовательно, если система S допустима, то для всех z, за исключением некоторого дискретного множества, система уравнений (6.2) не имеет нетривиальных решений.

В [26], гл.XI доказано, что найдется такое число $s \in \mathbb{N}$, что для всех $j, 0 \leqslant j \leqslant n$, выполняется тождество

$$x_j^s R_I(z) = \sum_{k\in I} b_{kj}(z)(x_0,\ldots,x_n)Q_k(z)(x_0,\ldots,x_n), \tag{6.3}$$

где $b_{kj}(z) \in \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$ — многочлены, коэффициенты которых являются целочисленными многочленами, от коэффициентов форм $Q_k, k \in I$. Таким образом, $b_{kj} \in M_\sigma[x_0,\ldots,x_n]$.

Пусть $w \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\|w\| = 1$. Из (6.1) и (6.3) получаем

$$\begin{aligned} |w_j|^s |R_I(z)| &\leqslant \sum_{k\in I} |b_{kj}(z)(w_0,\dots,w_n)||Q_k(z)(w_0,\dots,w_n)| \leqslant \\ &\leqslant H(z)\sum_{k\in I}|Q_k(z)(w_0,\dots,w_n)| \leqslant \\ &\leqslant H(z)\max_{k\in I}|Q_k(z)(w_0,\dots,w_n)|, \log H \in B_\sigma\, 0 \leqslant j \leqslant n. \end{aligned}$$

Суммируя полученные неравенства по $j, 0 \leqslant j \leqslant n$, и пользуясь неравенством

$$\sum_{j=0}^{n} |w_j|^s \geq c, \quad \|w\| = 1,$$

получаем

$$|R_I(z)| \leqslant cH(z)\max_{k\in I}|Q_k(z)(w_0,\dots,w_n)|$$

Так как $R_I \in M_\sigma$, то отсюда получаем при $\|w\| = 1$:

$$H_1(z) \leqslant \max_{k\in I}|Q_k(z)(w_0,\dots,w_n)|, \log H_1 \in B_\sigma. \tag{6.4}$$

Воспользовавшись однородностью форм Q_k и неравенствами (6.1), (6.4), мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} H_1(z)\|w\|^d &\leqslant \max_{k\in I}|Q_k(z)(w_0,\dots,w_n)| \leqslant \\ &\leqslant H_2(z)\|w\|^d, w \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}, \log H_i \in B_\sigma,\ I \in I_{n+1}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Доказательство теоремы 3. Для мероморфной кривой f, имеющей представление в однородных координатах $f = (f_0,\dots,f_n)$, положим

$$v = \bigvee_{j=0}^{n} \log|f_j|,$$
$$v_k(z) = \log|Q_k(z)(f_0(z),\dots,f_n(z))|,\ 1 \leqslant k \leqslant q,\ q > 2n,$$

где формы $Q_k \in M_\sigma[x_0,\dots,x_n]$ с

$$\sigma(r) = \frac{T(r,f)}{\log^\tau T(r,f)},\ \tau > 1,$$

образуют допустимую систему S. Как и выше, через μ обозначаем риссовскую меру субгармонической функции v, тогда $A(r) = A(r,f) = \mu(\overline{\mathcal{D}(r)})$.

Подставляя в (6.5) координаты кривой f, получаем аналог (3.2): для любого набора $I \in I_{n+1}$ справедливо

$$h(z) = |\bigvee_{k\in I} v_k - dv| \in B_\sigma. \tag{6.6}$$

Зафиксируем числа $\varepsilon > 0$ и $\eta, 1 < \eta < \tau$. Применим лемму 8 из § 5 и выберем неисключительные значения r и r' такие, что

$$r' = r + \frac{r}{\log^\eta A(r)} = r + \Delta, \tag{6.7}$$

$$A(r') \leqslant (1+\varepsilon)A(r), \tag{6.8}$$

E_0 — множество исключительных значений r', для которых не выполнено (6.8), его логарифмическая длина конечна. Применив лемму 6 из § 4, построим разбиение единицы, соответствующее выбранным значениям r и Δ, полагаем

$$a_j = \int \varphi_j \, d\mu,$$

где функции φ_j образуют разбиение единицы в $\mathcal{D}(r)$.

