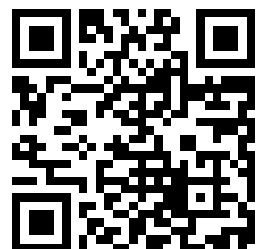

This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

<https://books.google.com>





Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

LDT
ST9



Library
of the
University of Wisconsin

**SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE,
ORTHOGONALE SUBSTITUTIONEN**

UND

ELLIPTISCHE FUNCTIONEN.

EINE ANALYTISCH-GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNG

VON

E. STUDY.

Des XX. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N^o II.

MIT SECHZEHN FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1893.

~~~~~  
**Das Manuscript eingeliefert am 9. Mai 1893.**  
**Der Druck beendet am 18. Juli 1893.**  
~~~~~


114583
JAN 20 1908

LDT
.ST9

**SPHÄRISCHE TRIGONOMETRIE,
ORTHOGONALE SUBSTITUTIONEN
UND
ELLIPTISCHE FUNCTIONEN.**

EINE ANALYTISCH-GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNG

VON

E. STUDY.

MIT SECHZEHN FIGUREN IM TEXT.

Vorwort.

In der vorliegenden Schrift wird der Versuch gemacht, der sphärischen Trigonometrie eine neue Seite abzugewinnen. Der Verfasser hat es unternommen, neuere Anschauungsweisen, besonders den Gruppenbegriff, für diesen Zweig der Elementargeometrie fruchtbar zu machen. Von Einzelergebnissen mögen hervorgehoben werden die Beziehung der trigonometrischen Formeln zur Theorie der orthogonalen Substitutionen; die Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum; die Darstellung der sphärischen Dreiecke durch Kreisvierecke in der Ebene; endlich die Vertiefung und Verallgemeinerung eines von LAGRANGE herrührenden Satzes, der die sphärische Trigonometrie mit der Theorie der elliptischen Functionen in Verbindung bringt. Alle diese Untersuchungen sind, wie ausdrücklich hervorgehoben werden muss, rein theoretischer Natur; für den praktischen Geometer unmittelbar verwerthbare Resultate wird man in dieser Arbeit nicht finden.

Um das Gebotene einem möglichst weiten Kreise zugänglich zu machen, ist vom Leser nur eine allgemeine mathematische Vorbildung gefordert worden, wenigstens in den beiden ersten Abschnitten, die für sich ein Ganzes bilden. Allerdings konnte einige Bekanntschaft mit dem so überaus wichtigen Gruppenbegriff nicht entbehrt werden, der zwar einem Theile der jüngeren Generation geläufig ist, den dem akademischen Leben ferner stehenden Mathematikern aber leider noch immer nicht durch eine eigentlich pädagogische, den Bedürfnissen der Lehrer angepasste Darstellung zugänglich gemacht worden ist. Der Verfasser hat auf diesen Zustand in der Weise Rücksicht genommen, dass er die im Texte vorkommenden Begriffe der Gruppentheorie da, wo sie zuerst auftreten, erklärt hat. Die hiernach etwa noch bleibende, in der Häufung ungewohnter Begriffe liegende

Schwierigkeit wird der der Gruppentheorie nicht kundige Leser wohl grösstentheils vermeiden können, wenn er mit dem *zweiten* Abschnitt beginnen und den Inhalt des ersten Abschnittes nach dem jeweiligen Bedürfniss nachholen will. Das Interesse des dritten Abschnittes liegt wohl mehr noch im Gebiete der elliptischen Functionen als in dem der Trigonometrie selbst. Hier musste die WEIERSTRASS'sche Theorie der elliptischen Functionen als bekannt angenommen werden, jedoch nur in ihren Grundzügen, nämlich etwa in dem Umfange, wie sie von HALPHEN in der ersten Hälfte des ersten Bandes (Cap. I—VII) seines *Traité des fonctions elliptiques* (Paris 1886) dargestellt worden ist.

Die Stellung der Elementargeometrie innerhalb der heutigen Wissenschaft ist so eigenthümlich, dass im vorliegenden Falle eine über den gerade behandelten Gegenstand hinausgehende Betrachtung gerechtfertigt sein dürfte.

Es liegt in der Natur der Sache, dass neue Gedanken in Schulbücher nur sehr langsam eindringen können. Leider aber ist, wie es scheint, auch nur eine kleine Anzahl von solchen Werken vorhanden, die elementare Gegenstände aus einem höheren Standpunkt und in modernem Geiste behandeln. Ueberhaupt hat seit den Tagen von MÖBIUS, STEINER und CHASLES das Interesse an elementargeometrischer Forschung stetig abgenommen. Glänzende Entdeckungen in anderen Gebieten, neue Richtungen innerhalb der Geometrie selbst haben neue Aufgaben gebracht, die die Kräfte der Mathematiker vollauf in Anspruch genommen haben. Heute ist die Geometrie des Euclides aus unseren herorragendsten Fachzeitschriften beinahe völlig verdrängt, und auch aus dem akademischen Unterricht ist sie nahezu verschwunden. Die noch vorhandene, an Umfang keineswegs geringe Production trägt vielfach ein antiquirtes Gepräge, so dass wohl Mancher den Eindruck davongetragen haben mag, diese »einfachen« Dinge seien »in der Hauptsache längst erledigt«.

Aber besteht denn thatsächlich ein solcher Gegensatz zwischen der Geometrie der Alten und der modernen Mathematik? Ist der alte Boden durch die herkömmliche, doch ziemlich primitive Art der Bearbeitung wirklich schon erschöpft? Sollten nicht vielmehr eben die Werkzeuge und Methoden, die zur Erschliessung neuer Gebiete gedient haben, geeignet sein, auch der elementaren Geometrie Schätze

neuer Art abzugewinnen? Und wenn dem so ist: ist es wünschenswerth, dass gerade die mathematische Disciplin, die für die Technik, wie für die physikalische Forschung die nothwendige Grundlage bildet, der bei der Erziehung unserer Jugend eine Hauptrolle zuge-theilt ist, noch länger vernachlässigt wird? Sollten wir nicht die Wissenschaft von dem Raume, in dem wir nun einmal leben, mit allen zu Gebote stehenden Mitteln fördern, um das anschauliche Denken zu kräftigen, um ein wirksames Gegengewicht zu schaffen gegen den in unseren Tagen noch immer wachsenden, ja von Einigen beinahe systematisch gepflegten Hang zu einseitiger Abstraction?

Wenn solche Gedanken, wie es ja erfreulicher Weise den Anschein hat, breiteren Boden gewinnen, so darf der Verfasser vielleicht hoffen, dass man seiner Bemühung einige Aufmerksamkeit schenken wird. Möchte diese Arbeit, wenn auch nur an *einer* schmalen Stelle, die Kluft ausfüllen helfen, die die elementare Geometrie trennt von der lebendigen Wissenschaft! —

Mit Dankbarkeit muss ich der Theilnahme gedenken, die Herr FRANZ MEYER in Clausthal meinen Bestrebungen gewidmet hat. Er hat das fertige Manuscript, mit besonderer Rücksicht auf die pädagogische Brauchbarkeit der Darstellung, einer Durchsicht unterworfen; auch hat er die Freundlichkeit gehabt, eine Correctur zu übernehmen. Zu besonderem Danke bin ich der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften verpflichtet für die Unterstützung, die sie mir durch Aufnahme der vorliegenden Untersuchung in ihre Abhandlungen gewährt hat.

Marburg, im Mai 1893.

I. Abschnitt.

Geometrische Untersuchung der sphärischen Dreiecke.

§ 1.

Von der Gestalt eines Kugeldreiecks.

Wenn es sich darum handelt, den algebraischen Zusammenhang zwischen den goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks genau kennen zu lernen, so muss man sich von den Beschränkungen befreien, die in den elementaren Lehrbüchern dem Begriff eines sphärischen Dreiecks auferlegt werden; denn diese Beschränkungen haben ihren Grund nicht im Wesen der Sache, sondern in den praktischen Anwendungen, die ein Bedürfniss nach einer Untersuchung der allgemeinsten Kugeldreiecke nicht haben hervortreten lassen. Wir werden daher zunächst, nach dem Vorgange von Möbius, den elementaren Dreiecksbegriff abändern und erweitern¹⁾, um dann, über den von Möbius eingenommenen Standpunkt noch hinausgehend, den Begriff des sphärischen Dreiecks zu entwickeln, der einer algebraischen Untersuchung, wie der vorliegenden, angemessen erscheint.

Für den Inhalt dieses ersten Abschnittes (abgesehen von § 7) ist wesentlich nur der Begriff der Bewegung, der Verschiebung einer starren Figur auf der Kugelfläche, nicht aber der des Maasses, der Darstellung einer Winkelgrösse oder eines Bogens durch eine *Zahl*. Wir können Winkel, auch ohne Maasszahlen, durch die Begriffe $>$, $=$, $<$ mit einander vergleichen; wir können sagen, ob der erste auf den zweiten gelegt, ihn überragt, gerade deckt, oder hinter ihm zurückbleibt. Es ist ferner klar, was man in diesem Sinne unter der Summe oder Differenz zweier Winkel zu verstehen hat. Die

1) Die in § 1 vorgetragene grundlegende Auffassung der sphärischen Trigonometrie ist enthalten in den Abhandlungen von Möbius: »Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik« (1846), Ges. Werke Bd. II, S. 4 und »Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit« (1860) ebenda S. 71.

Summe aller Winkel um einen Punkt herum, den Winkel um den man drehen muss, damit jeder Punkt der Kugel seine ursprüngliche Lage wieder einnimmt, können wir mit 2π bezeichnen, ohne dabei an eine Zahl zu denken, u. s. w. In derselben Weise bezeichnen wir auch mit 2π den Umfang eines auf der Kugel gezogenen Hauptkreises, d. i. des Schnittes der Kugel mit einer durch den Mittelpunkt gelegten Ebene, oder eines Kreises, der mit sich selbst durch eine halbe Umdrehung (Drehung um den Winkel π) zur Deckung gelangt. Die hiermit vollzogene Abstraction ist übrigens für das Verständniss des Folgenden nicht nothwendig. Wer eine Schwierigkeit darin findet, der mag unter einem Bogen a oder Winkel α immerhin das Maass eines Kreisbogens oder Winkels verstehen, der auf einer Kugel vom Radius Eins gelegen ist.

Solche Winkel oder Bogen von Hauptkreisen, die sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden, werden wir bis auf Weiteres als gleich ansehen, da sie alle durch wiederholtes Anlegen des von vorn herein ausgezeichneten Winkels oder Bogens 2π aus einem unter ihnen hervorgehen. Wir werden dann annehmen dürfen, dass Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks zwischen den Grenzen 0 und 2π enthalten sind; und es wird nun darauf ankommen, dass wir uns von der Gestalt der hiernach möglichen Kugeldreiecke Rechenschaft geben.

Wir denken uns zunächst für die Winkel um irgend einen Punkt der Kugeloberfläche herum einen Drehungssinn festgelegt, in dem sie positiv gerechnet werden sollen, etwa den Drehungssinn, der für einen ausserhalb der Kugel in der Nähe des Punktes stehenden Beobachter dem Sinne der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. Verschieben wir sodann diesen Punkt über die ganze Kugeloberfläche, so haben wir damit auch für alle anderen Punkte der Kugel einen positiven Drehungssinn bestimmt.

Es seien nun die Punkte A_1, A_2, A_3 der Kugel durch Hauptkreise verbunden. Auf jedem dieser Kreise nehmen wir ebenfalls einen positiven Drehungssinn willkürlich an, und bezeichnen mit a_1, a_2, a_3 die zwischen 0 und 2π enthaltenen Bogen, die man durchlaufen muss, um von A_2 im positiven Sinn nach A_3 , von da nach A_1 , und von hier aus wieder nach A_2 zu gelangen. Ferner bezeichnen wir mit α_1 den zwischen 0 und 2π enthaltenen Winkel, um den man den Hauptkreis $A_3 A_1$, unter Festhaltung der Ecke A_1 , im positiven

Sinne drehen muss, damit seine positive Richtung mit der positiven Richtung des Hauptkreises A_1A_2 zusammenfällt; und entsprechend definiren wir zwei weitere Winkel α_2 und α_3 .

Der Inbegriff der sechs Stücke $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ist nun für uns ein »sphärisches Dreieck«. Die Winkel α_i nennen wir schlechthin die »Winkel«, die Bogen a_i die »Seiten« des Dreiecks¹⁾. *Je zwei Dreiecke, die in diesen sechs Stücken übereinstimmen, gelten in unserer Untersuchung als identisch, auch wenn sie auf der Kugel verschiedene Lagen haben und vielleicht gar nicht congruent, sondern nur symmetrisch sein sollten.*

Zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks findet, bei unserer Definition (aber nicht bei der Definition der elementaren Lehrbücher) ein *vollkommenes Reciprocitätsverhältniss* statt. Zu jedem Hauptkreis auf der Kugel gehören nämlich zwei Pole, die gemeinsamen Schnittpunkte aller der Hauptkreise, die den ersten rechtwinklig treffen. Wir ordnen nun jedem Hauptkreis mit bestimmtem Drehungssinn den Pol zu, der für einen von aussen auf die Kugel blickenden Beobachter, bei Durchlaufung des Hauptkreises im positiven Sinne, zur Linken liegt. Damit erhalten wir offenbar ein einfaches Mittel, die Winkel um einen Punkt herum mit Kreisbogen zu vergleichen, und umgekehrt. Man gelangt so zur Construction des sogenannten *Polardreiecks*, dessen Ecken die Pole der drei Seiten des gegebenen Dreiecks sind, und dessen Seiten wiederum die Ecken des gegebenen Dreiecks zu Polen haben. Dieses Polardreieck hat, wie unmittelbar ersichtlich, Seiten = α_i und Winkel = a_i . *Die Kugeldreiecke ordnen sich also zu Paaren, die durch Vertauschung der Seiten und Winkel in einander übergehen.*

1) In den Elementarbüchern werden nicht die Winkel α_i , sondern deren Nebenwinkel $\pi - \alpha_i$ durch besondere Zeichen dargestellt, und »Winkel« des Dreiecks genannt. Dies ist auch bei vielen Anwendungen ganz am Platze, namentlich in der Geodäsie, wo eben die inneren Dreieckswinkel unmittelbar abgelesen werden. Bei rein theoretischen Entwicklungen aber ist ein solches Verfahren unzuweckmässig, da es zu einer Menge unnöthiger Rechnungen und sonstiger Weitläufigkeiten Anlass gibt und die Symmetrie der Formeln zerstört. — Man könnte leicht allen Anforderungen gerecht werden, wenn man beim Aufbau der Trigonometrie die dem Wesen der Sache entsprechenden Bezeichnungen wählen wollte, um dann am Schlusse die für den praktischen Gebrauch umgerechneten Formeln tabellarisch zusammenzustellen.

Da wir die positiven Richtungen der drei Hauptkreise willkürlich angenommen haben, so können wir drei gegebene Punkte A_1, A_2, A_3 im Allgemeinen durch acht verschiedene Dreiecke verbinden; und diese Zahl erhöht sich auf 16, da ja auch der Drehungssinn für die Winkel um einen Punkt herum beliebig war. Die Fig. 4 zeigt in stereographischer Projection die Gestalt von vieren der zuerst genannten acht Dreiecke, die zu wesentlich verschiedenen Dreiecksformen führen; aus ihnen kann man die übrigen leicht ableiten.

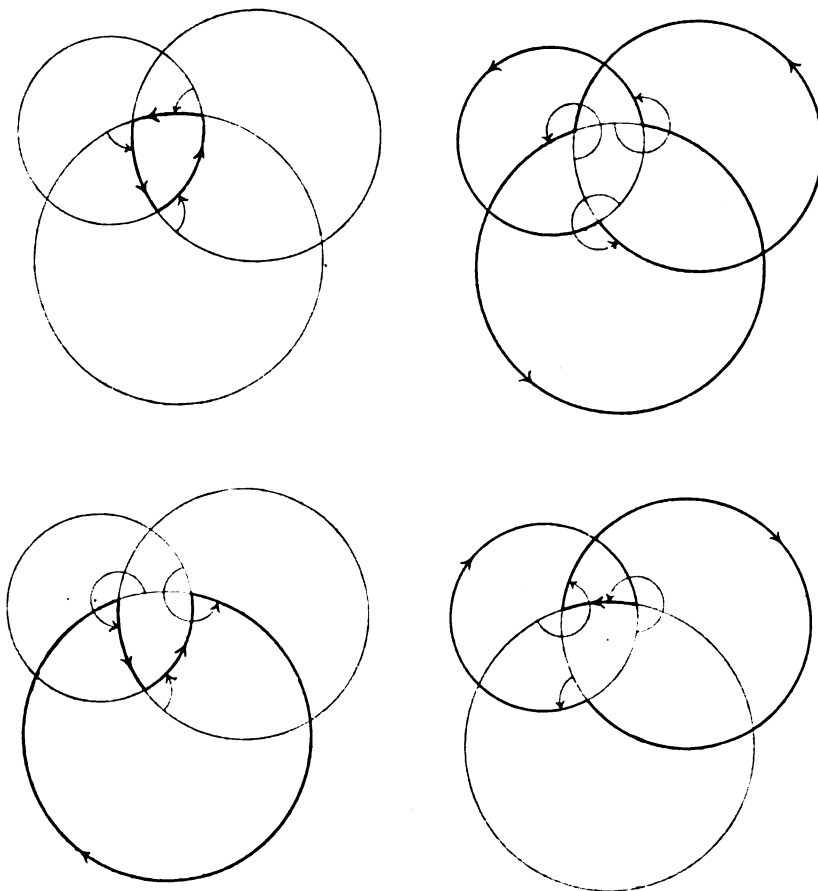


Fig. 4.

Es ist unter Umständen zweckmässig, zwei Dreiecke auch dann als nicht verschieden anzusehen, wenn sie durch Umkehrung des positiven Drehungssinnes der Winkel in einander übergehen. Nach dem Princip der Dualität wird man dann auch zwei solche Dreiecke

als gleichwerthig betrachten, die dadurch aus einander hervorgehen, dass man den positiven Drehungssinn aller drei Seiten gleichzeitig in den entgegengesetzten verwandelt. Dann werden zwei der in Fig. 4 verzeichneten Dreiecke überflüssig, und es gehören nur noch vier »verschiedene« Dreiecke zu gegebenen Ecken.

§ 2.

Ungleichungen für die Seiten und Winkel.

Die Winkel eines sphärischen Dreiecks sind durch die Seiten vollständig bestimmt, und umgekehrt, abgesehen von der bereits besprochenen Willkür. Man kann aber drei gegebene Kreisbogen a_1, a_2, a_3 nicht immer zu einem Kugeldreieck zusammensetzen; die Bogen a_i müssen vielmehr einem System von vier Ungleichungen genügen, oder genauer einem von acht solchen Ungleichungssystemen. Um diese Bedingungen in zweckmässiger Form darzustellen, führen wir statt der drei Bogen a_i vier Kreisbogen s_i ein, deren Summe gleich π ist, durch die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} 2s_0 = 2\pi - a_1 - a_2 - a_3 \\ 2s_1 = -a_1 + a_2 + a_3 \\ 2s_2 = a_1 - a_2 + a_3 \\ 2s_3 = a_1 + a_2 - a_3. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Bogen, deren Gebrauch für unsere ganze Analyse von der grössten Wichtigkeit ist, stellen sich, wie der Leser leicht beweisen wird, die genannten Ungleichungssysteme dar, wie folgt:

	A_0	A_0'	A_1	A_1'	A_2	A_2'	A_3	A_3'
s_0	≥ 0	$\leq -\pi$	$\geq -\pi$	≤ 0	$\geq -\pi$	≤ 0	$\geq -\pi$	≤ 0
(2) s_1	≥ 0	$\leq \pi$	$\geq \pi$	≤ 0	≥ 0	$\leq \pi$	≥ 0	$\leq \pi$
s_2	≥ 0	$\leq \pi$	≥ 0	$\leq \pi$	$\geq \pi$	≤ 0	≥ 0	$\leq \pi$
s_3	≥ 0	$\leq \pi$	≥ 0	$\leq \pi$	≥ 0	$\leq \pi$	$\geq \pi$	≤ 0

Die acht Dreiecke mit verschiedenen Seiten, die ihre Ecken in drei gegebenen Punkten haben, vertheilen sich auf die hierdurch definirten acht Dreiecksschaaren. Die Schaar A_0 enthält die construirbaren Dreiecke, deren Seiten zwischen den Grenzen 0 und π

liegen, also die Dreiecke, die in der elementaren Trigonometrie allein betrachtet zu werden pflegen. Die Dreiecke der Schaar A_1 entstehen aus denen der Schaar A_0 durch die Substitution

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = a_2 + \pi, \quad a_3' = a_3 + \pi;$$

oder auch durch die Substitution

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = 2\pi - a_2, \quad a_3' = 2\pi - a_3;$$

hier liegt also a_1 zwischen 0 und π , a_2 und a_3 dagegen liegen zwischen π und 2π ; endlich entstehen die Dreiecke der Schaar A_k' aus denen der Schaar A_k durch die Substitution

$$a_1' = 2\pi - a_1, \quad a_2' = 2\pi - a_2, \quad a_3' = 2\pi - a_3;$$

die Seiten der Dreiecke A_0' sind also zwischen π und 2π enthalten, während bei der Schaar A_1' a_2 und a_3 zwischen 0 und π liegen, a_1 dagegen zwischen π und 2π .

Definiren wir ferner vier Winkel σ_i , deren Summe wieder π ist, durch die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} 2\sigma_0 = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ 2\sigma_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\sigma_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\sigma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \end{cases}$$

so erhalten wir den Ungleichungen (2) ganz entsprechende Ungleichungen für die Winkel. Wir wollen diese Ungleichungen, ohne sie besonders hinzuschreiben, in derselben Reihenfolge mit A_i, A_i' bezeichnen ($i = 0, 1, 2, 3$). Es gilt dann der der Anschauung unmittelbar zu entnehmende Satz, dass bei einem sphärischen Dreieck jede der Combinationen

$$(A_i, A_i), (A_i, A_i'), (A_i', A_i), (A_i', A_i')$$

vorkommen kann, dagegen keine der Combinationen

$$(A_i, A_k), (A_i, A_k'), (A_i', A_k), (A_i', A_k'),$$

wenn $i \neq k$. Die 16 Dreiecke mit gegebenen Ecken vertheilen sich also auf die 16 Schaaren, die den zulässigen Verbindungen der Ungleichungen A_i, A_i', A_i, A_i' entsprechen.

Die aufgestellten Ungleichungen zwischen den Seiten oder den Winkeln haben sich uns ergeben ohne vorherige Entwicklung der Formeln der sphärischen Trigonometrie (ja sogar ohne Hülfe des Maass-

begriffs). Anders verhält es sich mit den Ungleichungen, in denen Seiten und Winkel zugleich vorkommen. Diese spielen aber in unserer Untersuchung keine Rolle, und werden daher ganz ausserhalb des Kreises der Betrachtung bleiben.

Betrachten wir die Seiten a_i als veränderlich, so definiren die Ungleichungen (2) gewisse Gebiete, innerhalb deren sich diese Stücke bewegen dürfen, und sie schliessen zugleich andere Gebiete aus. Es ist wünschenswerth, auch die ausgeschlossenen Gebiete in einer der Tafel (2) ähnlichen Form darzustellen. Man erhält die fragliche Tafel, oder vielmehr vier verschiedene Tafeln, deren Verticalreihen analog der Bezeichnung A_i, A_i' mit B_{ik}, B_{ik}' bezeichnet werden mögen, aus (2) einfach dadurch, dass man in der k^{ten} Horizontalreihe von (2) [$k = 0, 1, 2, 3$] die Zeichen \geq und \leq mit einander vertauscht. In der That, nimmt man an, dass $\pi \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0$ ist, so ist entweder

$$\begin{aligned} A_0) \quad & s_0 \geq 0 \quad s_1 \geq 0 \quad s_2 \geq 0 \quad s_3 \geq 0, \quad \text{oder} \\ B_{00}) \quad & s_0 \leq 0 \quad s_1 \geq 0 \quad s_2 \geq 0 \quad s_3 \geq 0, \quad \text{oder} \\ B_{01}) \quad & s_0 \geq 0 \quad s_1 \leq 0 \quad s_2 \geq 0 \quad s_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Fällen gehen sodann die übrigen durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 und durch die angegebenen Substitutionen hervor.

Es gibt also, wenn man von Grenzfällen absieht, 16 Typen vollständig reeller Dreiecke, 32 Typen solcher Dreiecke, bei denen nur die Seiten, und ebenso 32 Typen von Dreiecken, bei denen nur die Winkel reell sind.

§ 3.

Uebergangsformen.

Die in § 1 und § 2 geschilderten Gestalten sphärischer Dreiecke bilden keineswegs getrennte Mannigfaltigkeiten, sondern sie können, bei passender Aenderung der Seiten und Winkel, *stetig* in einander übergeführt werden. Dazwischen schalten sich gewisse Dreiecke speciellen Charakters, ausgeartete Dreiecke ein. Diese Grenzfälle sind nicht nur an sich interessant, sondern sie sind auch für unsere Untersuchung von Bedeutung; sie sollen daher im Folgenden ebenfalls verzeichnet werden. Es wird dabei genügen, unter diesen besonderen Dreiecken die zu betrachten, die noch von *zwei* Constanten

abhängen (also von einer Constanten weniger als das allgemeine Dreieck); ausserdem werden wir von je vier solchen Dreiecken, die durch die Substitutionen $a_i' = \pm a_i$, $\alpha_i' = \pm \alpha_i$ zusammenhängen, immer nur einen Repräsentanten aufstellen.

Die genannten Dreiecke zerfallen in zwei verschiedene Classen. Die Dreiecke der ersten Classe wollen wir *Grenzdreiecke* nennen, weil sie die Mannigfaltigkeit der reellen Dreiecke abgrenzen gegen die zu Schluss des § 2 definirten Mannigfaltigkeiten von Dreiecken, die zwar reelle Seiten, aber keine reellen Winkel, oder reelle Winkel, aber keine reellen Seiten haben.

Solcher Dreiecke gibt es acht verschiedene Arten, von denen wir aber nur vier aufzuführen brauchen, da die übrigen aus zweien unter ihnen durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 erhalten werden. Sie sind gekennzeichnet durch die nach dem Modul 2π zu nehmenden Congruenzen ¹⁾:

$$\begin{array}{l} a_1 \equiv 0 \quad a_2 \equiv 0 \quad a_3 \equiv 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \equiv 0 \quad \alpha_2 \equiv 0 \quad \alpha_3 \equiv 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \end{array}$$

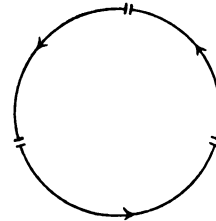
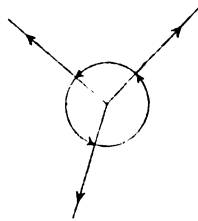


Fig. 2.

$$\begin{array}{l} a_1 \equiv 0 \quad a_2 \equiv \pi \quad a_3 \equiv \pi \\ - a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \equiv 0 \quad \alpha_2 \equiv \pi \quad \alpha_3 \equiv \pi \\ - a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0. \end{array}$$

(S. Fig. 3.)

1) Das von GAUSS in die Analysis eingeführte Congruenzzeichen \equiv , in der Verbindung $a \equiv b \pmod{c}$ (a congruent zu b modulo c oder nach dem Modul c) gebraucht, hat die Bedeutung: a unterscheidet sich von b um ein ganzzahliges Vielfaches von c : $a = b + kc$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). $a \equiv 0 \pmod{2\pi}$ heisst also: Der Bogen a ist ein mehrmals im positiven oder negativen Sinn vollständig durchlaufener Hauptkreis.

Jedes der hierhergehörigen Dreiecke vermittelt den Uebergang zwischen mehreren der 16 in § 2 aufgezählten Dreieckstypen, und zwar immer zwischen solchen Dreiecksmannigfaltigkeiten, die in der

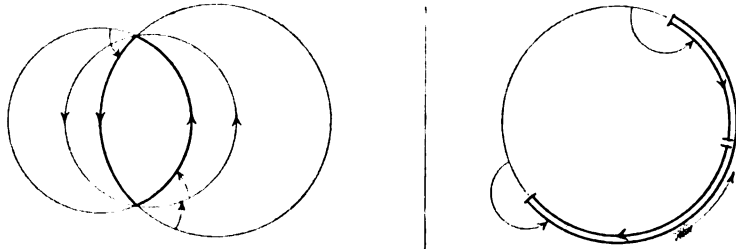


Fig. 3.

Tafel (2) des § 2 einen gemeinsamen unteren Index haben. Die Art, wie die einzelnen Mannigfaltigkeiten durch Vermittelung der Grenzdreiecke zusammenhängen, lässt sich durch die folgende einfache Formel darstellen:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 a_1 \equiv 0, & a_2 \equiv 0, & a_3 \equiv 0 & & \alpha_1 \equiv 0, & \alpha_2 \equiv 0, & \alpha_3 \equiv 0 \\
 (A_k A_k) & & (A_k A'_k) & & (A_k A_k) & \longleftrightarrow & (A_k A'_k) \\
 \updownarrow & & \updownarrow & & & & \\
 (A'_k A_k) & & (A'_k A'_k) & & (A'_k A_k) & \longleftrightarrow & (A'_k A'_k),
 \end{array}$$

worin die Congruenzen nunmehr nach dem Modul π (nicht 2π) zu nehmen sind. Ein vorgelegtes Grenzdreieck gehört im Allgemeinen zu einem ganz bestimmten Index k , und es vermittelt überdies den Uebergang zwischen zwei ganz bestimmten unserer 16 Dreiecksmannigfaltigkeiten. Die acht Arten von Grenzdreiecken zerfallen daher jede noch in 4.2 Unterarten, so dass man im Ganzen 64 Fälle auseinanderzuhalten hat. Sei z. B. $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 0 \pmod{2\pi}$, so sind die folgenden acht Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} 0 < a_1, a_2, a_3 < \pi : (A_0 A_0) \longleftrightarrow (A_0 A'_0), \\ \pi < a_1, a_2, a_3 < 2\pi : (A'_0 A_0) \longleftrightarrow (A'_0 A'_0); \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} 0 < a_1 < \pi < a_2, a_3 < 2\pi : (A_1 A_1) \longleftrightarrow (A_1 A'_1), \\ 0 < a_2, a_3 < \pi < a_1 < 2\pi : (A'_1 A_1) \longleftrightarrow (A'_1 A'_1); \end{array} \right.
 \end{array}$$

u. s. w. Die Fig. 2 bringt, wenn der rechter Hand dargestellte Kreis selbst ein Hauptkreis der Kugel ist, nur den ersten dieser Unterfälle

zur Anschauung. Die übrigen Annahmen führen zum Theil auf mehrfach überdeckte Kreisbogen. —

Die besonderen Dreiecke der zweiten von uns zu betrachtenden Classe nennen wir *Uebergangsdreiecke*. Sie vermitteln den Zusammenhang zwischen Dreiecksmannigfaltigkeiten mit verschiedenem unterem Index. Von ihnen haben wir *zwölf* Arten zu unterscheiden, von denen geeignete Repräsentanten durch die folgenden nach dem Modul 2π zu nehmenden Congruenzen definirt sind:

$$\begin{array}{cc|cc} a_1 \equiv 0 & \alpha_1 \equiv 0 & a_1 \equiv \pi & \alpha_1 \equiv \pi \\ a_2 + a_3 \equiv 0 & \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0 & a_2 - a_3 \equiv \pi & \alpha_2 - \alpha_3 \equiv \pi \end{array}$$

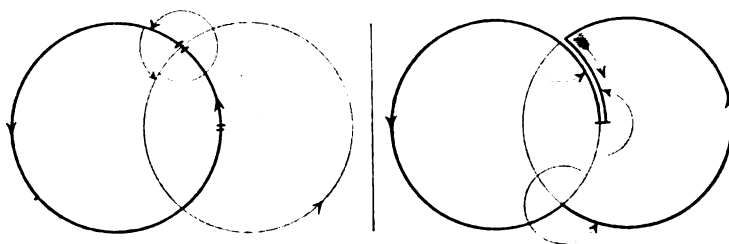


Fig. 4.

$$\begin{array}{cc|cc} a_1 \equiv 0 & \alpha_1 \equiv \pi & a_1 \equiv \pi & \alpha_1 \equiv 0 \\ a_2 - a_3 \equiv 0 & \alpha_2 + \alpha_3 \equiv \pi & a_2 + a_3 \equiv \pi & \alpha_2 - \alpha_3 \equiv 0 \end{array}$$

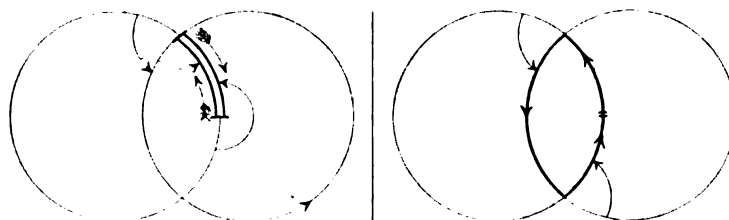


Fig. 5.

Bei der Darstellung des durch die Uebergangsdreiecke vermittelten Zusammenhangs zwischen den verschiedenen Mannigfaltigkeiten reeller Dreiecke können wir die beiden ersten Fälle zusammenfassen, und ebenso die beiden letzten; wir erhalten demnach nur zwei wesentlich verschiedene Formeln, aus denen die sechs übrigen durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehen:

$a_1 \equiv 0, \alpha_1 \equiv 0$ oder $a_1 \equiv \pi, \alpha_1 \equiv \pi \pmod{2\pi}$:

$$\begin{array}{cccc} (A_2 A_2) & (A_2 A_2') & (A_2' A_2) & (A_2' A_2') \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (A_3' A_3') & (A_3' A_3) & (A_3 A_3') & (A_3 A_3) ; \end{array}$$

$a_1 \equiv 0, \alpha_1 \equiv \pi$ oder $a_1 \equiv \pi, \alpha_1 \equiv 0 \pmod{2\pi}$:

$$\begin{array}{cccc} (A_0 A_0) & (A_0 A_0') & (A_0' A_0) & (A_0' A_0') \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (A_1' A_1') & (A_1' A_1) & (A_1 A_1') & (A_1 A_1) . \end{array}$$

Jede unserer 12 Dreiecksarten umfasst demnach vier Unterarten, so dass im Ganzen 48 Fälle zu unterscheiden sind.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass zwischen den in § 2 gefundenen 16 Arten reeller Dreiecke ein stetiger Uebergang möglich ist, der noch in mannigfacher Weise ausgeführt werden kann. Es ist aber festzuhalten, dass wir bei der Herleitung dieses Satzes von der Voraussetzung ausgegangen sind, dass Dreiecke, deren Seiten und Winkel nur um Vielfache von 2π verschieden sind, als identisch gelten, dass also eine sprungweise Aenderung um 2π auch als eine stetige Aenderung gilt.

Später (in § 10 des zweiten Abschnittes) werden wir lernen, die in gegenwärtigem Paragraphen ausgeführten Uebergänge noch tiefer aufzufassen. Wir werden dann einen vollständigen Einblick in den Zusammenhang der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gewinnen, die von allen reellen sphärischen Dreiecken gebildet wird.

§ 4.

Nachbardreiecke.

Gehen wir nicht, wie in § 1, von drei bestimmten Punkten der Kugel aus, sondern von einem Dreikant oder Dreiflach, dessen Scheitel der Mittelpunkt der Kugel ist, so gelangen wir zu einer grösseren Zahl von sphärischen Dreiecken, deren gegenseitige Beziehungen wir nun ermitteln wollen.

Unter den Schnittpunkten der Kanten unseres Dreikants mit der Kugeloberfläche können wir auf 8 Arten je einen so auswählen, dass auf jeder Kante ein Punkt liegt. Drei solche Punkte lassen sich dann, nach § 1, durch 16 verschiedene Dreiecke verbinden. Von

den $8 \cdot 16 = 128$ Dreiecken, die auf diese Weise entstehen, stimmen aber immer je zwei solche überein, die durch die Spiegelung am Mittelpunkt der Kugel in einander übergehen. Die 64 wirklich verschiedenen Dreiecke, die hiernach übrig bleiben, bezeichnen wir als *Nachbardreiecke*. Ihre Zahl reducirt sich auf 16, wenn man noch je vier solche Dreiecke zusammenfasst, die durch gleichzeitige Vorzeichenwechsel sämtlicher Seiten oder sämtlicher Winkel in einander übergeführt werden (vgl. den Schluss von § 1).

Die Seiten und Winkel der 64 Nachbardreiecke hängen auf sehr einfache Weise, nämlich durch *lineare Substitutionen* zusammen; und diese Substitutionen bilden der Natur der Sache nach eine *Gruppe*, d. h. ihr Inbegriff hat die Eigenschaft, dass die aus zwei hinter einander ausgeführten Substitutionen zusammengesetzte Substitution der nämlichen Gesamtheit von Substitutionen angehört¹⁾. Diese Gruppe, mit mehreren ihrer Untergruppen, ist für unsere Betrachtung von der grössten Bedeutung. Wir werden für sie daher ein besonderes Zeichen, \mathfrak{G}_{64} , anwenden, das zugleich die Zahl ihrer Substitutionen angibt. Wir haben nun die Eigenschaften von \mathfrak{G}_{64} genauer zu untersuchen.

Gehen wir von einem der 64 Nachbardreiecke aus, so gelangen wir zunächst zu *drei* anderen, durch die folgenden Substitutionen (in denen die einzelnen Grössen immer nur mod. 2π bestimmt sind):

	a_1'	a_2'	a_3'	α_1'	α_2'	α_3'
S_0	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
(1) S_1	a_1	$\pi + a_2$	$\pi + a_3$	$2\pi + \alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$
S_2	$\pi + a_1$	a_2	$\pi + a_3$	$-\alpha_1$	$2\pi + \alpha_2$	$-\alpha_3$
S_3	$\pi + a_1$	$\pi + a_2$	a_3	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$2\pi + \alpha_3$

1) Wir erinnern an die bekannte Darstellung der Substitutionen einer Gruppe durch einzelne Buchstaben, wie S, T , u. s. w., die nach Art von Producten aneinandergereiht werden. $S \cdot T$ bedeutet die Substitution, die entsteht, wenn man erst S , *nachher* T ausführt. $S^0 = T^0 = \dots = 1$ bedeutet die Substitution, die jede der transformirten Grössen in sich selbst überführt, und also nichts ändert, die identische Substitution oder Identität. S^{-1} ist die Substitution, die vor oder nach S angewendet, zur Identität führt, die »Entgegengesetzte von S , deren Wirkung die Wirkung von S aufhebt: $S^{-1}S = SS^{-1} = S^0 = 1$. $T' = S^{-1}TS$ heisst »die Transformirte von T vermöge S . Transformirt man alle Substitutionen T^0, T_1, T_2, \dots einer Gruppe vermöge derselben Substitution S , so entsteht wieder eine Gruppe, die Transformirte der gegebenen Gruppe vermöge S .

und ebenso entstehen drei neue Dreiecke durch die dualistisch entgegenstehenden Substitutionen :

	a_1'	a_2'	a_3'	α_1'	α_2'	α_3'
Σ_0	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
Σ_1	$2\pi + a_1$	$-a_2$	$-a_3$	α_1	$\pi + \alpha_2$	$\pi + \alpha_3$
Σ_2	$-a_1$	$2\pi + a_2$	$-a_3$	$\pi + \alpha_1$	α_2	$\pi + \alpha_3$
Σ_3	$-a_1$	$-a_2$	$2\pi + a_3$	$\pi + \alpha_1$	$\pi + \alpha_2$	α_3

Die Substitutionen S_i bilden für sich eine Gruppe, und ebenso die Substitutionen Σ_i .

Beide zusammen erzeugen, beliebig oft hinter einander ausgeführt, eine Gruppe \mathfrak{G}_{16} von 16 involutorischen (und damit auch vertauschbaren) Substitutionen, eine Untergruppe der Gruppe \mathfrak{G}_{64} .¹⁾

Diese Gruppe \mathfrak{G}_{64} selbst wird ebenfalls noch von (vertauschbaren) involutorischen Substitutionen gebildet. Sie entsteht durch Zusammensetzung der Substitutionen (1) und (2) mit denen der folgenden Gruppe \mathfrak{G}_4 :

	a_1'	a_2'	a_3'	α_1'	α_2'	α_3'
1	a_1	a_2	a_3	α_1	α_2	α_3
T	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	α_1	α_2	α_3
T	a_1	a_2	a_3	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$
TT	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_3$

Wir haben in der letzten Tafel die identische Substitution mit 1 bezeichnet, in den Tafeln (1) und (2) ist sie der Gleichförmigkeit halber S_0 und Σ_0 genannt worden.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit des angegebenen Satzes, indem man der Reihe nach die folgenden Formeln entwickelt:

1) Eine Substitution S heisst *involutorisch*, wenn sie, zweimal hinter einander angewendet, zur Identität führt, also der symbolischen Gleichung $S^2 = 1$ oder $S = S^{-1}$ genügt. Die Identität $S^0 = 1$, die nicht die Periode 2, sondern die Periode 1 hat, nennt man gewöhnlich nicht involutorisch; doch kann der Ausdruck »Gruppe von involutorischen Substitutionen« zu keinem Missverständniss führen.

In einer Gruppe von involutorischen Substitutionen sind je zwei Substitutionen S und T *vertauschbar*, d. h., die Reihenfolge ist gleichgültig, in der man sie anwendet: es besteht die symbolische Gleichung: $ST = TS$, oder $T^{-1}ST = S$, oder $S^{-1}TS = T$.

$$(4) \quad \begin{cases} S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_1 S_2 S_3 = 1, \\ \Sigma_1^2 = \Sigma_2^2 = \Sigma_3^2 = \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 = 1, \\ T^2 = T^2 = (TT)^2 = T \cdot T \cdot (TT) = 1, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} S_i T = T S_i, & S_i T = T S_i, \\ & S_i \Sigma_k = \Sigma_k S_i, & (i, k = 1, 2, 3) \\ \Sigma_i T = T \Sigma_i, & \Sigma_i T = T \Sigma_i. \end{cases}$$

Es geht daraus hervor, dass man jede Substitution der Gruppe \mathfrak{G}_{64} in die Form setzen kann

$$(6) \quad T^e S_i T^\varepsilon \Sigma_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3; e, \varepsilon = 0, 1),$$

und zwar nur auf eine *einzig*e Weise, abgesehen natürlich von der Anordnung der Factoren, die gleichgültig ist.

Wir haben hier die sämtlichen Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G}_{64} durch die acht erzeugenden Operationen S_i, Σ_i, T, T ausgedrückt, und haben damit eine Darstellung der Gruppe gewonnen, die deren wesentlichste Eigenschaften auf den ersten Blick erkennen lässt. Man kann aber daneben mit Nutzen auch ein kleineres System, ein System von nur sechs erzeugenden Operationen verwenden, das den Vortheil bietet, die Zerlegung einer irgendwie gegebenen Substitution von \mathfrak{G}_{64} ohne jede Rechnung sichtbar zu machen.

Bemerken wir nämlich, dass jede Substitution von \mathfrak{G}_{64} aus einem bestimmten Vorzeichenwechsel der Grössen a_i, α_i , verbunden mit der Hinzufügung gewisser Vielfacher von π besteht, und dass die Substitutionen von \mathfrak{G}_{64} durch die vorkommenden 2^6 Vorzeichenwechsel allein schon bestimmt sind, so bietet sich von selbst die Einführung der erzeugenden Operationen $TS_i, T\Sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$) dar, wo z. B. TS_1 die Substitution

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1, & a_2' &= \pi + a_2, & a_3' &= \pi + a_3, \\ \alpha_1' &= 2\pi - \alpha_1, & \alpha_2' &= \alpha_2, & \alpha_3' &= \alpha_3 \end{aligned}$$

bedeutet. Diese Substitutionen führen nur je einen Vorzeichenwechsel herbei; man kann daher jede Substitution von \mathfrak{G}_{64} , wieder nur auf eine einzige Weise, in die Form

$$(7) \quad (TS_1)^{e_1} (TS_2)^{e_2} (TS_3)^{e_3} (T\Sigma_1)^{\varepsilon_1} (T\Sigma_2)^{\varepsilon_2} (T\Sigma_3)^{\varepsilon_3}$$

bringen, worin die Exponenten e_i, ε_i die Zahlen 0 und 1 bedeuten. Von dieser Darstellung von \mathfrak{G}_{64} durch eine sogenannte *Basis* kehrt man dann zur Darstellung (6) zurück mit Hilfe der Formeln

$$(8) \quad \begin{aligned} (TS_2)(TS_3) &= S_1, & (TS_1)(TS_2)(TS_3) &= T, \\ (T\Sigma_2)(T\Sigma_3) &= \Sigma_1, & (T\Sigma_1)(T\Sigma_2)(T\Sigma_3) &= T. \end{aligned}$$

Es hat keine Schwierigkeit, die sämtlichen Untergruppen der Gruppe \mathcal{G}_{64} zu bestimmen. Für uns mag es indessen genügen, noch eine dieser Gruppen anzugeben, die von vier Substitutionen gebildet wird:

$$(9) \quad \begin{array}{c|ccc|ccc} & a_1' & a_2' & a_3' & \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \hline S_0 \Sigma_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ S_1 \Sigma_1 & a_1 & \pi - a_2 & \pi - a_3 & \alpha_1 & \pi - \alpha_2 & \pi - \alpha_3 \\ S_2 \Sigma_2 & \pi - a_1 & a_2 & \pi - a_3 & \pi - \alpha_1 & \alpha_2 & \pi - \alpha_3 \\ S_3 \Sigma_3 & \pi - a_1 & \pi - a_2 & a_3 & \pi - \alpha_1 & \pi - \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \pmod{\mathfrak{R}}$$

Das rechter Hand hinzugefügte Zeichen wird im nächsten § seine Erklärung finden. Eben dort wird das hier noch belanglose Vielfache von 2π Bedeutung gewinnen, das wir in die Formeln (1) und (2) aufgenommen haben, um nicht sogleich wieder neue Bezeichnungen einführen zu müssen.

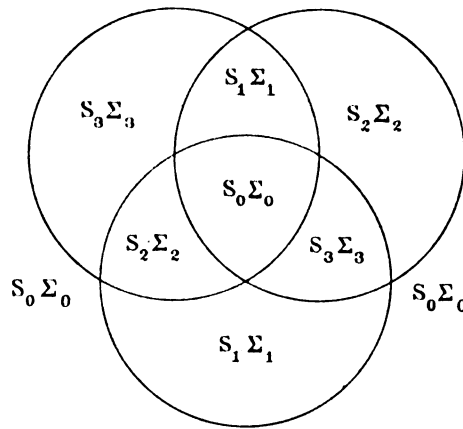


Fig. 6.

Es wird keine Schwierigkeit machen, sich in allen Fällen von der gegenseitigen Lage der Nachbardreiecke Rechenschaft zu geben. Am Besten denkt man sich die 64 Dreiecke zu je 16 aus den vier Dreiecken (9) hervorgegangen, deren gegenseitige Lage durch die schematische Figur 6 dargestellt wird.

§ 5.

Die Gruppe \mathcal{G} .

Die Einfachheit der Ergebnisse des § 4 war dadurch bedingt, dass wir Dreiecke als identisch ansahen, deren Seiten und Winkel sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden. Nunmehr wollen wir einen anderen Standpunkt einnehmen, der uns zu tiefer liegenden Einsichten verhelfen soll, indem wir alle diese Dreiecke auseinander halten¹⁾.

Wir denken uns die Substitutionen S_i, Σ_i, T, T nach wie vor durch die Formeln (1), (2), (3) des § 4 definiert, betrachten aber jetzt die Substitutionen der Gruppe

$$(1) \quad a'_i = a_i + 2k_i\pi, \quad \alpha'_i = \alpha_i + 2x_i\pi,$$

worin k_i und x_i irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, als verschieden von der identischen Substitution. Nun werden wir natürlich die Relationen (4), (5), (8) des § 4 in dieser einfachen Form nicht mehr aufrecht erhalten können. Es entsteht die Frage, welche Relationen an ihre Stelle treten.

Um dies zu erkennen, denken wir uns zunächst die Formeln (5), § 4, so geschrieben, dass auf der rechten Seite die identische Substitution erscheint (z. B. $S_i \Sigma_i S_i^{-1} \Sigma_i^{-1} = 1$), und bilden nun die auf der linken Seite stehenden Substitutionen:

	a'_1	a'_2	a'_3	α'_1	α'_2	α'_3
S_1^2	a_1	$2\pi + a_2$	$2\pi + a_3$	$4\pi + \alpha_1$	α_2	α_3
$S_1 S_2 S_3$	$2\pi + a_1$	$2\pi + a_2$	$2\pi + a_3$	$2\pi + \alpha_1$	$-2\pi + \alpha_2$	$2\pi + \alpha_3$
$S_1 T S_1^{-1} T^{-1}$	a_1	$2\pi + a_2$	$2\pi + a_3$	α_1	α_2	α_3
$S_1 T S_1^{-1} T^{-1}$	a_1	a_2	a_3	$4\pi + \alpha_1$	α_2	α_3
$S_1 \Sigma_1 S_1^{-1} \Sigma_1^{-1}$	a_1	$2\pi + a_2$	$2\pi + a_3$	α_1	$-2\pi + \alpha_2$	$-2\pi + \alpha_3$
$S_2 \Sigma_3 S_2^{-1} \Sigma_3^{-1}$	$2\pi + a_1$	a_2	a_3	$-2\pi + \alpha_1$	α_2	α_3

1) Der in den folgenden §§ auseinandergesetzte Dreiecksbegriff ist nicht zu verwechseln mit dem etwas engeren, den Herr F. KLEIN neuerdings zu Zwecken der Functionentheorie eingeführt hat (Math. Ann. Bd. 37, S. 578 u. ff.). Für Herrn KLEIN ist das »Dreieck« eine einfach zusammenhängende, über die Kugel gespannte Fläche. Die Substitutionen, die »Dreiecke« mit denselben Ecken verbinden, bilden bei ihm keine Gruppe.

Wie man sieht, gehören alle diese Substitutionen, und die analogen, die durch Vertauschung der Seiten und Winkel, und durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3 aus ihnen hervorgehen, zu der durch die Formeln (1) definirten Gruppe. Sie erzeugen aber, in beliebiger Wiederholung hinter einander ausgeführt, keineswegs diese Gruppe selbst, sondern nur eine Untergruppe, als deren erzeugende Operationen die folgenden und die zu ihnen analogen Substitutionen gelten können:

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & 2\pi + a_2, & 2\pi + a_3, & \alpha_1 & \alpha_2, & \alpha_3, \\ a_1, & a_2, & a_3, & \alpha_1 & 2\pi + \alpha_2, & 2\pi + \alpha_3, \\ 2\pi + a_1, & a_2, & a_3, & 2\pi + \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3. \end{array}$$

Wir bezeichnen die allgemeine Substitution dieser Gruppe, die den Gleichungen (1) gegenüber durch die Bedingung

$$(2) \quad \sum k_i + \sum \alpha_i \equiv 0 \pmod{2}$$

gekennzeichnet ist, mit K , und die Gruppe selbst mit \mathfrak{R} . Dann erhalten wir die gesuchten Relationen unmittelbar in der Form

$$(3) \quad \begin{cases} S_1^2 \equiv S_2^2 \equiv S_3^2 \equiv S_1 S_2 S_3 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{R}} \\ \Sigma_1^2 \equiv \Sigma_2^2 \equiv \Sigma_3^2 \equiv \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{R}} \\ T^2 = T^2 = (TT)^2 = T \cdot T \cdot (TT) = 1 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} S_i T \equiv T S_i, & S_i \Sigma_k \equiv \Sigma_k S_i, & \pmod{\mathfrak{R}} \\ \Sigma_i T \equiv T \Sigma_i, & \Sigma_i \Sigma_k \equiv \Sigma_k \Sigma_i, & \pmod{\mathfrak{R}} \end{cases}$$

Der Gebrauch des Zeichens \equiv statt des Zeichens $=$ und die in Klammer hinzugefügte Bemerkung sollen andeuten, dass diese Gleichungen nur richtig sind bis auf einen in jedem Falle besonders zu bestimmenden, uns aber nicht näher interessirenden Factor K . — Aus (3) und (4) folgen noch, als Verallgemeinerung der Relationen (8), § 4, die in demselben Sinne zu verstehenden Congruenzen

$$(5) \quad \begin{aligned} (TS_2)(TS_3) &\equiv S_1, & (TS_1)(TS_2)(TS_3) &\equiv T \pmod{\mathfrak{R}}. \\ (T\Sigma_2)(T\Sigma_3) &\equiv \Sigma_1, & (T\Sigma_1)(T\Sigma_2)(T\Sigma_3) &\equiv T \end{aligned}$$

Wir definiren nun eine Gruppe \mathfrak{G} als den Inbegriff aller der Substitutionen, die aus den erzeugenden Operationen S_i, Σ_i, T, T durch unbegrenzte Wiederholung entstehen.

Die angestellte Betrachtung setzt uns in den Stand, die allgemeine Substitution dieser Gruppe anzugeben. Die Formeln (3) . . . (5) zeigen nämlich, dass diese Substitution in die Form

$$(6) \quad (TS_1)^{\epsilon_1} (TS_2)^{\epsilon_2} (TS_3)^{\epsilon_3} (T\Sigma_1)^{\epsilon_1} (T\Sigma_2)^{\epsilon_2} (T\Sigma_3)^{\epsilon_3} \cdot K \\ (\epsilon_i, \epsilon_i = 0, 1)$$

gesetzt werden kann, und zwar bei bestimmter Anordnung der Factoren dieses Productes nur auf eine einzige Weise. Die fragliche Substitution lautet also

$$a_1' = (-1)^{\epsilon_1} a_1 + [2\epsilon_1 + (-1)^{\epsilon_1} (e_2 + e_3) + 2k_1] \pi \\ \alpha_1' = (-1)^{\epsilon_1} \alpha_1 + [2e_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + 2\kappa_1] \pi, \quad \text{u. s. w.}$$

Hierfür schreiben wir besser

$$(7) \quad a_i' = (-1)^{\epsilon_i} a_i + m_i \pi, \quad \alpha_i' = (-1)^{\epsilon_i} \alpha_i + \mu_i \pi \quad (\epsilon_i, \epsilon_i = 0, 1),$$

worin nun die ganzen Zahlen m_i und μ_i den folgenden Bedingungen zu genügen haben

$$(8) \quad \begin{cases} m_1 + e_2 + e_3 \equiv 0, & \mu_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \equiv 0, \\ m_2 + e_3 + e_1 \equiv 0, & \mu_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1 \equiv 0, \\ m_3 + e_1 + e_2 \equiv 0, & \mu_3 + \epsilon_1 + \epsilon_2 \equiv 0, \end{cases} \quad (\text{mod. } 2)$$

$$(9) \quad \frac{1}{2} \sum m_i + \frac{1}{2} \sum \mu_i + \left\{ \begin{array}{l} e_2 \epsilon_3 + e_3 \epsilon_1 + e_1 \epsilon_2 \\ + \epsilon_2 e_3 + \epsilon_3 e_1 + \epsilon_1 e_2 \end{array} \right\} \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2).$$

Von diesen Congruenzen sind die unter (8) zusammengestellten der Ausdruck dafür, dass die Grössen k_i und κ_i ganze Zahlen sind; die Formel (9) aber, in der die beiden ersten Summanden links wegen der Relationen (8) ebenfalls ganze Zahlen sind, sagt aus, dass die Grössen k_i und κ_i überdies der Bedingung (2) genügen.

Wir fassen nun unsere Ergebnisse zusammen, indem wir zugleich noch einige weitere, naheliegende und leicht zu prüfende Bemerkungen hinzufügen.

Die unendlich vielen sphärischen Dreiecke, die zu dem nämlichen Dreikant gehören, gehen in einander über durch eine Gruppe von linearen Substitutionen, die durch die Formeln (7) und (8) definiert ist.

Diese Gruppe enthält u. A. zwei bemerkenswerthe invariante Untergruppen¹⁾: erstens die durch die Bedingung (9) definierte Gruppe \mathfrak{G} ,

1) Transformirt man alle die Substitutionen T einer Gruppe G , die einer Untergruppe g angehören, vermöge sämtlicher Substitutionen S_x von G , so kann der Fall eintreten, dass die transformirte Substitution $T' = S_x^{-1} T S_x$ immer wieder zu g gehört. In diesem wichtigen Falle heisst g »innerhalb G invariant« (einige Autoren sagen »ausgezeichnet«). Beispielsweise ist die Gruppe aller collinearen Transformationen eine invariante Untergruppe der Gruppe aller collinearen und dualistischen Transformationen.

die von den Substitutionen S_i, Σ_i, T, T erzeugt wird, und (wenn der nicht ganz scharfe Ausdruck erlaubt ist) die Hälfte der in (7), (8) enthaltenen Substitutionen umfasst, zweitens die Gruppe

$$(1) \quad a'_i = a_i + 2k_i\pi, \quad \alpha'_i = \alpha_i + 2x_i\pi.$$

Beide Gruppen durchdringen sich in der durch (1) und (2) definierten Gruppe \mathfrak{R} .

Zu der Gruppe \mathfrak{G} sind nun die in § 4 betrachteten, von vertauschbaren involutorischen Substitutionen gebildeten Gruppen \mathfrak{G}_{64} und \mathfrak{G}_{16} isomorph¹⁾. \mathfrak{G} reducirt sich nämlich zunächst auf die Gruppe \mathfrak{G}_{64} , sobald man die Substitutionen von \mathfrak{R} der identischen Substitution zuordnet (als von der Identität nicht verschieden ansieht) und sie reducirt sich weiter auf die Gruppe \mathfrak{G}_{16} , wenn man überdies noch die Substitutionen der Gruppe \mathfrak{H}_4 (§ 4, Nr. 3) der identischen Substitution zuordnet.

Ausser den hier betrachteten Untergruppen enthält die Gruppe \mathfrak{G} noch unendlich viele andere invariante Untergruppen. Mit ihrer Hülfe kann man zu einer unbegrenzten Zahl endlicher Gruppen gelangen. Von diesen sind die Gruppen \mathfrak{G}_{64} und \mathfrak{G}_{16} in mancher Hinsicht die interessantesten und wichtigsten. Wir werden ausser ihnen nur noch eine von 128 Substitutionen gebildete Gruppe zu betrachten haben (§ 7).

1) In dem einfachen Falle, der uns hier allein angeht, besteht der Begriff des Isomorphismus zweier Gruppen G und g in Folgendem: Man kann die Substitutionen einer Gruppe G in Schaaren oder Reihen $S_i, S'_i, S''_i, \dots, S_k, S'_k, S''_k, \dots$ ordnen, deren jede einer bestimmten Substitution s_i, s_k, \dots einer anderen Gruppe g entspricht, derart, dass aus jeder symbolischen Gleichung $S_i^{(\lambda)} S_k^{(\mu)} = S_l^{(\nu)}$ folgt: $s_i s_k = s_l$. Enthält jede Schaar von G nur eine einzige Substitution, so heisst der Isomorphismus *holoëdrisch*, im anderen Falle *meroëdrisch*. Bei meroëdrisch-isomorpher Beziehung bilden alle Substitutionen von G , denen in g die identische Substitution entspricht, eine *invariante Untergruppe* von G .

Umgekehrt entsteht aus jeder Gruppe G eine zu ihr isomorphe Gruppe g , wenn man die in einer invarianten Untergruppe Γ von G enthaltenen Substitutionen nicht mehr von einander (und also auch nicht von der identischen Substitution) unterscheidet, als äquivalent betrachtet, oder, wie wir sagen, »der Identität zuordnet«.

Besonders wichtig ist für uns der im Texte vorliegende und auch später noch öfter wiederkehrende Fall, dass aus einer unendlichen Gruppe G , durch Zuordnung einer invarianten (ebenfalls unendlichen) Untergruppe Γ zur Identität, eine neue Gruppe g entsteht, die nur noch eine *endliche* Zahl von Substitutionen umfasst.

§ 6.

Eintheilung der sphärischen Dreiecke in zwei Classen.

Die Theorie der im vorigen § betrachteten Gruppe \mathfrak{G} steht in einem eigenthümlichen Zusammenhang mit einer gewissen Eintheilung aller sphärischen Dreiecke in zwei Classen, deren Kenntniss für die Auffassung der sphärischen Trigonometrie von Wichtigkeit ist.

Wir denken uns ein sphärisches Dreieck über die Kugeloberfläche verschoben, indem wir Seiten und Winkel stetig ändern, und führen es schliesslich auf irgend einem Wege in eine solche Lage zurück, dass es aus dem Mittelpunkte der Kugel durch dasselbe Dreikant oder Dreiflach projicirt wird, wie zu Anfang. Die Seiten und Winkel des neuen Dreiecks werden dann mit denen des ursprünglichen durch eine lineare Substitution verknüpft sein, die nothwendig enthalten ist unter den in § 5 in den Formeln (7) und (8) angegebenen Substitutionen. Kann man nun auf diese Weise, bei geeigneter Wahl des Weges der Ueberführung, alle jene Substitutionen erreichen, d. h. kann man zu sämmtlichen Dreiecken gelangen, die zu dem gegebenen Dreikant gehören, oder erreicht man nur einen Theil dieser Dreiecke?

Die Antwort ist, dass man wirklich nur zu einem Theile der genannten Dreiecke gelangt, nämlich zu denen, die aus dem ursprünglich angenommenen durch die Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G} hervorgehen.

Suchen wir zunächst einzusehen, dass in der That je zwei Dreiecke, die durch eine Substitution von \mathfrak{G} verknüpft sind, stetig in einander übergeführt werden können.

Nach § 5 kann man die Substitutionen von \mathfrak{G} auf 64 Schaaren vertheilen, die den Substitutionen der endlichen Gruppe \mathfrak{G}_{64} entsprechen; je zwei Dreiecke derselben Schaar gehen aus einander hervor durch eine Substitution von \mathfrak{R} . Wir werden also zu zeigen haben: erstens, dass man jede Substitution von \mathfrak{R} durch eine stetige Aenderung des sphärischen Dreiecks erreichen kann, zweitens, dass auch zwischen den 64 Schaaren selbst noch ein stetiger Uebergang möglich ist.

Um das Erste einzusehen, denken wir uns das Dreieck in eine solche Gestalt übergeführt, dass eine seiner Seiten, etwa a_1 , $\equiv \pi \text{ mod. } 2\pi$ wird. (Vgl. Fig. 5, rechts.) Lassen wir dann diese Seite a_1 ,

indem wir ihre Endpunkte festhalten, um diese Endpunkte sich drehen, so können wir (durch stetige Aenderung) ein neues Dreieck ableiten, bei dem die Winkel α_2 und α_3 um ein beliebiges, für beide gemeinschaftliches Vielfaches von 2π gewachsen sind; und diese Aenderung bleibt erhalten, wenn wir das Dreieck schliesslich auf demselben Wege wieder in seine anfängliche Lage zurückbringen. Wir werden also jede Substitution der Form

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1, & a_2' &= a_2, & a_3' &= a_3, \\ \alpha_1' &= \alpha_1, & \alpha_2' &= \alpha_2 + 2k\pi, & \alpha_3' &= \alpha_3 + 2k\pi \end{aligned}$$

durch stetige Aenderung hervorrufen können.

Nehmen wir ferner mit einem Dreieck eine stetige Aenderung der Art vor, dass wir die der Seite a_3 gegenüberliegende Ecke A_3 den Kreisbogen A_2A_3 im positiven Sinne durchlaufen lassen, während wir A_1 und A_2 festhalten, so wird nach einem vollen Umlauf a_1 um 2π gewachsen sein, während der gegenüberliegende Winkel α_1 sich um ebensoviel vermindert oder vermehrt hat, je nach der Wahl des für die Winkel angenommenen Drehungssinnes. Wir gelangen so entweder zu allen Substitutionen

$$a_1' = a_1 + 2k\pi, \quad \alpha_1' = \alpha_1 - 2k\pi, \quad \begin{cases} a_2' = a_2, & a_3' = a_3, \\ \alpha_2' = \alpha_2, & \alpha_3' = \alpha_3, \end{cases}$$

oder zu allen Substitutionen

$$a_1' = a_1 + 2k\pi, \quad \alpha_1' = \alpha_1 + 2k\pi, \quad \begin{cases} a_2' = a_2, & a_3' = a_3, \\ \alpha_2' = \alpha_2, & \alpha_3' = \alpha_3. \end{cases}$$

In jedem dieser beiden Fälle aber kann man, wie leicht zu zeigen ist, aus Substitutionen der gefundenen Arten, und den zu ihnen dualistischen, die ganze Gruppe \mathfrak{R} zusammensetzen. *Solche Dreiecke, die durch eine Substitution der Gruppe \mathfrak{R} zusammenhängen, können also stetig in einander übergeführt werden.*

Um zweitens die Möglichkeit eines stetigen Uebergangs zwischen den 64 Dreiecksschaaren einzusehen, führen wir für den Augenblick die Bezeichnung ein:

$$a_i = 2n_i\pi + \bar{a}_i, \quad \alpha_i = 2\nu_i\pi + \bar{\alpha}_i,$$

indem wir uns die ganzen Zahlen n_i und ν_i so bestimmt denken, dass \bar{a}_i und $\bar{\alpha}_i$ in die Grenzen 0 und 2π fallen. Wir führen nun, wie vorhin, das Dreieck in eine solche Lage über, dass $\bar{a}_1 = \pi$ wird, lassen sodann α_2 und α_3 durch geeignete Drehung von \bar{a}_1 um π wachsen, und führen das Dreieck schliesslich auf demselben Wege

wieder in seine anfängliche Lage zurück. Wir haben dann die folgende Substitution hervorgebracht:

$$\begin{aligned} a_1' &= 2n_1\pi + (2\pi - \bar{a}_1) = -a_1 + (4n_1 + 2)\pi \\ a_2' &= 2n_2\pi + \bar{a}_2 = a_2 \\ a_3' &= 2n_3\pi + \bar{a}_3 = a_3 \\ \alpha_1' &= 2\nu_1\pi + \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2' &= 2\nu_2\pi + (\bar{\alpha}_2 + \pi) = \alpha_2 + \pi \\ \alpha_3' &= 2\nu_3\pi + (\bar{\alpha}_3 + \pi) = \alpha_3 + \pi. \end{aligned}$$

Dies ist wieder eine Substitution von \mathfrak{G} ; und zwar unterscheidet sie sich von der erzeugenden Substitution $T\Sigma_1$ nur um einen Factor K . Da man aber die übrigen erzeugenden Substitutionen $T\Sigma_i$, TS_i auf ähnliche Art gewinnen kann, so ist bewiesen, dass zwischen den 64 Dreiecksschaaren wirklich ein stetiger Uebergang stattfindet.

Dreiecke, deren Seiten und Winkel durch eine Substitution der Gruppe \mathfrak{G} zusammenhängen, können demnach durch stetige Aenderung in einander übergeführt werden. Der Nachweis der umgekehrten Behauptung, dass nämlich Dreiecke, die zu demselben Dreikant gehören, aber nicht durch eine Substitution von \mathfrak{G} zusammenhängen, auch *nicht* stetig in einander übergeführt werden können, kann mit den uns hier zu Gebote stehenden Hilfsmitteln ebenfalls geführt werden. Wir können ihn jedoch bei Seite lassen, da dieser Satz später, nach Entwicklung der Formeln der sphärischen Trigonometrie, selbstverständlich erscheinen wird. Solche Dreiecke unterscheiden sich nämlich der Art in ihren analytischen Eigenschaften, dass zwischen ihnen selbst auf imaginärem Wege, durch sogenannte analytische Fortsetzung, ein stetiger Uebergang nicht möglich ist. — Wir wollen die Thatsache hier einstweilen als bewiesen annehmen, um sogleich noch eine wichtige Folgerung daraus zu ziehen. Sie führt nämlich zu einer Eintheilung aller sphärischen Dreiecke in zwei Classen.

Eigentliche sphärische Dreiecke wollen wir solche nennen, die aus einem Dreieck, dessen Seiten und Winkel zwischen den Grenzen 0 und π liegen, durch stetige Aenderung hergeleitet werden können; uneigentliche die, bei denen dies nicht der Fall ist.

Dann ergibt sich aus dem Gesagten sofort:

Sowohl die Mannigfaltigkeit der eigentlichen als auch die der uneigentlichen Dreiecke wird durch die Gruppe \mathfrak{G} in sich selbst über-

geführt; beide Mannigfaltigkeiten werden dagegen vertauscht durch die zweite Substitutionenschaar, die entsteht, wenn man an Stelle der Definitionsgleichung von \mathfrak{G} (Nr. 9, § 5) diese setzt:

$$(1) \quad \frac{1}{2} \sum m_i + \frac{1}{2} \sum \mu_i + \left\{ \begin{array}{l} e_2 \varepsilon_3 + e_3 \varepsilon_1 + e_1 \varepsilon_2 \\ + \varepsilon_2 e_3 + \varepsilon_3 e_1 + \varepsilon_1 e_2 \end{array} \right\} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Beide Mannigfaltigkeiten können also auf unendlich viele Weisen eindeutig umkehrbar auf einander bezogen werden, z. B. durch die Substitution

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 + 2\pi, & a'_2 &= a_2, & a'_3 &= a_3 \\ \alpha'_1 &= \alpha_1 & \alpha'_2 &= \alpha_2, & \alpha'_3 &= \alpha_3; \end{aligned}$$

es genügt daher meistens, nur eine von ihnen zu betrachten, nämlich die Mannigfaltigkeit der eigentlichen Dreiecke, die der elementaren Auffassung näher liegt, und überdies, wie wir sehen werden, durch die grössere Eleganz der für sie geltenden Formeln ausgezeichnet ist.

Von den in § 2 aufgezählten 16 Dreiecksarten sind, bei Festhaltung der dort angeführten Bestimmungen, die Hälfte eigentliche und die Hälfte uneigentliche Dreiecke. Eigentliche Dreiecke sind

$$(A_0 A_0), (A_0' A_0'), (A_k A_k), (A_k' A_k) \quad (k = 1, 2, 3),$$

uneigentliche Dreiecke dagegen

$$(A_0 A_0'), (A_0' A_0), (A_k A_k'), (A_k' A_k) \quad (k = 1, 2, 3).$$

(Zu der ersten Reihe gehören z. B. von den in Fig. 1 (S. 93) verzeichneten Dreiecken die beiden oberen, zur zweiten die beiden unteren.) Hieraus ergibt sich ein einfaches Kennzeichen dafür, ob ein vorgelegtes Dreieck ein eigentliches oder uneigentliches Dreieck ist.

Man reducire das gegebene Dreieck, durch Zufügung geeigneter Vielfacher von 2π zu den Seiten und Winkeln auf ein solches, dessen Seiten und Winkel zwischen 0 und 2π liegen. Das vorgelegte Dreieck ist nun ein eigentliches Dreieck, wenn das reducirte Dreieck ein eigentliches Dreieck ist, und wenn die Reduction durch eine Substitution der Gruppe \mathfrak{R} erfolgt ist; ebenso auch dann, wenn das reducirte Dreieck zu den uneigentlichen gehört, und wenn die Reduction durch eine Substitution erfolgt ist, die nicht zu \mathfrak{R} gehört; dagegen ist es ein uneigentliches Dreieck in den beiden übrigen Fällen.

§ 7.

Die goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks. — Erweiterte Gruppen.

Zur Vorbereitung der Untersuchungen des nächsten Abschnitts wollen wir hier einige Bemerkungen zusammenstellen, die sich auf die Aenderungen beziehen, die die goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel bei den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G} erleiden.

Die Functionen $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$ ändern sich nicht bei den Substitutionen der Gruppen \mathfrak{R} und \mathfrak{H}_4 ; ihr Inbegriff gehört, wie wir sagen können, zu der von \mathfrak{R} und \mathfrak{H}_4 erzeugten Gruppe $(\mathfrak{R}, \mathfrak{H}_4)$: Sie gehen bei den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G}_{16} in 16 verschiedene Werthsysteme über, die man natürlich ohne Weiteres hinschreiben kann.

Ebenso nehmen auch die Functionen $\sin a_i$, $\sin \alpha_i$ 16 verschiedene Werthe an; diese aber gehören zu einer anderen Untergruppe von \mathfrak{G} , nämlich zu der, die von den Substitutionen K, S, Σ_i (§ 4 Nr. 9) erzeugt wird. Zu jedem Werthsystem der Cosinus gehören noch vier verschiedene Werthsysteme des Sinus, $\pm \sin a_i$, $\pm \sin \alpha_i$.

Die Functionen $\operatorname{tg} \frac{a_i}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}$, die sich durch die Sinus und Cosinus zusammen rational ausdrücken lassen, gehören zur Gruppe \mathfrak{R} . Sie nehmen also bei den Substitutionen von \mathfrak{G} 64 Werthsysteme an, entsprechend den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G}_{64} . Dasselbe gilt von den Grössen $\operatorname{tg} s_x$, $\operatorname{tg} \sigma_x$, die sich durch die Grössen $\operatorname{tg} \frac{a_i}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}$ rational darstellen lassen, wie auch umgekehrt diese wieder durch jene rational ausdrückbar sind.

Die Functionen $\operatorname{tg} \frac{s_x}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\sigma_x}{2}$ nehmen bei den Substitutionen von \mathfrak{G} 128 verschiedene Werthsysteme an, die durch eine Gruppe \mathfrak{G}_{128} von nicht vertauschbaren Substitutionen in einander übergehen. Sie gehören nämlich, wie eine leichte Rechnung zeigt, zu einer Untergruppe \mathfrak{R}' von \mathfrak{R} , die durch die Congruenzen

$$\Sigma k_i \equiv \Sigma \sigma_i \equiv 0 \pmod{2}$$

bestimmt ist. Ferner führt zu einer Gruppe von 32 nicht vertauschbaren Substitutionen jedes der beiden Grössensysteme $\sin s_x$, $\sin \sigma_x$. Es ist aber zu bemerken, dass die Verhältnisse einer jeden der beiden letzten Grössenreihen, und ebenso auch die Verhältnisse der acht

Größen $\cos s_x$, $\cos \sigma_x$ zur Gruppe $(\mathfrak{G}_4, \mathfrak{K})$ gehören, und also je 16 den Substitutionen von \mathfrak{G}_{16} entsprechende Werthsysteme annehmen.

Wir stellen die für das Folgende wichtigsten dieser Bemerkungen, zugleich mit einer weiteren naheliegenden Folgerung in anderer Anordnung übersichtlich zusammen.

I. Das Grössensystem

$$\begin{array}{cccc} \operatorname{tg} \frac{s_0}{2}, & \operatorname{tg} \frac{s_1}{2}, & \operatorname{tg} \frac{s_2}{2}, & \operatorname{tg} \frac{s_3}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\sigma_3}{2} \end{array}$$

gehört zur Gruppe \mathfrak{K} , und nimmt also bei den Substitutionen von \mathfrak{G} oder \mathfrak{G}_{128} 128 verschiedene Werthsysteme an.

II. Die Grössensysteme

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}$$

und

$$\begin{array}{cccc} \operatorname{tg} s_0, & \operatorname{tg} s_1, & \operatorname{tg} s_2, & \operatorname{tg} s_3 \\ \operatorname{tg} \sigma_0, & \operatorname{tg} \sigma_1, & \operatorname{tg} \sigma_2, & \operatorname{tg} \sigma_3 \end{array}$$

gehören zur Gruppe \mathfrak{K} , und gehen daher bei den Substitutionen von \mathfrak{G} in 64 verschiedene Werthsysteme über, die den Substitutionen von \mathfrak{G}_{64} entsprechen.

III. Dagegen gehört u. A. jedes der Grössensysteme

$$\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3, \cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}$$

$$\sin s_0 : \sin s_1 : \sin s_2 : \sin s_3$$

$$\sin \sigma_0 : \sin \sigma_1 : \sin \sigma_2 : \sin \sigma_3$$

$$\begin{array}{l} \cos s_0 : \cos s_1 : \cos s_2 : \cos s_3 \\ : \cos \sigma_0 : \cos \sigma_1 : \cos \sigma_2 : \cos \sigma_3 \end{array}$$

zur Gruppe $(\mathfrak{G}_4, \mathfrak{R})$. Diese Systeme von trigonometrischen Functionen nehmen also nur 16 verschiedene Werthsysteme an, die den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G}_{16} entsprechen.

Diese Bemerkungen, die man leicht noch weiter ausdehnen könnte, sind zur Vorbereitung des Folgenden nicht durchaus nothwendig; sie werden aber zur Erleichterung der Auffassung dienen. Sie zeigen jedenfalls hier schon, dass die Betrachtung der Gruppen \mathfrak{G}_{128} und \mathfrak{G}_{64} , und noch mehr der Gruppe \mathfrak{G}_{16} für das Verständniss der Formeln der sphärischen Trigonometrie von Bedeutung sein muss. —

Um unsere späteren Entwicklungen nicht unterbrechen zu müssen, wollen wir an dieser Stelle schon einige Gruppen definiren, die aus den aufgezählten, wie wir sagen wollen, durch Erweiterung hervorgehen.

Eine *erste Erweiterung* der Gruppe \mathfrak{G} und der aus ihr abgeleiteten endlichen Gruppen \mathfrak{G}_{128} , \mathfrak{G}_{64} , \mathfrak{G}_{16} soll darin bestehen, dass wir noch die sechs Vertauschungen der Indices 1, 2, 3 hinzufügen, dass wir also die Anordnung, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Benennung der Seiten und Winkel umändern. Die Gruppen, die auf solche Art aus \mathfrak{G}_{128} , \mathfrak{G}_{64} , \mathfrak{G}_{16} entstehen, umfassen jedesmal die sechsfache Substitutionenzahl, und können daher etwa durch die Zeichen $\mathfrak{G}_{6.128}$, $\mathfrak{G}_{6.64}$, $\mathfrak{G}_{6.16}$ dargestellt werden. Für uns ist von Wichtigkeit die letzte dieser Gruppen, die einfach mit \mathfrak{G}_{96} bezeichnet werden soll.

Eine *zweite Erweiterung* besteht in der Vertauschung der Seiten mit den entsprechenden Winkeln, im Uebergang zum Polardreieck

$$a_x' = \alpha_x, \quad \alpha_x' = a_x.$$

Aus jeder unserer Gruppen geht so eine neue hervor mit der doppelten Substitutionenzahl; aus den zuletzt genannten schon erweiterten Gruppen z. B. entstehen Gruppen, deren Erzeugungsweise durch die Bezeichnungen $\mathfrak{G}_{2.6.128}$, $\mathfrak{G}_{2.6.64}$, $\mathfrak{G}_{2.6.16}$ angedeutet wird. Für uns werden besonders die erste und die letzte Gruppe Interesse gewinnen; wir bezeichnen sie, nach der Zahl ihrer Substitutionen, einfach mit \mathfrak{G}_{1536} und \mathfrak{G}_{192} .

Die umfassendste dieser Gruppen, \mathfrak{G}_{1536} , entsteht aus der zweimal erweiterten Gruppe \mathfrak{G} , wenn wir alle die Substitutionen der identischen Substitution zuordnen, die die sämtlichen Grössen $\text{tg } \frac{s_i}{2}$, $\text{tg } \frac{\sigma_i}{2}$

ungeändert lassen, wenn wir also die Substitutionen von \mathfrak{R}' (s. S. 113) als nicht wesentlich verschieden betrachten von der identischen Substitution (vgl. § 5, S. 108, Anmerkung).

Die schematische Figur 7 versinnlicht einen Theil der Beziehungen der aufgestellten Gruppen. Sie soll dazu dienen, die eingeführten

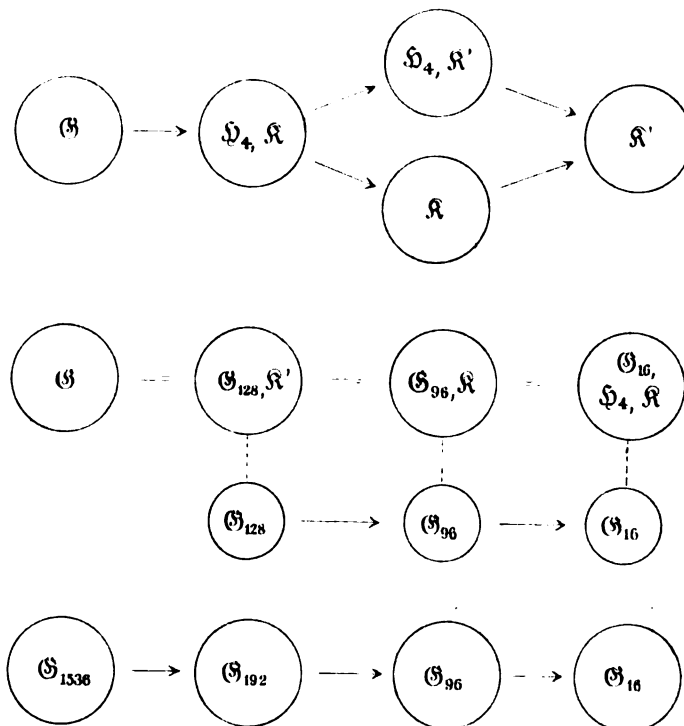


Fig. 7.

Bezeichnungen dem Gedächtnisse leichter einzuprägen. Freilich ist diese bildliche Darstellung sehr lückenhaft; will man grössere Vollständigkeit erzielen, so muss man sich auch entschliessen, eine grössere Menge von Bezeichnungen zu gebrauchen.

§ 8.

Ebene Dreiecke.

Die ebene Trigonometrie ist bekanntlich ein Grenzfall der sphärischen. Man lasse den Radius der Kugel ins Unendliche wachsen, während man die Ecken etwa eines solchen Dreiecks, dessen Seiten

und Winkel zwischen 0 und π liegen, festhält: Dann entsteht im Grenzfall ein ebenes Dreieck, mit der Winkelsumme 2π .

Bei der Behandlung der ebenen Dreiecke, die einiges Eigenthümliche darbietet, wollen wir einen etwas anderen Gedankengang innehalten, als bei der Betrachtung der sphärischen.

Wir nehmen auch hier wieder einen gemeinsamen positiven Drehungssinn für alle Winkel an — etwa den, der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist —, und wir schreiben den Geraden, die die Seiten enthalten, eine positive Richtung zu. Eine Seite \bar{a}_i des ebenen Dreiecks soll als positiv gelten, wenn bei positiver Umlaufung der drei Seiten die Strecke \bar{a}_i selbst durchlaufen wird, als negativ, wenn der zu dieser Seite gehörige Linienzug sich durchs Unendliche erstreckt.

Wir gehen aus von einem Dreieck mit positiven Seiten $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, und Winkeln $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$, die zwischen den Grenzen 0 und π liegen, und deren Summe $= 2\pi$ ist¹⁾. Wir definiren nun sogleich das allgemeinste von uns zu betrachtende ebene Dreieck als ein solches, dessen Seiten und Winkel sich aus denen des genannten durch *stetige* Aenderung herleiten lassen; wobei wir, aus nahe liegenden Gründen, unter den »stetigen« Aenderungen den Uebergang einer Seite von positiver zu negativer Länge durch das Unendliche hindurch mitbegreifen wollen. Wir fragen nach allen möglichen *Gestalten* eines solchen Dreiecks und insbesondere nach der Gesammtheit der mit einem gegebenen Dreieck verbundenen *Nachbardreiecke*, d. i. nach allen Dreiecken, deren Seiten und Ecken in die nämlichen Geraden und Punkte der Ebene fallen.