Как и в § 5, пересадим δ-субгармонические функции v_k, $1 \leqslant k \leqslant q$, и субгармоническую функцию v из круга $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}(z_j, \rho_j)$ в стандартный круг $\mathcal{D}(1)$, нормировав эти функции на a_j. Полагаем

$$U_k^j(z) = \frac{1}{a_j} v_k(\rho_j z + z_j),$$

$$U^j(z) = \frac{d}{a_j} v(\rho_j z + z_j).$$

Как и в доказательстве теоремы 1, мы хотим выделить такое множество индексов $J^* \subset J = \{1, 2, \ldots, p\}$, что при $j \in J^*$ функции u_k^j, U^j удовлетворяют условиям теоремы 2 и

$$\sum_{j \in J \setminus J^*} a_j \leqslant \varepsilon A(r). \tag{6.9}$$

Основная техническая трудность состоит в оценке величин

$$\alpha_{I,j} = \| \bigvee_{k \in I} U_k^j - U^j \|, \, I \in I_{n+1}, \, j \in J^*,$$

где, как и ранее,

$$\|\psi\| = \iint\limits_{\mathcal{D}(1)} |\psi| \, dx \, dy.$$

Положим

$$\sum(r) = \sum_{j=1}^{p} a_j \alpha_{I,j}.$$

Из определения величин $\alpha_{I,j}$ и (6.6) получаем

$$\sum(r) \leqslant c \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\rho_j^2} \iint\limits_{\mathcal{D}_j} h(x+iy) \, dx \, dy, \, h \in B_\sigma.$$

Положим

$$K_m = \mathcal{D}(r' - 2^{m-1}\Delta)\backslash\mathcal{D}(r' - 2^m\Delta),\ 1 \leqslant m \leqslant l = 1 + [\log_2 \frac{r'}{\Delta}].$$

Тогда в силу свойств 2)–4) из леммы 6 получаем

$$\begin{aligned}
\sum(r) &\leqslant c\sum_{m=1}^{l}\sum_{j:\mathcal{D}_j\cap K_m\neq\emptyset}\frac{1}{\rho_j^2}\iint_{\mathcal{D}_j} h(x+iy)\,dx\,dy \leqslant \\
&\leqslant c\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{2^{2m}\Delta^2}\int_0^{2\pi}\int_{r'-2^m\Delta}^{r'-2^{m-1}\Delta} h(te^{i\theta})t\,dt\,d\theta \leqslant \\
&\leqslant c\sum_{m=1}^{l}\frac{\sigma(r')2^m\Delta r}{2^{2m}\Delta^2} \leqslant c\frac{\sigma(r')r}{\Delta} \leqslant c\frac{T(r')\log^\eta A(r)}{\log^\tau T(r')}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Для заданного $\alpha > 0$ положим

$$J(\alpha) = \{j \in J : \alpha_{I,j} \leqslant \alpha\}. \tag{6.11}$$

Тогда, согласно (6.10), справедлива такая оценка:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J\backslash J(\alpha)} a_j &= \sum_{j\in J\backslash J(\alpha)}\frac{a_j\alpha_{I,j}}{\alpha_{I,j}} \leqslant \frac{1}{\alpha}\sum(r) \leqslant \\
&\leqslant \frac{c}{\alpha}\frac{T(r')}{\log^\tau T(r')}\log^\eta A(r).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Если функция $A(r)$ растет медленно, то характеристику $T(r)$ нельзя приемлемо оценить сверху через $A(r)$, поэтому, вообще говоря, из полученной оценки (6.12) нельзя вывести нужное нам неравенство (6.9). Поэтому мы отдельно рассмотрим такие значения r, для которых $T(r)$ не оценивается сверху через $A(r)$, для таких значений мы непосредственно докажем проинтегрированную 2-ю основную теорему.

Положим

$$F_1 = \{r' : T(r') \leqslant A(r')\log^\gamma A(r')\}\backslash E_0,$$
$$F_2 = \{r' : T(r') > A(r')\log^\gamma A(r')\},$$

где E_0 — исключительное множество из леммы 8, на котором не выполнено (6.8), $\gamma = (\tau - \eta)/2$.

Рассмотрим 2 случая.

1-й случай. : $r \in F_1$.