Zunächst ist deutlich, dass man von den Winkeln eines ebenen Dreiecks zwei beliebig annehmen kann; der dritte ist dann bestimmt durch die Forderung, dass die Winkelsumme den constanten Werth 2π haben soll. Wir brauchen daher Dreiecke nicht zu unterscheiden,

1) Wir erinnern daran, dass die Winkel $\bar{\alpha}_k$ die sonst als Aussenwinkel bezeichneten Grössen sind. Statt ihre Summe $= 2\pi$ anzunehmen, könnten wir sie ebensowohl irgend einem anderen Vielfachen von 2π gleichsetzen. Aber die unendlich vielen so entstehenden Dreiecksmannigfaltigkeiten, deren jede ein Continuum bildet, unterscheiden sich nicht wesentlich in den von uns zu betrachtenden Eigenschaften, so dass es genügt, irgend eine von ihnen zu untersuchen.

deren Seiten übereinstimmen, und deren Winkel durch eine Substitution \bar{K} der folgenden Gruppe $\bar{\mathfrak{R}}$ zusammenhängen:

$$(1) \quad \bar{\alpha}'_1 = \bar{\alpha}_1 + 2\kappa_1\pi, \quad \bar{\alpha}'_2 = \bar{\alpha}_2 + 2\kappa_2\pi, \quad \bar{\alpha}'_3 = \bar{\alpha}_3 + 2\kappa_3\pi$$

$$(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 0);$$

denn solche Dreiecke können durch einfache stetige Aenderungen — vollständige Umdrehungen einer oder mehrerer Seiten — in einander übergeführt werden.

Die Substitutionen \bar{K} der Gruppe $\bar{\mathfrak{R}}$ sehen wir demnach als nicht wesentlich verschieden von der identischen Substitution an. Wir können nun sogleich die mit einem gegebenen Dreieck verbundenen *Nachbardreiecke* angeben. Sie werden erhalten durch wiederholte Anwendung der Substitutionen:

	\bar{a}'_1	\bar{a}'_2	\bar{a}'_3	$\bar{\alpha}'_1$	$\bar{\alpha}'_2$	$\bar{\alpha}'_3$	
1	\bar{a}_1	\bar{a}_2	\bar{a}_3	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3$	
\mathfrak{S}_1	$-\bar{a}_1$	\bar{a}_2	\bar{a}_3	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2 + \pi$	$\bar{\alpha}_3 - \pi$	(mod. \bar{K}).
(2) \mathfrak{S}_2	\bar{a}_1	$-\bar{a}_2$	\bar{a}_3	$\bar{\alpha}_1 - \pi$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3 + \pi$	
\mathfrak{S}_3	\bar{a}_1	\bar{a}_2	$-\bar{a}_3$	$\bar{\alpha}_1 + \pi$	$\bar{\alpha}_2 - \pi$	$\bar{\alpha}_3$	
\mathfrak{I}	\bar{a}_1	\bar{a}_2	\bar{a}_3	$-\bar{\alpha}_1$	$2\pi - \bar{\alpha}_2$	$2\pi - \bar{\alpha}_3$	

Diese Substitutionen erzeugen, mod. \bar{K} , eine Gruppe von sechzehn involutorischen (und also vertauschbaren) Substitutionen — eine Gruppe, die in der ebenen Trigonometrie dieselbe Stellung einnimmt, wie die Gruppe \mathfrak{G}_{64} in der sphärischen. Man überzeugt sich sofort davon, dass zwischen diesen verschiedenen Dreiecken wirklich ein stetiger Uebergang möglich ist, und dass man thatsächlich vermöge (2), bereits alle Nachbardreiecke hat. Die Substitution \mathfrak{S}_1 z. B. entsteht, wenn man die Seite \bar{a}_1 eine Umwendung (halbe Umdrehung) ausführen lässt, die Substitution \mathfrak{I} , wenn man etwa die Ecke 1 auf der zugehörigen Höhe so weit verschiebt, bis ein zu dem vorgelegten symmetrisches Dreieck entsteht; u. s. w.

Mit dem Gesagten ist auch bereits die Frage nach den möglichen Gestalten eines ebenen Dreiecks erledigt. Es gibt, wenn man von Grenzfällen und von der verschiedenen Bezeichnung der Seiten absieht, acht Typen ebener Dreiecke. Diese werden durch die Figur 8 versinnlicht. Bei jedem einzelnen Dreieck ist neben der Figur angegeben, welcher Substitution unserer Gruppe es entspringt, unter der Voraussetzung,

dass die horizontale Seite dem Index 4 zugehört, und dass beim Ausgangsdreieck die Seiten und Winkel positiv sind. (Die ausserdem beigefügten Bezeichnungen werden sogleich erklärt werden.) — Man

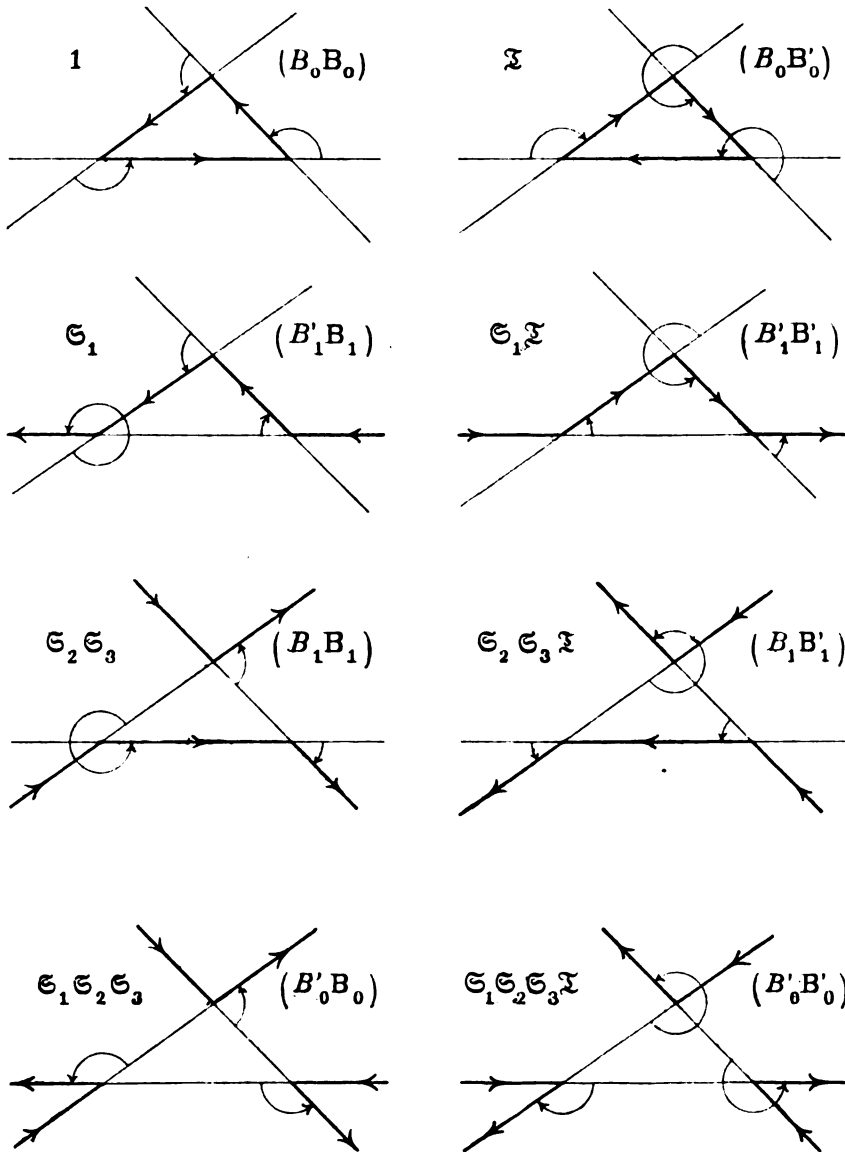


Fig. 8.

bemerke, dass bei der Hälfte der acht Typen (Fig. 8 links) die Ecken des Dreiecks im Sinne der positiven Drehungsrichtung der Winkel auf einander folgen, bei der anderen Hälfte (Fig. 8 rechts) im Sinne der negativen Drehungsrichtung.

Unterscheiden wir, wie in § 2, die verschieden benannten Seiten, so erhöht sich die Zahl der auseinander zu haltenden Dreiecksgestalten auf 16, und diese entsprechen gerade den 16 zusammengehörigen Nachbardreiecken, oder den 16 Substitutionen unserer Gruppe. Wir wollen für die 16 Dreiecksarten Bezeichnungen $(B_x B_x)$, $(B_x' B_x)$, $(B_x B_x')$, $(B_x' B_x')$ einführen, die den in § 2 bei den sphärischen Dreiecken gebrauchten Bezeichnungen entsprechen, und wie folgt definiert sind:

	B_0	B_0'	B_1	B_1'	B_2	B_2'	B_3	B_3'
(3)	\bar{a}_1	$\bar{\geq} 0$	\bar{a}_2	$\bar{\geq} 0$	\bar{a}_3	$\bar{\geq} 0$		$\bar{\geq} 0$

	B_0	B_0'	B_1	B_1'	B_2	B_2'	B_3	B_3'
(4)	$\bar{\alpha}_1$	I	$\bar{\alpha}_2$	II	$\bar{\alpha}_3$	II		I

Das Zeichen I bedeutet hier, dass der betreffende Winkel, nachdem er durch Zufügung eines geeigneten Vielfachen von 2π auf das Intervall von 0 bis 2π gebracht ist, zwischen 0 und π fällt, das Zeichen II, dass er dem Intervall von π bis 2π angehört. —

Wir betrachten nun wieder die *Uebergangsformen*, die Dreiecke, die den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Dreiecksmannigfaltigkeiten (BB) vermitteln. Aehnlich wie in der sphärischen Trigonometrie unterscheiden wir auch hier Grenzdreiecke und Uebergangsdreiecke im engeren Sinne. Diese Bezeichnungsweise können wir allerdings erst später vollständig rechtfertigen (II. Abschnitt, § 14). Für jetzt bemerken wir nur, dass die »Grenzdreiecke« die Mannigfaltigkeit der konstruirbaren reellen Dreiecke trennen von gewissen Dreiecksmannigfaltigkeiten, bei denen die Seiten oder Winkel imaginär sind, während bei den »Uebergangsdreiecken« Aehnliches nicht stattfindet. In allen Fällen behandeln wir nur solche Dreiecke, die noch von zwei willkürlichen Parametern abhängen. (Vgl. § 3.)

Grenzdreiecke erster Art.

Hierher stellen wir vier Dreiecksklassen, die definiert sind durch je eine der Gleichungen $\bar{s}_x = 0$, wofern

$$(5) \quad \begin{aligned} 2\bar{s}_0 &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_1 &= -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_2 &= \bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_3 &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 \end{aligned}$$

gesetzt wird. Sie vermitteln den Uebergang zwischen je zwei Dreieckstypen nach folgendem Schema:

$$(B_x B_x) \longleftrightarrow (B_x B'_x), \quad (B'_x B_x) \longleftrightarrow (B'_x B'_x).$$

Jede dieser Dreiecksarten enthält noch 3. 2 Unterarten, deren jede den Uebergang zwischen zwei völlig bestimmten Dreiecksge-
stalten vermittelt. Im Falle $\bar{s}_0 = 0$ z. B. hat man die folgenden
Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 < 0, \bar{a}_2 > 0, \bar{a}_3 > 0 &: (B'_1 B_1) \longleftrightarrow (B'_1 B'_1) \\ \bar{a}_1 > 0, \bar{a}_2 < 0, \bar{a}_3 < 0 &: (B_1 B_1) \longleftrightarrow (B_1 B'_1), \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Im Ganzen sind demnach $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Fälle auseinander zu halten, die man leicht aufzählen wird.

Grenzdreiecke zweiter Art. (Unendlich kleine Dreiecke.)

Dreiecke, deren Winkel nicht beschränkt sind, während die Seiten die Länge Null haben. Hierher gehören $4 \cdot 2 = 8$ Dreiecksklassen, die den Zusammenhang zwischen je zwei Dreiecksmannigfaltigkeiten nach folgendem Schema vermitteln:

$$(B_x B_x) \longleftrightarrow (B'_x B_x); (B_x B'_x) \longleftrightarrow (B'_x B'_x) \\ (\kappa = 0, 1, 2, 3).$$

Uebergangsdreiecke erster Art.

Hierher stellen wir sechs verschiedene Arten von Dreiecken, jede mit vier Unterarten, z. B.

$$\begin{array}{cccc} \bar{a}_1 = 0, \bar{\alpha}_1 \equiv 0 \pmod{2\pi}: & & & \\ (B_2 B_2) & (B_2 B'_2) & (B'_2 B_2) & (B'_2 B'_2) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (B'_3 B_3) & (B_3 B_3) & (B_3 B'_3) & (B'_3 B'_3) \\ \bar{a}_1 = 0, \bar{\alpha}_1 \equiv \pi \pmod{2\pi}: & & & \\ (B_0 B_0) & (B_0 B'_0) & (B'_0 B_0) & (B'_0 B'_0) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (B'_1 B'_1) & (B'_1 B_1) & (B_1 B'_1) & (B_1 B_1). \end{array}$$

Man erkennt ohne Weiteres, dass alle bis jetzt aufgezählten Arten specieller ebener Dreiecke Grenzfälle der in § 3 behandelten speciellen sphärischen Dreiecke sind. In der Geometrie der Ebene kommen aber noch andere ausgeartete Dreiecke vor, die in der Geometrie auf der Kugelfläche kein (reelles) Analogon haben. Es sind dies zunächst die

Uebergangsdreiecke zweiter Art,

Dreiecke mit zwei parallelen und daher unendlich langen Seiten. Hier sind ebensoviele Fälle auseinander zu halten, wie bei den Uebergangsdreiecken erster Art. Der Zusammenhang der einzelnen Dreiecksmannigfaltigkeiten gestaltet sich aber jetzt anders:

$$\begin{array}{cccc}
 & \bar{\alpha}_1 \equiv 0 \pmod{2\pi} & & \\
 (B_2 B_2) & (B_2 B_2') & (B_2' B_2) & (B_2' B_2') \\
 \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
 (B_3 B_3') & (B_3 B_3) & (B_3' B_3') & (B_3' B_3) \\
 & \bar{\alpha}_1 \equiv \pi \pmod{2\pi} & & \\
 (B_0 B_0) & (B_0 B_0') & (B_0' B_0) & (B_0' B_0') \\
 \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
 (B_1 B_1') & (B_1 B_1) & (B_1' B_1') & (B_1' B_1) .
 \end{array}$$

Endlich haben wir, um unsere Aufzählung vollständig zu machen, noch eine Classe von Grenzdreiecken hinzuzufügen:

Grenzdreiecke dritter Art. (Unendlich grosse Dreiecke.)

Es sind dies Dreiecke, deren Winkel nicht beschränkt sind, und deren Seiten sämtlich die Länge ∞ haben. Sie verhalten sich ganz wie die Grenzdreiecke zweiter Art, die unendlich kleinen Dreiecke, und vermitteln ganz in derselben Weise den Uebergang zwischen je zwei Dreiecksgestalten. —

Schliesslich mögen wir noch bemerken, dass die vorhin (S. 117, 118) definirten Gruppen sich ebenso wie die der sphärischen Trigonometrie *erweitern* lassen dadurch, dass man noch die Vertauschungen der Seiten hinzufügt. Aus der erwähnten Gruppe von 16 Substitutionen geht so eine Gruppe von 96 nicht vertauschbaren Substitutionen hervor.

II. Abschnitt.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie und ihr Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Substitutionen.

Dans l'analyse la perfection consiste à n'employer que le moindre nombre possible de principes, et à faire sortir de ces principes toutes les vérités qu'ils peuvent renfermer, par la seule force de l'analyse. (LAGRANGE.)

In älteren Werken kann man die sphärische Trigonometrie in der Weise behandelt finden, dass die Hauptsätze einzeln aus geometrischen Constructionen hergeleitet und als selbständige, gleichberechtigte Bestandtheile der Theorie neben einander hingestellt werden. Seit LAGRANGE in seiner classischen Abhandlung gezeigt hatte, wie man durch einfache Umformungen aus einer einzigen Gruppe von drei Gleichungen die ganze sphärische Trigonometrie entwickeln könne ¹⁾, ist eine andere Darstellungsweise üblich geworden. Sieht man sich indessen den gebräuchlichen Lehrgang genauer an, so findet man, dass die von LAGRANGE aufgestellte Forderung, aus der Geometrie nur das Nöthigste zu entnehmen, und alles Weitere analytisch herzuleiten, doch nicht überall erfüllt wird. Besonders in den Beweisen der nach LAGRANGE hinzugekommenen Sätze wird bei der Ausziehung der mehrfach auftretenden Quadratwurzeln öfter als nöthig von den Ungleichungen Gebrauch gemacht, denen man die sphärischen Dreiecke zu unterwerfen pflegt. Welche Möglichkeiten für die Vorzeichen der Wurzeln bei einer rein algebraischen Entwicklung bestehen, bleibt dahingestellt, und noch weniger wird erörtert, was eine etwanige andere Bestimmung jener Vorzeichen zu bedeuten habe. Ja in einigen Lehrbüchern wird, wenn ich nicht irre, aus pädagogischen Gründen,

1) Siehe die Anmerkung auf S. 125.

das von LAGRANGE Erreichte wieder zerstört, indem eine Gruppe von sechs oder gar acht Gleichungen an die Spitze gestellt wird — während doch nur geometrisch, nicht auch analytisch von vorn herein klar ist, dass diese Gleichungen von den Seiten und Winkeln des Dreiecks noch drei Stücke willkürlich lassen.

Aus diesen Gründen werden wir uns nicht auf andere Darstellungen berufen, sondern wir werden die wesentlichsten Formeln der sphärischen Trigonometrie selbst ableiten, natürlich in aller Kürze, soweit es sich um bekannte Dinge handelt¹⁾. Dabei schliessen wir uns im Allgemeinen dem in neuerer Zeit üblich gewordenen, durchaus zweckmässigen Lehrgang an, werden aber Sorge tragen, dass nicht mehr aus der Geometrie entlehnt wird, als durchaus nothwendig ist.

Es wird hierdurch nur eine geringe Weitläufigkeit verursacht werden. Da die von uns verwendeten Bezeichnungen mit den üblichen nicht ganz übereinstimmen, so ist eine Zusammenstellung der wichtigsten trigonometrischen Formeln ohnehin unerlässlich.

§ 1.

Die Grundformeln.

Wir bezeichnen die Seiten des sphärischen Dreiecks, wie im ersten Abschnitt, mit a_1, a_2, a_3 , die Winkel mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Von diesen sechs Stücken können drei als unabhängig-veränderliche Grössen betrachtet werden. Man wird daher, wenn man nichts Ueberflüssiges benutzen will, als Grundlage der Entwicklung eine Gruppe von *drei* unabhängigen Gleichungen zwischen jenen sechs Stücken wählen. Zu diesem Zwecke empfehlen sich, wegen ihrer einfachen geometrischen Herleitung, am meisten *die drei ersten Formeln des Cosinussatzes*:

$$(1) \quad \begin{cases} \cos a_1 = \cos a_2 \cdot \cos a_3 - \sin a_2 \cdot \sin a_3 \cdot \cos \alpha_1, \\ \cos a_2 = \cos a_3 \cdot \cos a_1 - \sin a_3 \cdot \sin a_1 \cdot \cos \alpha_2, \\ \cos a_3 = \cos a_1 \cdot \cos a_2 - \sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \cos \alpha_3. \end{cases}$$

Die drei anderen Formeln, die aus diesen durch Vertauschung

1) Wegen der sogenannten *Auflösung* der sphärischen Dreiecke, die hier nicht berücksichtigt werden konnte, verweisen wir auf die zahlreichen Lehrbücher, besonders auf den durch Reichthum des Inhalts und Eleganz der Darstellung in gleicher Weise ausgezeichneten *Traité de Trigonométrie* von J. A. SERRET (7^{me} éd. Paris 1888).

der Seiten und Winkel hervorgehen, benutzen wir mit Absicht *nicht*; wir werden sie vielmehr aus den Formeln (1) ableiten¹⁾.

Zunächst folgert man aus den Gleichungen (1) durch eine einfache Umformung sechs Gleichungen, von denen nur die beiden ersten hergesetzt werden mögen:

$$(2) \quad \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sin s_0 \cdot \sin s_1}{\sin a_2 \cdot \sin a_3}, \quad \cos^2 \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sin s_2 \cdot \sin s_3}{\sin a_2 \cdot \sin a_3}.$$

Die Bedeutung der Grössen s_i ist hier dieselbe, wie in § 2 des ersten Abschnittes (s. S. 94). Aus (2), oder auch unmittelbar aus (1) ergibt sich die Proportion

$$\sin^2 a_1 : \sin^2 a_2 : \sin^2 a_3 = \sin^2 \alpha_1 : \sin^2 \alpha_2 : \sin^2 \alpha_3.$$

Wir denken uns nun die Vorzeichen der Grössen $\sin \alpha_i$, die in den Gleichungen (1) nicht vorkommen, und aus diesen Gleichungen allein auch nicht vollständig bestimmt werden können, so gewählt, wie es die in § 1 des ersten Abschnittes getroffene Festsetzung über den gemeinsamen positiven Drehungssinn aller Winkel auf der Kugel erfordert. Dann entsteht der sogenannte *Sinussatz*:

$$(3) \quad \frac{\sin a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin a_2}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin a_3}{\sin \alpha_3} = \frac{P}{\Pi},$$

worin

$$(4) \quad \begin{cases} P = \sin a_2 \cdot \sin a_3 \cdot \sin \alpha_1 = \sin a_3 \cdot \sin a_1 \cdot \sin \alpha_2 = \sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin \alpha_3 \\ \Pi = \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \sin a_1 = \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin a_2 = \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin a_3 \end{cases}$$

die von STAUDT (CRELLE'S J. Bd. 24, S. 252) so bezeichneten *Sinus* des Dreiecks und seines Polardreiecks bedeuten.

Die Quadrate dieser Grössen P und Π lassen sich rational ausdrücken durch die Grössen $\cos a_i$ und $\cos \alpha_i$. Man entnimmt nämlich den Formeln (1) und (2) ohne Mühe die erste der Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} P^2 = 4 \sin s_0 \cdot \sin s_1 \cdot \sin s_2 \cdot \sin s_3 \\ = 4 - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2 - \cos^2 a_3 + 2 \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdot \cos a_3, \\ \Pi^2 = 4 \sin \sigma_0 \cdot \sin \sigma_1 \cdot \sin \sigma_2 \cdot \sin \sigma_3 \\ = 4 - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_3 + 2 \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3, \end{cases}$$

während die analoge Formel für Π^2 , die wir der Vollständigkeit

¹⁾ Der Inhalt des § 1 rührt grösstentheils von LAGRANGE her (Journal de l'École polytechnique, cah. 6, an VI). Mehrere Umformungen hatte bereits EULER angegeben (Acta Petrop. 1779), der überhaupt als der eigentliche Schöpfer der sphärischen Trigonometrie bezeichnet werden muss.

halber gleich mit aufgeschrieben haben, die vorhergehende Ableitung der zu (4) dualistischen Formelgruppe erfordert.

Diese zweite Formelgruppe des Cosinussatzes kann man nun gewinnen, wie folgt.

Man hat, wie gesagt, nach der ersten Formel (1):

$$\sin^2 a_2 \cdot \sin^2 a_3 \cdot \sin^2 \alpha_1 = (\cos a_2 \cdot \cos a_3 - \cos a_1) \cos a_1 \\ + 1 - \cos^2 a_2 - \cos^2 a_3 + \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdot \cos a_3.$$

Hieraus folgt, nach Multiplication der linken und rechten Seite mit $\cos a_1$:

$$\cos a_1 \cdot \sin^2 a_2 \cdot \sin^2 a_3 \cdot \sin^2 \alpha_1 = -(\cos a_2 \cdot \cos a_3 - \cos a_1) \sin^2 a_1 \\ + (\cos a_1 \cdot \cos a_3 - \cos a_2)(\cos a_1 \cdot \cos a_2 - \cos a_3),$$

oder, nach erneuter Benutzung der Formeln (1):

$$\cos a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3 \cdot \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 a_1} = -\cos a_1 + \cos a_2 \cdot \cos a_3;$$

und diese Formel geht mit Hülfe des Sinussatzes (3) über in die erste der Formeln

$$(6) \quad \begin{cases} \cos \alpha_1 = \cos a_2 \cdot \cos a_3 - \sin a_2 \cdot \sin a_3 \cdot \cos a_1, \\ \cos \alpha_2 = \cos a_3 \cdot \cos \alpha_1 - \sin a_3 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos a_2, \\ \cos \alpha_3 = \cos \alpha_1 \cdot \cos a_2 - \sin \alpha_1 \cdot \sin a_2 \cdot \cos a_3. \end{cases}$$

Ungezwungener ergeben sich diese Formeln natürlich durch das Princip der Dualität, oder auch aus den in Bezug auf Seiten und Winkel symmetrisch gebauten DELAMBRE'schen Formeln (s. § 3).

Verbindet man die Formeln (5), die wir jetzt beide benutzen dürfen, mit der aus (3) folgenden Relation

$$\frac{P^2}{\Pi^2} = \frac{\sin^2 a_1 + \sin^2 a_2 + \sin^2 a_3}{\sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_3},$$

so entsteht ein bemerkenswerther Ausdruck für das Verhältniss $P^2 : \Pi^2$, dem wir später wieder begegnen werden:

$$(7) \quad \frac{P^2}{\Pi^2} = \frac{1 - \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdot \cos a_3}{1 - \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3}.$$

Aus den Formeln des Sinus- und des Cosinussatzes ergeben sich noch einige Formelgruppen, die für die Praxis wenig Bedeutung haben, aber vom algebraischen Standpunkt aus nicht geringere Beachtung verdienen, als andere Formeln der sphärischen Trigonometrie. So zunächst die drei Formeln CAGNOLI's, die durch ihre Symmetrie zwischen Seiten und Winkeln bemerkenswerth sind:

$$(8) \quad \begin{aligned} & \sin a_2 \cdot \sin a_3 - \cos a_2 \cdot \cos a_3 \cdot \cos \alpha_1 \\ & = \sin a_2 \cdot \sin \alpha_3 - \cos a_2 \cdot \cos \alpha_3 \cdot \cos a_1 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Man gelangt zu diesen Relationen am schnellsten, wenn man der ersten Gleichung (4) den Factor $\cos a_1$ und der ersten Gleichung (6) den Factor $\cos a_1$ hinzufügt, das Product $\cos a_1 \cdot \cos \alpha_1$ eliminiert, und dann den Sinussatz benutzt.

Schreibt man ferner die dritte der Formeln (4) so:

$\sin a_2 (\cos a_3 \sin a_2 + \sin a_1 \cos \alpha_3) + \cos a_2 (\cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1) = 0$,
so kommt man, bei Anwendung der ersten Formel (4), nach Abscheidung des Factors $\sin a_2$, zu der ersten der Formeln

$$(9) \quad \begin{aligned} \cos \alpha_3 \cdot \sin a_1 + \cos a_3 \cdot \sin a_2 + \cos a_2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \sin a_3 &= 0 \\ \cos a_3 \cdot \sin a_1 + \cos \alpha_3 \cdot \sin a_2 + \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdot \sin a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Solcher Relationen hat man im Ganzen sechs verschiedene, wenn man je zwei, die durch Vertauschung von $\sin a_i$ und $\sin \alpha_i$ in einander übergehen, als gleichbedeutend rechnet. Da bei ihrer Ableitung nur die Formeln (4) und (3) benutzt sind, so kommt man, auf dem umgekehrten Wege, auch von hier aus wieder zu den Formeln (6).

Alle im gegenwärtigen Paragraphen entwickelten Formeln gelten in gleicher Weise für eigentliche wie für uneigentliche Dreiecke; denn die Functionen Cosinus und Sinus ändern sich nicht, wenn man das Argument um ein beliebiges Vielfaches von 2π vermehrt.

§ 2.

Die Delambre'schen und L'Huilier'schen Formeln.

Wir knüpfen jetzt an die Formeln (2) des § 1 an, indem wir aus ihnen die Relationen herleiten

$$\frac{\sin \frac{\alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 s_2}{\sin^2 a_1}}, \quad \frac{\cos \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 s_3}{\sin^2 a_1}}.$$

Die Werthe der beiden Quadratwurzeln, die man hier ausziehen hat, sind nicht von einander unabhängig. Es muss vielmehr, wenn die erste Wurzel durch $\varepsilon \cdot \frac{\sin s_2}{\sin a_1}$ erklärt wird ($\varepsilon = \pm 1$), die zweite durch $\varepsilon \cdot \frac{\sin s_3}{\sin a_1}$ erklärt werden. Bezeichnen wir nämlich die

zweite Wurzel mit $\varepsilon' \cdot \frac{\sin s_3}{\sin a_1}$ ($\varepsilon' = \pm 1$), so folgt $\frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3}{4 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}} = \varepsilon \varepsilon' \cdot \frac{\sin s_2 \cdot \sin s_3}{\sin^2 a_1}$, oder, wegen der Formeln (2), (5) des § 1:

$$\sin^2 a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \sin a_3 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 = \varepsilon \varepsilon' \cdot P^2,$$

d. h., es ist $\varepsilon \varepsilon' = +1$. Aus der Verbindung der beiden so gewonnenen Relationen gehen nun die beiden ersten der sogenannten GAUSS'schen, besser DELAMBRE'schen Formeln hervor¹⁾:

$$(1) \quad I. \quad \begin{cases} \frac{\sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \pm \frac{\cos \frac{a_2 - a_3}{2}}{\cos \frac{a_1}{2}}, & \frac{\sin \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \mp \frac{\sin \frac{a_2 - a_3}{2}}{\sin \frac{a_1}{2}}, \\ \frac{\cos \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}} = \mp \frac{\cos \frac{a_2 + a_3}{2}}{\cos \frac{a_1}{2}}, & \frac{\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}} = \pm \frac{\sin \frac{a_2 + a_3}{2}}{\sin \frac{a_1}{2}}. \end{cases}$$

Dabei gehören zunächst in der oberen Reihe die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen; ebenso gehören aber in der ganzen Formelgruppe I die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen. Man erkennt dies, indem man entweder z. B. auch die Formeln links auf eine ähnliche Weise herleitet, wie wir soeben die beiden oberen Formeln gewonnen haben — oder auch, von den oberen Formeln ausgehend, durch Benutzung des Sinussatzes:

$$\frac{\sin \alpha_2 \pm \sin \alpha_3}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin a_2 \pm \sin a_3}{\sin a_1}.$$

Neben diese Formeln I stellen sich noch zwei weitere, mit II und III zu bezeichnende Formelsysteme, die aus jenen durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehen. In jedem einzelnen von ihnen gehören die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen²⁾.

1) Diese wichtige Formelgruppe ist bekanntlich ungefähr gleichzeitig von DELAMBRE (1807), MOLLWEIDE (1808) und GAUSS (1809) veröffentlicht worden.

2) Eine andere Herleitung der Formeln I, die auf GAUSS selbst zurückgeführt wird, findet sich bei BALTZER (Elemente der Mathematik, II. 5. Aufl. S. 119). Dort fehlt indessen der algebraische Nachweis für die Zusammengehörigkeit der Vorzeichen in den drei Formelgruppen I, II, III. Diese Zusammengehörigkeit wird nämlich aus dem Umstande erschlossen, dass alle Seiten und Winkel der betrachteten Dreiecke kleiner als π sind. Eine solche Schlussweise ist, nach dem in der Einleitung Gesagten, nicht befriedigend, und in unserem Zusammenhange, wo jene Voraussetzung gar nicht zutrifft, auch nicht genügend.

Um zu zeigen, dass auch in allen drei Formelgruppen I, II, III *gleichzeitig* entweder nur die oberen oder nur die unteren Vorzeichen gewählt werden dürfen, führen wir die Entwicklung sogleich noch einen Schritt weiter, indem wir die Ableitung der SIMON-L'HUIER'schen Formeln für $\operatorname{tg} \frac{s_i}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2}$ vorbereiten.

Die DELAMBRE'schen Formeln verbinden je vier Grössen in dieser Weise: $\frac{a}{b} = \pm \frac{c}{d}$. Schreibt man hierfür $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c \mp d}{c \pm d}$, so ergeben sich, wenn in den Formeln I die oberen Vorzeichen angenommen werden, die Relationen

$$(2) \quad I \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{s_2}{2} \operatorname{tg} \frac{s_3}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{s_2}{2} \operatorname{tg} \frac{s_1}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_3}{2} = \operatorname{ctg} \frac{s_2}{2} \operatorname{tg} \frac{s_3}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_3}{2} = \operatorname{tg} \frac{s_0}{2} \operatorname{tg} \frac{s_1}{2}; \end{cases}$$

wenn dagegen die unteren Vorzeichen gelten, die Relationen

$$(2^*) \quad I \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{s_2}{2} \operatorname{ctg} \frac{s_3}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{s_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{s_1}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_3}{2} = \operatorname{tg} \frac{s_2}{2} \operatorname{ctg} \frac{s_3}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_3}{2} = \operatorname{ctg} \frac{s_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{s_1}{2}. \end{cases}$$

Bildet man nun die entsprechenden Formeln II und III, so sieht man sofort, dass die Annahme unzulässig ist, es könnten in einer der Formelgruppen (1) I, (1) II, (1) III die oberen und in einer anderen die unteren Vorzeichen gewählt werden.

Bei einem Dreieck, dessen Seiten und Winkel zwischen 0 und π liegen, sind, wie leicht zu sehen, nur die oberen Vorzeichen zulässig. Andererseits wechseln die Vorzeichen der DELAMBRE'schen Formeln, wenn man eine einzelne Seite oder einen einzelnen Winkel um 2π vermehrt. Hier scheidet sich also die Mannigfaltigkeit der eigentlichen von der der uneigentlichen Dreiecke:

Bei den eigentlichen Dreiecken gelten in den Delambre'schen Formeln die oberen, bei den uneigentlichen die unteren Vorzeichen. Die DELAMBRE'schen Formeln unterscheiden sich hierin von den älteren, sogenannten NEPER'schen Formeln für $\operatorname{tg} \frac{a_2 \pm a_3}{2}$ u. s. f., die man durch Division aus ihnen ableiten kann; diese gelten ebenso für eigentliche wie für uneigentliche Dreiecke.

In ähnlicher Weise kann man natürlich alle trigonometrischen Formeln in zwei Classen theilen: In solche, die für Dreiecke beider

Arten gelten, und in solche, die sich nur auf eigentliche Dreiecke beziehen. (Die uneigentlichen Dreiecke mögen hier bei Seite gelassen werden.) Die Formeln der ersten Classe haben ihre Wurzel im Cosinus- und Sinus-Satz, die der zweiten in den DELAMBRE'schen Gleichungen. Von diesen Grundformeln aus vollzieht sich der Uebergang zu allen anderen Formeln derselben Classe durch eindeutige Operationen, und ebenso natürlich auch der Uebergang von den Formeln der zweiten Classe zu denen der ersten; dagegen erfordert der Uebergang von der ersten zur zweiten Classe die Bestimmung des Vorzeichens einer Quadratwurzel (die übrigens selbst eine rational bekannte Grösse ist), also eine Wahl zwischen zwei Möglichkeiten.

Diese Bemerkung ist wichtig für die Auffassung der ganzen sphärischen Trigonometrie.

Es ist nämlich damit einmal der tiefere Grund für die grosse Bedeutung der DELAMBRE'schen Gleichungen aufgedeckt; sodann ist gezeigt, dass ein zweiter Fortschritt ähnlicher Art wie der, der vom Cosinus- und Sinus-Satz zu den DELAMBRE'schen Gleichungen führt, *nicht* möglich ist. Es liegt dies daran, dass die eigentlichen Dreiecke nicht wieder in getrennte Schaaren zerfallen, sondern eine continuirliche Mannigfaltigkeit bilden, wie wir im ersten Abschnitt gesehen haben. *Die Entwicklung der sphärischen Trigonometrie ist also nach gewisser Richtung hin abgeschlossen.* —

Wir wenden uns jetzt zur Ableitung der L'HUILIER'schen Formeln, die ebenfalls zur zweiten Classe gehören, und dasselbe aussagen, wie die DELAMBRE'schen Gleichungen. Wir beschränken uns dabei auf die *eigentlichen* Dreiecke.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(3) \quad \prod_0^3 \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2} = M^2 = \prod_0^3 \operatorname{tg} \frac{s_i}{2},$$

so folgt aus den Formeln (2)

$$\operatorname{tg} \frac{s_i}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s_x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_x}{2} = M^2 \quad (i, x = 0, 1, 2, 3).$$

Man kann also die Wurzel aus M^2 so erklären:

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{s_i}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2} = M \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

M ist nach (3) durch eine Quadratwurzel zu bestimmen, wenn entweder nur die Grössen $\operatorname{tg} \frac{s_i}{2}$ oder nur die Grössen $\operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2}$ rational bekannt sind. Bei Dreiecken, deren Seiten und Winkel zwischen 0 und π liegen, hat M einen *positiven* Werth.

Dies sind die berühmten Formeln von SIMON L'HUIPLIER. Die in Bezug auf die vier Indices 0 . . . 3 vollkommen symmetrische Gestalt, in der sie sich hier dargeboten haben, findet sich übrigens wohl noch nicht in der Literatur. Sie beruht auf dem Umstande, dass wir für die Grösse $\pi - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2}$ ein besonderes Zeichen s_0 eingeführt haben, und nicht, wie gebräuchlich, für die Grösse $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2}$; eine Neuerung, die sich auch sonst vielfach als zweckmässig erweist.

Die Formeln (4) geben, wenn das Dreieck aus seinen Seiten bestimmt werden soll, die Winkel und den sphärischen Excess durch vier verschiedene Rechnungen. Sie bieten also eine Controle und die Möglichkeit einer Ausgleichung.

§ 3.

Folgerungen aus den L'Huilier'schen Formeln¹⁾.

Die letzten Formeln des § 2 zusammen mit den goniometrischen Identitäten

$$(1) \quad \sum_0^3 \sum_0^3 \operatorname{tg} \frac{s_i}{2} \operatorname{tg} \frac{s_x}{2} = 1 + \operatorname{tg} \frac{s_0}{2} \operatorname{tg} \frac{s_1}{2} \operatorname{tg} \frac{s_2}{2} \operatorname{tg} \frac{s_3}{2} \quad (i \neq x)$$

$$\sum_0^3 \sum_0^3 \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_x}{2} = 1 + \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\sigma_3}{2}$$

enthalten einen sehr einfachen Ausdruck der Abhängigkeit zwischen den Seiten und Winkeln eines *eigentlichen* sphärischen Dreiecks. Sie fordern dazu heraus, Seiten und Winkel durch ein und dasselbe System von vier Grössen auszudrücken, zwischen denen noch eine Gleichung besteht.

1) Diesen Paragraphen kann man überschlagen, ohne das Verständniss des Folgenden zu beeinträchtigen. Doch wird er gerade für einen mit der Gruppentheorie nicht vertrauten Leser zur Einführung besonders geeignet sein.

Setzen wir nämlich, mit C eine Grösse bezeichnend, über die wir noch in geeigneter Weise verfügen wollen,

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{s_x}{2} = C \cdot e^{v_x}, \quad \operatorname{tg} \frac{\sigma_x}{2} = C \cdot e^{w_x} \quad (x = 0, 1, 2, 3),$$

so werden die Gleichungen (2), (3), (4) des § 2 erfüllt, wenn wir die Grössen v_x, w_x durch ein System von vier Grössen $u_0 \dots u_3$ in folgender Weise ausdrücken:

$$(3) \quad \begin{cases} 2v_0 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3, & 2w_0 = u_0 - u_1 - u_2 - u_3, \\ 2v_1 = u_0 + u_1 - u_2 - u_3, & 2w_1 = u_0 - u_1 + u_2 + u_3, \\ 2v_2 = u_0 - u_1 + u_2 - u_3, & 2w_2 = u_0 + u_1 - u_2 + u_3, \\ 2v_3 = u_0 - u_1 - u_2 + u_3, & 2w_3 = u_0 + u_1 + u_2 - u_3. \end{cases}$$

Die Grössen u_x haben wir noch den einer einzigen Bedingungsgleichung äquivalenten Relationen (1) anzupassen. Diese erhalten eine besonders elegante und symmetrische Gestalt, wenn wir

$$(4) \quad C = i = \sqrt{-1}$$

nehmen: Die Relationen (1) führen dann zu der Bedingung

$$(5) \quad \sum_0^3 \{e^{u_x} + e^{-u_x}\} = 2 \sum_0^3 \cos iu_x = 0.$$

Hieran knüpft sich eine bemerkenswerthe Folgerung.

Die Gleichung (5) ändert nämlich ihre Form nicht

1) wenn man eine beliebige der Grössen u_x um ein *gerades* Vielfaches von $i\pi$ vermehrt,

2) wenn man alle Grössen u_x gleichzeitig um je ein *ungerades* Vielfaches von $i\pi$ vermehrt,

3) wenn man irgend eine der Grössen u_x durch $-u_x$ ersetzt,

4) wenn man die Grössen u_x beliebig vertauscht.

In ihrer Gesamtheit erzeugen diese Aenderungen eine unendliche Gruppe I von linearen Substitutionen der Grössen u_x . Jede solche Substitution führt, allgemein zu reden, zu einer gewissen Aenderung der Grössen $\operatorname{tg} \frac{s_x}{2}, \operatorname{tg} \frac{\sigma_x}{2}$; es entsteht daher die Frage, in welcher Beziehung die zu den beiderlei Grössensystemen gehörigen sphärischen Dreiecke zu einander stehen?

Um dies zu entscheiden, bemerken wir, dass die Gruppe I eine invariante Untergruppe (S. 107) K enthält, bestehend aus allen den Substitutionen von I , die die Grössen $\operatorname{tg} \frac{s_x}{2}, \operatorname{tg} \frac{\sigma_x}{2}$ überhaupt

nicht ändern. Es sind das erstens die Aenderungen der Grössen u_x um beliebige Vielfache von $4i\pi$, zweitens die gleichzeitige Aenderung zweier der Grössen u_x um dasselbe (ungerade) Vielfache von $2i\pi$.

Wir ordnen jetzt alle diese Substitutionen der identischen Substitution zu. Dann reducirt sich die Gruppe Γ auf eine endliche Gruppe, die wir nunmehr näher zu untersuchen haben (vgl. S. 108, Anmerk.).

Zunächst bemerken wir, dass die unter 3) genannten Substitutionen eine Untergruppe von sechszehn, die unter 4) genannten Substitutionen eine Untergruppe von vierundzwanzig, und die unter 1) und 2) genannten Substitutionen eine Untergruppe von vier wesentlich verschiedenen Substitutionen bilden, und dass aus der Zusammensetzung dieser dreierlei Gruppen die besprochene endliche Gruppe entsteht. In der That sind jetzt von den Aenderungen um Vielfache von $i\pi$ wesentlich, d. h. mod. K , von der identischen Substitution und von einander verschieden nur noch die folgenden:

$$\begin{aligned} u'_0 &= u_0 + 2i\pi, & u'_x &= u_x, \\ u'_0 &= u_0 + i\pi, & u'_x &= u_x + i\pi, \quad (x = 1, 2, 3), \\ u'_0 &= u_0 - i\pi, & u'_x &= u_x + i\pi, \end{aligned}$$

die mit der Identität zusammen (mod. K) eine Gruppe H_4 bilden. Unsere Gruppe umfasst also $4 \cdot 16 \cdot 24 = 1536$ Substitutionen; sie mag daher mit Γ_{1536} bezeichnet werden.

Jetzt sind wir im Stande, die vorhin aufgeworfene Frage auf eine einfache Weise zu beantworten, indem wir gleichzeitig unsere nunmehrigen Betrachtungen in Zusammenhang bringen mit der im I. Abschnitt durchgeführten Untersuchung:

Unterwirft man die Grössen $\operatorname{tg} \frac{s_x}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\sigma_x}{2}$ einmal den Substitutionen der Gruppe Γ_{1536} , dann den Substitutionen der in § 7 des ersten Abschnittes definirten Gruppe \mathfrak{G}_{1536} , so sind die Aenderungen der genannten Grössen, bei geeigneter Zuordnung der Substitutionen beider Gruppen, in beiden Fällen dieselben. Die Gruppen Γ_{1536} und \mathfrak{G}_{1536} sind also holoëdrisch isomorph¹⁾. Die Anwendung der Substitutionen von Γ auf die Parameter u_x führt daher zu allen eigentlichen Dreiecken, die zu

1) Die Gruppen \mathfrak{G} und Γ selbst sind danach in der Weise isomorph auf einander bezogen, dass jeder Substitution der einen Gruppe mehrere (nämlich unendlich viele) Substitutionen der anderen Gruppe entsprechen.

dem nämlichen Dreikant gehören, und zu keinen weiteren. Dreiecke, deren Seiten und Winkel sich nur um Substitutionen der Gruppe \mathfrak{K}' (S. 113) unterscheiden, sind natürlich in diesem Zusammenhang als äquivalent anzusehen.

Es wird genügen, wenn wir die Substitutionen der Gruppe Γ_{1536} angeben, die der in \mathfrak{G}_{1536} enthaltenen Gruppe \mathfrak{G}_{128} (S. 115) entsprechen: Die anderen Substitutionen ergeben sich einmal durch Vertauschung der Indices 1, 2, 3, dann durch Vertauschung der Seiten mit den Winkeln, also durch die Substitution

$$u'_0 = u_0, \quad u'_x = -u_x \quad (x = 1, 2, 3).$$

Bezeichnen wir noch zur Abkürzung mit \mathfrak{Z} eine nicht in \mathfrak{K}' enthaltene Substitution der Gruppe \mathfrak{K}' 1):

$$\mathfrak{Z}: \begin{cases} a'_i = a_i + 2k_i\pi & (i = 1, 2, 3; \sum k_i \equiv 1 \pmod{2}) \\ \alpha'_i = \alpha_i + 2x_i\pi & (i = 1, 2, 3; \sum x_i \equiv 1 \pmod{2}), \end{cases}$$

so ergibt sich folgende Uebertragungstafel:

	u'_0	u'_1	u'_2	u'_3	
1	u_0	u_1	u_2	u_3	} (H_4) (mod. K)
T	$u_0 - i\pi$	$u_1 + i\pi$	$u_2 + i\pi$	$u_3 + i\pi$	
T	$u_0 + i\pi$	$u_1 + i\pi$	$u_2 + i\pi$	$u_3 + i\pi$	
(6) TT	$u_0 + 2i\pi$	u_1	u_2	u_3	
\mathfrak{Z}	$-u_0$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$	
S_1	$-u_1$	$-u_0$	$-u_3$	$-u_2$	
Σ_1	u_1	u_0	$-u_3$	$-u_2$	

Ordnet man \mathfrak{Z} der identischen Substitution zu, so reducirt sich die Gruppe \mathfrak{G}_{128} auf \mathfrak{G}_{64} . Der Untergruppe \mathfrak{G}_4 entspricht die aus den ersten vier Substitutionen bestehende Gruppe H_4 von Aenderungen der Parameter u , der Untergruppe \mathfrak{G}_{16} die Gruppe Γ_{16} , deren erzeugende Operationen die gleichzeitige Vertauschung von je zweien der Grössen u_x , und der Vorzeichenwechsel von zweien dieser Grössen sind. —

Mit Hilfe der entwickelten Formeln lassen sich die Grössen $\text{tg } \frac{s_x}{2}$, $\text{tg } \frac{\sigma_x}{2}$ und also auch die Sinus und Cosinus der Seiten und

1) Diese Substitution \mathfrak{Z} hat natürlich nichts zu thun mit der in der Theorie der ebenen Dreiecke ebenso benannten Substitution.

Winkel eines sphärischen Dreiecks *rational* ausdrücken durch vier Grössen, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht. Setzt man nämlich

$$(7) \quad t_x = e^{u_x} \quad (x = 0, 1, 2, 3), \quad W = \sqrt{-t_0 t_1 t_2 t_3},$$

so tritt an Stelle von (5) die algebraische Gleichung

$$(8) \quad \sum \left(t_x + \frac{1}{t_x} \right) = 0.$$

Es folgt nun

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{s_0}{2} = W, \quad \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} = \frac{W}{t_1 t_2 t_3}, \\ \operatorname{tg} \frac{s_1}{2} = \frac{W}{t_2 t_3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} = \frac{W}{t_1}; \text{ u. s. w.} \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{W \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right)}{t_0 + t_1}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{W \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right)}{1 + t_0 t_1}, \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin s_1}{\sin s_0} = \frac{1 - t_0 t_1 t_2 t_3}{t_2 t_3 - t_0 t_1}, \\ \frac{\sin \sigma_1}{\sin \sigma_0} = \frac{1 - t_0 t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1}}{t_2^{-1} t_3^{-1} - t_0 t_1^{-1}}, \end{array} \right.$$

u. s. f. — Die Irrationalität W lässt sich leicht beseitigen dadurch, dass man an Stelle der Grössen t_x andere Parameter einführt, z. B. durch die Substitutionen $t_0 = -\tau_0^2$, $t_x = \tau_x^2$.

In anderer Weise kann man die Formeln (7) . . . (11) dadurch abändern, dass man vier Verhältnissgrössen einführt, die von einander unabhängig sind, z. B. durch die Substitution:

$$e^{u_x} = t_x = \sqrt{-\frac{\sum \frac{1}{\zeta_x}}{\sum \zeta_x}} \cdot \zeta_x.$$

Wir gehen auf die hiermit berührte Abbildung der Mannigfaltigkeit der sphärischen Dreiecke auf die Punkte eines dreifach ausgedehnten Raumes nicht näher ein, da wir alsbald eine andere Abbildung dieser Art kennen lernen werden, die viel interessantere Eigenschaften besitzt.

§ 4.

Folgerungen aus den Delambre'schen Formeln.

Sinus und Cosinus irgend eines Winkels lassen sich rational ausdrücken durch Tangente oder Cotangente des halben Winkels. Es liegt daher nahe, zu fragen, wie sich die Grössen

$$(1) \quad l_i = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2}, \quad \lambda_i = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2}$$

gegenseitig durch einander ausdrücken?

Zur Beantwortung knüpfen wir an die DELAMBRE'schen Formeln (1), § 2 an. (S. S. 128.)

Indem wir alle dort vorkommenden goniometrischen Functionen durch die Grössen l_i, λ_i darstellen, gelangen wir zu den Formeln

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \lambda_1^2)(\lambda_2 + \lambda_3)^2}{(1 + \lambda_2^2)(1 + \lambda_3^2)} &= \frac{(1 + l_1^2)(1 + l_2 l_3)^2}{l_1^2(1 + l_2^2)(1 + l_3^2)}, \\ \frac{(1 + \lambda_1^2)(\lambda_2 - \lambda_3)^2}{(1 + \lambda_2^2)(1 + \lambda_3^2)} &= \frac{(1 + l_1^2)(l_2 - l_3)^2}{(1 + l_2^2)(1 + l_3^2)}, \\ \frac{(1 + \lambda_1^2)(1 - \lambda_2 \lambda_3)^2}{\lambda_1^2(1 + \lambda_2^2)(1 + \lambda_3^2)} &= \frac{(1 + l_1^2)(1 - l_2 l_3)^2}{l_1^2(1 + l_2^2)(1 + l_3^2)}, \\ \frac{(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2 \lambda_3)^2}{\lambda_1^2(1 + \lambda_2^2)(1 + \lambda_3^2)} &= \frac{(1 + l_1^2)(l_2 + l_3)^2}{(1 + l_2^2)(1 + l_3^2)}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, zwölf an der Zahl, lassen sich leicht nach den Grössen l_i oder λ_i auflösen: Die Producte $l_i l_x$ und $\lambda_i \lambda_x$ drücken sich, wie man nach einiger Rechnung findet, gegenseitig *linear* durch einander aus vermöge der involutorischen Transformation:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} l_2 l_3 &= \frac{1 - \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}{-1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}, \\ l_3 l_1 &= \frac{1 + \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}{-1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}, \\ l_1 l_2 &= \frac{1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2}{-1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} \end{aligned} \right.$$

1) Deutet man die Producte $l_i l_x, \lambda_i \lambda_x$ als Cartesische Coordinaten in einem sechsfach ausgedehnten Raume R_6 , so definiren die Gleichungen (2) eine dreifach ausgedehnte rationale Mannigfaltigkeit M_3^4 4. Ordnung, die, doppelt gerechnet, den vollständigen Schnitt dreier quadratischer Mannigfaltigkeiten M_3^2 ausmacht; deutet man die Grössen l_i, λ_i selbst als Cartesische Coordinaten, so entsteht eine Mannigfaltigkeit M_3^8 8. Ordnung, die, achtfach gezählt, den vollständigen Durchschnitt von drei biquadratischen Mannigfaltigkeiten M_5^4 bildet. Die Coordinaten l_i, λ_i eines veränderlichen Punktes der Mannigfaltigkeit M_3^8 können, wie wir im III. Abschnitt sehen werden (§ 5, Nr. 9), mit Hülfe der elliptischen Functionen eindeutig durch drei Parameter ausgedrückt werden.

Aus den Gleichungen (2) ergibt sich, wenn man sie in geeigneter Weise mit einander verbindet, der Satz:

Die vier Quotienten

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + l_2 l_3}{\lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}, \quad - \frac{1 - l_2 l_3}{1 - \lambda_2 \lambda_3}, \\ \frac{l_3 l_1 + l_1 l_2}{1 + \lambda_2 \lambda_3}, \quad - \frac{l_3 l_1 - l_1 l_2}{\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2}, \end{array} \right.$$

und die acht übrigen, die aus ihnen durch cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehen, haben alle denselben Werth.

Dieser Werth (die im nächsten Paragraphen mit $\frac{Y_0}{Z_0}$ bezeichnete Grösse) kann auf mehrere Arten in eine in Bezug auf l_1, l_2, l_3 oder $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ symmetrische Form gesetzt werden, z. B.

$$(3^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1 + l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2}{2} = \frac{2}{-1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} \\ = \frac{1 + l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2}{1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} = \sqrt{\frac{l_1 l_2 l_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \cdot \frac{\Pi}{P}}. \end{array} \right.$$

Die Formeln (2) oder die mit ihnen äquivalenten Nr. (3) ersetzen die zuerst angeschriebenen Gleichungen *vollständig*. Sie enthalten wohl den algebraisch einfachsten Ausdruck der Abhängigkeit zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks. Die in ihnen vorkommenden Producte $l_i l_x$, $\lambda_i \lambda_x$ lassen sich, was zu bemerken für uns wichtig ist, (mit Hülfe des Cosinussatzes) rational darstellen durch die Functionen $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_2 l_3 = \frac{\cos a_2 \cdot \cos a_3 - \cos a_1}{\cos a_1 (1 - \cos a_2)(1 - \cos a_3)}, \\ \lambda_2 \lambda_3 = \frac{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 (1 - \cos \alpha_2)(1 - \cos \alpha_3)}. \end{array} \right.$$

Aus den Gleichungen (2) oder (3) ergibt sich noch eine weitere bemerkenswerthe Folgerung. Drückt man nämlich die Grössen $\sin s_i$, $\sin \sigma_i$ ebenfalls durch die Grössen l_i , λ_i aus, so findet man, mit Hülfe von (2), ohne Mühe

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin s_0 : \sin s_1 : \sin s_2 : \sin s_3 \\ = 1 : \lambda_2 \lambda_3 : \lambda_3 \lambda_1 : \lambda_1 \lambda_2, \\ \sin \sigma_0 : \sin \sigma_1 : \sin \sigma_2 : \sin \sigma_3 \\ = 1 : l_2 l_3 : l_3 l_1 : l_1 l_2. \end{array} \right.$$

Verbindet man diese Formeln von Neuem mit (2) oder mit (3), so folgt

$$(6) \quad \frac{\sin \sigma_0 + \sin \sigma_1}{\sin \sigma_2 + \sin \sigma_3} = \frac{\sin s_2 + \sin s_3}{\sin s_0 + \sin s_1},$$

eine Relation, mit der (nachdem sie in eine andere Gestalt gebracht worden ist) wir uns noch weiter zu beschäftigen haben werden. Wir haben die Formel (6) hier schon angeführt, um die Bemerkung hinzuzufügen, dass man diese Gleichung auch unmittelbar aus den DELAMBRE'schen Formeln ableiten kann. Sie geht nämlich durch eine einfache Umformung über in die Gleichung

$$\frac{\cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}},$$

die ohne Weiteres den DELAMBRE'schen Formeln zu entnehmen ist. Verbindet man die so begründete Gleichung (6) mit (5) (worin man an Stelle der Producte $l_i l_x$, $\lambda_i \lambda_x$ ihre unter (2) angegebenen Werthe stehen lassen mag), so gelangt man zu einer zweiten Herleitung der Formeln (2), (3). —

Schliesslich wollen wir hier der Vollständigkeit wegen noch einige Formeln anführen, die zum Theil nur wenig bekannt geworden sind, und von denen auch wir fernerhin keinen Gebrauch zu machen haben werden.

Eine erste, von LAGRANGE angegebene Formelgruppe liefert merkwürdig einfache Ausdrücke für die Producte $II \cdot \text{ctg } s_i$.

Substituirt man in den Ausdruck

$$\text{tg } s_0 = - \frac{\text{tg } \frac{\alpha_1}{2} + \text{tg } \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}}{1 - \text{tg } \frac{\alpha_1}{2} \cdot \text{tg } \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}}$$

für $\text{tg } \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}$ den aus den DELAMBRE'schen (oder NEPER'schen) Gleichungen hervorgehenden Werth, so findet man nach einer leichten Umformung

$$\begin{aligned} \text{tg } s_0 &= \frac{\sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2} \cdot \sin \alpha_1}{\cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_3}{2} - \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2} \cdot \cos \alpha_1} = \\ &= \frac{\sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \sin \alpha_1}{4 \cos^2 \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha_3}{2} - \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3 \cdot \cos \alpha_1} = \\ &= \frac{II}{(4 + \cos \alpha_2)(4 + \cos \alpha_3) + (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3)}. \end{aligned}$$

Es gelten also die Gleichungen

$$(7) \quad \begin{cases} II \cdot \operatorname{ctg} s_0 = 1 + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3, \\ II \cdot \operatorname{ctg} s_1 = 1 + \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 - \cos \alpha_3, \\ II \cdot \operatorname{ctg} s_2 = 1 - \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - \cos \alpha_3, \\ II \cdot \operatorname{ctg} s_3 = 1 - \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3, \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{4}{P} = \operatorname{ctg} \sigma_0 + \operatorname{ctg} \sigma_1 + \operatorname{ctg} \sigma_2 + \operatorname{ctg} \sigma_3, \\ \frac{4}{II} = \operatorname{ctg} s_0 + \operatorname{ctg} s_1 + \operatorname{ctg} s_2 + \operatorname{ctg} s_3, \end{cases}$$

und zwar für eigentliche sowohl wie für uneigentliche Dreiecke.

Zerlegt man ferner z. B. $\sin s_0$ nach der Vorschrift

$$\sin s_0 = \sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2},$$

und benutzt man wieder die DELAMBRE'SCHEN Formeln, so entsteht die erste der bekannten Relationen

$$(9) \quad \begin{cases} \sin s_0 = \frac{\pm II}{4 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_3}{2}}, \\ \sin s_1 = \frac{\pm II}{4 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2}}; \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Unbestimmtheit der Vorzeichen ist hier dieselbe, wie in den DELAMBRE'SCHEN Formeln.

Verbindet man endlich die Formeln (7) und (9), so folgt

$$\begin{aligned} \cos s_0 &= \pm \frac{1 + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3}{4 \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_3}{2}} = \\ &= \pm \frac{\cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_3}{2} - \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2} \cdot \cos \alpha_1}{\cos \frac{\alpha_1}{2}}. \end{aligned}$$

Anderseits ist nach (9)

$$\sin s_0 = \pm \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}},$$

also

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \text{ctg } s_0 = \frac{\text{ctg } \frac{\alpha_2}{2} \cdot \text{ctg } \frac{\alpha_3}{2} - \cos a_1}{\sin a_1} = \\ = \frac{\text{ctg } \frac{\alpha_3}{2} \cdot \text{ctg } \frac{\alpha_1}{2} - \cos a_2}{\sin a_2} = \frac{\text{ctg } \frac{\alpha_1}{2} \cdot \text{ctg } \frac{\alpha_2}{2} - \cos a_3}{\sin a_3}, \\ \text{ctg } s_1 = \frac{\text{tg } \frac{\alpha_2}{2} \cdot \text{tg } \frac{\alpha_3}{2} - \cos a_1}{\sin a_1} = \\ = \frac{\text{ctg } \frac{\alpha_1}{2} \cdot \text{tg } \frac{\alpha_3}{2} + \cos a_2}{\sin a_2} = \frac{\text{ctg } \frac{\alpha_1}{2} \cdot \text{tg } \frac{\alpha_2}{2} + \cos a_3}{\sin a_3} \quad 1) \end{array} \right.$$

Auch diese Formeln gelten wieder für eigentliche wie für uneigentliche Dreiecke.

Aus den Relationen (9) gehen von Neuem die Proportionen (5) hervor.

§ 5.

Einführung der Parameter X, Y, Z und der orthogonalen Substitutionen.

Die Betrachtung der Formeln des vorigen Paragraphen legt den Gedanken nahe, statt der Producte $l_i l_x, \lambda_i \lambda_x$ zwei Systeme von je vier Grössen Y_i, Z_i einzuführen, die mit jenen in folgendem Zusammenhange stehen:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} Y_0 = \frac{2}{1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} = \frac{-1 + l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2}{1 + l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2}, \\ Y_1 = \frac{2 \lambda_2 \lambda_3}{1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2} = \frac{1 - l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2}{1 + l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2}, \quad \text{u. s. f.} \\ Z_0 = \frac{2}{1 + l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2} = \frac{-1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}{1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}, \\ Z_1 = \frac{2 l_2 l_3}{1 + l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2} = \frac{1 - \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}{1 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}, \quad \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

Diese Grössen Y_i, Z_i drücken sich dann so durch einander aus:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} 2Y_0 = -Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad 2Z_0 = -Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3, \\ 2Y_1 = Z_0 - Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad 2Z_1 = Y_0 - Y_1 + Y_2 + Y_3, \\ 2Y_2 = Z_0 + Z_1 - Z_2 + Z_3, \quad 2Z_2 = Y_0 + Y_1 - Y_2 + Y_3, \\ 2Y_3 = Z_0 + Z_1 + Z_2 - Z_3, \quad 2Z_3 = Y_0 + Y_1 + Y_2 - Y_3. \end{array} \right.$$

1) Vgl. überall BALTZER, Trigonometrie, Nr. 14 u. ff. (5. Aufl. S. 325),
SERRET, Traité de Trigonométrie Nr. 124.

Grössen aber, die in dieser Abhängigkeit stehen, lassen sich wiederum in einfacher Weise darstellen durch vier Hilfsgrössen X_i ¹⁾:

$$(3) \quad \begin{cases} 2Y_0 = X_0 + X_1 + X_2 + X_3, & 2Z_0 = X_0 - X_1 - X_2 - X_3, \\ 2Y_1 = X_0 + X_1 - X_2 - X_3, & 2Z_1 = X_0 - X_1 + X_2 + X_3, \\ 2Y_2 = X_0 - X_1 + X_2 - X_3, & 2Z_2 = X_0 + X_1 - X_2 + X_3, \\ 2Y_3 = X_0 - X_1 - X_2 + X_3, & 2Z_3 = X_0 + X_1 + X_2 - X_3. \end{cases}$$

$X_0 = \frac{1}{2}(Y_0 + Z_0)$ hat in unserem Falle den numerischen Werth Eins.

Umgekehrt gelten die Formeln

$$(4) \quad \begin{cases} Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 = 2X_0 = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3, \\ Y_0 + Y_1 - Y_2 - Y_3 = 2X_1 = -Z_0 - Z_1 + Z_2 + Z_3, \\ Y_0 - Y_1 + Y_2 - Y_3 = 2X_2 = -Z_0 + Z_1 - Z_2 + Z_3, \\ Y_0 - Y_1 - Y_2 + Y_3 = 2X_3 = -Z_0 + Z_1 + Z_2 - Z_3. \end{cases} -$$

Man sieht sogleich, dass sich die trigonometrischen Functionen der Seiten und Winkel des Dreiecks in sehr einfacher Weise darstellen lassen durch die *Verhältnisse* der so definirten Grössen X, Y, Z. Diese Ausdrücke wollen wir im nächsten Paragraphen entwickeln; zuvor aber wollen wir noch einige Formeln aufstellen, die uns weiterhin von Nutzen sein werden.

Man übersieht leicht, dass jede der Grössen X_i mit einer beliebigen der Grössen Y_j und einer durch beide bestimmten der Grössen Z_k durch eine lineare Relation mit numerischen Coefficienten verbunden ist. Die hierin liegende Eigenschaft der drei zusammengehörigen Grössensysteme, dass das Verschwinden einer Grösse Y und einer Grösse Z das Verschwinden einer Grösse X nach sich zieht, findet einen einfachen Ausdruck in der Formel

$$(5) \quad Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 - Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 = X_0 X_1 X_2 X_3,$$

die eine vollkommen symmetrische Gestalt annimmt, sobald man etwa an Stelle der Bezeichnung Y_0 die Bezeichnung $-Y_0$ setzt. —

Für das Folgende sind besonders wichtig gewisse homogene Functionen zweiten Grades der Grössen X, Y, Z, für die wir ebenfalls besondere Bezeichnungen einführen wollen:

¹⁾ Vgl. § 3, S. 132, Nr. (3), wo ebenfalls schon ein System von zwölf Grössen aufgetreten ist, die in dem durch die Formeln (2) . . . (4) angegebenen Zusammenhänge stehen.

(6)

$$a_{00} = \sum_0^3 X_i^2 = \sum_0^3 Y_i^2 = \sum_0^3 Z_i^2$$

$$a_{11} = X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 2(Y_2 Y_3 + Y_0 Y_1) = 2(Z_2 Z_3 + Z_0 Z_1)$$

$$a_{22} = X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 2(Y_3 Y_1 + Y_0 Y_2) = 2(Z_3 Z_1 + Z_0 Z_2)$$

$$a_{33} = X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 = 2(Y_1 Y_2 + Y_0 Y_3) = 2(Z_1 Z_2 + Z_0 Z_3)$$

$$a_{23} = 2(X_2 X_3 + X_0 X_1) = Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2 = 2(Z_2 Z_3 - Z_0 Z_1)$$

$$a_{31} = 2(X_3 X_1 + X_0 X_2) = Y_0^2 - Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 = 2(Z_3 Z_1 - Z_0 Z_2)$$

$$a_{12} = 2(X_1 X_2 + X_0 X_3) = Y_0^2 - Y_1^2 - Y_2^2 + Y_3^2 = 2(Z_1 Z_2 - Z_0 Z_3)$$

$$a_{32} = 2(X_2 X_3 - X_0 X_1) = 2(Y_2 Y_3 - Y_0 Y_1) = Z_0^2 + Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2$$

$$a_{13} = 2(X_3 X_1 - X_0 X_2) = 2(Y_3 Y_1 - Y_0 Y_2) = Z_0^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2$$

$$a_{21} = 2(X_1 X_2 - X_0 X_3) = 2(Y_1 Y_2 - Y_0 Y_3) = Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 + Z_3^2.$$

Es sind dies die bekannten, von EULER entdeckten Ausdrücke für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution in drei Veränderlichen, d. i. für die Coefficienten des Formelsystems

$$a_{00} \mathfrak{Z}'_i = a_{i1} \mathfrak{Z}_1 + a_{i2} \mathfrak{Z}_2 + a_{i3} \mathfrak{Z}_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

das den Uebergang von einem rechtwinkligen Coordinatensystem $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ zu einem anderen $\mathfrak{Z}'_1, \mathfrak{Z}'_2, \mathfrak{Z}'_3$ mit demselben Anfangspunkt vermittelt. In der That überzeugt man sich sofort davon, dass zwischen den durch (6) definirten Grössen a_{ix} die folgenden für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution charakteristischen Identitäten bestehen:

$$(7) \quad a_{00}^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(8) \quad \begin{aligned} 0 &= a_{i1} a_{x1} + a_{i2} a_{x2} + a_{i3} a_{x3} \quad (i \neq x; i, x = 1, 2, 3), \\ 0 &= a_{1i} a_{1x} + a_{2i} a_{2x} + a_{3i} a_{3x} \end{aligned}$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= a_{00} a_{11} - a_{22} a_{33} + a_{23} a_{32}, \\ 0 &= a_{00} a_{23} - a_{12} a_{31} + a_{11} a_{32}, \\ 0 &= a_{00} a_{32} - a_{21} a_{13} + a_{11} a_{23}, \quad \text{u. s. w.,} \end{aligned} \right.$$

die die genannte Eigenschaft zum Ausdruck bringen¹⁾. Durch diese Grössen a_{ix} drücken sich umgekehrt wieder die *Verhältnisse* der Grössen X, Y, Z rational aus, und zwar unter *allen* Umständen in eindeutig bestimmter Weise. Man findet ohne Mühe:

1) In Bd. 39 der Math. Annalen (1894, S. 514 u. ff.) hat der Verf. gezeigt, dass das angeschriebene Relationensystem in gewissem Sinne vollständig ist. Man findet dort auch die bilinearen Relationen zwischen den Parametern X_i (oder Y_i, Z_i) und den Coefficienten a_{ix} .

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} X_0 : X_1 : X_2 : X_3 \\ = (a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33}) : (a_{23} - a_{32}) : (a_{31} - a_{13}) : (a_{12} - a_{21}) \\ = (a_{23} - a_{32}) : (a_{00} + a_{11} - a_{22} - a_{33}) : (a_{12} + a_{21}) : (a_{31} + a_{13}) \\ = (a_{31} - a_{13}) : (a_{12} + a_{21}) : (a_{00} - a_{11} + a_{22} - a_{33}) : (a_{23} + a_{32}) \\ = (a_{12} - a_{21}) : (a_{31} + a_{13}) : (a_{23} + a_{32}) : (a_{00} - a_{11} - a_{22} + a_{33}). \end{array} \right.$$

Um die analogen Ausdrücke für die Verhältnisse der Grössen Y_i oder Z_i zu erhalten, braucht man offenbar nur das Grössensystem a_{00}, a_{ix} mit dem anders geordneten System derselben Grössen

$$\begin{array}{ccc} a_{23} & a_{33} & a_{13} \\ a_{00} & a_{21} & a_{31} & a_{11} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{00} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{32} & a_{12} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \end{array}$$

zu vertauschen.

§ 6.

Darstellung der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks durch die Parameter X, Y, Z .

Wir betrachten jetzt die Grössen X_i , von der besonderen Annahme $X_0 = 1$ absehend, als ein System von einander unabhängiger Verhältnissgrössen. Offenbar stellen auch in diesem Falle noch die durch die Formeln

$$(1) \quad l_2 l_3 = \frac{Z_1}{Z_0}, \quad \lambda_2 \lambda_3 = \frac{Y_1}{Y_0}$$

definierten Grössen l_i, λ_i die Cotangenten der halben Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks vor. Es wird also

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{Z_0 Z_1} = \frac{Z_2 Z_3}{\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}, \\ \lambda_1 = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}{Y_0 Y_1} = \frac{Y_2 Y_3}{\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \sin a_1 = \frac{4\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{a_{11}}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{4\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}{a_{11}}.$$

Besonders merkwürdige Ausdrücke erhalten die *Cosinus* der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks. Sie werden *Quotienten gewisser ganzer rationaler Functionen der Grössen X_i , nämlich der Euler'schen Ausdrücke für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution:*

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos a_1 = \frac{a_{23}}{a_{11}}, \quad \cos a_2 = \frac{a_{31}}{a_{22}}, \quad \cos a_3 = \frac{a_{12}}{a_{33}}, \\ \cos \alpha_1 = \frac{a_{32}}{a_{11}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad \cos \alpha_3 = \frac{a_{21}}{a_{33}}. \end{array} \right.$$

Diese Quotienten besitzen nicht so einfache Eigenschaften, wie ihre Zähler und Nenner einzeln genommen. Es leuchtet daher ein, dass die Einführung der Grössen a_{ix} in die sphärische Trigonometrie einen ähnlichen Vortheil mit sich bringt, wie er in zahlreichen anderen Fällen durch Zerspaltung einer homogenen Function 0^{ten} Grades in homogene Functionen höheren Grades herbeigeführt wird. Zugleich ergibt sich uns die Einsicht in einen an und für sich interessanten Zusammenhang: *Unser Satz besagt, dass zu einer orthogonalen Substitution in drei Veränderlichen (im Allgemeinen) ein bestimmtes sphärisches Dreieck gehört* — sofern man nämlich (im Sinne der Schlussbemerkungen von § 1 des ersten Abschnittes) ein Dreieck als vollständig gegeben ansieht, wenn die Cosinus seiner Seiten und Winkel bekannt sind¹⁾.

Ferner findet sich, wenn man zur Abkürzung

$$(5) \quad R = \sqrt{\frac{a_{11}}{2} \cdot \frac{a_{22}}{2} \cdot \frac{a_{33}}{2}}$$

setzt,

$$(6) \quad P = \frac{8 Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 \cdot Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}{R^2 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}, \quad II = \frac{8 Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 \cdot Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}{R^2 \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}.$$

Alle diese Formeln gelten in gleicher Weise für eigentliche, wie für uneigentliche Dreiecke; die folgenden aber, die die Irrationalität R enthalten, beziehen sich nur auf *eigentliche Dreiecke*:

$$(7) \quad \sin s_i = \frac{2 \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{R} \cdot Y_i, \quad \sin \sigma_i = \frac{2 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}{R} \cdot Z_i,$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos s_i = \frac{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}{R} \left\{ \sum_0^3 \frac{1}{Z_x} - \frac{2}{Z_i} \right\} \\ \cos \sigma_i = \frac{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}{R} \left\{ \sum_0^3 \frac{1}{Y_x} - \frac{2}{Y_i} \right\} \end{array} \right. \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Aus den Formeln (7) und (8), deren Verträglichkeit auf der Identität

$$(-Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_3 Z_1 + Z_0 Z_1 Z_2)^2 + 4 Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \cdot Y_0^2 = R^2$$

und den analogen Relationen beruht, gehen zwei verschiedene Ausdrücke für $\operatorname{tg} \frac{s_i}{2}$ und $\operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2}$ hervor:

1) Auf die Umkehrung des obigen Satzes bezieht sich der folgende Paragraph. Wegen der Ausnahmefälle vgl. § 10.

$$(9) \quad \operatorname{tg} \frac{s_i}{2} = \begin{cases} = \frac{2 Y_i \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{R + Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \cdot \left\{ \sum \frac{1}{Z_x} - \frac{2}{Z_i} \right\}} \\ \\ = \frac{2 Y_i \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{R - Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \cdot \left\{ \sum \frac{1}{Z_x} - \frac{2}{Z_i} \right\}}. \end{cases}$$

Ferner erhalten die DELAMBRE'schen Ausdrücke (S. 128) die Werthe

$$(10) \quad \text{I} \quad \begin{cases} \frac{\sin \frac{\alpha_2 \pm \alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{a_{11}}{R} \cdot \frac{Z_2 \pm Z_3}{2}, & \frac{\cos \frac{\alpha_2 \pm \alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{a_{11}}{R} \cdot \frac{\mp Z_0 + Z_1}{2} \\ \\ \frac{\sin \frac{\alpha_2 \pm \alpha_3}{2}}{\sin \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{a_{11}}{R} \cdot \frac{Y_2 \pm Y_3}{2}, & \frac{\cos \frac{\alpha_2 \pm \alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}} = \frac{a_{11}}{R} \cdot \frac{\mp Y_0 + Y_1}{2}; \end{cases}$$

hieraus folgt sodann:

$$(11) \quad \text{I} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{s_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_3}{2} = \frac{a_{11}(X_0 + X_1) - 2R}{a_{11}(X_0 + X_1) + 2R}, \\ \\ \operatorname{tg} \frac{s_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s_3}{2} = \operatorname{tg} \frac{\sigma_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} = \frac{a_{11}(X_0 - X_1) - 2R}{a_{11}(X_0 - X_1) + 2R}, \\ \\ \operatorname{tg} \frac{s_0}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{s_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\sigma_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{2} = -\frac{a_{11}(X_2 + X_3) + 2R}{a_{11}(X_2 + X_3) - 2R}, \\ \\ \operatorname{tg} \frac{s_2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{s_3}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\sigma_3}{2} = -\frac{a_{11}(X_2 - X_3) + 2R}{a_{11}(X_2 - X_3) - 2R}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (11) ergibt sich für das Quadrat der in § 2 (S. 130) definirten Grösse M der Werth

$$(12) \quad M^2 = \frac{a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22} - 8 X_0 \cdot R}{a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22} + 8 X_0 \cdot R},$$

der Werth von M selbst endlich kann aus den Formeln (9) abgeleitet werden:

$$(13) \quad M = \begin{cases} = \frac{16 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22} + 8 X_0 \cdot R} \\ \\ = \frac{a_{22} a_{33} + a_{33} a_{11} + a_{11} a_{22} - 8 X_0 \cdot R}{16 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}. \end{cases}$$

Diese Formeln, und namentlich die in ihnen auftretenden Irrationalitäten $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$, $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ und R bedürfen noch einer Erläuterung.

Zunächst sind, bei gegebenen Verhältnissen der Parameter X_i , rational bekannt nur die Cosinus der Seiten und Winkel, vermöge

der Formeln (4). Aus diesen gehen sodann, mit Hülfe der von einander unabhängigen Quadratwurzeln aus $Y_0 Y_1 Y_2 Y_3$ und $Z_0 Z_1 Z_2 Z_3$ die Sinus hervor, so dass zu jedem System der Cosinus noch vier verschiedene Systeme der Sinus gehören. Diese entsprechen augenscheinlich den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{S}_4 (I, § 4, S. 102). Dem gleichen Rationalitätsbereich gehören noch an die Grössen l_i, λ_i, P, II .

In den übrigen Formeln kommt die Irrationalität R hinzu. Alle diese gelten, was wohl zu beachten ist, in der angeschriebenen Form nur für *eigentliche Dreiecke*, also für solche Dreiecke, bei denen in die DELAMBRE'schen Formeln die oberen Vorzeichen einzutragen sind. Will man auch die uneigentlichen Dreiecke berücksichtigen, so hat man in der unteren Formelgruppe (10) — R an Stelle von R zu setzen; diese Aenderung zieht dann eine entsprechende Aenderung der übrigen Formeln nach sich.

Das Auftreten von R entspricht dem Umstande, dass die betreffenden goniometrischen Functionen bei Ausführung der in § 3 (S. 134) definirten Substitution \mathfrak{Z} ihren Werth ändern. Die Ausführung von \mathfrak{Z} kommt offenbar einer Vorzeichenänderung von R gleich.

Bei einem Dreieck, dessen Seiten und Winkel zwischen 0 und π liegen, ist allen drei Quadratwurzeln $R, \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}, \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ der *positive* Werth beizulegen. —

Da die Ableitung der die Irrationalität R enthaltenden Formeln (7) . . . (13) nicht ganz auf der Hand liegt, und da die Bestimmung der zusammengehörigen Wurzelwerthe eine gewisse Vorsicht erfordert, so wird die folgende Darlegung vielleicht willkommen sein.

Wir gehen aus von irgend einer der Functionen, die in den Zählern der DELAMBRE'schen Ausdrücke stehen. Es ist zufolge (2)

$$\begin{aligned} \sin \frac{a_2 \pm a_3}{2} &= \sin \frac{a_2}{2} \cdot \cos \frac{a_3}{2} \pm \cos \frac{a_2}{2} \cdot \sin \frac{a_3}{2} = \\ &= \sqrt{\frac{2 Z_0 Z_2}{a_{22}}} \cdot \sqrt{\frac{2 Z_1 Z_2}{a_{33}}} \pm \sqrt{\frac{2 Z_3 Z_1}{a_{22}}} \cdot \sqrt{\frac{2 Z_0 Z_3}{a_{33}}}. \end{aligned}$$

Hier muss das Product der ersten und dritten Wurzel $= \frac{2\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{a_{22}}$, und das der zweiten und vierten $= \frac{2\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{a_{33}}$ sein, wobei im Zähler in beiden Fällen derselbe Wurzelwerth zu wählen ist, wie in den

Formeln (3). Das Product aller vier Wurzeln ist also $= \frac{4 Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}{a_{22} a_{33}}$.
 Hieraus folgt, dass unser Ausdruck den Werth $2\sqrt{\frac{Z_0 Z_1}{a_{22} a_{33}}} \cdot (Z_2 \pm Z_3)$
 hat und nicht etwa den Werth $2\sqrt{\frac{Z_0 Z_1}{a_{22} a_{33}}} \cdot (Z_2 \mp Z_3)$. Es ergibt sich
 daher

$$\frac{\sin \frac{a_2 \pm a_3}{2}}{\sin \frac{a_1}{2}} = \frac{a_{11}}{R} \cdot \frac{Z_2 \pm Z_3}{2},$$

worin R irgend einen der beiden Werthe von $\sqrt{\frac{a_{11}}{2} \cdot \frac{a_{22}}{2} \cdot \frac{a_{33}}{2}}$ bedeutet.

Ebenso kommt man zu der zweiten Formel links in Nr. 10; dass der Werth von R in beiden Formeln derselbe ist, folgt aus dem Umstand, dass in den DELAMBRE'schen Formeln die oberen Vorzeichen angenommen wurden. Durch Wiederholung dieser Schlussweise gelangt man zu den beiden Formeln rechts in Nr. 10, und zu der Einsicht, dass R in allen Fällen dieselbe Grösse bedeutet. Jetzt ergeben sich durch rationale Operationen die Formeln (11), (12). (Vgl. S. 129.) Da in der letzten die Auszeichnung des Index 1 verschwunden ist, so folgt, dass auch in den zu (10) I analogen, mit (10) II, (10) III zu bezeichnenden Formeln R der nämliche Wurzelwerth ist. Die Formeln für $\sin s_i$, $\cos s_i$, $\operatorname{tg} \frac{s_i}{2}$ ergeben sich nunmehr ebenfalls durch rationale Operationen; denn es ist z. B.

$$\frac{2 \sin s_0}{\sin a_1} = \frac{\cos \frac{a_2 + a_3}{2}}{\cos \frac{a_1}{2}} + \frac{\sin \frac{a_2 + a_3}{2}}{\sin \frac{a_1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} s_0 = \frac{l_2 l_3 + l_3 l_1 + l_1 l_2 - 1}{l_1 + l_2 + l_3 - l_1 l_2 l_3}.$$

Um schliesslich noch den Werth der Grösse M zu finden, setzen wir für den Augenblick

$$D_i = Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \cdot \left\{ \sum \frac{1}{Z_x} - \frac{2}{Z_i} \right\}$$

$$\mathcal{A}_i = Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 \cdot \left\{ \sum \frac{1}{Y_x} - \frac{2}{Y_i} \right\}.$$

Er wird dann, nach § 2 (Nr. 4, S. 130)

$$M = \frac{4 Y_i Z_i \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{(R^2 + D_i \mathcal{A}_i) + (D_i + \mathcal{A}_i) \cdot R} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Hier sind nun die beiden Summanden des Nenners durch $Y_i Z_i$ theilbar. Man findet zunächst ohne Mühe

$$D_i + A_i = 2 X_0 Y_i Z_i.$$

Um die Zerlegung des ersten Factors auszuführen, verbinde man hiermit die auf S. 144 angegebene Identität, wonach

$$D_i^2 = R^2 - 4 Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 \cdot Y_i^2, \quad A_i^2 = R^2 - 4 Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 \cdot Z_i^2$$

ist. Es folgt

$$R^2 + D_0 A_0 = 2 Y_0 Z_0 \{ X_0^2 Y_0 Z_0 + Y_0 Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Y_1 Y_2 Y_3 \},$$

$$R^2 + D_1 A_1 = 2 Y_1 Z_1 \{ X_0^2 Y_1 Z_1 + Z_0 Y_1 Z_2 Z_3 + Y_0 Z_1 Y_2 Y_3 \},$$

u. s. f., also

$$M = \frac{2 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{X_0^2 Y_0 Z_0 + Y_0 Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Y_1 Y_2 Y_3 + X_0 \cdot R},$$

$$M = \frac{2 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{X_0^2 Y_1 Z_1 + Z_0 Y_1 Z_2 Z_3 + Y_0 Z_1 Y_2 Y_3 + X_0 \cdot R}.$$

Diese Ausdrücke führt man leicht in die erste der unter (13) angegebenen Formen über. Die zweite Gestalt von M ergibt sich durch eine ganz entsprechende Ueberlegung. Beide Ausdrücke verbunden führen wieder zur Formel (12), womit eine werthvolle Controle für die Richtigkeit unserer Rechnung gegeben ist. —

Natürlich kann man die aufgestellten Formeln noch auf manche andere Art controliren. Es scheint nützlich, wenigstens noch den Werth von $\operatorname{tg}^2 \frac{s_0}{2}$, der aus den Formeln (11) hervorgeht, mit dem Werthe derselben Grösse zu vergleichen, der sich aus den Formeln (9) ergibt.