Пусть ν^j — риссовская мера функции U^j, а ν_k^j — риссовские заряды функции U_k^j. Чтобы применить теорему 2, нужно выделить такие значения

$j \in J$, что функции U_k^j имеют „почти неотрицательный“ риссовский заряд, а именно нужно оценить величины

$$\sum_{k=1}^{q} (\nu_k^j)^- (\overline{\mathcal{D}(1)}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} b_j.$$

Обозначим через $n(r, S)$ суммарное количество полюсов (с учетом кратности) коэффициентов форм $Q_k, 1 \leqslant k \leqslant q$,

$$N(r, s) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, S)}{t} \, dt.$$

Из условий доказываемой теоремы 3 и 1-й основной теоремы Р.Неванлинны вытекает, что

$$N(r, S) = O(\sigma(r)) = O(\frac{T(r)}{\log^\tau T(r)}), \; r \to \infty.$$

Рассмотрим множество

$$E_1 = \{r' : n(r', S) \geq N(r', S) \log^\eta N(r, S)\}.$$

Имеем

$$\int_{E_1} d\log t \leqslant \int_{E_1} \frac{n(t, S)}{N(t, S) \log^\eta N(t, S)} \, d\log t =$$
$$= \int_{E_1} \frac{dN(t, S)}{N(t, S) \log^\eta N(t, S)} < \infty,$$

поэтому множество E_1 имеет конечную логарифмическую длину. Если же $r \in F_1 \backslash E_1$, то

$$\begin{aligned} n(r', S) &\leqslant N(r', S) \log^\eta N(r', S) \leqslant \\ &\leqslant T(r') \log^{\eta - \tau} T(r') \leqslant A(r') \log^{-\gamma} A(r'). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Используя теперь свойства 2), 3) разбиения из леммы 6 и (6.13), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} a_j b_j &= \sum_{j=1}^{p} a_j (\frac{1}{a_j} \sum_{k=1}^{q} \mu_k^- (\overline{D}_j)) \leqslant \\ &\leqslant c \sum_{k=1}^{q} \mu_k^- (\mathcal{D}(r')) \leqslant cn(r', S) \leqslant cA(r') \log^{-\gamma} A(r'). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Обозначим через $J^* \subset J = \{1, 2, \ldots, p\}$ множество номеров j, для которых выполняется

$$(\mu + \sum_{k=1}^{q} \mu_k)(\overline{\mathcal{D}_j}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} a_j, \tag{6.15}$$

$$\alpha_{I,j} \leqslant \log^{-\gamma/2} A(r'), \tag{6.16}$$

$$b_j \leqslant \log^{-\gamma/2} A(r'). \tag{6.17}$$

Пусть J_1,, J_2, J_3 — множества номеров, для которых не выполняется (6.15), (6.16), (6.17) соответственно. Имеем в силу леммы 7 (утверждение 2) и свойств 2) и 3) разбиения из леммы 6

$$\sum_{j\in J_1} a_j \leqslant \varepsilon \sum_{j\in J}(\mu + \sum_{k=1}^{q} \mu_k)(\overline{\mathcal{D}_j}) \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon(A(r') + \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r'))). \tag{6.18}$$

Далее, используя (6.11) и (6.12), $\alpha = \log^{-\gamma/2} A(r')$, а также монотонность функции $\psi(T) = T\log^{-\tau} T$, получаем

$$\sum_{j\in J_2} a_j \leqslant c\log^{\gamma/2} A(r') \frac{A(r')\log^{\gamma} A(r')}{\log^{\tau} A(r')} \log^{\eta} A(r) \leqslant$$
$$\leqslant cA(r')\log^{-\gamma/2} A(r'). \tag{6.19}$$

Наконец, в силу (6.14) и определения J_3 получаем

$$\sum_{j\in J_3} a_j = \sum_{j\in J_3} \frac{a_j b_j}{b_j} \leqslant \log^{\gamma/2} A(r') \sum_{j\in J} a_j b_j \leqslant$$
$$\leqslant cA(r')\log^{-\gamma/2} A(r'). \tag{6.20}$$

Объединяя оценки (6.18)–(6.20), получаем

$$\sum_{j\in J\setminus J^*} \int \varphi_j \, d\mu = \sum_{j\in J\setminus J^*} a_j \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon(A(r') + \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r'))), \; r' \in F_1\backslash E_1. \tag{6.21}$$