Aus (11) folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{s_0}{2} &= \frac{a_{22} a_{33} - 2 a_{11} (X_0 + X_1)(X_2 + X_3) - 4 (X_0 + X_1 - X_2 - X_3) R}{a_{22} a_{33} - 2 a_{11} (X_0 + X_1)(X_2 + X_3) + 4 (X_0 + X_1 - X_2 - X_3) R} \\ &= \frac{a_{22} a_{33} - a_{11} a_{12} - a_{11} a_{13} - 8 Y_1 R}{a_{22} a_{33} - a_{11} a_{12} - a_{11} a_{13} + 8 Y_1 R}. \end{aligned}$$

Soll dieses Ergebniss mit den Formeln (9) im Einklang stehen, so muss sich aus Zähler und Nenner der Factor Y_1 abscheiden lassen. In der That ist

$$\begin{aligned} &a_{22} a_{33} - 2 a_{11} (X_0 + X_1)(X_2 + X_3) \\ &= 4 Y_0 Y_1 \{-Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\} + 8 Y_1^2 Y_2 Y_3; \end{aligned}$$

es wird also

$$\operatorname{tg}^2 \frac{s_0}{2} = - \frac{Y_0 \{-Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\} + 2 Y_1 Y_2 Y_3 - 2 R}{Y_0 \{-Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\} + 2 Y_1 Y_2 Y_3 + 2 R}.$$

Benutzt man jetzt, um statt der Grössen Y_i die Grössen Z_i einzuführen, die Umformung

$$\begin{aligned} & 2 Y_0 \{-Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\} + 4 Y_1 Y_2 Y_3 \\ = & (X_0 + X_1) \{(X_0 - X_1)^2 - (X_2 + X_3)^2\} - (X_2 + X_3) \{(X_0 + X_1)^2 - (X_2 - X_3)^2\} \\ & = 4 \{Z_2 + Z_3\} Z_0 Z_1 + 4 \{Z_0 - Z_1\} Z_2 Z_3 \\ & = 4 \{-Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_3 Z_1 + Z_0 Z_1 Z_2\}, \end{aligned}$$

so findet sich

$$\operatorname{tg}^2 \frac{s_0}{2} = \frac{R - \{-Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_3 Z_1 + Z_0 Z_1 Z_2\}}{R + \{-Z_1 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_2 Z_3 + Z_0 Z_3 Z_1 + Z_0 Z_1 Z_2\}}.$$

Dieses Ergebniss steht in der That im Einklang mit den Formeln (9). In ähnlicher Weise kann man auch die Producte zweier der Ausdrücke (9) bilden und sie mit den Formeln (11) vergleichen. In diesen Fällen sind im Zähler und Nenner Factoren zweiten Grades abzuschneiden; die auszuführenden Rechnungen sind daher ziemlich umständlich. —

Hervorgehoben zu werden verdienen noch gewisse Verbindungen der aufgeführten goniometrischen Functionen, aus denen die Irrationalitäten wieder herausfallen. Solche sind die Verhältnisse der Grössen $\sin s_i$ und die der Grössen $\sin \sigma_i$, die Verhältnisse der Grössen $\cos s_i$, $\cos \sigma_i$, und die Verhältnisse der DELAMBRE'SCHEN Ausdrücke (10); die Producte $II \cdot \operatorname{tg} s_i$, $P \cdot \operatorname{tg} \sigma_i$, u. s. w. (Vgl. I, § 7, S. 114; II, § 4, Nr. 7, S. 139.) —

Auf Grund unserer Formeln lässt sich jede goniometrische Function der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks, die rational durch die Grössen $\operatorname{tg} \frac{s_i}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2}$ ausgedrückt werden kann, auf eine einzige Weise in die Form setzen

$$\begin{aligned} & A + A_1 \cdot \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} + A_2 \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} + A_3 \cdot R \\ & + B_1 \cdot \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \cdot R + B_2 \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} \cdot R \\ & + B_3 \cdot \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} + C \cdot \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \cdot \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} \cdot R, \end{aligned}$$

worin die Coefficienten A , B , C rationale homogene Functionen der Parameter X_i bedeuten. Jede identische Relation zwischen solchen Functionen verwandelt sich so in eine Reihe von Identitäten $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

Umgekehrt kann man durch Elimination der Grössen X_i aus unseren Formeln zu einer unbegrenzten Zahl neuer identischer

Relationen der sphärischen Trigonometrie gelangen. Als Beispiel für eine solche Elimination führen wir an die Formeln

$$P = \sin \sigma_i \left\{ \sum_0^3 \cos s_x - 2 \cos s_i \right\}$$

$$\Pi = \sin s_i \left\{ \sum_0^3 \cos \sigma_x - 2 \cos \sigma_i \right\} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

§ 7.

Umkehrung des in § 6 aufgestellten Satzes.

Nicht allein die Functionen $\cos a_x$, $\cos \alpha_x$ lassen sich rational ausdrücken durch die Substitutionscoefficienten a_{ix} , sondern es ist auch das Umgekehrte der Fall; denn die Grössen a_{ix} hängen rational ab von den Parametern X_i , diese von den Producten $l_i l_x$ oder $\lambda_i \lambda_x$, und diese wieder von den Cosinus der Seiten und Winkel (§ 4 Nr. 4).

Bequemer kann man die Verhältnisse der Grössen a_{ix} (auf die es allein ankommt) unmittelbar aus den Formeln (3) und (4) des § 6 berechnen. Die Formeln (3) liefern zunächst die Proportion

$$a_{11} : a_{22} : a_{33} = \sin a_2 \cdot \sin a_3 : \sin a_3 \cdot \sin a_1 : \sin a_1 \cdot \sin a_2,$$

worin man, mit Hilfe des Cosinussatzes, statt der Grössen $\sin a_i$ auf rationale Weise die Grössen $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$ einführen kann. Hierauf ergeben sich aus den Formeln (4) die Verhältnisse der neun Grössen $a_{11} \dots a_{33}$. Um dem Resultat eine in Bezug auf Seiten und Winkel symmetrische Gestalt zu ertheilen, führen wir die Bogen h_1 , h_2 , h_3 ein, die die Ecken des gegebenen Dreiecks mit den entsprechenden Ecken seines Polardreiecks verbinden (die Complementary der Höhen des Dreiecks). Ihre Cosinus sind gegeben durch die Formeln

$$(1) \quad \cos h_i = \frac{P}{\sin a_i} = \frac{\Pi}{\sin \alpha_i}.$$

Jetzt können wir, als Umkehrung des in § 6 formulirten Theorems, den Satz aussprechen:

Die Grössen

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \cos h_1 & \cos h_3 \cdot \cos a_3 & \cos h_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ \cos h_3 \cdot \cos \alpha_3 & \cos h_2 & \cos h_1 \cdot \cos a_1 \\ \cos h_2 \cdot \cos a_2 & \cos h_1 \cdot \cos \alpha_1 & \cos h_3 \end{array} \right.$$

sind proportional den Coefficienten einer orthogonalen Substitution.

Bei unserer homogenen Schreibweise haben die Substitutionscoefficienten a_{ix} überhaupt nur die Bedeutung von Verhältnissgrössen; wir hätten daher statt »proportional« auch sagen können »gleich«. Um indessen durch die Bezeichnung sichtbar zu machen, dass die in den Formeln (2) auftretenden Substitutionscoefficienten nicht geradezu identisch sind mit den bisher gebrauchten Grössen a_{ix} , wollen wir die Ausdrücke (2) der Reihe nach gleich τa_{11} , τa_{12} , . . . τa_{33} setzen, indem wir mit τ einen allen gemeinsamen Proportionalitätsfactor bezeichnen.

Der erste, in den Formeln (2) nicht vorkommende Coefficient wird jetzt natürlich τa_{00} zu benennen sein. Für ihn liefern die Formeln (9), § 5 (S. 142) neun verschiedene Ausdrücke, deren Gleichheit man durch leichte Rechnungen bestätigt:

$$(3) \quad \tau a_{00} = \sin a_i \cdot \sin \alpha_i - \cos a_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos h_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau a_{00} = \frac{\sin a_1 \sin \alpha_1 \cdot \cos a_2 \cos a_3 - \cos h_1 \cdot \cos \alpha_1}{\cos a_1} \quad \text{u. s. f.}, \\ \tau a_{00} = \frac{\sin a_1 \sin \alpha_1 \cdot \cos a_2 \cos a_3 - \cos h_1 \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} \quad \text{u. s. f.} \end{array} \right.$$

Man kann den Werth von τa_{00} auch leicht in eine in Bezug auf Seiten und Winkel symmetrische Gestalt überführen. Es ist nämlich nach der ersten Formel

$$\tau a_{00} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin a_1} \left\{ \sin^2 a_1 - \sin a_2 \sin a_3 \cdot \cos a_1 \cos \alpha_1 \right\};$$

hierfür aber kann man wegen des Cosinussatzes auch schreiben

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau a_{00} = \frac{II}{P} (1 - \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3), \\ \tau a_{00} = \frac{P}{II} (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3). \end{array} \right.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Division aufs Neue die Formel (7), § 4 (S. 126), andererseits durch Multiplication

$$(6) \quad \tau a_{00} = \sqrt{(1 - \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3)(1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3)}.$$

Auf Grund dieser Sätze verwandeln sich alle Relationen zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution in Formeln der sphärischen Trigonometrie. So leiten wir aus den Formeln (8), § 5 (S. 142), von Neuem die Formeln (9), § 4, her, und ebenso führen uns die Formeln (7) zu den Relationen (5) des § 4 zurück.

§ 8.

Die desmischen Tetraeder.

Da bei der Darstellung der sphärischen Dreiecke durch die Parameter X_i nur deren Verhältnisse von Bedeutung sind, so liegt es nahe, diese Grössen als homogene Coordinaten eines Punktes im dreifach ausgedehnten Raume zu deuten. Wir gelangen so zu einer Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum, deren Studium uns nunmehr beschäftigen soll. —

Um eine bestimmte Vorstellung zu gewinnen, fassen wir $\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}, \frac{X_3}{X_0}$ als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten auf. Wir treffen damit eine Festsetzung, die um so näher liegt, als ja X_0 von vorn herein den numerischen Werth Eins hat, wenn wir von einem gegebenen Dreiecke ausgehen.

Die Gleichungen $Y_i = 0$ und $Z_i = 0$ stellen jetzt die Seitenflächen zweier regulärer Tetraeder vor, die einem Würfel eingeschrieben sind, dessen Ecken die Coordinaten ± 1 haben. (Vgl. Fig. 9. Man denke sich etwa die positive $\frac{X_1}{X_0}$ -Axe nach rechts, die $\frac{X_2}{X_0}$ -Axe nach vorn, die $\frac{X_3}{X_0}$ -Axe nach oben gerichtet.)

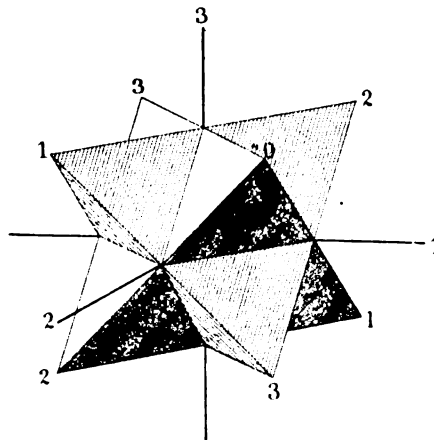


Fig. 9.

Diese Tetraeder, die wir kurz als das Y - und das Z -Tetraeder bezeichnen wollen, bilden zusammen mit dem Coordinatentetraeder, dem » X -Tetraeder«, eine merkwürdige Figur, die unter dem Namen

der *desmischen Tetraeder* bekannt ist. Wir stellen ihre wichtigsten Eigenschaften, soweit wir sie brauchen, kurz zusammen, indem wir wegen breiterer Ausführung auf die bereits ziemlich ausgedehnte Literatur des Gegenstandes verweisen¹⁾.

Wie die Gleichungen (5) des § 5 zeigen, gehören alle drei Tetraeder demselben Büschel von Flächen 4. O. an, sogenannten *desmischen* Flächen. Durch jede Gerade, in der sich zwei Seitenflächen zweier dieser Tetraeder treffen, geht auch eine Fläche des dritten Tetraeders, so dass die Schnittlinien der genannten Flächen im Ganzen nur 16 gerade Linien bilden. Von diesen verlaufen in unserem Falle 12 im Endlichen; sie bilden die Kanten des Octaeders, in dem sich das *Y*- und das *Z*-Tetraeder durchdringen; die übrigen vier gehören der unendlich fernen Ebene an. Wie man sieht, gehen diese sechzehn Geraden 12mal zu vierten durch einen Punkt: es sind das dieselben 12 Punkte, in denen sich gleichzeitig drei Kanten von je einem der desmischen Tetraeder treffen. Jedes der drei Tetraeder enthält alle 16 Geraden, die Basislinien des genannten Büschels.

Ebenso, wie die Flächen der drei Tetraeder zu dreien sich in denselben 16 Geraden schneiden, so liegen die Ecken zu dreien auf 16 Geraden — den Kanten und Diagonalen unseres Würfels. Die Figur dieser 16 Geraden hat die dualistischen Eigenschaften der zuerst genannten; sie vertheilen sich 12mal zu vierten auf eine Ebene, u. s. w.

Die 12 Kanten der drei Tetraeder lassen sich noch auf eine zweite Art zu drei desmischen Tetraedern verbinden, d. h. zu einer Figur zusammenfügen, die im Sinne der projectiven Geometrie ganz dieselben Eigenschaften hat, wie die zuerst betrachtete Figur dreier desmischer Tetraeder. Diese *zweite Reihe desmischer Tetraeder* ist, bei unserer Bezeichnungsweise, den drei Indices 1, 2, 3 zugeordnet;

1) STEPHANOS, Bulletin des Sciences Mathématiques, II. sér. t. 3 (1879) p. 424. VERONESE, Mem. d. r. Acc. dei Lincei 1880 v. IV. SCHRÖTER, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 28, S. 178. Crelle's Journal f. Math. Bd. 93, S. 169. REYE, Acta Mathematica, Bd. I, S. 97. HESS, Math. Ann. Bd. 28, S. 167. CASPARY, Math. Ann. Bd. 29, S. 581.

Der Leser wird übrigens am besten thun, sich die Einzelheiten der im Texte zum Theil nur angedeuteten, übrigens ganz einfachen Verhältnisse selbst klar zu machen.

die Ebenen des ersten z. B. werden erhalten, wenn man die in den Formeln (10)1, § 6, auf den rechten Seiten stehenden Ausdrücke gleich Null setzt: ihre Gleichungen sind

$$X_0 \pm X_1 = 0, \quad X_2 \pm X_3 = 0.$$

Jedes dieser Tetraeder hat, in unserem Falle, zwei unendlich ferne Ecken. Man kann sich von ihnen und von ihrer gegenseitigen Lage eine deutliche Vorstellung machen, wenn man sich der Gestalt eines Sägebocks erinnert. Bei dem Tetraeder z. B., dessen Gleichungen wir soeben angeschrieben haben, ist die $\frac{X_1}{X_0}$ -Axe der Querbalken des Sägebocks; die beiden Kreuze an den Enden werden dargestellt durch die Kante $\overline{01}$ des Y-Tetraeders und die Kante $\overline{23}$ des Z-Tetraeders, und durch die Kante $\overline{23}$ des Y-Tetraeders und die Kante $\overline{04}$ des Z-Tetraeders. (Vgl. Fig. 9.) Solcher Sägeböcke kann man drei in unseren Würfel hineinstellen; und diese bilden, nach Hinzufügung der unendlich fernen Kanten, die Tetraeder der zweiten Reihe. Die Ecken dieser Tetraeder sind die oben erwähnten 12 Punkte. Die Beziehung zwischen den beiden Reihen desmischer Tetraeder ist, im Sinne der projectiven Geometrie, vollkommen wechselseitig.

Die Figur der desmischen Tetraeder ist vollständig bestimmt durch eines unter ihnen und *eine* Ecke (oder Fläche) eines zweiten. Nehmen wir z. B. an, es sei das Y-Tetraeder gegeben und die Ecke 0 des X-Tetraeders. Dann entsprechen die Ecken 1, 2, 3 des X-Tetraeders der Ecke 0 in den drei involutorischen collinearen Transformationen (von H. WIENER so genannten *Spiegelungen*), die durch die Paare gegenüberliegender Kanten des Y-Tetraeders bestimmt sind. Hierauf findet man die Ecken des Z-Tetraeders, indem man etwa das Y-Tetraeder z. B. der perspectiven involutorischen collinearen Transformation unterwirft, deren Mittelpunkt die Ecke 0 und deren Ebene die Ebene 0 des X-Tetraeders ist (in unserem Falle ist dies die Spiegelung am Anfangspunkt der Coordinaten).

Da man, um eine collineare Transformation des Raumes zu bestimmen, gerade fünf Punkten fünf andere zuordnen kann, so kann ohne Weiteres geschlossen werden, dass die Figur der drei desmischen Tetraeder durch eine *Gruppe von 576 collinearen Transformationen* in sich selbst übergeführt wird. Diese Gruppe ist für unsere

Untersuchung von Wichtigkeit. Wir bezeichnen sie, nach der Zahl ihrer Substitutionen, mit G_{576} . Von ihren zahlreichen Untergruppen heben wir, mit Rücksicht auf das Folgende, nur wenige hervor, die wir, soweit überhaupt eine besondere Benennung nöthig erscheint, ebenfalls nur nach der Zahl ihrer Substitutionen in der Bezeichnung unterscheiden wollen.

Eine Gruppe G_{192} ist, als Untergruppe von G_{576} , dadurch defnirt, dass das X-Tetraeder als Ganzes in Ruhe bleibt.

Eine Gruppe G_{96} ist, als Untergruppe von G_{576} und G_{192} , dadurch bestimmt, dass sowohl das X-Tetraeder, als auch das Y- und das Z-Tetraeder jedes einzeln in sich übergeführt werden soll. Diese Gruppe ist eine *invariante* Untergruppe (S. 107, Anm.) der beiden vorigen. Bei ihr werden die drei Tetraeder der zweiten Reihe noch in allgemeinsten Weise unter einander vertauscht. Hält man aber auch diese Tetraeder, jedes einzeln, fest, so entsteht eine

Gruppe G_{16} , die in allen vorhergehenden als invariante Untergruppe enthalten ist. Diese Gruppe ist also dadurch defnirt, dass alle Tetraeder beider Reihen einzeln in Ruhe bleiben. Sie wird, wie man leicht erkennt, von *involutorischen Transformationen* gebildet, sogenannten geschaart-involutorischen Collineationen. Abgesehen von der identischen Transformation, die nur im uneigentlichen Sinne eine involutorische Transformation genannt werden kann, sind dies die neun involutorischen collinearen Transformationen, deren Axen von je einem Paar von Gegenkanten der desmischen Tetraeder (erster oder zweiter Reihe) gebildet werden (»Spiegelungen« an diesen Kantenpaaren), und sechs weitere, aus jenen zusammensetzende, mit conjugirt-imaginären Axen. — Von den Untergruppen dieser Gruppe G_{16} heben wir nur hervor:

a) die Gruppe der Spiegelungen an den Kantenpaaren des X-Tetraeders, also die von vier Transformationen gebildete Untergruppe von G_{16} , bei der sämtliche Ecken des X-Tetraeders einzeln in Ruhe bleiben, b) und c) die in ähnlicher Weise aus dem Y- und dem Z-Tetraeder abzuleitenden Gruppen. —

Die *analytische Darstellung* aller der aufgezählten Gruppen ist sehr einfach. Für die Gruppen G_{576} , G_{96} und G_{16} ist sie dieselbe, mögen wir nun das X- oder das Y- oder das Z-Tetraeder zu Grunde legen; für die Gruppen G_{576} und G_{16} behält sie überdies auch beim

Uebergang zu den Tetraedern zweiter Art ihre Form bei. Wählen wir das X -Tetraeder, so erhalten wir die Transformationen von G_{16} , wenn wir für X_0', X_1', X_2', X_3' der Reihe nach die Werthsysteme

$$\begin{aligned} & \pm X_0, \pm X_1, \pm X_2, \pm X_3; \\ & \pm X_1, \pm X_0, \pm X_3, \pm X_2; \\ & \pm X_2, \pm X_3, \pm X_0, \pm X_1; \\ & \pm X_3, \pm X_2, \pm X_1, \pm X_0 \end{aligned}$$

setzen, mit der Bestimmung, dass die Zahl der negativen Vorzeichen in jedem Falle gerade sein soll. Die Gruppe G_{96} geht daraus hervor, wenn wir nicht nur die angeschriebenen vier, sondern alle vierundzwanzig Vertauschungen des Indices 0, 1, 2, 3 zulassen; die Gruppe G_{192} entsteht, wenn wir noch den Vorzeichenwechsel einer einzelnen der Grössen X_i hinzufügen; zu der Gruppe G_{576} endlich gelangen wir, wenn wir alle diese Transformationen verbinden mit einer Transformation, die aus den Formeln (3), § 5 (S. 144) durch Substitution von X_i' an Stelle von Y_i (oder Z_i) entsteht.

Unterwirft man einen beliebigen Punkt des Raumes den Transformationen einer der besprochenen Gruppen, so nimmt er in den einzelnen Fällen 576, 192, 96, 16 verschiedene Lagen an, wenn er nicht von vorn herein eine besondere Lage hat. Von den so entstehenden Configurationen ist bis jetzt wohl erst die letzte und einfachste genauer untersucht worden, die nach ihrem Entdecker so genannte *Kummer'sche Configuration*. — Wir haben keine Veranlassung, im gegenwärtigen Zusammenhange auf die merkwürdigen Eigenschaften dieser Figur näher einzugehen, die ohnehin ja auch als ziemlich bekannt gelten können; doch musste, um des Folgenden willen, ihr Auftreten hier Erwähnung finden. —

Greift man aus den Gegenkantenpaaren der desmischen Tetraeder irgend zwei heraus, die sich nicht schneiden, was auf 18 Arten geschehen kann, so liegen diese immer auf einer Fläche 2. Ordnung. Jede so bestimmte Fläche kann, ihren beiden Schaaren von geraden Linien entsprechend, zweimal auf diese Art erzeugt werden; es entstehen daher nur neun verschiedene Flächen. Analytisch werden diese bemerkenswerther Weise dadurch dargestellt, dass man die neun Substitutionscoefficienten $a_{11} \dots a_{33}$, als Functionen der X_i betrachtet, gleich Null setzt. Fügt man noch die zwar mit einem reellen Polarsystem, aber nicht mit reellen Punkten begabte Fläche $a_{00} = 0$ hinzu,

die unsere sämtlichen sechs Tetraeder zu Poltetraedern hat, so hat man damit die aus der Liniengeometrie bekannten 10 *Fundamentalflächen*. Wir gehen auf die Eigenschaften auch dieser Figur (die übrigens aus den aufgestellten Formeln sehr leicht abgelesen werden können) nicht näher ein, und bemerken nur noch, dass innerhalb des ganzen Systems die Fläche $a_{00} = 0$ nur durch ihre Realitätseigenschaft ausgezeichnet ist, dass also von einem gewissen Standpunkte aus alle zehn Flächen als gleichberechtigt erscheinen¹⁾.

§ 9.

Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum.

Betrachten wir nunmehr die zu Anfang des § 8 erwähnte Abbildung der sphärischen Dreiecke auf die Punkte $X_0 : X_1 : X_2 : X_3$ des dreifach ausgedehnten Raumes genauer, so bemerken wir, dass zwar jedem reellen sphärischen Dreieck ein reeller Raumpunkt, keineswegs aber umgekehrt einem reellen Punkt immer ein sphärisches Dreieck mit reellen Seiten und Winkeln entspricht. Wir wollen versuchen, von den Realitätsverhältnissen unserer Abbildung eine Anschauung zu gewinnen. Offenbar sind vier Fälle zu unterscheiden, die wir aufzählen und einzeln behandeln müssen.

$$\text{I. } Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 > 0, \quad Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 > 0.$$

(*Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln*).

Ist ein System der Grössen X_i gegeben, das den Bedingungen I genügt, so kann man daraus immer ein anderes von derselben Eigenschaft ableiten, bei dem sämtliche Grössen Y_i und sämtliche Grössen Z_i einzeln positiv sind. Wenn nämlich unter den Grössen Y_i negative vorkommen, so ertheile man diesen das entgegengesetzte Vorzeichen. Hierdurch wird das Bestehen der beiden Ungleichungen

1) Den Leser, der sich über die hier nur flüchtig berührten Gegenstände genauer zu unterrichten wünscht, verweisen wir auf die in den *Math. Annalen* erschienen Originalarbeiten der Herren F. KLEIN und ROHN, wozu noch die erwähnte Literatur über desmische Tetraeder kommt. Vgl. ausserdem REICHARDT, *Acta Leopoldina*, Bd. 50 (1887), S. 377 u. ff., sowie eine Arbeit des Verfassers, *Sitzber. der K. Sächs. Ges. d. W.* 1892, S. 122 u. ff.

I nicht gestört, wie man aus den Formeln (2) des § 5 (S. 140) leicht entnehmen kann. (Vgl. auch § 11, S. 167, Nr. 1, 2.)

Jetzt aber sind die Grössen Z_i ebenfalls sämtlich positiv geworden. Denn es könnte, nach den letzten Ungleichungen, höchstens eine von ihnen negativ sein (nämlich, wenn etwa $Y_0 \cong Y_1$, $Y_0 \cong Y_2$, $Y_0 \cong Y_3$ angenommen wird, die Grösse Z_0), was wegen der zweiten Ungleichung I unmöglich ist.

Die Punkte des Raumes nun, deren Coordinaten den Bedingungen $Y_i > 0$, $Z_i > 0$ genügen, erfüllen das Innere des regulären Octaeders, dessen Begrenzungsflächen die Ebenen $Y_i = 0$, $Z_i = 0$ sind. Sie bilden eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Aus dieser entstehen sodann drei andere, die im Sinne der projectiven Geometrie ebenfalls als Octaeder zu bezeichnen sind, wenn wir die angegebenen Vorzeichenwechsel von Neuem vornehmen. So erkennen wir:

Die Punkte des Raumes, die bei unserer Abbildung den Dreiecken mit reellen Seiten und Winkeln entsprechen, erfüllen vier getrennte Gebiete, die nur in zwölf Punkten, nämlich in den Ecken der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe, zusammenhängen. Jedes dieser Gebiete besteht aus den Punkten im Inneren eines Octaeders, dessen acht Begrenzungsflächen Stücke des Y- und des Z-Tetraeders sind.

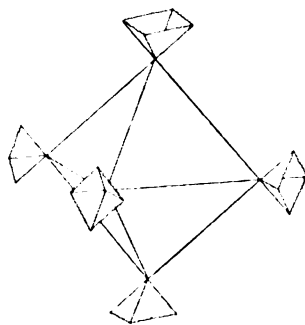


Fig. 10.

Bei unserer besonderen Annahme über die Lage der desmischen Tetraeder ist eines der genannten Octaeder regulär. Die drei anderen sind Doppelpyramiden, deren vier-eckige Basis der unendlich fernen Ebene angehört, und deren Scheitel je zwei gegenüberliegende Ecken des regulären Octaeders sind.

In den genannten zwölf Uebergangspunkten setzen sich die Flächen der dort zusammenstossenden Octaeder wie die beiden Mäntel eines Kegels in einander fort.

Fig. 10 verdeutlicht die gegenseitige Lage der vier Octaeder. Die an das reguläre Octaeder angesetzten Pyramidenstumpfe sind ins Unendliche erweitert zu denken; je zwei gegenüberliegende bilden zusammen eines der drei anderen Octaeder.

Bezeichnen wir die vier Octaeder mit [0], [1], [2], [3], so erkennen wir leicht, dass den Punkten im Inneren des Octaeders $[x]$

Dreiecksgestalten zugehören, denen nach der in § 2 des ersten Abschnittes eingeführten Bezeichnung der Index x zukommt. Welche der vier zu einem gegebenen Index gehörigen Dreiecksgestalten man vor sich hat, darüber entscheidet das Vorzeichen der Quadratwurzeln $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$ und $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ nach folgendem Gesetz:

Das Dreieck hat die Gestalt

$$\begin{aligned} (A_x A_x), & \text{ wenn } \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0, \quad \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} > 0, \\ (A_x A_x'), & \text{ wenn } \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0, \quad \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} < 0, \\ (A_x' A_x), & \text{ wenn } \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} < 0, \quad \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} > 0, \\ (A_x' A_x'), & \text{ wenn } \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} < 0, \quad \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} < 0. \end{aligned}$$

In der That, im Falle [0] ist $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$, also, nach Reduction der Seiten auf das Intervall zwischen 0 und 2π , $0 < a_i < \pi$ oder $\pi < a_i < 2\pi$, je nachdem $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0$ oder < 0 ist.

Im Falle [1] dagegen hat man $Z_0, Z_1 \cong 0$, $Z_2, Z_3 \leq 0$, also $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$; es wird daher

$0 < a_1 < \pi < a_2, a_3 < 2\pi$ oder $0 < a_2, a_3 < \pi < a_1 < 2\pi$, je nachdem $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0$ oder < 0 ist. Ebenso ergibt sich die entsprechende Behauptung für die Winkel.

$$\text{II. } Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 < 0, \quad Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 > 0.$$

(Dreiecke mit reellen Seiten und rein imaginären Winkeln¹⁾).

Eine leichte Discussion zeigt, dass durch die Ungleichungen II *sechzehn* getrennte Raumgebiete definirt sind, deren jedes die Gestalt eines *Tetraeders* hat. Jedes von ihnen legt sich mit einer seiner Seitenflächen an eines der unter I beschriebenen Octaeder an. Insgesamt überdecken sie auf diese Weise gerade die Hälfte der 32 Octaederflächen. Die 16 Tetraeder ordnen sich zu vierten in vier Gruppen, in deren jeder je zwei Tetraeder längs einer Kante (einem Kantenstück des *Z*-Tetraeders) zusammenhängen. Die einzelnen Gruppen entsprechen den Indices 0, 1, 2, 3. Innerhalb der ersten Gruppe

¹⁾ Wir sagen der Kürze halber, eine Winkelgrösse sei rein imaginär, wenn sie sich von einer im gewöhnlichen Sinne des Wortes rein imaginären Grösse nur um Vielfache von 2π unterscheidet.

z. B. besteht ein Tetraeder aus dem Stück des Z -Tetraeders, das von der Ebene $Y_0 = 0$ abgeschnitten wird:

$$Z_0 > 0, Z_i > 0, Y_0 < 0, Y_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die drei anderen legen sich an die drei freien Kanten; sie haben, bei unserer besonderen Annahme über die Lage der desmischen Tetraeder, je zwei Ecken im Unendlichen. (Vgl. die Fig. 11, in der jedoch das Y -Tetraeder mit dem Z -Tetraeder vertauscht ist.) — Nun haben wir in § 2 des ersten Abschnittes 32 Typen nicht konstruierbarer sphärischer Dreiecke mit reellen Seiten kennen gelernt, die sich in bestimmter Weise zu Paaren B_{ix} , B'_{ix} zusammenordnen lassen. Jetzt zeigt sich, dass diese sechzehn Paare unseren sechzehn Raumgebieten entsprechen, und dass die beiden Typen desselben Paares durch das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ getrennt werden.

Man erhält nämlich allgemein einen Typus B_{ix} , wenn man das positive Vorzeichen wählt, und den entsprechenden Typus B'_{ix} , wenn man zum negativen Vorzeichen übergeht.

Beschränken wir uns der Kürze halber auf die Annahme $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} > 0$, so ergibt sich die Zuordnung zwischen den 16 Tetraedern und den 16 Dreieckstypen B_{ix} wie folgt.

Es sei zuerst

$$\begin{cases} Z_0 > 0, Z_1 > 0, Z_2 > 0, Z_3 > 0, \\ Y_0 < 0, Y_1 > 0, Y_2 > 0, Y_3 > 0, \end{cases}$$

so ist $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$; es wird also, wegen des angenommenen positiven Vorzeichens der Quadratwurzel, $0 < a_i < \pi$ ($i = 1, 2, 3$); hält man nun die Formeln (7) des § 6 mit den Definitions-Ungleichungen der Typen B_{ix} (S. 96) zusammen, so sieht man, dass den Punkten im Inneren des gewählten Tetraeders Dreiecke vom Typus B_{00} entsprechen. Ebenso ergibt sich bei der Annahme

$$\begin{cases} Z_0 > 0, Z_1 > 0, Z_2 > 0, Z_3 > 0, \\ Y_0 > 0, Y_1 < 0, Y_2 > 0, Y_3 > 0 \end{cases}$$

der Typus B_{01} , u. s. f.

Sei ferner

$$\begin{cases} Z_0 > 0, Z_1 > 0, Z_2 < 0, Z_3 < 0, \\ Y_0 < 0, Y_1 > 0, Y_2 > 0, Y_3 > 0, \end{cases}$$

so wird $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$, und daher $0 < a_1 < \pi < a_2$,

$a_3 < 2\pi$. Es entstehen Dreiecke vom *Typus* B_{11} . Ebenso führt die Annahme

$$\begin{cases} Z_0 > 0, Z_1 > 0, Z_2 < 0, Z_3 < 0, \\ Y_0 > 0, Y_1 < 0, Y_2 > 0, Y_3 > 0 \end{cases}$$

auf den *Typus* B_{10} , und die Annahme

$$\begin{cases} Z_0 > 0, Z_1 > 0, Z_2 < 0, Z_3 < 0, \\ Y_0 > 0, Y_1 > 0, Y_2 \leq 0, Y_3 \leq 0, \end{cases}$$

je nach der Geltung der oberen oder unteren Zeichen, auf den *Typus* B_{13} oder den *Typus* B_{12} .

Aus den aufgezählten Fällen leitet man leicht alle übrigen ab. Z. B. dem Quadrupel von Tetraedern, das dem Index 0 zugeordnet ist (S. oben S. 160), entsprechen die Dreieckstypen B_{00} , B_{11} , B_{22} , B_{33} .

$$\text{III. } Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 > 0, \quad Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 < 0.$$

(*Dreiecke mit reellen Winkeln und rein imaginären Seiten*).

Dieser Fall bietet, für sich allein betrachtet, dem vorigen gegenüber nichts Neues dar. Auf ihn bezieht sich die *Figur 44*, die durch stark ausgezogene Linien die beiden Tetraeder

$$\begin{cases} Y_0 > 0, Y_1 > 0, Y_2 \leq 0, Y_3 \leq 0, \\ Z_0 < 0, Z_1 > 0, Z_2 > 0, Z_3 > 0 \end{cases}$$

zur Anschauung bringt.

Die sechzehn durch die Ungleichungen III definierten Tetraeder hängen mit den unter II betrachteten nur in Linien und Punkten zusammen. Beide zusammen überdecken die Flächen der vier Octaeder I vollständig.

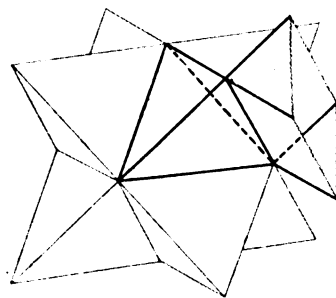


Fig. 44.

$$\text{IV. } Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 < 0, \quad Z_0 Z_1 Z_2 Z_3 < 0.$$

(*Dreiecke mit rein imaginären Seiten und Winkeln*).

Die Ungleichungen IV definieren ebenfalls sechzehn Raumgebiete, *Doppelpyramiden mit dreieckiger Basis*. Die Basislinien bestehen in jedem Falle aus Kanten von drei verschiedenen der unter I beschriebenen Octaeder; durch je drei in einem Punkte zusammenstossende Kantenstücke des Y- und Z-Tetraeders werden sie zu den

Doppelpyramiden ergänzt. Die Fig. 12 veranschaulicht zwei dieser Doppelpyramiden, die durch die Ungleichungen

$$\begin{cases} Y_0 > 0, & Y_1 < 0, & Y_2 > 0, & Y_3 > 0, \\ Z_0 < 0, & Z_1 > 0, & Z_2 > 0, & Z_3 > 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} Y_0 \cong 0, & Y_1 \cong 0, & Y_2 \cong 0, & Y_3 \cong 0, \\ Z_0 \cong 0, & Z_1 \cong 0, & Z_2 \cong 0, & Z_3 \cong 0 \end{cases}$$

definiert sind. Bei der ersten liegt eine Ecke der Basis, bei der zweiten das ganze Basisdreieck im Unendlichen.

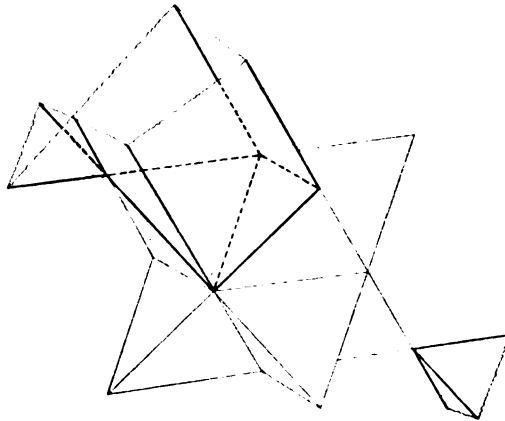


Fig. 12.

Die Dreiecke mit reellen Cosinus, aber rein imaginären Sinus der Seiten und Winkel, zu denen wir hier gelangt sind, sind bis jetzt kaum jemals betrachtet worden. Es war bisher wohl noch kein Problem der konstruierenden Geometrie auf der Kugelfläche bekannt, das zu ihrer Einführung genöthigt hätte. — Später (in § 13) werden wir eine Construction der *ebenen* Geometrie kennen lernen, die gerade zu diesen Dreiecken in einer einfachen Beziehung steht, und sie gewissermassen zu realisiren erlaubt.

§ 10.

Fortsetzung: Die Abbildung der Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln.

Wir wollen jetzt die Ueberlegungen des vorigen Paragraphen, soweit sie sich auf sphärische Dreiecke mit *reellen* Seiten und Winkeln beziehen, noch etwas weiter ausdehnen, um so eine deutliche Vor-

stellung vom Zusammenhang der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu gewinnen, die von diesen Dreiecken gebildet wird. — Zunächst mögen wir eine Thatsache hervorheben, die bereits durch die in § 9 angestellte Betrachtung begründet ist:

Den in § 3 des ersten Abschnittes beschriebenen Grenzdreiecken entsprechen die Grenzflächen der vier Octaeder; und zwar entsprechen den Dreiecken, deren Ecken in einem grössten Kreise liegen, Punkte auf den Flächen des Y-Tetraeders, und den Dreiecken, deren Seiten dasselbe Paar von Gegenpunkten der Kugel enthalten, Punkte auf den Flächen des Z-Tetraeders.

Betrachten wir jetzt einen Punkt im Inneren eines der vier Octaeder und die entsprechenden vier Werthepaare der Quadratwurzeln $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$ und $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$. Dann können wir uns, um die Zuordnung zwischen diesen Werthsystemen und den verschiedenen Arten sphärischer Dreiecke anschaulich zu machen, einer Vorstellungsweise bedienen, ganz ähnlich der, die von RIEMANN in die Functionenlehre eingeführt worden ist: Wir denken uns das einzelne Raumgebiet mit vier »Blättern« oder »Zweigen« überdeckt, indem wir jeden Punkt viermal zählen, und die einzelnen Blätter den vier Vorzeichenverbindungen obiger Wurzeln zuordnen. Aus den vier Octaedern entstehen so sechzehn verschiedene Raumgebiete; und diese entsprechen, nach der Untersuchung des § 9 (S. 159), den sechzehn in § 2 des ersten Abschnittes unterschiedenen Dreiecksgestalten. Wir können daher die einzelnen Blätter ebenfalls durch die Bezeichnungen

$$(A_x A_x), (A_x A_x'), (A_x' A_x), (A_x' A_x')$$

trennen. Nun erkennen wir: *Die Grenzflächen der vier Octaeder haben für unsere vierfache Raumüberdeckung die Bedeutung von Uebergangs- oder Verzweigungsflächen. In den dem Y-Tetraeder angehörigen Flächenstücken hängen nämlich zusammen die Blätter $(A_x A_x)$ und $(A_x A_x')$, $(A_x' A_x)$ und $(A_x' A_x')$, und in den Flächenstücken des Z-Tetraeders hängen zusammen die Blätter $(A_x A_x)$ und $(A_x' A_x)$, $(A_x A_x')$ und $(A_x' A_x')$. Der Index x entspricht hier der Bezeichnung $[x]$ des einzelnen Octaeders (S. 159 oben).*

Dieser Satz ist im Grunde nur eine neue Auffassung einer Thatsache, die wir bereits in § 3 des ersten Abschnittes festgestellt hatten. Ferner sehen wir: *Längs der Octaederkanten hängen alle vier Blätter*

zusammen. — Einem Raumpunkt, der einer dieser Octaederkanten angehört, entspricht ein Dreieck, dessen Seiten und Winkel ganzzahlige Vielfache von π sind. Solche Dreiecke enthalten keinen kontinuierlich-veränderlichen Parameter mehr, während der Punkt auf der Octaederkante thatsächlich noch von einem solchen Parameter abhängig ist. *Die Punkte der Octaederkanten sind also singuläre Punkte unserer Abbildung, in dem Sinne, dass jedem zugehörigen Dreieck ∞^1 Raumpunkte, und also auch ∞^1 orthogonale Substitutionen entsprechen.* Man kann diese Bemerkung natürlich leicht bestätigen mit Hilfe der Formeln der §§ 4—6.

Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen die zwölf Punkte, in denen die vier Octaeder zusammenhängen.

Die Ecken der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe sind singuläre Punkte der Abbildung in dem Sinne, dass jedem von ihnen (oder auch der zugehörigen orthogonalen Substitution) ∞^2 verschiedene Dreiecke entsprechen. Diese Dreiecke sind identisch mit den in § 3 des ersten Abschnittes besprochenen Uebergangsdreiecken.

Die folgende Tafel, in der wir der Kürze halber nur vier Fälle aufgezählt haben, zeigt, wie die 12 Punkte den in I, § 3 (S. 99) angegebenen Dreiecksarten zugeordnet sind:

X_0	X_1	X_2	X_3	a_1	α_1
1	1	0	0	0	π
1	-1	0	0	π	0
0	0	1	1	π	π
0	0	1	-1	0	0

(mod. 2π).

Der letzte Satz findet eine wesentliche Ergänzung in der folgenden Bemerkung, die man durch eine kurze Rechnung bestätigt:

Jeder Fortschreitungsrichtung durch einen der genannten zwölf Punkte, die innerhalb eines der angrenzenden Octaederräume verläuft, entspricht eines der ∞^2 Uebergangsdreiecke, die zu dem Punkte gehören.

Einer der zwölf Uebergangspunkte entspricht also erst zusammen mit einer bestimmten Annäherungsrichtung einem »Punkt« oder einer »Stelle« unserer Dreiecksmannigfaltigkeit; der Uebergangspunkt vertritt für die Blätter der Raumüberdeckung, die in den beiden dort aneinandergehefteten Octaedern [i] und [k] verlaufen, gewissermaassen

die Rolle einer *Trennungsfläche*. Tritt man in bestimmter Richtung in den genannten Punkt ein, und auf der anderen Seite in derselben Richtung aus, so setzt sich jedes der Blätter des Octaeders [*i*] in ein ganz bestimmtes Blatt des Octaeders [*k*] fort, entsprechend dem, was wir in § 3 des ersten Abschnittes gesehen haben (S. 100), und zwar ist die Art und Weise der Fortsetzung für je zwei gegenüberliegende Octaederecken dieselbe. Ausgenommen jedoch sind die Fortschreitungsrichtungen, die in die Flächen und Kanten des *Y*- und des *Z*-Tetraeders fallen; diese Mannigfaltigkeiten bilden den »Durchschnitt« der Mannigfaltigkeit der Grenzdreiecke mit der Mannigfaltigkeit der Uebergangsdreiecke; sie vertreten die Stelle von *Grenzcurven* und *Grenzpunkten*. In ihnen hängen zweimal zwei, beziehungsweise alle vier Blätter der Raumüberdeckung zusammen. —

Bei dieser ganzen Betrachtung gelten Dreiecke als äquivalent, deren Seiten und Winkel sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden. Die Trennung der eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke spielt daher hier noch keine Rolle. Beschränken wir uns jetzt auf die Betrachtung *eigentlicher* Dreiecke, so können wir versuchen, die Irrationalität $R = \sqrt{\frac{a_{11}}{2} \cdot \frac{a_{22}}{2} \cdot \frac{a_{33}}{2}}$ in einer ähnlichen Weise geometrisch darzustellen, wie wir eben die Irrationalitäten $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$ und $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ dargestellt haben. Dies hat keinerlei Schwierigkeit. Man verfährt am einfachsten so, dass man jedes der vier Blätter unserer mehrfach überdeckten Raumgebiete selbst wieder doppelt nimmt, so dass der Raum im Inneren der vier Octaeder nunmehr im Ganzen *achtmal* überdeckt wird. Das eine Blatt ordne man den positiven, das andere den negativen Werthen von *R* zu. Man sieht dann sofort: *Verzweigungsstellen der Irrationalität R, also Stellen, an denen je zwei zusammengehörige Blätter in einander übergehen, sind die zwölf Ecken der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe* — also, nach Obigem, zwölf von einander völlig getrennte *zweifach* ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. (Vgl. I, § 6, S. 109 u. ff.)

Man kann endlich noch einen Schritt weitergehen, und bei stetiger Aenderung der Lage unseres Raumpunktes stetige Aenderung des zugehörigen Dreiecks verlangen. Wie das Dreieck sich ändert, wenn der Raumpunkt sich auf einer vorgeschriebenen Curve (innerhalb der vier Octaedergebiete) bewegt, und schliesslich in seine

anfängliche Lage zurückkehrt, kann man dann durch ein Verfahren erkennen, das der Methode nachgebildet ist, die beim Studium der Integrale auf einer RIEMANN'SCHEN Fläche angewendet wird. Es besteht in der sogenannten *Zerschneidung* unserer mehrfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit und in ihrer Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Die Dreiecke, die zusammengehörigen Randpunkten der zerschnittenen Mannigfaltigkeit entsprechen, gehen dann durch Substitutionen der Gruppe \mathfrak{K} in einander über. Wir begnügen uns mit dieser Andeutung, da der Gegenstand keine principiellen Schwierigkeiten bietet, die Ausführung im Einzelnen aber ziemlich umständlich ausfällt. —

Die mitgetheilten Betrachtungen werden eine hinreichend deutliche Vorstellung davon geben, wie die Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln vermöge der Parameter X, Y, Z auf die Punkte eines dreifach ausgedehnten Raumes bezogen werden. Wir mögen nur noch eine Bemerkung ausdrücklich hervorheben, die sich auf die singulären Punkte der Abbildung bezieht: *Die Punkte der sechzehn Octaederkanten sind die einzigen singulären Stellen bei unserer Abbildung der Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln.* Man bestätigt dies sofort durch Betrachtung der Formeln des § 6. Der einem gegebenen Dreieck zugeordnete Raumpunkt kann, ebenso wie die zugehörige orthogonale Substitution, nur dann unbestimmt werden, wenn sowohl die Verhältnisse der Grössen $\sin s_i$, als auch die Verhältnisse der Grössen $\sin \sigma_i$ unbestimmte Werthe haben. Hieraus folgt $a_x, \alpha_x \equiv 0 \pmod{\pi}$; man gelangt daher zu den Punkten der Octaederkanten. Umgekehrt kann einem gegebenen Raumpunkt oder einer gegebenen orthogonalen Substitution nur dann ein unbestimmtes Dreieck entsprechen, wenn eine der Grössen a_{11}, a_{22}, a_{33} den Werth Null hat. Dies tritt aber nur ein für die Schnittpunkte jener Kanten, nämlich für die Eckpunkte der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe. — Umständlicher gestaltet sich die Untersuchung der singulären Elemente unserer Abbildung, wenn man auch die ausserhalb der vier Octaeder liegenden reellen Raumpunkte, und weiterhin Raumpunkte mit complexen Coordinaten in Betracht zieht. Dieser Gegenstand wird besonders dadurch verwickelt, dass die Seiten und Winkel imaginärer sphärischer Dreiecke unter Umständen keine bestimmte Länge haben.

§ 11.

Die Gruppen G_{16} , G_{96} , G_{192} , G_{576} .

Welch inniger Zusammenhang zwischen der sphärischen Trigonometrie und den desmischen Tetraedern und KUMMER'schen Configurationen besteht, wird noch deutlicher werden, wenn wir uns nunmehr die Frage vorlegen, wie sich die Parameter X_i bei den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G} und der aus ihr durch Erweiterung entsprungenen Gruppen verhalten, die wir im ersten Abschnitt (§ 7) durch elementar-geometrische Betrachtungen gewonnen haben.

Die Verhältnisse der Parameter X_i ändern sich nicht bei den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{K} , und ebensowenig bei denen der Gruppe \mathfrak{H}_4 . (Vgl. I, §§ 4...7.) Bei den Substitutionen der Gruppe \mathfrak{G}_{16} aber werden sie durch eine mit \mathfrak{G}_{16} holoedrisch-isomorphe Gruppe von *linearen* Transformationen unter einander vertauscht. Wir geben der grösseren Bequemlichkeit halber nicht allein die Aenderungen der Verhältnissgrössen X_i an, die den erzeugenden Substitutionen S_x , Σ_x von \mathfrak{G}_{16} entsprechen, sondern auch noch die daraus herzuleitenden Transformationen der Verhältnissgrössen Y_i und Z_i .

(1)

	X'_0	X'_1	X'_2	X'_3	Y'_0	Y'_1	Y'_2	Y'_3	Z'_0	Z'_1	Z'_2	Z'_3
S_0	X_0	X_1	X_2	X_3	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	X_1	X_0	X_3	X_2	Y_0	$Y_1 - Y_2 - Y_3$	$-Z_1 - Z_0$	Z_3	Z_2	$Z_1 - Z_0$	Z_3	Z_2
S_2	X_2	X_3	X_0	X_1	$Y_0 - Y_1$	$Y_2 - Y_3$	$-Z_2$	Z_3	$Z_0 - Z_1$	Z_3	$Z_2 - Z_1$	Z_0
S_3	X_3	X_2	X_1	X_0	$Y_0 - Y_1 - Y_2$	Y_3	$-Z_3$	Z_2	$Z_1 - Z_0$	Z_2	$Z_1 - Z_0$	Z_3

(2)

	X'_0	X'_1	X'_2	X'_3	Y'_0	Y'_1	Y'_2	Y'_3	Z'_0	Z'_1	Z'_2	Z'_3
Σ'_0	X_0	X_1	X_2	X_3	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3
Σ'_1	$-X_1$	$-X_0$	X_3	X_2	$-Y_1 - Y_0$	Y_3	Y_2	Z_0	Z_1	$-Z_2 - Z_3$	$-Z_2$	$-Z_3$
Σ'_2	$-X_2$	X_3	$-X_0$	X_1	$-Y_2$	$Y_3 - Y_0$	Y_1	Z_0	$-Z_1$	Z_2	$-Z_3$	$-Z_3$
Σ'_3	$-X_3$	X_2	X_1	$-X_0$	$-Y_3$	Y_2	$Y_1 - Y_0$	Z_0	$-Z_1$	$-Z_2$	Z_3	Z_3

Man erkennt unmittelbar die Identität der von den collinearen Transformationen (1) und (2) erzeugten Gruppe mit der in § 8 (S. 155, 156) besprochenen Gruppe G_{16} . Wir können daher einen Theil der bis jetzt gewonnenen Ergebnisse folgendermassen zusammenfassen:

Sieht man ein sphärisches Dreieck als bestimmt an, wenn die Cosinus seiner Seiten und Winkel gegeben sind, so kann man die Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke durch eine im Allgemeinen eindeutig-umkehrbare Zuordnung derart auf die Punkte eines ebenen dreifach-ausgedehnten Raumes abbilden, dass den sechzehn zu demselben Dreikant oder Dreiflach gehörigen Nachbardreiecken die Punkte einer Kummer'schen Configuration entsprechen, und dass ferner den ∞^3 verschiedenen Dreikanten durch diese Abbildung die ∞^3 Kummer'schen Configurationen mit derselben Gruppe zugeordnet werden.

Die Punkte der KUMMER'schen Configurationen vertheilen sich auf die in § 9 definirten Raumgebiete in der Weise, dass im Falle I jedes der vier Octaeder vier Punkte derselben Configuration enthält, in den Fällen II, III, IV aber in jedes der dann vorhandenen 16 Raumgebiete ein einzelner Punkt einer zugehörigen KUMMER'schen Configuration zu liegen kommt.

Ferner lehren die Formeln (1) und (2): *Der Zerlegung der Gruppe \mathfrak{G}_{16} in die von den Substitutionen S , bez. Σ erzeugten Untergruppen entspricht die Zerlegung der Gruppe G_{16} in die Spiegelungen an den Kantenpaaren des Y- und des Z-Tetraeders¹⁾. — Auch die Gruppe der Spiegelungen an den Kantenpaaren des X-Tetraeders hat eine einfache Bedeutung für die sphärische Trigonometrie: Sie entspricht der in § 4 des ersten Abschnittes (Nr. 9, S. 104) gelegentlich betrachteten Gruppe der vier Substitutionen S_i, Σ_i . —*

1) In der erwähnten Untersuchung des Verfassers über die Gruppe G_{16} (Sitzber. der K. Sächs. Ges. d. W., 1892, S. 122) ist ein anderes System von erzeugenden Operationen in den Mittelpunkt gestellt, das der Zerlegung von G_{16} in sogenannte *Schiebungen* der Fundamentalfäche $a_{00} = 0$ entspricht. Die dort gebrauchten Bezeichnungen hängen mit den hier verwendeten so zusammen: Es ist

$$\begin{aligned} (35) &= S_3 \Sigma_2, & (51) &= S_1 \Sigma_3, & (13) &= S_2 \Sigma_1, \\ (46) &= S_2 \Sigma_3, & (62) &= S_3 \Sigma_1, & (24) &= S_1 \Sigma_2, \end{aligned}$$

also umgekehrt:

$$\begin{aligned} S_1 &= (45), & S_2 &= (61), & S_3 &= (23), \\ \Sigma_1 &= (36), & \Sigma_2 &= (52), & \Sigma_3 &= (14). \end{aligned}$$

Von der Gruppe \mathfrak{G}_{16} kann man in verschiedenen Richtungen zu umfassenderen Gruppen aufsteigen — einmal zu den mehrfach besprochenen Gruppen \mathfrak{G}_{64} , \mathfrak{G}_{128} — dann durch die in § 7 des ersten Abschnittes vorgenommenen Erweiterungen zu den Gruppen \mathfrak{G}_{96} und \mathfrak{G}_{192} . Die zuerst genannten Gruppen lassen sich leicht geometrisch auffassen mit Hülfe der in § 10 behandelten vierfachen und achtfachen Raumüberdeckung. Wir brauchen hierauf nicht näher einzugehen. Dagegen wollen wir die Vertauschungen der Parameter X_i kurz betrachten, die den Substitutionen von \mathfrak{G}_{96} und \mathfrak{G}_{192} entsprechen. Man wird nämlich auch in diesen Fällen wieder auf *collineare* Transformationen des Raumes geführt: Die den Gruppen \mathfrak{G}_{96} und \mathfrak{G}_{192} zugeordneten Transformationsgruppen des Raumes sind keine anderen, als die Gruppen G_{96} und G_{192} , die wir in § 8 (S. 155) kennen gelernt haben. Betrachten wir also congruente Dreikante oder Dreifläche als nicht wesentlich verschieden, so können wir sagen: *Man kann die Mannigfaltigkeit der ∞^3 wesentlich verschiedenen Dreikante oder Dreifläche (mit gegebenem Mittelpunkt im Endlichen) derart auf den ebenen Raum von drei Dimensionen abbilden, dass einem Raumpunkt ein im Allgemeinen völlig bestimmtes Dreikant oder Dreiflach entspricht, umgekehrt aber einem gegebenen Dreikant oder Dreiflach 96 solche Raumpunkte zugewiesen werden, deren Inbegriff von der mit den desmischen Tetraedern verknüpften Gruppe G_{96} in sich selbst übergeführt wird.*

Die Dreikante sind paarweise als Polarfiguren zusammengeordnet. Die zu einem solchen Paar gehörigen Figuren von je 96 Raumpunkten entsprechen einander wechselweise in den involutorischen collinearen Transformationen (Spiegelungen), die durch je einen Eckpunkt des X -Tetraeders und die gegenüberliegende Fläche bestimmt sind. Insbesondere folgt: *Die Punkte auf den Flächen des X -Tetraeders entsprechen den Dreikanten, die zu sich selbst polar sind, oder den sphärischen Dreiecken, bei denen die Sinus der Seiten numerisch gleich sind den Sinus der gegenüberliegenden Winkel.* Den Ecken des X -Tetraeders entsprechen die Dreiecke mit drei (mod. π) rechten Seiten und Winkeln. —

Die Gruppen G_{96} und G_{192} enthalten die Gruppe G_{16} als invariante Untergruppe, wie wir in § 8 gesehen haben. Nehmen wir jetzt an, dass wir irgend eine Gruppe collinearere Transformationen kennen,

die die Gruppe G_{16} ebenfalls als invariante Untergruppe enthält, ihrerseits aber weder in der Gruppe G_{96} noch auch in der Gruppe G_{192} enthalten ist, so werden wir zu einem eigenthümlichen Zusammenhang zwischen mehreren verschiedenen Dreikanten geführt, den man füglich als *Verwandtschaft* bezeichnen kann. Dreikante würden also in diesem Sinne »verwandt« dann zu nennen sein, wenn die entsprechenden Raumpunkte einander durch eine Transformation der gerade betrachteten Gruppe zugeordnet werden, die nicht schon zu den bereits von uns behandelten Transformationen gehört. Wir wollen diesen Gedanken durch ein besonders merkwürdiges Beispiel erläutern, indem wir die § 8 eingeführte Gruppe G_{576} ins Auge fassen.

Diese definiert offenbar eine *Tripelverwandtschaft* zwischen Paaren zu einander polarer Dreikante, indem sie drei Gruppen von je 192 vermöge der Gruppe G_{192} zusammengehörigen Punkten zu einer höheren Einheit von 576 Punkten verschmilzt. Aber die so bestimmte Zuordnung lässt sich von den Dreikanten auf die Dreiecke selbst übertragen. Wir mögen nämlich bemerken, dass die Gruppe G_{576} eine Untergruppe enthält, die aus der identischen Transformation und den folgenden beiden (einander entgegengesetzten) Transformationen besteht:

$$(3) \quad \begin{cases} 2X_0' = -X_0 - X_1 - X_2 - X_3, & 2X_0'' = -X_0 + X_1 + X_2 + X_3, \\ 2X_1' = X_0 + X_1 - X_2 - X_3, & 2X_1'' = -X_0 + X_1 - X_2 - X_3, \\ 2X_2' = X_0 - X_1 + X_2 - X_3, & 2X_2'' = -X_0 - X_1 + X_2 + X_3, \\ 2X_3' = X_0 - X_1 - X_2 + X_3, & 2X_3'' = -X_0 - X_1 - X_2 + X_3. \end{cases}$$

Das System der Substitutionscoefficienten a_{ix} geht bei diesen Transformationen über in zwei neue Systeme a'_{ix} und a''_{ix} , die aus denselben Grössen in anderer Anordnung bestehen:

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{00}, & a_{33} & a_{31} & a_{32}; & a_{00}, & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \end{array}$$

(Vgl. den Schluss von § 5.) Das Theorem des § 6 (Formel 4, S. 143) führt jetzt zu dem Satz:

Ein durch die Cosinus seiner Seiten und Winkel gegebenes sphärisches Dreieck bestimmt noch zwei weitere Dreiecke, deren Seiten und Winkel mit denen des ersten durch die Formeln zusammenhängen:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos a_i' = \frac{\cos \alpha_i}{\cos a_i} = \frac{1}{\cos \alpha_i''}, \\ \cos a_i'' = \frac{\cos \alpha_i'}{\cos a_i'} = \frac{1}{\cos \alpha_i}, \\ \cos a_i = \frac{\cos \alpha_i''}{\cos a_i''} = \frac{1}{\cos \alpha_i'} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_i' = \frac{1}{\cos a_i} = \frac{\cos a_i''}{\cos \alpha_i''}, \\ \cos \alpha_i'' = \frac{1}{\cos a_i'} = \frac{\cos a_i}{\cos \alpha_i}, \\ \cos \alpha_i = \frac{1}{\cos a_i''} = \frac{\cos a_i'}{\cos \alpha_i'}. \end{array} \right.$$

Von drei auf diese Art verbundenen Dreiecken mit reellen Cosinus hat immer eines reelle und ein zweites rein imaginäre Seiten und Winkel, während das dritte entweder reelle Seiten und rein imaginäre Winkel oder reelle Winkel und rein imaginäre Seiten hat.

Setzt man etwa die zuletzt angegebenen Werthe der Grössen $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$ in die Formeln des Cosinussatzes ein, so geht die erste Gruppe von drei Formeln (Nr. 4, § 4, S. 124) in die zweite (Nr. 6) über, aus dieser aber geht eine neue Formelgruppe hervor:

$$(6) \quad \begin{aligned} & (\cos a_2 \cdot \cos a_3 \cdot \cos \alpha_1 - \cos a_2 \cdot \cos a_3 \cdot \cos a_1)^2 \\ & = (\cos^2 a_2 - \cos^2 \alpha_2)(\cos^2 a_3 - \cos^2 \alpha_3), \quad \text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

die man natürlich auch auf anderem Wege begründen kann. —

Man kann leicht alle collinearen Transformationen finden, die die Gruppe G_{16} in sich selbst überführen. Sie bilden die bekannte Gruppe von 11520 Transformationen, die die 10 Fundamentalflächen $a_{ix} = 0$ (§ 8, S. 157) unter einander vertauscht. Jede hierin enthaltene Untergruppe, die ihrerseits die Gruppe G_{16} enthält, führt zu einem dem letzten Satze ähnlichen Theorem. Zu einem einfachen Ergebniss kommt man noch, wenn man die Untergruppe von 1152 Transformationen in Betracht zieht, die die Fläche $a_{00} = 0$ in Ruhe lässt, d. i. die Gruppe von collinearen Transformationen, die die sechs Tetraeder beider Reihen in allgemeinsten Weise vertauscht. Die in dieser Gruppe enthaltenen involutorischen Transformationen führen zu involutorischen Zuordnungen sphärischer Dreiecke.

§ 12.

Die Halbmesser der Eckenkreise und der Berührungskreise des Dreiecks.

Man kann die Verhältnisse der von uns eingeführten Grössen Y_i und Z_i in einer sehr einfachen Weise an der Kugel selbst geometrisch deuten, wenn man die sphärischen Halbmesser der vier Berührungskreise des Dreiecks und die dazu dualistischen Grössen berechnet.

Wir bezeichnen mit ϱ_0 die *Cotangente* des sphärischen Halbmessers des Kreises¹⁾, der die Seiten des Dreiecks gleichartig berührt, nämlich so, dass die positiven Richtungen der Seiten, in den Berührungspunkten auf den Kreis übertragen, alle drei den gleichen Drehungssinn ergeben; und entsprechend nennen wir ϱ_1 die Cotangente vom sphärischen Halbmesser des Kreises, der die Seiten a_2 und a_3 gleichartig und die Seite a_1 ungleichartig berührt, u. s. f. Ferner nennen wir r_0, r_1, r_2, r_3 die zu den Grössen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ dualistischen Grössen, also die Cotangenten der sphärischen Halbmesser der Berührungskreise des Polardreiecks. Dann ist r_0 die goniometrische *Tangente* des sphärischen Halbmessers des Kreises, der durch die drei Ecken des gegebenen Dreiecks geht, r_1 die entsprechende Grösse für den Kreis, der durch die Ecken 2 und 3 und durch den Gegenpunkt der Ecke 1 hindurchläuft, u. s. w.

Um etwa r_0 zu berechnen, nennen wir ω_i den Innenwinkel an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks, das durch die Seite a_i und einen der beiden Mittelpunkte des Eckenkreises bestimmt wird. Dann ist

$$\begin{aligned}\omega_2 + \omega_3 &\equiv \pi \mp \alpha_1 \\ \omega_3 + \omega_1 &\equiv \pi \mp \alpha_2 \quad (\text{mod. } 2\pi), \\ \omega_1 + \omega_2 &\equiv \pi \mp \alpha_3\end{aligned}$$

also
$$\omega_1 \equiv \frac{\pi}{2} \mp \sigma_1 \quad (\text{mod. } \pi),$$

folglich $\frac{1}{r_0} = \text{ctg } \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \omega_1 = \pm l_1 \sin \sigma_1$. Die Radien der drei anderen Eckenkreise ergeben sich hieraus durch die in § 4 des

1) Genauer: eines der beiden Kreise, die die im Texte genannte Eigenschaft haben, und durch die Spiegelung am Mittelpunkt der Kugel in einander übergehen.

ersten Abschnittes definirten Substitutionen S_i, Σ_i . Es bestehen also die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \pm \frac{1}{r_0} = l_1 \sin \sigma_1 = l_2 \sin \sigma_2 = l_3 \sin \sigma_3, \\ \pm \frac{1}{r_1} = l_1 \sin \sigma_0 = \frac{1}{l_2} \sin \sigma_3 = \frac{1}{l_3} \sin \sigma_2, \\ \pm \frac{1}{r_2} = \frac{1}{l_1} \sin \sigma_3 = l_2 \sin \sigma_0 = \frac{1}{l_3} \sin \sigma_1, \\ \pm \frac{1}{r_3} = \frac{1}{l_1} \sin \sigma_2 = \frac{1}{l_2} \sin \sigma_1 = l_3 \sin \sigma_0, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \pm r_i = \frac{2 \sin \sigma_i}{II} = \frac{R \cdot Z_i}{2 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}, \\ \pm \varrho_i = \frac{2 \sin s_i}{P} = \frac{R \cdot Y_i}{2 \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}, \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Lässt man nur die *oberen* (oder nur die *unteren*) Vorzeichen gelten, so kann man offenbar in allen Formeln des § 6 die Grössen Z_i durch die Grössen r_i und die Grössen Y_i durch die Grössen ϱ_i ersetzen. Zwischen den Grössen r_i, ϱ_i besteht dann dieselbe Abhängigkeit, d. h. es ist

$$(3) \quad \begin{cases} 2r_0 = -\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3, & 2\varrho_0 = -r_0 + r_1 + r_2 + r_3, \\ 2r_1 = \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3, & 2\varrho_1 = r_0 - r_1 + r_2 + r_3, \\ 2r_2 = \varrho_0 + \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3, & 2\varrho_2 = r_0 + r_1 - r_2 + r_3, \\ 2r_3 = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3, & 2\varrho_3 = r_0 + r_1 + r_2 - r_3. \end{cases}$$

In diesen linearen und homogenen Gleichungen haben wir vier von den fünf unabhängigen Relationen, die zwischen den acht Grössen r_i, ϱ_i stattfinden müssen. Die letzte, die weder linear noch homogen ist, ergibt sich aus der Bemerkung, dass der in den Formeln (2) zu den Grössen Z_i, Y_i hinzutretende Factor gleich Eins werden muss, wenn man Z_i durch r_i und Y_i durch ϱ_i ersetzt. Sie lautet also

$$(4) \quad \begin{cases} (r_0 r_1 + r_2 r_3)(r_0 r_2 + r_3 r_1)(r_0 r_3 + r_1 r_2) \\ \quad = 4 r_0 r_1 r_2 r_3 \cdot \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \\ \quad = (\varrho_0 \varrho_1 + \varrho_2 \varrho_3)(\varrho_0 \varrho_2 + \varrho_3 \varrho_1)(\varrho_0 \varrho_3 + \varrho_1 \varrho_2). \end{cases}$$

Die hiermit gelöste Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Halbmessern der umschriebenen und eingeschriebenen Kreise eines Dreiecks anzugeben, ist für den Fall eines *ebenen* Dreiecks schon lange erledigt (STEINER, Ges. Werke, Bd. I, S. 213). Wir werden später, in § 14, die von BOBILLIER und STEINER angegebenen Formeln durch einen Grenzübergang wiederfinden.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die durch die Gleichungen (1) vermittelte Beziehung zwischen den Grössen r_i und $\sin \sigma_i$ wechselseitig ist: Neben die Gleichungen (2), in die man für P und II die Werthe aus Nr. 5, § 1 (S. 125) eintragen mag, stellen sich als Auflösungen, bei Annahme der oberen (oder unteren) Vorzeichen, die ganz analogen Gleichungen

$$(5) \quad \sin \sigma_i = \frac{r_i}{\sqrt{r_0 r_1 r_2 r_3}}, \quad \sin \sigma_i = \frac{\varrho_i}{\sqrt{\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Bemerkenswerth sind auch die hieraus fließenden Ausdrücke für P^2 und II^2 :

$$(6) \quad P^2 = \frac{4}{\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}, \quad II^2 = \frac{4}{r_0 r_1 r_2 r_3}.$$

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch eine bekannte Umformung der Ausdrücke (2).

Es ist

$$\frac{2 \sin \sigma_0}{II} = \frac{2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \sigma_0}{\sin \alpha_1 \cdot P}, \quad \text{andererseits (s. S. 139)}$$

$$\sin \sigma_0 = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2}}{\cos \frac{\alpha_1}{2}}, \quad \text{also (bei eigentlichen Dreiecken und bei Annahme der oberen Vorzeichen in (1)):$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \cdot r_0 = 4 \sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3}{2}, \\ P \cdot r_1 = 4 \sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_3}{2}, \quad \text{u. s. f.} \end{array} \right.$$

§ 13.

Kreisvierecke in der Ebene.

Mehrere der von uns aufgestellten Formeln sind noch einer zweiten geometrischen Deutung fähig, die an planimetrische Constructionen anknüpft, und die wohl ebenfalls ein gewisses Interesse beanspruchen darf.

Wir nehmen zuerst an, dass die Seiten und Winkel des darzustellenden Dreiecks sämtlich zwischen den Grenzen 0 und π liegen, dass es also zum Typus $(A_0 A_0)$ gehört (I. Abschnitt, § 2).

Legen wir die Winkel $2s_i$, deren Summe 2π ist, in beliebiger Reihenfolge an einander, beschreiben wir um den gemeinsamen

Scheitel einen Kreis, und bringen wir diesen mit den vier Winkelschenkeln zum Durchschnitt, so entsteht ein Kreisviereck, dessen Seiten sich verhalten wie die Grössen Y_i , (§ 6, Formel 7, S. 144). Ebenso entsteht ein Kreisviereck, dessen Seiten den Grössen Z_i proportional sind, wenn wir die entsprechende Construction mit den Winkeln $2\sigma_i$ ausführen. Wir wollen nun die Halbmesser der benutzten Kreise insbesondere so wählen, dass zwischen den Seiten der beiden Kreisvierecke dieselben linearen Gleichungen bestehen, wie zwischen den Grössen Y_i , Z_i . Dann wird es, wo es nur auf die Verhältnisse der genannten Grössen ankommt, erlaubt sein, die Seiten der beiden Vierecke mit jenen Grössen selbst zu identificiren.

Die beiden so construirten Kreisvierecke nun geben uns ein treues Bild der Eigenschaften des sphärischen Dreiecks; sie erlauben nämlich, den wichtigsten unserer analytischen Ausdrücke eine einfache geometrische Deutung unterzulegen.

Zunächst finden wir in unseren Vierecken nicht nur die Winkel $2\sigma_i$, $2\sigma_i$, sondern auch die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks selbst unmittelbar vor. (S. Fig. 13.) Die Formeln (4) des

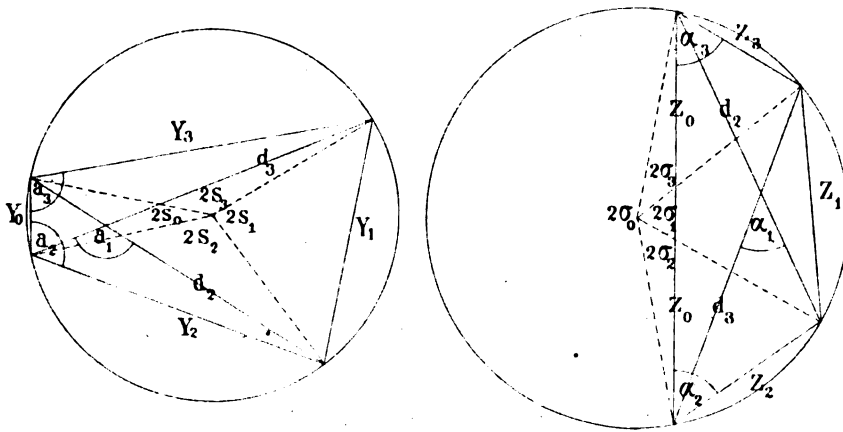


Fig. 13.

§ 6 reduciren sich daher jetzt auf einen bekannten Lehrsatz der Elementargeometrie:

$$(1) \quad \begin{cases} \cos a_1 = \frac{Y_0^2 + Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2}{2(Y_0 Y_1 + Y_2 Y_3)}, \\ \cos \alpha_1 = \frac{Z_0^2 + Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2}{2(Z_0 Z_1 + Z_2 Z_3)}. \end{cases}$$

Die Irrationalitäten $\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}$ und $\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}$ werden gleich den Flächeninhalten J_y und J_x der beiden Vierecke:

$$(2) \quad J_y = \sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}, \quad J_x = \sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} \text{ 1).}$$

Bezeichnet man ferner die Diagonalen des ersten Vierecks, deren es, bei verschiedener Anordnung der Seiten, offenbar drei verschiedene gibt, mit d_1, d_2, d_3 , wie in der Figur angedeutet, so hat man nach dem Ptolemäischen Lehrsatz z. B.

$$(3) \quad d_2 d_3 = Y_2 Y_3 + Y_0 Y_1 = \frac{a_{11}}{2}.$$

Dieselben Ausdrücke aber ergeben sich für die Producte der Diagonalen des zweiten Vierecks.

Die beiden zusammengehörigen Kreisvierecke haben also gleiche Diagonalen:

$$(4) \quad d_1 = \frac{2R}{a_{11}}, \quad d_2 = \frac{2R}{a_{22}}, \quad d_3 = \frac{2R}{a_{33}}.$$

Hierauf gründet sich eine elegante constructive Lösung der Aufgabe: Die Winkel eines Dreiecks zu finden, dessen Seiten gegeben sind (oder umgekehrt): Man construirt zuerst, in beliebigem Grössenverhältniss, das erste Viereck, hierauf mit Hilfe der bekannten Diagonalen und Seiten das zweite; aus diesem können die Winkel σ_i oder auch die gesuchten Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ selbst abgelesen werden. — Auch der Sinussatz reducirt sich auf einen elementaren Satz der Planimetrie:

$$(5) \quad \begin{cases} 2J_y = d_2 d_3 \sin a_1 = d_3 d_1 \sin a_2 = d_1 d_2 \sin a_3, \\ 2J_x = d_2 d_3 \sin \alpha_1 = d_3 d_1 \sin \alpha_2 = d_1 d_2 \sin \alpha_3, \end{cases}$$

$$(6) \quad P : H = J_y : J_x,$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 &= \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 \\ &= d_1 : d_2 : d_3. \end{aligned}$$

Ferner gelten, wenn wir mit r_y und r_x die Halbmesser der beiden Kreise bezeichnen, denen die Vierecke eingeschrieben sind, die bekannten Formeln

$$(8) \quad 4r_y \cdot J_y = 4r_x \cdot J_x = d_1 d_2 d_3 = R. \quad -$$

1) Wegen der benutzten elementargeometrischen Sätze vergleiche man etwa BALTZER, Elemente der Mathematik, Bd. II, Viertes Buch, § 14 (5. Auflage) oder SCHLÖMILCH, Geometrie des Maasses (Planimetrie Nr. 28) oder SERRET, Trigonométrie p. 122.

Diese Formeln beziehen sich zunächst auf die Annahme, dass das betrachtete sphärische Dreieck zum Typus $(A_0 A_0)$ gehört (s. oben), dass also die Grössen Y_i und Z_i sämmtlich positiv sind oder doch das gleiche Vorzeichen haben (§ 9, S. 159). Eine von MÖBIUS herührende Anschauungsweise setzt uns aber in den Stand, die Betrachtung auf die übrigen Fälle auszudehnen¹⁾.

Man denke sich auf dem Umfang eines Kreises vom Halbmesser r einen Punkt B immerfort in derselben Richtung bewegt, einen anderen Punkt A festgehalten. B möge im Anfang der Bewegung mit A zusammenfallen. Dann wird die Sehne AB vom Werthe Null an wachsen, dann wieder abnehmen, schliesslich nach dem ersten Umlauf des Punktes B von Neuem die Länge Null erreichen. Wir wollen nun bestimmen, dass die Länge der Sehne bei der weiteren Fortsetzung der Bewegung zu *negativen* Werthen übergehen soll, dann, nach dem zweiten Umlauf des Punktes B , wieder zu positiven u. s. f. Wir gelangen so zu der folgenden Regel: Der Sehne eines gegebenen Bogens ist das positive oder das negative Vorzeichen beizulegen, je nachdem der Bogen selbst positiv oder negativ ausfällt, wenn man ihn durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen des doppelten Kreisumfangs $4r\pi$ auf das Intervall von $-2r\pi$ bis $+2r\pi$ reducirt.

Wir wenden jetzt diese Bestimmung auf unser Kreisviereck an, indem wir das ursprünglich benutzte Dreieck etwa der Substitution S_1 unterwerfen:

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1, & a'_2 &= a_2 + \pi, & a'_3 &= a_3 + \pi, \\ \alpha'_1 &= 2\pi + \alpha_1, & \alpha'_2 &= -\alpha_2, & \alpha'_3 &= -\alpha_3. \end{aligned}$$

Die Grössen $2s_i$, $2\sigma_i$ nehmen hierbei die neuen Werthe an:
 $2s_0 - 2\pi$, $2s_1 + 2\pi$, $2s_2$, $2s_3$; $2\sigma_1$, $2\sigma_0 - 4\pi$, $2\sigma_3 + 2\pi$, $2\sigma_2 + 2\pi$.

Construiren wir nun die zugehörigen Kreisvierecke, so unterscheiden sich diese in ihrer Gestalt gar nicht von den zuvor gefundenen; aber die Ecken sind jetzt in anderer Weise durch Kreisbogen verbunden, nämlich so, wie es in Fig. 14 (S. 178) angedeutet ist; zugleich ist die Bezeichnung der Seiten im Viereck (Z) eine andere geworden. Wenden wir die MÖBIUS'sche Regel an, so finden wir, dass jetzt entweder den Seiten Y'_0 , Y'_1 , Z'_3 , Z'_2 oder den Seiten Y_2 , Y_3 , Z'_1 , Z'_0

1) MÖBIUS, Ges. Werke, Bd. I, S. 405 u. ff., insbesondere S. 408.

das negative Vorzeichen beigelegt werden muss. Damit haben aber die Verhältnisse der Grössen Y_i , Z_i gerade die Werthänderung erfahren, die sie bei der Substitution S_1 erleiden.

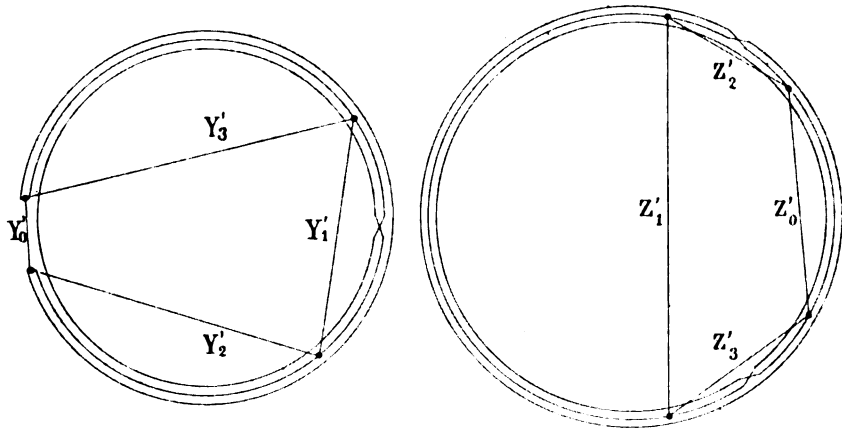


Fig. 14.

Man übersieht leicht, wie diese Betrachtung fortgesetzt werden kann: Bei gehöriger Berücksichtigung des den beiden Umschlagskreisen beizulegenden Drehungssinnes und des Vorzeichens der Diagonalen gelangt man zu einer neuen Auffassung der Gruppen \mathfrak{G}_{16} , \mathfrak{G}_{64} , \mathfrak{G}_{128} . Wir dürfen wohl darauf verzichten, den Gedanken bis zu allen Einzelheiten hin durchzuführen.

Die angegebene Darstellung der sphärischen Dreiecke durch Kreisvierecke in der Ebene erstreckt sich nicht nur auf die Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln, sondern auch auf die Fälle, in denen entweder die Seiten oder die Winkel rein imaginär werden; jedoch ist dann immer nur das eine unserer beiden Vierecke realisierbar. Ausgeschlossen bleiben dagegen von den in § 9 unterschiedenen Fällen die unter IV genannten, die Dreiecke mit rein imaginären Seiten und Winkeln. Man kann aber die sphärische Trigonometrie noch auf eine zweite Art zu den Kreisvierecken in der Ebene in Beziehung setzen; und hierbei entspricht gerade den zuletzt erwähnten Dreiecken eine vollständig reelle Figur.

Wir construiren jetzt ein eigentliches und ein überschlagenes Kreisviereck mit Seiten, die sich verhalten, wie die Grössen X_i , und bezeichnen die zugehörigen Winkel mit ϑ_x und ϑ'_x . (S. Fig. 15.)

Dann findet sich

$$(9) \quad \begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \frac{a_{11}}{a_{23}}, & \cos \vartheta_2 &= \frac{a_{22}}{a_{31}}, & \cos \vartheta_3 &= \frac{a_{33}}{a_{12}}, \\ \cos \vartheta'_1 &= \frac{a_{11}}{a_{32}}, & \cos \vartheta'_2 &= \frac{a_{22}}{a_{13}}, & \cos \vartheta'_3 &= \frac{a_{33}}{a_{21}}. \end{aligned}$$

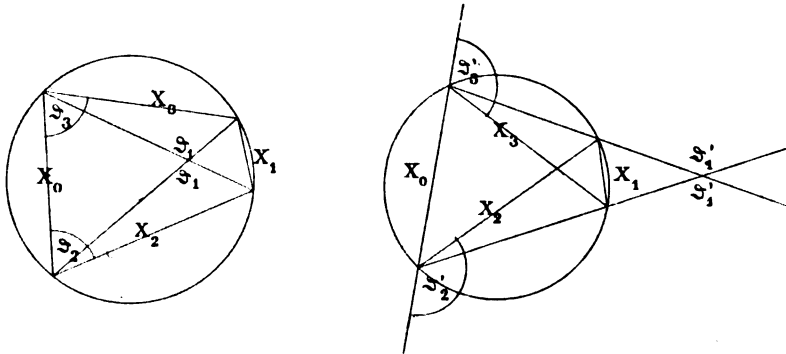


Fig. 15.