Если $j \in J^*$, то к функциям U^j, U^j_k можно применить теорему $2'$. При $r' \geq r_1$, $r' \in F_1\backslash E_1$ ее условия выполнены в силу (6.15)–(6.17). Получаем, что при $r' \geq r_1$, $r' \in F_1\backslash E_1$ и $j \in J^*$ выполняется

$$\int \{\sum_{j\in J^*} \varphi_j\} \, d(\sum_{k=1}^{q} \mu_k - d(q-2n)\mu) \geq -\varepsilon \int (\sum_{j\in J^*} \varphi_j) \, d\mu. \tag{6.22}$$

Объединив оценки (6.21), (6.22), как и в § 5, получаем

$$d(q-2n)A(r') \leqslant (1+c\varepsilon) \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r')), \; r' \in F_1\backslash E_1. \tag{6.23}$$

2-й случай. : $r \in F_2$. Тогда

$$T(r) - T(r/2) = \int\limits_{r/2}^{r} \frac{A(t)}{t}\,dt \leqslant A(r)\log 2 \leqslant$$
$$\leqslant T(r)\log 2/\log^{\gamma} A(r) = o(T(r)),$$

т.е.

$$T(r/2) \sim T(r),\ r \in F_2,\ r \to \infty. \tag{6.24}$$

Покажем, что при $r \to \infty$, $r \in F_2$ выполняется

$$d(q-n)T(r/2) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r/2, Q_k) + o(T(r)). \tag{6.25}$$

(Ввиду (6.24) это сильнее, чем (1.6)). Пусть (6.25) не выполнено. Тогда найдется последовательность $r_j \to \infty$, $r_j \in F_2$ такая, что

$$d(q-n)T(r_j/2) \geq \sum_{k=1}^{q} N(r_j/2, Q_k) + \varepsilon T(r_j),\ \varepsilon > 0. \tag{6.26}$$

Рассмотрим субгармоническую функцию

$$v = \bigvee_{j=0}^{n} \log|f_j|$$

с риссовской мерой μ и δ-субгармонические функции $v_k(z) = \log|Q_k(z, f_0(z), \dots, f_n(z))|$ с зарядами μ_k. Имеем в силу 1-ой основной теоремы

$$(\sum_{k=1}^{q} \mu_k^+)(\mathcal{D}(\frac{2}{3}r)) = O(T(r)), \qquad r \to \infty, \tag{6.27}$$
$$(\sum_{k=1}^{q} \mu_k^-)(\mathcal{D}(\frac{2}{3}r)) = o(T(r)), \qquad r \to \infty, \tag{6.28}$$
$$\mu(\overline{\mathcal{D}(r)}) = A(r) = o(T(r)), \qquad r \to \infty, \quad r \in F_2. \tag{6.29}$$

Пусть H_r — наименьшая гармоническая мажоранта функции v в $\mathcal{D}(\frac{2}{3}r)$. Положим

$$P^j(z) = d(T(r_j))^{-1}(v(r_j z) - H_{r_j}(r_j z)),$$
$$P_k^j(z) = (T(r_j))^{-1}(v_k(r_j z) - H_{r_j}(r_j z)), z \in \mathcal{D}(\frac{2}{3}).$$

Тогда P^j — суть потенциалы Грина, образующие компактное семейство. В силу (6.6) выполняется

$$\int\limits_0^{2\pi} \Big| \bigvee_{k\in I} P_k^j(re^{i\theta}) - P^j(re^{i\theta})\Big|\, d\theta \to 0, \tag{6.30}$$

$I \in I_{n+1}$, $j \to \infty$, при любом $r, 0 < r < 1$.

Рассуждая, как в доказательстве теоремы $2'$, и используя (6.27)–(6.29), выбираем подпоследовательность номеров j, чтобы выполнялось $P^j \to u$ и $P_k^j \to u_k$. Из (6.29) следует, что $u = 0$.