Die reciproken Werthe der Grössen $\cos \vartheta_x$, $\cos \vartheta'_x$ sind also die Cosinus der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks.

Dieses Dreieck hat nothwendig rein imaginäre Seiten und Winkel, wenn beide Vierecke reell sind; ist dagegen nur eines der beiden Vierecke möglich, so kommt man wieder auf die Fälle II und III des § 9 zurück. Auch bei dieser Deutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie stellen sich mehrere der von uns eingeführten Ausdrücke als geometrisch einfach definirte Grössen dar. Für die Flächen J und J' der beiden Vierecke z. B. ergeben sich die Werthe

$$J = \sqrt{-Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}, \quad J' = \sqrt{-Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}.$$

Schliesslich kann man diese Betrachtungen noch in der Art erweitern, dass man alle sechs Kreisvierecke gleichzeitig untersucht, die durch die drei Grössensysteme X_i , Y_i , Z_i definirt werden (aber freilich niemals gleichzeitig reell sind). Man findet so eine zweite Herleitung des in § 11 (S. 170, 171) aufgestellten Satzes.

Die drei Paare von Kreisvierecken und die drei zusammengehörigen sphärischen Dreiecke stehen in einer doppelten merkwürdigen Beziehung: Die reciproken Werthe der Cosinus, die zu den drei Viereckspaaren gehören, sind die Cosinus der Seiten und Winkel je eines der drei Dreiecke; andererseits kann man die sechs Vierecke auch

so in drei Paare ordnen, dass die Winkel eines Paares selbst gleich den Seiten und Winkeln je eines der drei sphärischen Dreiecke werden.

§ 14.

Grenzübergang zum ebenen Dreieck.

Von unserer Parameterdarstellung der sphärischen Dreiecke aus kommt man durch einen nicht uninteressanten Grenzübergang zu einer ähnlichen Darstellung der ebenen Dreiecke.

Um zum ebenen Dreieck zu gelangen, bedienen wir uns einer Grösse δ , deren höhere Potenzen wir gegen die niederen vernachlässigen, und mit der wir schliesslich zur Grenze Null übergehen. Wir führen den Grenzübergang nur für solche Dreiecke durch, deren Seiten sehr wenig von Null verschieden sind, und setzen dem entsprechend:

$$(1) \quad a_i = \delta \cdot \bar{a}_i, \quad \alpha_i = \bar{\alpha}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die Summe der Winkel $\bar{\alpha}_i$ mag im Grenzfalle $\delta = 0$ gleich 2π angenommen werden, so dass

$$\bar{\sigma}_0 = 0, \quad \bar{\sigma}_1 = \pi - \bar{\alpha}_1, \quad \bar{\sigma}_2 = \pi - \bar{\alpha}_2, \quad \bar{\sigma}_3 = \pi - \bar{\alpha}_3.$$

Die Bezeichnungen σ_i werden also in der ebenen Trigonometrie überflüssig; nicht aber die Bezeichnungen s_i . Diese wollen wir jedoch jetzt etwas abändern, indem wir an ihrer Stelle fortan die Grössen

$$(2) \quad \begin{cases} 2\bar{s}_0 = & \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_1 = & -\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_2 = & \bar{a}_1 - \bar{a}_2 + \bar{a}_3, \\ 2\bar{s}_3 = & \bar{a}_1 + \bar{a}_2 - \bar{a}_3 \end{cases}$$

gebrauchen.

Die Substitution für die Parameter Z_i , die der Substitution (1) entspricht, lautet

$$(3) \quad Z_0 = \delta^2 \cdot \bar{Z}_0, \quad Z_1 = \bar{Z}_1, \quad Z_2 = \bar{Z}_2, \quad Z_3 = \bar{Z}_3.$$

Die Parameter X_i vereinigen sich im Grenzfalle mit den Grössen Y_i , an deren Stelle jetzt vier linear-abhängige Ausdrücke treten:

$$(4) \quad \begin{cases} 2\bar{Y}_0 = & \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3, \\ 2\bar{Y}_1 = & -\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3, \\ 2\bar{Y}_2 = & \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3, \\ 2\bar{Y}_3 = & \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 - \bar{Z}_3. \end{cases}$$

Führt man nun den angezeigten Grenzübergang aus, so entstehen die folgenden Formeln, die die Parameterdarstellung der ebenen Dreiecke durch die Verhältnissgrössen \bar{Z}_i enthalten:

$$(5) \quad \frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3}{2} = \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_1}, \quad \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2} = \frac{\bar{Y}_0}{\bar{Y}_1} = \frac{\bar{s}_0}{\bar{s}_1}.$$

Hieraus folgt einerseits die Proportion

$$(6) \quad \bar{Z}_0 : \bar{Z}_1 : \bar{Z}_2 : \bar{Z}_3 = \frac{\bar{a}_1}{2} \cdot \frac{\bar{a}_2}{2} \cdot \frac{\bar{a}_3}{2} : \frac{\bar{a}_1}{2} : \frac{\bar{a}_2}{2} : \frac{\bar{a}_3}{2},$$

andererseits die goniometrische Formel

$$\operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} = 4.$$

Ferner ergibt sich

$$(7) \quad \frac{\bar{a}_i}{2} = \frac{\bar{Z}_0 \bar{Z}_i}{\sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_i}{2} = \frac{\bar{Y}_0 \bar{Y}_i}{\sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3}} = \frac{\bar{s}_0 \bar{s}_i}{\sqrt{\bar{s}_0 \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3}},$$

$$(8) \quad \sin \bar{\alpha}_1 = \frac{4\sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3}}{2 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}, \quad \cos \bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{Z}_1^2 - \bar{Z}_2^2 - \bar{Z}_3^2}{2 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}.$$

An Stelle der Irrationalität R tritt jetzt das auch im Vorzeichen bestimmte rationale Product $\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3$; die die Grössen $\sin s_i$ vertretenden Grössen \bar{s}_i enthalten daher nur noch die eine Irrationalität $\sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}$:

$$(9) \quad \bar{s}_i = \frac{2 \bar{Z}_0}{\sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}} \cdot \bar{Y}_i \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

An Stelle der DELAMBRE'schen Ausdrücke, oder vielmehr eines Theiles von ihnen treten die folgenden:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \frac{\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_3}{2}}{\sin \frac{\bar{\alpha}_1}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2}}{1 - \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2}} = \\ = -\frac{\bar{a}_2 - \bar{a}_3}{\bar{a}_1} = -\frac{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1}, \\ \frac{\cos \frac{\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_3}{2}}{\cos \frac{\bar{\alpha}_1}{2}} = \frac{1 + \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2}} = \\ = \frac{\bar{a}_2 + \bar{a}_3}{\bar{a}_1} = \frac{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1}; \end{array} \right.$$

endlich ergibt sich aus den L'HUIER'schen Formeln, wenn

$$(11) \quad \bar{M} = \sqrt{\frac{\frac{\bar{s}_1}{2} \cdot \frac{\bar{s}_2}{2} \cdot \frac{\bar{s}_3}{2}}{\frac{\bar{s}_0}{2}}} = \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Y}_0} \cdot \frac{\sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3}}{\sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}}$$

gesetzt wird,

$$(12) \quad \frac{\bar{s}_1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \frac{\bar{s}_2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \frac{\bar{s}_3}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2} = \bar{M}.$$

Die Grundformeln der ebenen Trigonometrie, der Cosinus- und der Sinussatz, entstehen bekanntlich aus den ebenso benannten Formeln der sphärischen Trigonometrie durch den nämlichen Grenzübergang:

$$(13) \quad \bar{a}_1^2 = \bar{a}_2^2 + \bar{a}_3^2 + 2 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \cdot \cos \bar{\alpha}_1,$$

$$(14) \quad \frac{\bar{a}_1}{\sin \bar{\alpha}_1} = \frac{\bar{a}_2}{\sin \bar{\alpha}_2} = \frac{\bar{a}_3}{\sin \bar{\alpha}_3} = \frac{\sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}}{\sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3}}.$$

Der Ausdruck für die Fläche F des ebenen Dreiecks ist der Grenzwert der Fläche des sphärischen Dreiecks, wenn man als Radius der Kugel die Grösse $\frac{1}{\delta}$ nimmt: $\operatorname{Lim.} \frac{2\sigma_0}{\delta^2} =$

$$(15) \quad F = \sqrt{\bar{s}_0 \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3} = \frac{1}{2} \bar{a}_2 \bar{a}_3 \cdot \sin \bar{\alpha}_1 = \frac{4 \bar{Z}_0}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3} \cdot \sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3}.$$

Von den Quotienten $\frac{r_i}{\delta}$ (s. § 12) haben drei die Grenze ∞ ; der letzte nähert sich dem Halbmesser \bar{r}_0 des dem Dreieck umschriebenen Kreises:

$$(16) \quad \bar{r}_0 = \frac{\bar{a}_i}{2 \sin \bar{\alpha}_i} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}}{\sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3}} \quad (\text{vgl. Nr. 14});$$

die Quotienten $\frac{1}{\delta \varrho_i}$ dagegen nehmen im Grenzfall sämtlich endliche Werthe an, und nähern sich den Halbmessern $\bar{\varrho}_i$ der Berührungskreise des ebenen Dreiecks:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\varrho}_0 = \bar{s}_1 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \bar{s}_2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \bar{s}_3 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \bar{\varrho}_1 = \bar{s}_0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \bar{s}_3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \bar{s}_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \bar{\varrho}_2 = \bar{s}_3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \bar{s}_0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \bar{s}_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \bar{\varrho}_3 = \bar{s}_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_1}{2} = \bar{s}_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\bar{\alpha}_2}{2} = \bar{s}_0 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\bar{\alpha}_3}{2}. \end{array} \right.$$

$$(18) \quad \bar{\varrho}_i = \frac{\sqrt{\bar{s}_0 \bar{s}_1 \bar{s}_2 \bar{s}_3}}{\bar{s}_i} = 2 \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Y}_i} \cdot \frac{\sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3}}{\sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

An Stelle der Relationen (3), (4) des § 12 treten also jetzt diese:

$$(19) \quad \begin{cases} 4 \bar{r} = -\bar{\varrho}_0 + \bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \bar{\varrho}_3, \\ 0 = -\frac{1}{\bar{\varrho}_0} + \frac{1}{\bar{\varrho}_1} + \frac{1}{\bar{\varrho}_2} + \frac{1}{\bar{\varrho}_3}. \end{cases}$$

Endlich ergeben sich auch noch für die Höhen \bar{h}_i des ebenen Dreiecks, die Grenzwerte der Quotienten $\frac{\cos h_i}{\delta}$ (s. § 7, S. 150) bemerkenswerthe Ausdrücke, nämlich:

$$(20) \quad \bar{h}_i = 4 \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_i} \cdot \frac{\sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3}}{\sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Natürlich kann man alle diese Formeln auch unmittelbar entwickeln, wenn man die Grössen \bar{Z}_i von vornherein durch die Proportion (6) definiert. —

Unsere Formeln definiren eine Abbildung der Mannigfaltigkeit aller wesentlich verschiedenen ebenen Dreiecke auf den Raum von drei Dimensionen, ähnlich der in § 9 behandelten Abbildung der sphärischen Dreiecke. Am Besten deuten wir jetzt die Grössen $\frac{\bar{Z}_i}{\bar{Z}_0}$ als rechtwinklige Cartesische Coordinaten. Die Ebenen $\bar{Y}_i = 0$ sind dann die vier Ebenen, die im Anfangspunkte der Coordinaten auf den Diagonalen eines Würfels mit den Ecken ± 1 senkrecht stehen und je sechs Kantenmitten des Würfels verbinden. Die acht Ebenen $\bar{Z}_i = 0$, $\bar{Y}_i = 0$ theilen den Raum in 32 Gebiete, deren jedes die Gestalt eines Tetraeders hat, einer dreikantigen Pyramide mit unendlich ferner Basis, deren Scheitel im Anfangspunkt der Coordinaten liegt.

Reelle Werthe der Parameter \bar{Z}_i führen zu Dreiecken, deren Seiten und Winkel reell oder rein imaginär sind. Die einzelnen Fälle sind ebenso zu unterscheiden, wie die entsprechenden Fälle in § 9:

$$I. \quad \bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 > 0, \quad \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 > 0.$$

(Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln).

Die zugehörigen Raumpunkte erfüllen das Innere von vier Dreiecken, die begrenzt werden von je drei Ebenenstücken $\bar{Y}_i = 0$. In einem Falle [0] hat man $\bar{Z}_i > 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$); die begrenzenden

Ebenen sind dann $\bar{Y}_1 = 0$, $\bar{Y}_2 = 0$, $\bar{Y}_3 = 0$. Die drei anderen Fälle [1], [2], [3] entstehen hieraus durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel je zweier der Grössen \bar{Z}_i .

$$\text{II. } \bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 > 0, \quad \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 < 0.$$

(Dreiecke mit reellen Seiten und rein imaginären Winkeln).

Die Ungleichungen II definiren zwölf verschiedene Raumgebiete, Dreikante, deren jedes im Endlichen begrenzt wird von zwei Coordinatenebenen und einer der Ebenen $\bar{Y}_i = 0$. Diese Dreikante überdecken die Flächen der unter I genannten Dreikante vollständig.

Aus jedem der unter I und II vorkommenden Dreiecke geht ein neues hervor durch Multiplication der Seiten mit $\sqrt{-1}$. Diese Operation entspricht offenbar der Spiegelung am Anfangspunkt der Coordinaten. Wir haben daher nicht nöthig, die Fälle

$$\text{III. } \bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 < 0, \quad \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 > 0 \quad \text{und}$$

$$\text{IV. } \bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 < 0, \quad \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 < 0$$

noch besonders zu besprechen.

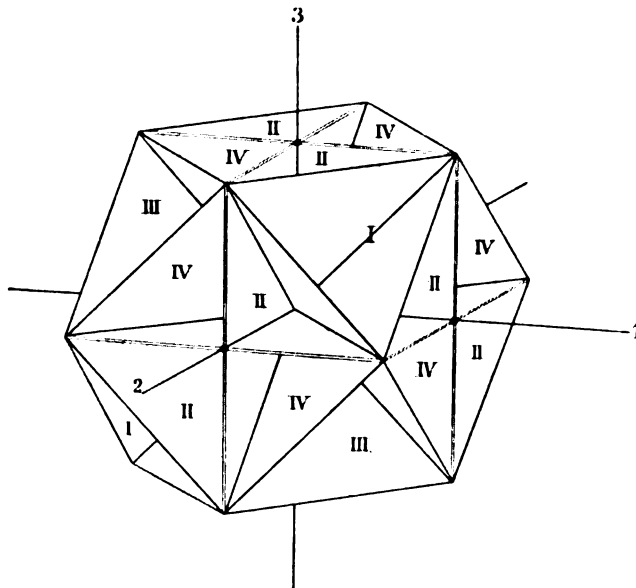


Fig. 16.

Die Figur 16 wird eine deutliche Vorstellung geben von der Lage der 32 Raumgebiete. Es ist die Ansicht eines Cubo-Octaeders

gezeichnet, aus dessen quadratischen Flächen die Coordinatenebenen die Diagonalen ausscheiden. Die Kanten werden aus dem Mittelpunkt durch die Ebenen $Y_i = 0$ projicirt. In jedes der durch die genannten Ebenen abgegrenzten Fächer ist die zugehörige Bezeichnung I, II, III oder IV eingetragen.

Betrachten wir etwas genauer die Abbildung der reellen Dreiecke auf die Punkte in den unter I genannten Raumgebieten [0], [1], [2], [3]. Wir denken uns jedes dieser Gebiete mit vier Blättern überdeckt, die den Vorzeichen der Quadratwurzeln aus $\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3$ und $\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3$ entsprechen, und wie folgt bezeichnet werden mögen:

$$\begin{aligned} (B_x B_x) &: \sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3} > 0, \quad \sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3} > 0; \\ (B_x B_x') &: \sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3} > 0, \quad \sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3} < 0; \\ (B_x' B_x) &: \sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3} < 0, \quad \sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3} > 0; \\ (B_x' B_x') &: \sqrt{\bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3} < 0, \quad \sqrt{\bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3} < 0. \end{aligned}$$

Man erkennt unmittelbar, dass diese Unterscheidung der in § 8 des ersten Abschnitts getroffenen Unterscheidung entspricht: Jedes unserer Raumgebiete, deren Zahl nunmehr auf 16 angewachsen ist, enthält Dreiecke einer bestimmten der dort auseinandergehaltenen Gestalten. (Vgl. auch II, § 10, S. 159.)

Der Zusammenhang der einzelnen Blätter wird vermittelt durch die Grenz-Flächen, -Kanten und -Punkte der Tetraeder [0], [1], [2], [3], und zwar ist die Art des Zusammenhangs dieselbe, die wir bereits in § 8 des ersten Abschnittes kennen gelernt haben. Die Punkte der Grenzflächen $\bar{Y}_i = 0$, deren es $4 \cdot 3 \cdot 2$ verschiedene gibt, entsprechen den Grenzdreiecken erster Art; die Punkte der in der unendlich fernen Ebene gelegenen Begrenzungsflächen, deren $4 \cdot 2$ vorhanden sind, entsprechen den Grenzdreiecken zweiter Art, den unendlich kleinen Dreiecken. Die Grenzdreiecke dritter Art, die unendlich grossen Dreiecke, haben als Aequivalent einen singulären Punkt der Abbildung, den Anfangspunkt der Coordinaten: Jeder von diesem Punkt ausgehenden Fortschreitungsrichtung, die sich in eines der Gebiete I hinein erstreckt, entspricht ein unendlich grosses Dreieck von bestimmter Gestalt; oder vielmehr, es entsprechen ihr zwei solche Dreiecke, die den Uebergang zwischen je zwei Blättern unserer Raumüberdeckung nach dem Schema

$$(B_x B_x) \longleftrightarrow (B'_x B_x), \quad (B_x B'_x) \longleftrightarrow (B'_x B'_x)$$

vermitteln. Wie man sieht, kann man von den Grenzdreiecken erster Art weitergehen zu den Dreiecken mit reellen Seiten und rein imaginären Winkeln, und von den Grenzdreiecken zweiter und dritter Art zu den Dreiecken mit reellen Winkeln und rein imaginären Seiten. (Vgl. S. 120.)

Den 6. 4 Schaaren von ∞^2 Uebergangsdreiecken erster Art entsprechen die sechs Punkte der unendlich fernen Ebene, in denen die vier Gebiete [0], [1], [2], [3] aneinanderstossen; den 6. 4 Schaaren von Uebergangsdreiecken zweiter Art dagegen entsprechen sechs Raumpunkte, die auf den Schnittlinien der Ebenen $\bar{Y}_i = 0$ liegen und dem Anfangspunkt der Coordinaten unendlich benachbart sind. Dieser Punkt ist also für unsere Abbildung eine singuläre Stelle höherer Art.

Ausser den bereits genannten sind singuläre Stellen unserer Abbildung auch die übrigen Punkte der Kanten der vier Tetraeder [0], [1], [2], [3]. Das sind erstens die Schnittlinien der Ebenen $\bar{Y}_i = 0$ mit der unendlich fernen Ebene $\bar{Z}_0 = 0$. Diesen ∞^1 Punkten entsprechen nur ∞^0 Dreiecke, nämlich solche, deren Ecken in denselben Punkt und deren Seiten auf dieselbe Gerade fallen. In doppeltem Sinne singulär sind die Punkte auf den Schnittlinien $\bar{Y}_i = 0$, $\bar{Y}_x = 0$. Jedem solchen Punkt entsprechen ∞^1 Dreiecke, die gleichzeitig Uebergangsdreiecke erster und zweiter Art sind, und zwar allen Punkten auf derselben Kante die nämlichen Dreiecke. —

Fragen wir schliesslich noch, wie sich die Parameter \bar{Z}_i verhalten bei den Substitutionen der auf Seite 122 definirten erweiterten Gruppe. Sie ändern sich nicht bei der Substitution \mathfrak{Z} (S. 118), und ebensowenig bei gleichzeitigem Vorzeichenwechsel sämtlicher Seiten. Es entsteht daher eine Gruppe von nur 24 collinearen Transformationen, bestehend aus den Vertauschungen der Grössen \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 , \bar{Z}_3 , und den Vorzeichenwechseln zweier von ihnen. Dies ist eine wohlbekanntete Gruppe, die sogenannte *erweiterte Tetraedergruppe*¹⁾. Versteht man unter einer »Umlegung« eine Transformation des Raumes, bei der jede Figur in eine symmetrisch-gleiche übergeht, so kann

1) F. KLEIN, Vorlesungen über das Icosaeder (Leipzig, 1884) I, § 11 (S. 23).

die genannte Gruppe definirt werden als der Inbegriff aller Bewegungen und Umlegungen, die ein regelmässiges Tetraeder mit sich selbst zur Deckung bringen.

Sieht man ein ebenes Dreieck als bestimmt an, wenn seine Seiten gegeben sind, und betrachtet man überdies solche Dreiecke als nicht wesentlich verschieden, die durch einen Vorzeichenwechsel aller Seiten in einander übergehen, so entspricht in unserer Abbildung jedem Raumpunkt ein bestimmtes Dreieck und umgekehrt (natürlich nur im Allgemeinen; s. oben). Den 6. 4 Dreiecken, die dieselben Ecken haben, entsprechen 24 Raumpunkte, die durch die erweiterte Tetraedergruppe unter einander vertauscht werden. —

Alle diese Ueberlegungen gestalten sich viel einfacher, wenn man *ähnliche* Dreiecke als nicht wesentlich verschieden ansieht. Es kommen dann nicht die Raumpunkte selbst, sondern nur die geraden Linien durch den Anfangspunkt in Betracht.

Es ist nicht schwer, die geschilderten Verhältnisse zu verstehen als Grenzfälle derer, die wir in § 10 beschrieben haben. Die angestellte Betrachtung ist indessen doch wohl nicht überflüssig, da die Abbildung der Mannigfaltigkeit der reellen ebenen Dreiecke auf den Punktraum manches Besondere darbietet, auch zum Theil andere und zwar höhere Singularitäten besitzt, als die entsprechende Abbildung der Mannigfaltigkeit der reellen sphärischen Dreiecke.

III. Abschnitt.

Darstellung orthogonaler Substitutionen und sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen.

Bekanntlich hat schon LAGRANGE die Bemerkung gemacht, dass die alte Additionsformel (in der LEGENDRE-JACOBI'schen Bezeichnung):

$$\begin{aligned} \cos \operatorname{am} (u + v) &= \cos \operatorname{am} u \cdot \cos \operatorname{am} v \\ &- \sin \operatorname{am} u \cdot \sin \operatorname{am} v \cdot \mathcal{A} \operatorname{am} (u + v) \end{aligned}$$

die grösste Aehnlichkeit hat mit dem Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie. Es ging daraus die Möglichkeit hervor, sphärische Dreiecke durch elliptische Functionen *zweier* Argumente darzustellen¹⁾.

Auf diesen Zusammenhang der elliptischen Functionen mit der sphärischen Trigonometrie wird durch die im zweiten Abschnitt mitgetheilte Untersuchung ein neues Licht geworfen; zugleich ergibt sich eine bedeutende Erweiterung der bekannten Formeln: Es ist ein ähnliches Theorem vorhanden, das sphärische Dreiecke in mannigfaltiger Weise durch elliptische Functionen von *vier* unabhängigen Argumenten auszudrücken erlaubt, und das den erwähnten Satz als besonderen Fall enthält.

Die genannte Verallgemeinerung steht in einem eigenthümlichen Zusammenhang mit den JACOBI'schen und WEIERSTRASS'schen Additionstheoremen der ϑ - oder \mathcal{G} -Functionen, deren Theorie wir daher in einigen Punkten zu ergänzen haben werden.

Wir bedienen uns bei dieser Untersuchung des Systems von Bezeichnungen, das Herr WEIERSTRASS in die Wissenschaft eingeführt

1) S. DURÈGE, Theorie der elliptischen Functionen (3. Aufl. 1878), VII. Abschnitt, und die Literaturangaben bei ENNEPER (Ellipt. Funct., 2. Aufl., v. F. MÜLLER, 1889) S. 559, wozu noch GREENHILL, Applications of Elliptic functions kommt (London, 1892, Chap. IV). — Der im Texte gebrauchte, etwas unbestimmte Ausdruck wird durch die folgende Untersuchung erklärt werden.

hat. Dieses empfiehlt sich dem älteren Bezeichnungssystem gegenüber für uns schon dadurch, dass es den Dualismus zwischen einem sphärischen Dreieck und seinem Polardreieck klar zum Ausdruck bringt; es ist aber auch sonst, im Grossen und Ganzen, für unseren Gegenstand vortrefflich geeignet. Im Einzelnen werden wir uns allerdings einige Abweichungen von den Festsetzungen des Herrn WEIERSTRASS erlauben müssen¹⁾.

Nach dem im II. Abschnitt Gesagten kommt es in der Hauptsache auf Dasselbe hinaus, ob wir orthogonale Substitutionen oder sphärische Dreiecke durch elliptische Functionen darstellen. Indessen hängt das sphärische Dreieck doch in einfacherer Weise von der orthogonalen Substitution ab, als umgekehrt die Substitution vom Dreieck. Wir werden daher in der Folge meistens nur von orthogonalen Substitutionen reden. —

Wir stellen zunächst einige Hilfssätze zusammen, die sich auf die häufig wiederkehrende Aufgabe beziehen, die σ -Functionen des um eine halbe Periode vermehrten Argumentes durch die ursprünglichen Functionen σ , σ_1 , σ_2 , σ_3 auszudrücken. Die zu diesem Zweck entwickelten bekannten Formeln²⁾ sind insofern nicht ganz zweckmässig, als sie die Symmetrie zwischen den drei Functionen σ_1 , σ_2 , σ_3

1) Dem Verfasser ist es wohl bewusst, wie gewichtige Bedenken einem solchen Verfahren entgegenstehen, namentlich in einer Theorie, in der ohnehin an den verschiedenartigsten Bezeichnungen kein Mangel ist; indessen erschien die Abänderung im Interesse der Sache dringend geboten. — Bei der Wahl der im Texte verwendeten Bezeichnungen ist der leitende Gedanke der gewesen, möglichst viele gleichartige Formeln (solche Formeln, die eine *Gruppe* bilden) in einem einzigen Ausdruck zusammenzufassen, *soweit es ohne Zerstörung der Uebersichtlichkeit möglich schien*. Es handelt sich dabei übrigens nur um die consequente Durchführung der WEIERSTRASS'schen Bezeichnungsweise. Dass Herr WEIERSTRASS selbst den folgerichtigen Ausbau seines Bezeichnungssystems unterlassen hat, ist nach Ansicht des Verfassers sehr zu bedauern. Der Vortheil, den die Beibehaltung der historisch überlieferten Bezeichnungen bietet, wiegt die dadurch hervorgerufenen Uebelstände schwerlich auf.

2) H. A. SCHWARZ, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen (Berlin, Reimer. Erschienen sind z. Z. die Bogen 1—12, Art. 1—60) Art. 24—23. HALPHEN, Traité des fonctions elliptiques (Paris 1886), t. I p. 190—195. Auch in diesem Werke ist die Symmetrie der Formeln nicht vollständig hergestellt.

aufheben und daher eine Unterscheidung verschiedener Fälle nothwendig machen, die man vermeiden kann.

Wir setzen, um zu symmetrischen Formeln zu gelangen,

$$(1) \quad \omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = -\omega'' = -\omega - \omega', \quad \omega_3 = \omega', \quad 1)$$

worin $\omega, \omega', \omega''$ die bekannte Bedeutung haben, so dass

$$(2) \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen $\sqrt{\varphi u - e_\lambda} = \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}$ ($\lambda = 1, 2, 3$) ergeben sich dann (vgl. SCHWARZ, S. 24) *eindeutig* bestimmte Werthe für die Quadratwurzeln aus den Differenzen der Grössen e_1, e_2, e_3 , nämlich

$$(3) \quad \begin{aligned} \sqrt{e_1 - e_2} &= \frac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma \omega_1} = -\frac{e^{-\eta_2 \omega_1} \sigma \omega_3}{\sigma \omega_1 \sigma \omega_2}, & \sqrt{e_1 - e_3} &= \frac{\sigma_3 \omega_1}{\sigma \omega_1} = -\frac{e^{-\eta_3 \omega_1} \sigma \omega_2}{\sigma \omega_3 \sigma \omega_1}, \\ \sqrt{e_2 - e_3} &= \frac{\sigma_3 \omega_2}{\sigma \omega_2} = -\frac{e^{-\eta_3 \omega_2} \sigma \omega_1}{\sigma \omega_2 \sigma \omega_3}, & \sqrt{e_2 - e_1} &= \frac{\sigma_1 \omega_2}{\sigma \omega_2} = -\frac{e^{-\eta_1 \omega_2} \sigma \omega_3}{\sigma \omega_1 \sigma \omega_2}, \\ \sqrt{e_3 - e_1} &= \frac{\sigma_1 \omega_3}{\sigma \omega_3} = -\frac{e^{-\eta_1 \omega_3} \sigma \omega_2}{\sigma \omega_3 \sigma \omega_1}, & \sqrt{e_3 - e_2} &= \frac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_3} = -\frac{e^{-\eta_2 \omega_3} \sigma \omega_1}{\sigma \omega_2 \sigma \omega_3}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{e_3 - e_2} &= i \sqrt{e_2 - e_3}, & \sqrt{e_1 - e_3} &= i \sqrt{e_3 - e_1}, \\ \sqrt{e_2 - e_1} &= i \sqrt{e_1 - e_2}. \end{aligned} \right.$$

Versteht man daher unter λ, μ, ν die Zahlen 1, 2, 3 *in einer der drei Folgen* (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), und unter $\sqrt{-i}$ die Grösse $-e^{-\frac{1}{2}\pi i}$, so ergibt sich

$$(5) \quad \sigma \omega_\lambda = \frac{\sqrt{-i} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda}}{\sqrt{e_\nu - e_\lambda} \cdot \sqrt{e_\lambda - e_\mu}} \quad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Den vierten Wurzeln dürfen hier nur solche Werthe beigelegt werden, deren Quadrate durch die Gleichungen (3) bereits eindeutig bestimmt sind; auch sind durch eine dieser Grössen die beiden anderen eindeutig bestimmt.

Jetzt erhalten wir die fraglichen Transformationsformeln in der folgenden Gestalt:

1) Besser noch wäre vielleicht die Annahme $\omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega', \omega_3 = -\omega''$, da dann in der Zahlenebene die drei Punkte $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ im positiven Drehungssinn auf einander folgen. Doch bietet eine solche Abänderung keinen besonderen Vortheil. — Der Leser beachte, dass die Grössen $\sqrt{e_i - e_k}$ mit den in der SCHWARZ'schen Formelsammlung ebenso bezeichneten Grössen *nicht* identisch sind.

(6)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(u \pm \omega_\lambda)}{e^{\pm \eta_\lambda u} \sigma_\lambda u} &= \pm \sigma \omega_\lambda = \pm \sqrt[\lambda]{\frac{V-i}{e_\nu - e_\lambda} \sqrt[e_\lambda - e_\mu]} e^{\pm \eta_\lambda \omega_\lambda}, \\ \frac{\sigma_\lambda(u \pm \omega_\lambda)}{e^{\pm \eta_\lambda u} \sigma_\lambda u} &= \mp \sqrt[e_\lambda - e_\mu]{V-i} \sqrt[e_\lambda - e_\nu]{V-i} \sigma \omega_\lambda = \mp \frac{1}{\sqrt[-i]{V-i}} \sqrt[e_\nu - e_\lambda]{V-i} \sqrt[e_\lambda - e_\mu]{V-i} e^{\pm \eta_\lambda \omega_\lambda}, \\ \frac{\sigma_\mu(u \pm \omega_\lambda)}{e^{\pm \eta_\lambda u} \sigma_\mu u} &= \sqrt[e_\lambda - e_\mu]{V-i} \sigma \omega_\lambda = \sqrt[-i]{V-i} \sqrt[e_\lambda - e_\mu]{V-i} e^{\pm \eta_\lambda \omega_\lambda}, \\ \frac{\sigma_\nu(u \pm \omega_\lambda)}{e^{\pm \eta_\lambda u} \sigma_\nu u} &= \sqrt[e_\lambda - e_\nu]{V-i} \sigma \omega_\lambda = \frac{1}{\sqrt[-i]{V-i}} \sqrt[e_\nu - e_\lambda]{V-i} e^{\pm \eta_\lambda \omega_\lambda}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke rechter Hand sind, wie gesagt, nur unter der Voraussetzung gültig, dass den Zahlen λ, μ, ν eines der Werthsysteme (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1) beigelegt wird; dagegen sind die zuerst angegebenen Ausdrücke einer solchen Beschränkung nicht unterworfen. Auch in allen weiterhin zu entwickelnden Formeln kann man den Grössen λ, μ, ν die Zahlenwerthe 1, 2, 3 in jeder beliebigen Anordnung beilegen.

Manche der aufzustellenden Ausdrücke gewinnen ein etwas einfacheres Ansehen, wenn man für die Producte der σ -Functionen mit gewissen Irrationalitäten besondere Functionszeichen einführt. Wir setzen, von der WEIERSTRASS'schen Bezeichnung abweichend,

$$(7) \begin{cases} \Theta u = \sqrt[e_\mu - e_\nu]{V-i} \sqrt[e_\nu - e_\lambda]{V-i} \sqrt[e_\lambda - e_\mu]{V-i} \cdot \sigma u = \sqrt[G]{G} \cdot \sigma u, \\ \Theta_\lambda u = \sqrt[e_\mu - e_\nu]{V-i} \cdot \sigma_\lambda u, \quad \Theta_\mu u = \sqrt[e_\nu - e_\lambda]{V-i} \cdot \sigma_\mu u, \quad \Theta_\nu u = \sqrt[e_\lambda - e_\mu]{V-i} \cdot \sigma_\nu u. \end{cases}$$

λ, μ, ν bedeuten hier die Zahlen 1, 2, 3 in einer beliebigen, aber bestimmten Anordnung. Die noch nicht erklärten Wurzeln sind definirt durch die Formeln

$$(8) \sqrt[e_3 - e_2]{V-i} = \sqrt{i} \sqrt[e_2 - e_3]{V-i}, \quad \sqrt[e_1 - e_3]{V-i} = \sqrt{i} \sqrt[e_3 - e_1]{V-i}, \quad \sqrt[e_2 - e_1]{V-i} = \sqrt{i} \sqrt[e_1 - e_2]{V-i},$$

in denen der Grösse \sqrt{i} ein und derselbe Werth beizulegen ist.

Für die so erklärten Θ -Functionen gelten die Gleichungen

$$(9) \begin{cases} \Theta^2 u \Theta^2 v + \Theta_\lambda^2 u \Theta_\lambda^2 v + \Theta_\mu^2 u \Theta_\mu^2 v + \Theta_\nu^2 u \Theta_\nu^2 v = 0, \\ \Theta^2 u \Theta_\lambda^2 v - \Theta_\lambda^2 u \Theta^2 v + \Theta_\mu^2 u \Theta_\nu^2 v - \Theta_\nu^2 u \Theta_\mu^2 v = 0, \\ \Theta'(0) = \Theta_\lambda(0) \Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0), \end{cases}$$

von denen die beiden ersten (besondere Fälle der später zu entwickelnden JACOBI'schen Formeln) algebraische Folgen der zwischen den Quadraten der Θ -Functionen eines Argumentes bestehenden Identitäten sind (die selbst wieder aus jenen durch Specialisirung hervorgehen). — Die Formeln (6) nehmen jetzt die folgende Gestalt an:

$$(10) \quad \begin{cases} \Theta(u \pm \omega_\lambda) = \pm (\sqrt{-i})^\varepsilon \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda} e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\lambda u, \\ \Theta_\lambda(u \pm \omega_\lambda) = \mp (\sqrt{-i})^{-\varepsilon} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda} e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta u, \\ \Theta_\mu(u \pm \omega_\lambda) = (\sqrt{-i})^\varepsilon \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda} e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\mu u, \\ \Theta_\nu(u \pm \omega_\lambda) = (\sqrt{-i})^{-\varepsilon} \cdot e^{\frac{1}{2}\eta_\lambda \omega_\lambda} e^{\pm \eta_\lambda u} \cdot \Theta_\nu u. \end{cases}$$

Der Werth des Exponenten $\varepsilon = \pm 1$ hängt vom Vorzeichen des Productes $\Theta^\varepsilon(0) = \sqrt{G}$ ab:

$$\varepsilon = \frac{(e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu)}{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}.$$

Im Allgemeinen ist es bequemer, mit den Θ -Functionen zu rechnen, als mit den \mathcal{G} -Functionen, wie schon die Vergleichung der Formeln (10) mit den Formeln (6) zeigt. Dazu kommt der für die Anwendungen wichtige Vorzug der Θ -Functionen, dass sie in den Argumenten $\omega : \omega' : u$ gleichmässig *homogen* sind (vom Grade $-\frac{1}{2}$), während die \mathcal{G} -Functionen verschiedene Grade aufweisen (1, 0, 0, 0). Indessen enthalten die Θ -Functionen Irrationalitäten, die der Mehrzahl der von uns zu entwickelnden Formeln fremd sind, und daher aus diesen Formeln thatsächlich wieder herausfallen. — Wir werden in der Folge beide Functionszeichen neben einander benutzen.

Erwähnt sei noch, dass man die Θ -Functionen durch ihre Producte mit einer Exponentialgrösse der Form $e^{k_0 u^2 + k_1 u}$ ersetzen kann, ohne den Charakter der folgenden Untersuchung zu ändern.

Die vier Producte $\Theta(0)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Theta_x u = G^{-\frac{1}{4}} \cdot \Theta_x u$ sind eindeutige homogene Functionen *nullten Grades* der Grössen $\omega : \omega' : u$.

§ 1.

Die Gruppierung der Weierstrass'schen und Jacobi'schen Additionstheoreme.

Das Additionstheorem der WEIERSTRASS'schen \mathcal{G} -Function lautet bekanntlich

$$(1) \quad \begin{aligned} & \mathcal{G}(u + u_1) \mathcal{G}(u - u_1) \mathcal{G}(u_2 + u_3) \mathcal{G}(u_2 - u_3) + \\ & + \mathcal{G}(u + u_2) \mathcal{G}(u - u_2) \mathcal{G}(u_3 + u_1) \mathcal{G}(u_3 - u_1) + \\ & + \mathcal{G}(u + u_3) \mathcal{G}(u - u_3) \mathcal{G}(u_1 + u_2) \mathcal{G}(u_1 - u_2) = 0. \end{aligned}$$

Führt man hier die neuen Bezeichnungen ein¹⁾

1) Vgl. SCHWARZ, Art. 38. Auch hier war eine kleine Abweichung in der Bezeichnung um des Folgenden willen nothwendig, oder doch wünschenswerth.

$$\begin{aligned}
 u + u_1 &= b, & u - u_1 &= -c, & u_2 + u_3 &= -d, & u_2 - u_3 &= a, \\
 u + u_2 &= b', & u - u_2 &= -c', & u_3 + u_1 &= -d', & u_3 - u_1 &= a', \\
 u + u_3 &= b'', & u - u_3 &= -c'', & u_1 + u_2 &= -d'', & u_1 - u_2 &= a'',
 \end{aligned}$$

so bestehen die Gleichungen

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} 2a' = -a - b - c - d, & 2a'' = -a + b + c + d, \\ 2b' = a + b - c - d, & 2b'' = -a + b - c - d, \\ 2c' = a - b + c - d, & 2c'' = -a - b + c - d, \\ 2d' = a - b - c + d, & 2d'' = -a - b - c + d, \end{array} \right.$$

und die analogen Gleichungen, die aus (2) durch cyclische Vertauschung der Grössen a, a', a'' u. s. w. hervorgehen. Die Gleichung (1) nimmt dann die einfache Form an

$$(3) \quad \mathcal{G}a \mathcal{G}b \mathcal{G}c \mathcal{G}d + \mathcal{G}a' \mathcal{G}b' \mathcal{G}c' \mathcal{G}d' + \mathcal{G}a'' \mathcal{G}b'' \mathcal{G}c'' \mathcal{G}d'' = 0. \quad -$$

Denkt man sich nun die Grössen a, b, c, d um Vielfache von halben Perioden vermehrt, in der Weise, dass auch a', b', c', d' und a'', b'', c'', d'' um Vielfache halber Perioden wachsen, und führt man dann mit Hülfe der Formeln (6) S. 191 die Functionen $\mathcal{G}_\lambda, \mathcal{G}_\mu, \mathcal{G}$, ein, so erhalten alle drei Glieder denselben Exponentialfactor, und gleichzeitig verschwinden in der neuen Formel auch die Irrationalitäten. Es soll sich nun für uns darum handeln, eine Uebersicht über die Gesammtheit aller so entstehenden Additionstheoreme und über deren Gruppierung zu gewinnen. Hierzu führen die folgenden Bemerkungen:

1) Die Vermehrung einer der Grössen a, b, c, d um eine doppelte Periode $4\omega_1$ ändert die Gestalt der Relation (3) überhaupt nicht, und ebensowenig die Vermehrung zweier verschiedener der Grössen a, b, c, d um dieselbe einfache Periode $2\omega_1$. Wir können also, für unseren Zweck, alle diese Substitutionen als nicht wesentlich verschieden von der identischen Substitution ansehen. — Aus 1) folgt

2) Vermehrt (oder vermindert) man eine der Grössen a, b, c, d um eine einfache Periode $2\omega_1$, so ist der Erfolg derselbe, welche der vier Grössen a, b, c, d man auch gewählt haben möge. Auf diese Art gehen also aus der Relation (3) im Ganzen nur *drei* neue Formeln hervor.

3) Jede der in Rede stehenden Aenderungen lässt sich zusammensetzen aus den unter 1) und 2) genannten Substitutionen und einer Vermehrung der Grössen a, b, c, d um solche Grössen $\pm \omega_1$, deren Summe *gleich* Null ist. Diese aber kann man leicht aufzählen.