Функции u_k субгармонические или равны тождественно $-\infty$. Соотношение (6.30) дает

$$\bigvee_{k \in I} u_k = 0,\ I \in I_{n+1}, \quad \text{в } \mathcal{D}(\frac{2}{3}).$$

Это означает, что все функции u_k, кроме, быть может, n из них, тождественно равны 0. Пусть для определенности $u_1 = u_2 = \cdots = u_{q-n} = 0$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{q-n} P_k^j - (q-n)P^j)(\frac{1}{2}e^{i\theta})\, d\theta \to 0,\ j \to \infty,$$

следовательно,

$$\int_0^{2\pi} (\sum_{k=1}^{q-n} v_k(r_j e^{i\theta}/2) - d(q-n)v(r_j e^{i\theta}/2))\, d\theta =$$
$$= o(T(r_j)),\ j \to \infty. \tag{6.31}$$

Теперь из (6.31) получаем с учетом определений $T(r)$ и $N(r, Q_k)$:

$$d(q-n)T(r_j/2) \leqslant \sum_{k=1}^{q-n} N(r_j/2, Q_k) + o(T(r_j)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r_j/2, Q_k) + o(T(r_j)),\ j \to \infty,$$

что противоречит (6.26). Таким образом, доказано (6.25), что с учетом (6.24) дает

$$d(q-2n)T(r) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r, Q_k) + o(T(r)),\ r \to \infty,\ r \in F_2. \tag{6.32}$$

Чтобы закончить доказательство, остается вывести (1.6) из (6.23) и (6.32).

Лемма 10. *Пусть $F_1 \cup F_2 \cup E = [1, \infty)$, $A(t)$ монотонно стремится к ∞, $\eta(t) \leqslant A(t)$. Предположим, что*

$$\int_E d\log t < \infty,$$
$$\eta(t) < \varepsilon A(t), t \in F_1,$$
$$\int_1^r \frac{\eta(t)}{t}\, dt < \varepsilon \int_1^r \frac{A(t)}{t}\, dt, r \in F_2.$$

Тогда найдется множество E^* со свойствами

$$\int_{E^*} d\log t < \infty, \tag{6.33}$$

$$\int_1^r \frac{\eta(t)}{t}\,dt \leqslant 2\varepsilon \int_1^r \frac{A(t)}{t}\,dt, r \notin E^*.$$

Доказательство. Используем лемму 9 с $e = \{x \in (0,\infty)\colon \exp x \in E\}$. Пусть e^* — исключительное множество, построенное в лемме 9, $E^* = \{r \in [1,\infty) : \log r \in e^*\}$. Множества e, а следовательно, и e^* имеют конечную длину, поэтому выполнено (6.33).

Пусть $R \in F_1\backslash E^*$, положим $\rho(r) = \sup\{\rho \in F_2 : \rho < r\}$. Если множество $\{\rho \in F_2 : \rho < r\} = \emptyset$, то полагаем $\rho(r) = 1$. Имеем в силу леммы 9 и определения множеств F_1 и F_2:

$$\int_1^r \frac{\eta(t)}{t}\,dt = \int_1^{\rho(r)} \eta(t)\,d\log t + \int_{F_1\cap[\rho(r),r]} \eta(t)\,d\log t +$$
$$+ \int_{E\cap[\rho(r),r]} \eta(t)\,d\log t \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int_1^{\rho(r)} A(t)\,d\log t + \varepsilon \int_{\rho(r)}^r A(t)\,d\log t +$$
$$+\varepsilon \int_{\rho(r)}^r A(t)\,d\log t \leqslant 2\varepsilon \int_1^r \frac{A(t)}{t} dt.$$

Лемма доказана.

Взяв в этой лемме

$$\eta(r) = d(q-2n)A(r) - \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r'))$$

и применяя (6.23) и (6.32), получаем

$$d(q-2n)T(r) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r,Q_k) + 2\varepsilon T(r). \quad \|$$

Отсюда неравенство (1.6) получается стандартным приемом, уже использованным в доказательстве теоремы 1.

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. При рассмотрении случая 2 в теореме 3 на самом деле доказано более сильное утверждение, чем требовалось. Сформулируем его.

Пусть на некотором неограниченном множестве F выполняется

$$A(r) = o(T(r)),\ r \in F,\ r \to \infty. \tag{6.34}$$

(*Отсюда следует* (6.24)). *Выберем функцию* $\sigma(r) = o(T(r))$, $r \to \infty$, *и рассмотрим допустимую систему форм степени* d : $Q_k \in M_\sigma[x_0, \ldots, x_n]$, $1 \leqslant k \leqslant q$, $q > n$. *Тогда*

$$d(q-n)T(r) \leqslant \sum_{k=1}^{q} N(r, Q_k) + o(T(r)),\ r \in F,\ r \to \infty,$$

в частности,

$$\sum_{k=1}^{q} \delta(Q_k, f) \leqslant n.$$

Замечание 3. Анализ приведенного доказательства показывает, что если

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{A(r,f)}{T(r,f)} > 0, \tag{6.35}$$

то в условиях теоремы 3 справедливо непроинтегрированное неравенство (1.5). Действительно, условие (6.35) позволяет не рассматривать отдельно два случая, а повторив рассуждения из 1-го случая, получить (1.5).

Для доказательства теоремы 4 нам потребуется еще одна лемма о монотонных функциях.

Напомним, что $E(r) = E \cap [0, r]$, $E \subset \mathbb{R}_+$.

Лемма 11. *Пусть функция* $\psi(x)$ *такова, что*

$$\psi(x)/x \uparrow +\infty,\ x \to +\infty. \tag{6.36}$$

Рассмотрим множество

$$G = \{r \geq e : T(r) \leqslant \log^2 r\}. \tag{6.37}$$

Тогда существует множество $E \subset G$ *такое, что*

$$A(r) = o(T(r)),\ r \to \infty,\ r \in G \backslash E, \tag{6.38}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\psi(\log\log r)} \int\limits_{E(r)} \frac{d\rho}{\rho} = 0. \tag{6.39}$$

Доказательство. Положим $E^\varkappa = \{r \in G : A(r) \geq \varkappa T(r)\}$, $\varkappa > 0$. В силу (6.37) имеем

$$\int\limits_{E^\varkappa(t)} d\log\rho \leqslant \frac{1}{\varkappa} \int\limits_{E^\varkappa(t)} \frac{A(\rho)}{\rho T(\rho)}\, d\rho \leqslant \frac{1}{\varkappa} \int\limits_{e}^{t} d\log T(\rho) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\log T(t)}{\varkappa} \leqslant \frac{2\log\log t}{\varkappa}.$$

Таким образом, для последовательности $\varkappa_j \to 0, j \to \infty$, можно найти последовательность чисел $t_j \to \infty$, для которых

$$\int\limits_{E^{\varkappa}(t)} d\log\rho \leqslant 2^{-j}\psi(\log\log t),\ t \geq t_j.$$

Положим

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty}(E^{\varkappa_j} \cap [t_j, t_{j+1}]) \cup [e, t_1],$$

покажем, что это множество искомое.

В самом деле, если

$$r \in [t_j, t_{j+1}] \cap (G\backslash E) = [t_j, t_{j+1}] \cap (G\backslash E^{\varkappa_j}),$$

то

$$A(r) \leqslant \varkappa_j T(r), \tag{6.40}$$

$$\frac{1}{\psi(\log\log t)} \int\limits_{E(t)} d\log\rho \leqslant 2^{-j}. \tag{6.41}$$

Оценки (6.38) и (6.39) вытекают из (6.40), (6.41) соответственно.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть

$$G_1 = \{r \geq e : T(r) \geq \log^2 r\},$$
$$G_2 = \{r \geq e : T(r) < \log^2 r\}.$$

Коэффициенты форм Q_k — рациональные функции, их характеристики суть

$$O(\log r) = O(\sqrt{T(r)}),\ r \in G_1,\ r \to \infty.$$

Поэтому при $r \in G_1$ мы можем повторить рассуждения из доказательства теоремы 3.

Пусть

$$F_1 = \{r \in G_1 : T(r) \leqslant A(r)\log A(r)\}\backslash(E_0 \cup E_1),$$

где E_0, E_1 — исключительные множества конечной логарифмической длины, построенные при доказательстве теоремы 3. Тогда на множестве F_1 выполняется непроинтегрированная оценка (1.5), а на множестве $G_1\backslash F_1$ проинтегрированная оценка (1.6).

Воспользовавшись леммой 11, выделим из множества G_2 подмножество E_2 со свойствами (6.38), (6.39). Тогда, согласно замечанию 2, на множестве $G_2\backslash E_2$ также справедливо проинтегрированное неравенство (1.6).

Положим $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, для этого исключительного множества выполнено (6.39). Пусть

$$F_2 = (G_1 \backslash (F_1 \cup E_0 \cup E_1)) \cup (G_2 \backslash E_2),$$

$$\eta(r) = d(q-2n)A(r) - \sum_{k=1}^{q} \mu_k(\mathcal{D}(r')) \leqslant (q-2n)\,dA(r).$$

Мы имеем $[e, \infty) = F_1 \cup F_2 \cup E$, причем

$$\eta(r) \leqslant \varepsilon A(r), r \in F_1,$$

$$\int_e^r \frac{\eta(t)}{t}\,dt \leqslant \varepsilon \int_e^r \frac{A(t)}{t}\,dt, r \in F_2.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 3, с помощью леммы 9 заключаем, что (1.6) выполнено, при $r \notin E^*$, где исключительное множество E^*, как и E, удовлетворяет (6.39). Тем самым теорема 4 доказана.

Список литературы

[1] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, Наука, М., 1970.

[2] Азарин В. С., *Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка*, Мат. сб. **108**, вып. 2 (1979), 217–238.

[3] Anderson J., Baernstein A., *The size of the set on which a meromorphic function is large*, Proc. London Math. Soc. **36** (1978), 518–539.

[4] Хермандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986.

[5] Еременко А. Э., *Новое доказательство теоремы Дрейсина о мероморфных функциях конечного порядка с максимальной суммой дефектов*, *Теория функций, функцион. анализ и их прил.*, т. 51, Вища школа, Харьков, 1989, с. 107–116.

[6] Содин М. Л., *О распределении значений мероморфных функций конечного порядка по аргументам*, Сиб. мат. журн. **31** (1990), 169–179.

[7] Shiffman B., *On holomorphic curves and meromorphic maps in projective space*, Indiana Univ. Math. J. **28** no. 4 (1979), 627–641.

[8] Biancofiore A., *A defect relation for linear systems on compact complex manifolds*, Illinois J. of Math. **28** no. 4 (1984), 531–546.

[9] Азарин В. С., Ронкин А. Л., *Об одном неравенстве Б.Шиффмана для мероморфных отображений*, *Теория функций, функцион. анализ и их прил.*, т. 44, Вища школа, Харьков, 1985, с. 3–16.

[10] Cartan H., *Sur les zeros des combinaisons lineaires de p fonctions holomorphes donnees*, Mathematica (*Cluj*) **7** (1933), 5–31.

[11] Ночка Е. И., *К теории мероморфных кривых*, ДАН СССР **269**, вып. 3 (1983), 547–552.

[12] Бабец В. Ф., *Теоремы пикаровского типа для голоморфных отображений*, Сиб. мат. журн. **25**, вып. 2 (1984), 35–41.

[13] Green M., *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties*, Amer. J. Math. **97** no. 1 (1975), 43–75.

[14] Osgood Ch., *Sometimes effective Thue–Siegel–Roth–Schmidt's-Nevanlinna bounds, or better*, J. Number Theory **21** (1985), 347–389.

[15] Steinmetz N., *Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes*, J. reine angew. Math. **368** (1986), 134–141.

[16] Ландкоф Н. С., *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.

[17] Брело М., *Основы классической теории потенциала*, Мир, М., 1964.

[18] Хейман У., Кеннеди П., *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.

[19] Mazurkiewicz S., *Über erreichbare Punkte*, Fund Math. **26** (1936), 150–155.

[20] Brelot M., Choquet G., *Espaces et lignes de Green*, Ann. Inst. Fourier. **3** (1952), 199–263.

[21] Саакян Р. Ш., *Об одном обобщении принципа максимума*, Изв. АН АрмССР. **22**, вып. 1 (1987), 94–101.

[22] Doob J. L., *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Springer, Berlin etc., 1984.

[23] Бурбаки Н., *Интегрирование*, Наука, М., 1977.

[24] Харари Ф., *Теория графов*, Мир, М., 1973.

[25] Гришин А. Ф., *О множествах регулярного роста целых функций I. Теория функций, функцион. анализ и их прил.*, т. 40, Вища школа, Харьков, 1983, с. 36–47.

[26] Ван-дер-Варден Б. Л., *Современная алгебра*, т. 2, Гостехиздат, М.; Л., 1947.

[27] Fuglede B., *Finely harmonic functions*, Lect. Notes. Math. (1972), Springer, Berlin etc.

[28] Fuglede B., *Integral representation of fine potentials*, Math. Ann. **262** (1983), 191–214.

Поступило 27 ноября 1989 г.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР
310086, Харьков, пр.Ленина, 47