Es gibt, wenn man die identische Substitution einschliesst, und nicht nur die unter 1), sondern für den Augenblick auch die unter 2) besprochenen Substitutionen der Identität zuordnet, 64 verschiedene Substitutionen der genannten Art, als deren Vertreter wir die folgenden anführen mögen:

$$\begin{aligned}
 &(0, 0, 0, 0) \quad (\text{die identische Substitution}) \\
 &(\omega_\lambda, \omega_\lambda, -\omega_\lambda, -\omega_\lambda) \quad (3 \text{ verschiedene Substitutionen}) \\
 &(0, 0, \omega_\lambda, -\omega_\lambda) \quad (3 \cdot 6 = 18 \text{ Substitutionen}) \\
 &(\omega_\mu, -\omega_\mu, \omega_\nu, -\omega_\nu) \quad (3 \cdot 6 = 18 \text{ Substitutionen}) \\
 &(0, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu) \quad (24 \text{ Substitutionen}).
 \end{aligned}$$

Der in Klammer gesetzte Ausdruck gibt in jedem Falle, in leicht verständlicher Bezeichnung, die Zuwüchse der Grössen a, b, c, d an.

Wir gelangen so zu $4 \cdot 64 = 256$ Additionstheoremen, die durch eine Gruppe von eben so vielen involutorischen (und also vertauschbaren) Substitutionen in einander übergehen.

Diese 256 Formeln theilen wir nun in 16 Familien von je 16, deren jeder dieselben, alsbald anzugebenden Eigenschaften zukommen.

Eine erste Familie möge alle die Relationen umfassen, in denen die zu einem Product verbundenen \mathcal{G} -Functionen alle den gleichen Index haben. Diese Formeln entstehen aus (3) durch Verbindung der unter 2) besprochenen Substitutionen mit den folgenden:

$(0, 0, 0, 0), (\omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda), (\omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu), (\omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu),$
also durch eine von 16 Substitutionen gebildete Untergruppe $\mathfrak{g}_{(16)}$ der erwähnten Gruppe von 256 Substitutionen.

Aus dieser Familie von 16 Additionstheoremen entsteht sodann eine neue, wenn man c um ω_λ vermehrt und d um ω_λ vermindert, und demzufolge dieselbe Substitution $(0, 0, \omega_\lambda, -\omega_\lambda)$ auch auf c' und d' , c'' und d'' anwendet. Die Ausübung der Substitutionen $(\omega_\lambda, \omega_\lambda, 0, 0)$ oder $(\omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\nu, \omega_\nu)$ auf das Grössensystem (a, b, c, d) würde zu derselben Formelfamilie führen. Es entstehen also durch die genannten Substitutionen, wenn man $\lambda = 1, 2, 3$ setzt, und dann die Grössen a, b, c, d beliebig vertauscht, im Ganzen nur $3 \cdot 3 = 9$ verschiedene Familien von je 16 Formeln.

Eine weitere Familie entsteht aus der ersten durch die auf die Grössen a, b, c, d auszuführende Substitution $(0, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu)$, oder auch durch eine der Substitutionen $(\omega_\lambda, 0, \omega_\nu, \omega_\mu), (\omega_\mu, \omega_\nu, 0, \omega_\lambda),$

$(\omega_\nu, \omega_\mu, \omega_\lambda, 0)$. Es gibt demnach $\frac{2^4}{4} = 6$ verschiedene Familien dieser Art. Die zuerst genannte Substitution $(0, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu)$ hat dieselbe Art der Aenderung für die Grössen a', b', c', d' und a'', b'', c'', d'' zur Folge.

Führt man nun die besprochenen Substitutionen in der zuletzt angegebenen Reihenfolge aus, bestimmt man also zuerst die 16 Formeln der ersten Familie, und leitet dann aus diesen die Formeln der $9 + 6$ übrigen Familien her, so gelangt man zu dem folgenden Theorem:

Setzt man entweder

$$(6, I) \begin{cases} \xi_0 = (e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu) \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \Theta_a \Theta_b \Theta_c \Theta_d, \\ \xi_1 = (e_\mu - e_\nu) \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \Theta_\lambda a \Theta_\lambda b \Theta_\lambda c \Theta_\lambda d, \\ \xi_2 = (e_\nu - e_\lambda) \sigma_\mu a \sigma_\mu b \sigma_\mu c \sigma_\mu d = \Theta_\mu a \Theta_\mu b \Theta_\mu c \Theta_\mu d, \\ \xi_3 = (e_\lambda - e_\mu) \sigma_\nu a \sigma_\nu b \sigma_\nu c \sigma_\nu d = \Theta_\nu a \Theta_\nu b \Theta_\nu c \Theta_\nu d, \end{cases}$$

oder

$$(6, II) \begin{cases} \xi_0 = (e_\mu - e_\nu) \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \frac{1}{\Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0)} \cdot \Theta_a \Theta_b \Theta_c \Theta_d, \\ \xi_1 = -(e_\mu - e_\nu) \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \frac{1}{\Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0)} \cdot -\Theta_\lambda a \Theta_\lambda b \Theta_\lambda c \Theta_\lambda d, \\ \xi_2 = -\sigma_\mu a \sigma_\mu b \sigma_\mu c \sigma_\mu d = \frac{1}{\Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0)} \cdot -\Theta_\mu a \Theta_\mu b \Theta_\mu c \Theta_\mu d, \\ \xi_3 = \sigma_\nu a \sigma_\nu b \sigma_\nu c \sigma_\nu d = \frac{1}{\Theta_\mu(0) \Theta_\nu(0)} \cdot \Theta_\nu a \Theta_\nu b \Theta_\nu c \Theta_\nu d, \end{cases}$$

oder endlich

$$(6, III) \begin{cases} \xi_0 = \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \frac{1}{\Theta'(0)^2} \cdot \Theta_a \Theta_b \Theta_c \Theta_d, \\ \xi_1 = \sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \frac{1}{\Theta'(0)^2} \cdot \Theta_\lambda a \Theta_b \Theta_c \Theta_d, \\ \xi_2 = \sigma_\mu a \sigma_\mu b \sigma_\mu c \sigma_\mu d = \frac{1}{\Theta'(0)^2} \cdot \Theta_\mu a \Theta_\mu b \Theta_\mu c \Theta_\mu d, \\ \xi_3 = \sigma_\nu a \sigma_\nu b \sigma_\nu c \sigma_\nu d = \frac{1}{\Theta'(0)^2} \cdot \Theta_\nu a \Theta_\nu b \Theta_\nu c \Theta_\nu d, \end{cases}$$

und bezeichnet man mit $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ und $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ dieselben Functionen der Grössen a', b', c', d' und a'', b'', c'', d'' , so bestehen die linearen Gleichungen

$$(7) \begin{cases} \xi_0 + \eta_0 + \delta_0 = 0, \\ \xi_0 - \eta_\alpha + \delta_\alpha = 0, \\ \eta_0 - \delta_\alpha + \xi_\alpha = 0, \\ \delta_0 - \xi_\alpha + \eta_\alpha = 0, \\ \xi_\alpha + \eta_\beta + \delta_\gamma = 0, \end{cases} \quad [\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \text{ in jeder beliebigen Reihenfolge; zusammen 16 Gleichungen}]$$

oder, in anderer Anordnung,

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 + \xi_\alpha = -\eta_0 + \eta_\alpha = -\delta_\beta - \delta_\gamma, \\ \xi_0 - \xi_\alpha = \eta_\beta + \eta_\gamma = -\delta_0 - \delta_\alpha, \\ \xi_\beta + \xi_\gamma = -\eta_0 - \eta_\alpha = \delta_0 - \delta_\alpha, \\ \xi_\beta - \xi_\gamma = \eta_\beta - \eta_\gamma = \delta_\beta - \delta_\gamma, \end{array} \right.$$

oder endlich

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\delta_0 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 = 2\xi_0 = -\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \\ \delta_0 + \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 = 2\xi_1 = -\eta_0 + \eta_1 - \eta_2 - \eta_3, \\ \delta_0 - \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 = 2\xi_2 = -\eta_0 - \eta_1 + \eta_2 - \eta_3, \\ \delta_0 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 = 2\xi_3 = -\eta_0 - \eta_1 - \eta_2 + \eta_3, \\ \hline -\xi_0 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 2\eta_0 = -\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \\ \xi_0 + \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 2\eta_1 = -\delta_0 + \delta_1 - \delta_2 - \delta_3, \\ \xi_0 - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 2\eta_2 = -\delta_0 - \delta_1 + \delta_2 - \delta_3, \\ \xi_0 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 2\eta_3 = -\delta_0 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_3, \\ \hline -\eta_0 - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 = 2\delta_0 = -\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ \eta_0 + \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 = 2\delta_1 = -\xi_0 + \xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \\ \eta_0 - \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 2\delta_2 = -\xi_0 - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3, \\ \eta_0 - \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 = 2\delta_3 = -\xi_0 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_3. \end{array} \right.$$

Der in den Formeln (6, II) und (6, III) rechter Hand auftretende, allen Grössen ξ_i , η_i , δ_i gemeinsame Factor fällt aus den homogenen Gleichungen (7), (8), (9) heraus und kann daher weggelassen werden.

In diesem Satz sind die WEIERSTRASS'schen Additionstheoreme mit denen JACOBI's zusammengefasst. Die WEIERSTRASS'schen sind enthalten in den Formeln (7), die JACOBI'schen gehen aus (8) und (9) hervor, wenn man etwa die Grössen ξ_i weglässt und nur auf den Zusammenhang der Grössen η_i und δ_i achtet¹⁾. Es liegt auf der Hand, wie

1) Diese Formeln sind als Fundament der Theorie der elliptischen Functionen hingestellt in der von BORCHARDT ausgearbeiteten Vorlesung JACOBI's (Ges. Werke, Bd. I, S. 449). Dass die noch elementarere dreigliedrige Θ -Formel dem Scharfblick eines JACOBI entgehen konnte, lag an einem Umstand, den man zunächst für sehr geringfügig halten möchte. JACOBI hatte nämlich die von uns a' , b' , . . . und a'' , b'' , . . . genannten Grössen etwas anders bezeichnet, indem er, statt einer Transformation von der Periode drei, eine involutorische Abhängigkeit zwischen zwei Reihen von vier Grössen benutzte (a. a. O., S. 505 Nr. 10). Die Einführung der Grössen a , b , . . ., die ihn sofort zu den viel später erst auf anderem Wege von WEIERSTRASS gefundenen Formeln hätte hinleiten müssen, bot sich daher JACOBI

man von den Formeln JACOBI's, die hier aus den WEIERSTRASS'schen abgeleitet sind, wieder zu diesen zurückgelangen kann.

Zu berücksichtigen ist, wie gesagt, dass der Fall I eine einzige, der Fall II neun, der Fall III sechs Formelfamilien vertritt. In jedem der drei Fälle lassen die Gleichungen (7) vier von den zwölf Functionen ξ_i, η_i, ζ_i linear-unabhängig. Da diese vier Functionen aber nicht nur linear-unabhängig, sondern gänzlich von einander unabhängig sind, so umfassen die aufgestellten Gleichungen überhaupt *alle* Relationen, die zwischen den zwölf Functionen ξ_i, η_i, ζ_i bestehen ¹⁾.

Die Uebereinstimmung der Gleichungen (7) . . . (9) mit den in § 5 des zweiten Abschnittes entwickelten Formeln fällt in die Augen. Man braucht zwischen den Grössensystemen ξ_i, η_i, ζ_i und X_i, Y_i, Z_i nur etwa folgenden Zusammenhang anzunehmen:

nicht nothwendig dar. Wir haben also den lehrreichen Fall vor uns, dass eine kleine Aenderung in der Bezeichnung einen wesentlichen Fortschritt nach sich zieht. —

Uebrigens sind bei JACOBI die Formeln nicht in *drei*, sondern in *fünf* Gruppen zusammengefasst, indem der bei uns mit II bezeichnete Fall in drei Unterfälle zerlegt ist.

1) Wegen des Zusammenhangs der JACOBI'schen und WEIERSTRASS'schen Additionstheoreme (auf den übrigens auch Herr WEIERSTRASS selbst gelegentlich hingewiesen hat) vgl. BRIOT et BOUQUET, *Fonctions elliptiques* (2^{me} éd. Paris 1875, Livre VII); FR. MEYER, *Amtl. Ber. der Strassburger Naturforscherversammlung*, 1885, S. 354; SCHEIBNER, *Crelle's Journal* Bd. 102 (1888), S. 258; KRONECKER, ebenda S. 260 u. ff.

Dem im Texte hervorgehobenen Theorem sind BRIOT und BOUQUET nahe gekommen, noch mehr KRONECKER. Doch werden von diesen Autoren nur einzelne Theile des Satzes formulirt. Andererseits hat Herr CASPARY die Beziehung der JACOBI'schen Formeln (in die nur die Grössen Y und Z eingehen) zu der Figur zweier in desmischer Lage befindlicher Tetraeder hervorgehoben (*Math. Ann.* Bd. 29, S. 584; vgl. auch Bd. 28, S. 495).

Derselbe Verfasser hat auch die seit JACOBI bekannten Beziehungen zwischen orthogonalen Substitutionen und elliptischen Functionen genauer zu ergründen versucht, ohne jedoch zu einem besonders bemerkenswerthen Ergebniss zu kommen (*Bulletin des Sciences Mathém.*, sér. II., vol. 13 (1889), p. 89, *Journal de Mathém.*, sér. IV, t. 6 (1890) p. 367; vgl. JAHNKE, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* Jahrg. 1892, S. 178). Grösseren Werth dagegen scheint mir die auf \mathcal{P} -Functionen von *zwei* Argumenten bezügliche Abhandlung des Herrn CASPARY zu besitzen (*Crelle's J.* Bd. 94 (1883) S. 74). Leider wird die Brauchbarkeit aller dieser Arbeiten dadurch sehr beeinträchtigt, dass ihr Verfasser Bezeichnungen benutzt, die das eigentliche Gesetz seiner Formeln nur schwer erkennen lassen.

$$(10) \begin{cases} X_0 = \xi_0, & X_1 = \xi_1, & X_2 = \xi_2, & X_3 = \xi_3, \\ Y_0 = -\eta_0, & Y_1 = \eta_1, & Y_2 = \eta_2, & Y_3 = \eta_3, \\ Z_0 = -\delta_0, & Z_1 = -\delta_1, & Z_2 = -\delta_2, & Z_3 = -\delta_3, \end{cases}$$

um beide Gleichungssysteme vollständig in einander überzuführen. Es ergibt sich also, bei Auffassung der Grössen ξ_i als homogener Coordinaten eines Raumpunktes, ganz ungezwungen eine geometrische Auffassung unserer Formeln, die sie in die innigste Beziehung setzt zu den *desmischen Tetraedern*, der *Kummer'schen Configuration*, den *orthogonalen Substitutionen*, der *sphärischen Trigonometrie*. Allerdings ist diese geometrische Deutung insofern unvollständig, als sie nur die Verhältnisse der Grössen ξ_i , η_i , δ_i in Betracht zieht; bei den Anwendungen kommt es indessen meistens gerade auf die *Verhältnisse* der Θ -Functionen an.

Will man die Grössen ξ_i , η_i , δ_i selbst in ähnlicher Weise deuten, so wird man einen Raum von vier Dimensionen zu Hülfe nehmen; man kann dann die Theorie mit den Eigenschaften eines regulären Körpers, des sogenannten *Vierundzwanzigzells* in Verbindung bringen.

§ 2.

Fortsetzung: Das Aequivalent der Gruppe G_{576} .

Das Wesen der nachgewiesenen Beziehung zwischen elliptischen Functionen und orthogonalen Substitutionen liegt natürlich nicht darin, dass man die Substitutionscoefficienten überhaupt irgendwie durch elliptische Functionen von vier Parametern darstellen kann — dies ist eine selbstverständliche Folge des Ausdrucks jener Grössen durch die Parameter X_i —, sondern es liegt in der besonderen Natur der Darstellung, nämlich darin, dass die coordinirten Grössen ξ_i , η_i , δ_i ganz *dieselben* Functionen, und zwar sehr einfache Functionen werden von Argumenten, die durch lineare Substitutionen aus einander hervorgehen. Besondere Beachtung verdient dabei der Umstand, dass die Gleichungen zwischen den zwölf Functionen ξ_i , η_i , δ_i die nämliche Form haben, wie die Gleichungen zwischen den Argumenten.

Die Natur des ganzen Zusammenhangs wird noch deutlicher durch folgenden Satz:

Die in § 8 des zweiten Abschnittes definirte Gruppe G_{16} (die Gruppe der Kummer'schen Configuration) wird durch die Gleichungen (6) und

(10) des § 1 in jedem der drei Fälle I, II, III isomorph bezogen auf eine gewisse Gruppe $\mathfrak{G}_{(16)}$ von linearen Substitutionen der Grössen a, b, c, d .

Durch dieselben Formeln wird die umfassendere Gruppe G_{576} (die Gruppe der desmischen Tetraeder) isomorph bezogen auf eine Gruppe $\mathfrak{G}_{(576)}$ von linearen Substitutionen der sämtlichen Argumente $a, b, c, d, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ der Functionen $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, e_1, e_2, e_3$.

Die genannten Gruppen umfassen jedesmal unendlich viele Substitutionen, woran wir hier dadurch erinnert haben, dass der den Grad der Gruppe bezeichnende Index in Klammer eingeschlossen worden ist. In demselben Sinne beziehen sich die Bezeichnungen $\mathfrak{G}_{(96)}, \mathfrak{G}_{(192)}$ auf die Untergruppen G_{96}, G_{192} der Gruppe G_{576} . (II, § 8, S. 155.)

Die Definition der Gruppen $\mathfrak{G}_{(16)}, \mathfrak{G}_{(96)}, \mathfrak{G}_{(192)}, \mathfrak{G}_{(576)}$ ist immer eine andere in jedem der drei Fälle I, II, III.

Um die in ihnen enthaltenen Substitutionen übersehen zu können, ordnen wir die S. 193 besprochenen Aenderungen der Grössen a, b, c, d , die in allen drei Fällen nur das Hinzutreten eines gemeinsamen Factors zu den Grössen ξ_i, η_i, δ_i bewirken, von vorn herein der Identität zu. Es sind dies die Vermehrung einer der Grössen a, b, c, d um eine doppelte Periode $\pm 4\tilde{\omega}$, und die Vermehrung zweier dieser Grössen um dieselbe einfache Periode $\pm 2\tilde{\omega}$. Ausserdem betrachten wir als von der Identität nicht verschieden alle linearen Transformationen der Perioden ω, ω' (von der Determinante Eins), die die Grössen e_1, e_2, e_3 einzeln ungeändert lassen. Die Gruppe aller linearen Periodentransformationen reducirt sich dadurch auf eine Gruppe von sechs Transformationen $\mathfrak{g}_{(6)}$, die den Vertauschungen von e_1, e_2, e_3 oder $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$ entsprechen (SCHWARZ, Art. 33, HALPHEN p. 260). Wir behandeln nun der Reihe nach die drei Annahmen I, II, III.

I.

Der Identität sind noch weiter zuzuordnen:

- 1) Die sämtlichen Vertauschungen der Grössen a, b, c, d .
- 2) Die gleichzeitige Aenderung des Vorzeichens zweier dieser Grössen.

Den erzeugenden Substitutionen $S_1, S_2, S_3, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ der Gruppe G_{16} oder \mathfrak{G}_{16} (II. Abschn., § 11, S. 167) entsprechen dann

die folgenden Aenderungen der Grössen a, b, c, d um halbe Perioden $\pm \bar{\omega}$:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1: (\omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda), \quad \Sigma'_1: (-\omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda), \\ S_2: (\omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu), \quad \Sigma'_2: (-\omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu), \\ S_3: (\omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu), \quad \Sigma'_3: (-\omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu). \end{array} \right.$$

Dabei ist es im Falle der Substitutionen Σ'_i natürlich gleichgültig, bei welcher der Grössen a, b, c, d wir die hinzugefügte halbe Periode mit dem negativen Vorzeichen versehen wollen¹⁾.

Aus der durch (1) definirten Gruppe $g_{(16)}$ entsteht sodann die Gruppe $g_{(96)}$, wenn wir die sechs Transformationen der Gruppe $g_{(6)}$ hinzufügen, die Gruppe $g_{(192)}$, wenn wir ausserdem den Vorzeichenwechsel einer einzelnen der Grössen a, b, c, d zulassen, endlich die Gruppe $g_{(576)}$, wenn wir mit den bereits genannten Substitutionen noch die cyclische Substitution von der Periode 3 verbinden, die durch die Gleichungen (2) S. 193 definirt ist, und eine cyclische Vertauschung der drei Grössenreihen ξ_i, η_i, ζ_i bewirkt ($i = 0, 1, 2, 3$).

II.

In den Fällen II und III treten an Stelle der unter I genannten Substitutionen zum Theil andere, die sich aus jenen durch Transformation vermöge der Substitution $(0, 0, \omega_\lambda, -\omega_\lambda)$, bez. $(0, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu)$ ergeben. (Vgl. S. 104 Anmerk.) Im Falle II hat man danach der identischen Substitution zuzuordnen:

1) Die Vertauschung von a und b , die Vertauschung von c und d , und die Substitution

$$a_0 = c - \omega_\lambda, \quad b_0 = b, \quad c_0 = a + \omega_\lambda, \quad d_0 = d$$

(sowie alle 24 wesentlich-verschiedenen Verbindungen dieser Substitutionen).

1) Da die im zweiten Abschnitte durchaus natürliche Auszeichnung des X -Tetraeders im gegenwärtigen Zusammenhang nicht mehr gerechtfertigt ist, so betrachtet man als erzeugende Substitutionen der Gruppe G_{16} besser noch die in der Anmerkung auf S. 168 definirten. Die entsprechenden Substitutionen von $g_{(16)}$ sind:

$$\begin{aligned} S_3 \Sigma_2: (\omega_\lambda + 2\omega_\mu, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda), \\ S_2 \Sigma_3: (\omega_\lambda + 2\omega_\nu, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda), \end{aligned}$$

u. s. f., mit cyclischer Vertauschung von 1, 2, 3; λ, μ, ν .

2) Den Vorzeichenwechsel von a und b , den von c und d , sowie die Substitution

$$a_0 = -a, b_0 = b, c_0 = -c + 2\omega_\lambda, d_0 = d \quad (\text{u. s. w.}).$$

Die erzeugenden Substitutionen von $\mathfrak{g}_{(10)}$ werden dieselben, wie unter I (Nr. 1); an Stelle der Substitutionen von $\mathfrak{g}_{(00)}$ aber treten zum Theil andere. Man hat nämlich jetzt die Substitutionen von $\mathfrak{g}_{(0)}$, die die nachfolgenden Vertauschungen von e_λ, e_μ, e_ν und $\sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_\nu$ bewirken, mit den daneben aufgeführten Aenderungen der Grössen a, b, c, d zu verbinden:

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu, \nu) &: (0, 0, 0, 0); & (\lambda, \nu, \mu) &: (0, 0, 0, 0); \\ (\mu, \nu, \lambda) &: (0, 0, \omega_\nu, -\omega_\nu); & (\nu, \mu, \lambda) &: (0, 0, \omega_\mu, -\omega_\mu); \\ (\nu, \lambda, \mu) &: (0, 0, \omega_\mu, -\omega_\mu); & (\mu, \lambda, \nu) &: (0, 0, \omega_\nu, -\omega_\nu). \end{aligned}$$

III.

1) An Stelle der Vertauschungen der Grössen a, b, c, d treten jetzt die Substitutionen

$$\begin{aligned} a_0 &= b - \omega_\lambda, & b_0 &= a + \omega_\lambda, & c_0 &= c, & d_0 &= d; \\ a_0 &= c - \omega_\mu, & b_0 &= b, & c_0 &= a + \omega_\mu, & d_0 &= d; \\ a_0 &= d - \omega_\nu, & b_0 &= b, & c_0 &= c, & d_0 &= a + \omega_\nu, \end{aligned}$$

und die daraus zusammzusetzenden.

2) An Stelle der Vorzeichenwechsel zweier der Grössen a, b, c, d treten die Substitutionen

$$\begin{aligned} a_0 &= -a, & b_0 &= -b + 2\omega_\lambda, & c_0 &= c, & d_0 &= d; \\ a_0 &= -a, & b_0 &= b, & c_0 &= -c + 2\omega_\mu, & d_0 &= d; \\ a_0 &= -a, & b_0 &= b, & c_0 &= c, & d_0 &= -d + 2\omega_\nu, \end{aligned}$$

u. s. f.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{g}_{(10)}$ sind wieder dieselben, wie unter I (Nr. 1); man kann aber, was bemerkt zu werden verdient, diese Substitutionen jetzt auch so schreiben

	a_0	b_0	c_0	d_0		a_0	b_0	c_0	d_0	
(2)	S_1	b	a	d	c	Σ_1	$-b$	$-a$	d	c
	S_2	c	d	a	b	Σ_2	$-c$	$-d$	a	b
	S_3	d	c	b	a	Σ_3	$-d$	$-c$	b	a

Die Substitutionen endlich, die die Vertauschungen der Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 nach sich ziehen, lauten jetzt, wenn wir uns einer ähnlichen Schreibart, wie unter II bedienen:

$$\begin{aligned}
 (\lambda, \mu, \nu) &: (0, 0, 0, 0); & (\lambda, \nu, \mu) &: (0, 0, \omega_\lambda, -\omega_\lambda); \\
 (\mu, \nu, \lambda) &: (0, \omega_\nu, \omega_\lambda, \omega_\mu); & (\nu, \mu, \lambda) &: (0, -\omega_\mu, 0, \omega_\mu); \\
 (\nu, \lambda, \mu) &: (0, \omega_\mu, \omega_\nu, \omega_\lambda); & (\mu, \lambda, \nu) &: (0, \omega_\nu, -\omega_\nu, 0).
 \end{aligned}$$

Specialisirt man die Formeln (6, III) des § 4 dadurch, dass man $e_\mu = e_\nu = -\frac{1}{2}e_\lambda$ setzt (vgl. SCHWARZ, Art. 10, 20, HALPHEN p. 289), so kommt man zu den Ausdrücken¹⁾

$$(6, IV) \left\{ \begin{aligned}
 \xi_0 &= 2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b), \\
 \xi_1 &= 2 \cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b), \\
 \xi_2 &= 2 \sin c \cos d = \sin(c+d) + \sin(c-d), \\
 \xi_3 &= 2 \cos c \sin d = \sin(c+d) - \sin(c-d),
 \end{aligned} \right.$$

die dadurch bemerkenswerth sind, dass die zu einem der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe (II, § 8, S. 153, 154) gehörigen Coordinaten in die Sinus von vier unabhängigen Argumenten übergegangen sind; im Falle $e_\lambda = e_\mu = e_\nu = 0$ endlich folgt

$$(6, V) \quad \xi_0 = a, \xi_1 = b, \xi_2 = c, \xi_3 = d.$$

Die Gleichungen (7), (8), (9) des § 4 gehen jetzt ohne irgendwie ihre Form zu ändern, in die linearen Gleichungen zwischen den Grössen $a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d''$ über (vgl. Nr. 2, § 4, S. 193). —

Setzt man etwa im Falle I eine der Grössen a, b, c, d gleich Null oder gleich einer halben Periode, so liegt der zugehörige Raumpunkt auf einer Fläche des ξ -Tetraeders; und in ähnlicher Weise entstehen die Flächen des η - und des ζ -Tetraeders durch Specialisirung der Parameter a', b', c', d' und a'', b'', c'', d'' . Halten wir uns an die Annahme $a'' = 0$, und führen wir, vor dem Uebergang zu dieser Grenze, eine neue Ordinate \bar{y}_0 ein durch die Substitution $\bar{y}_0 = \frac{b_0}{a''}$, so erfahren die zwischen den Grössen X_i, Y_i, Z_i (§ 4, Nr. 10, S. 198) bestehenden Relationen die in § 14 des II. Abschnittes angegebene Aenderung. Man kann also mit Hülfe dieses Grenzübergangs auch die ebene Trigonometrie zu den elliptischen Functionen in Beziehung setzen.

1) Wir fahren hier in der Nummernbezeichnung des § 4 fort.

§ 3.

Darstellung orthogonaler Substitutionen durch \mathcal{G} -Functionen von vier Argumenten.

Die durch die Formeln Nr. 10 in § 1 definirten Ausdrücke für die Coefficienten a_{ik} einer orthogonalen Substitution sind ganze homogene Functionen *zweiten* Grades einer jeden der Grössenreihen

$$\Theta a, \Theta_\lambda a, \Theta_\mu a, \Theta_\nu a \quad (\text{u. s. f.}).$$

Es ist nun bemerkenswerth, dass sich die Ausdrücke der zehn Coefficienten $a_{00}, a_{11} \dots a_{33}$, nämlich

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{00} &= \sum \xi_i^2 = \sum \eta_i^2 = \sum \delta_i^2, \\ a_{11} &= \sum (\pm \xi_i^2) = 2(\eta_2 \eta_3 - \eta_0 \eta_1) = 2(\delta_2 \delta_3 + \delta_0 \delta_1), \\ a_{23} &= \sum (\pm \eta_i^2) = 2(\delta_2 \delta_3 - \delta_0 \delta_1) = 2(\xi_2 \xi_3 + \xi_0 \xi_1), \\ a_{32} &= \sum (\pm \delta_i^2) = 2(\xi_2 \xi_3 - \xi_0 \xi_1) = 2(\eta_2 \eta_3 + \eta_0 \eta_1) \quad \text{u. s. w.,} \end{aligned} \right.$$

durch Einführung neuer Argumente an Stelle der Grössen a, a', \dots so umformen lassen, dass sie eine noch einfachere Gestalt annehmen, nämlich ganze homogene Functionen *ersten* Grades der Θ -Functionen der transformirten Argumente werden.

Die gemeinte Aenderung der Argumente wird bewirkt durch die Substitutionen

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= c - d = c' - d' = c'' - d'', \\ \beta &= -c - d = a' + b' = -a'' + b'', \\ \gamma &= -a + b = -c' - d' = a'' + b'', \\ \delta &= a + b = -a' + b' = -c'' - d'', \\ \\ \alpha' &= d - b = d' - b' = d'' - b'', \\ \beta' &= -d - b = a' + c' = -a'' + c'', \\ \gamma' &= -a + c = -d' - b' = a'' + c'', \\ \delta' &= a + c = -a' + c' = -d'' - b'', \\ \\ \alpha'' &= b - c = b' - c' = b'' - c'', \\ \beta'' &= -b - c = a' + d' = -a'' + d'', \\ \gamma'' &= -a + d = -b' - c' = a'' + d'', \\ \delta'' &= a + d = -a' + d' = -b'' - c''. \end{aligned} \right.$$

Die so definierten zwölf Grössen $\alpha \dots \delta''$ sind unter einander durch genau dieselben Gleichungen verbunden, wie die ursprünglichen Argumente $a \dots d''$.

Es können also auch hier wieder irgend vier derselben Gruppe angehörige unter ihnen als unabhängige Parameter betrachtet werden.

Die in Rede stehende Umgestaltung vollzieht sich jetzt mit Hilfe von Formeln, die aus den Formeln des § 1 durch Specialisierung hervorgehen. Setzen wir nämlich dort zwei der Argumente a, b, c, d gleich Null, so ergeben sich die folgenden speciellen Additionstheoreme:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (e_\mu - e_\nu) \sigma_\mu u \sigma_\nu v + (e_\nu - e_\lambda) \sigma_\nu u \sigma_\lambda v + (e_\lambda - e_\mu) \sigma_\lambda u \sigma_\mu v \\ \quad = 2(e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu) \sigma^2 \frac{u+v}{2} \sigma^2 \frac{u-v}{2}, \\ - (e_\mu - e_\nu) \sigma_\mu u \sigma_\nu v + (e_\nu - e_\lambda) \sigma_\nu u \sigma_\lambda v + (e_\lambda - e_\mu) \sigma_\lambda u \sigma_\mu v \\ \quad = -2(e_\mu - e_\nu) \sigma_\mu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\nu^2 \frac{u-v}{2}, \\ \mp (e_\mu - e_\nu) \sigma_\mu u \sigma_\nu v \quad + \quad \sigma_\mu u \sigma_\nu v \quad - \quad \sigma_\nu u \sigma_\mu v \\ \quad = -2(e_\mu - e_\nu) \sigma^2 \frac{u \pm v}{2} \sigma_\mu^2 \frac{u \mp v}{2}, \\ \mp (e_\mu - e_\nu) \sigma_\mu u \sigma_\nu v \quad + \quad \sigma_\mu u \sigma_\nu v \quad + \quad \sigma_\nu u \sigma_\mu v \\ \quad = \quad \quad \quad 2 \sigma_\mu^2 \frac{u \pm v}{2} \sigma_\nu^2 \frac{u \mp v}{2}, \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\mu u \sigma_\nu v + \sigma_\nu u \sigma_\mu v \\ \quad = 2 \sigma_\mu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\nu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\mu \frac{u-v}{2} \sigma_\nu \frac{u-v}{2}, \\ \sigma_\mu u \sigma_\nu v - \sigma_\nu u \sigma_\mu v \\ \quad = 2 \sigma_\mu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\nu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\mu \frac{u-v}{2} \sigma_\nu \frac{u-v}{2}, \\ \sigma_\mu u \sigma_\nu v + \sigma_\nu u \sigma_\mu v \\ \quad = 2 \sigma_\mu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\nu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\mu \frac{u-v}{2} \sigma_\nu \frac{u-v}{2}, \\ \sigma_\mu u \sigma_\nu v - \sigma_\nu u \sigma_\mu v \\ \quad = -2(e_\mu - e_\nu) \sigma_\mu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\nu^2 \frac{u+v}{2} \sigma_\mu \frac{u-v}{2} \sigma_\nu \frac{u-v}{2}. \end{array} \right.$$

Um die mit Hilfe dieser Identitäten aus (1) abzuleitenden Ausdrücke der Substitutionscoefficienten bequem übersehen zu können, führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{0000} = \Theta(0)^4 \cdot \Theta \alpha \Theta \beta \Theta \gamma \Theta \delta \\ = (e_\mu - e_\nu)^2 (e_\nu - e_\lambda)^2 (e_\lambda - e_\mu)^2 \cdot \mathcal{G} \alpha \mathcal{G} \beta \mathcal{G} \gamma \mathcal{G} \delta, \\ \Pi_{\lambda\lambda\lambda} = \Theta_\lambda(0)^4 \cdot \Theta_\lambda \alpha \Theta_\lambda \beta \Theta_\lambda \gamma \Theta_\lambda \delta \\ = (e_\mu - e_\nu)^2 \cdot \mathcal{G}_\lambda \alpha \mathcal{G}_\lambda \beta \mathcal{G}_\lambda \gamma \mathcal{G}_\lambda \delta, \\ \Pi_{00\lambda\lambda} = \Theta_\mu(0)^2 \Theta_\nu(0)^2 \cdot \Theta \alpha \Theta \beta \Theta_\lambda \gamma \Theta_\lambda \delta \\ = (e_\mu - e_\nu) (e_\nu - e_\lambda) (e_\lambda - e_\mu) \cdot \mathcal{G} \alpha \mathcal{G} \beta \mathcal{G}_\lambda \gamma \mathcal{G}_\lambda \delta, \\ \Pi_{\mu\mu\nu\nu} = \Theta_\mu(0)^2 \Theta_\nu(0)^2 \cdot \Theta_\mu \alpha \Theta_\mu \beta \Theta_\nu \gamma \Theta_\nu \delta \\ = (e_\nu - e_\lambda) (e_\lambda - e_\mu) \cdot \mathcal{G}_\mu \alpha \mathcal{G}_\mu \beta \mathcal{G}_\nu \gamma \mathcal{G}_\nu \delta, \end{array} \right.$$

u. s. w. Die Aufeinanderfolge der Indices, die dem Zeichen Π angehängt sind, deutet in jedem Falle die Reihenfolge der den Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zuzuordnenden \mathcal{G} -Functionen an; Π'_{klmn} und Π''_{klmn} endlich sollen die Functionen bedeuten, die aus Π_{klmn} durch Substitution der Argumente $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ und $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ an Stelle von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hervorgehen.

Am übersichtlichsten gestaltet sich das Ergebniss der Rechnung im Falle

I.

Hier ergibt sich nämlich der Satz:

Die Ausdrücke

$$(6, I) \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{\lambda\lambda\lambda} + \Pi_{\mu\mu\mu} + \Pi_{\nu\nu\nu}, \\ \Pi_{\mu\nu\nu} + \Pi_{\nu\nu\mu}, \quad \Pi_{\lambda\mu\mu} + \Pi_{\mu\lambda\mu}, \quad \Pi_{\nu\lambda\lambda} + \Pi_{\lambda\nu\lambda}, \\ \Pi_{\lambda\mu\mu\lambda} + \Pi_{\mu\lambda\lambda\mu}, \quad \Pi_{\nu\nu\lambda\lambda} + \Pi_{\lambda\lambda\nu\nu}, \quad \Pi_{\mu\nu\nu\mu} + \Pi_{\nu\mu\mu\nu}, \\ \Pi_{\nu\lambda\nu\lambda} + \Pi_{\lambda\nu\lambda\nu}, \quad \Pi_{\mu\nu\nu\mu} + \Pi_{\nu\mu\mu\nu}, \quad \Pi_{\lambda\lambda\mu\mu} + \Pi_{\mu\mu\lambda\lambda}, \end{array} \right.$$

sind, in dieser Anordnung, gleich den Coefficienten $a_{00}, a_{11}, a_{12}, \dots a_{33}$ der durch die Formeln (1) definirten orthogonalen Substitution.

Sie ändern ihre Werthe nicht, wenn man die Producte Π_{klmn} durch die Producte Π'_{klmn} oder durch die Producte Π''_{klmn} ersetzt.

Die zweite Hälfte dieses Satzes ist natürlich eine Folge der in § 1 mitgetheilten Formeln JACOBI'S. — Man bemerke, dass die Grössen $a_{11} \dots a_{33}$ (durch eine einfach-transitive Gruppe) in einander übergeführt werden, wenn man einmal die Indices λ, μ, ν , sodann die Argumente β, γ, δ cyclisch vertauscht.

II.

Es würde umständlich sein, wollten wir auch in den Fällen II und III die einzelnen Substitutionscoefficienten auf dem angegebenen Wege

unmittelbar bestimmen. Wir gelangen schneller zum Ziel, wenn wir uns erinnern, dass der Fall II aus I hervorgeht durch die auf die Argumente a, b, c, d auszuübende Substitution $(0, 0, \omega_\lambda, -\omega_\lambda)$. Diese Substitution zieht für unsere drei neuen Argumentreihen die folgenden Substitutionen nach sich:

$[2\omega_\lambda, 0, 0, 0], [-\omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda], [-\omega_\lambda, -\omega_\lambda, -\omega_\lambda, -\omega_\lambda]$.
 Durch dieselben Substitutionen muss auch die neu zu entwerfende Coefficiententafel aus (6, I) hervorgehen, abgesehen von einem Exponentialfactor, der für alle Elemente den nämlichen Werth $-(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu)e^{2\eta_\lambda(\alpha + \omega_\lambda)}$ hat.

Es entsteht also jetzt die Coefficiententafel

$$\begin{aligned}
 (6, II): \quad & (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) \left\{ \begin{array}{ccc} a_{00}, & & \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{array} \right\} = \\
 & - \Pi_{\lambda\lambda\lambda} + \Pi_{\mu\mu\mu} + \Pi_{\nu\nu\nu} \\
 = & \frac{-\Pi'_{0000} + (e_\lambda - e_\mu)^2 \Pi''_{\mu\mu\mu\mu} + (e_\lambda - e_\nu)^2 \Pi'_{\nu\nu\nu\nu}}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} \\
 = & \frac{\Pi''_{0000} + (e_\lambda - e_\mu)^2 \Pi''_{\mu\mu\mu\mu} + (e_\lambda - e_\nu)^2 \Pi''_{\nu\nu\nu\nu}}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}, \\
 = & \begin{array}{ccc} \Pi_{\mu\nu\nu} + \Pi_{\nu\nu\mu} & | & -\Pi_{\lambda\mu\lambda} + \Pi_{\mu\lambda\mu} & | & \Pi_{\nu\lambda\nu} - \Pi_{\lambda\nu\lambda} \\ \Pi'_{\mu\nu\nu} + \Pi'_{\nu\nu\mu} & = & -\Pi'_{0\nu0\nu} + \Pi'_{\nu0\nu0} & = & -\Pi'_{\mu00\mu} + \Pi'_{0\mu0\mu} \\ \Pi''_{\mu\nu\nu} + \Pi''_{\nu\nu\mu} & = & \Pi''_{0\nu0\nu} + \Pi''_{\nu0\nu0} & = & -\Pi''_{\mu00\mu} - \Pi''_{0\mu0\mu}, \end{array} \\
 = & \begin{array}{ccc} -\Pi_{\lambda\mu\lambda} + \Pi_{\mu\lambda\mu} & | & \Pi_{\nu\nu\lambda} - \Pi_{\lambda\nu\nu} & | & \Pi_{\mu\nu\nu} + \Pi_{\nu\mu\nu} \\ -\Pi'_{0\nu\nu0} + \Pi'_{\nu00\nu} & = & -\Pi'_{\mu\mu00} + \Pi'_{00\mu\mu} & = & \Pi'_{\mu\nu\nu} + \Pi'_{\nu\mu\nu} \\ \Pi''_{0\nu\nu0} + \Pi''_{\nu00\nu} & = & -\Pi''_{\mu\mu00} - \Pi''_{00\mu\mu} & = & \Pi''_{\mu\nu\nu} + \Pi''_{\nu\mu\nu}, \end{array} \\
 = & \begin{array}{ccc} \Pi_{\nu\lambda\nu} - \Pi_{\lambda\nu\lambda} & | & \Pi_{\mu\nu\nu} + \Pi_{\nu\mu\nu} & | & -\Pi_{\lambda\lambda\mu} + \Pi_{\mu\mu\lambda\lambda} \\ -\Pi'_{\mu0\mu0} + \Pi'_{0\mu0\mu} & = & \Pi'_{\mu\nu\nu} + \Pi'_{\nu\mu\nu} & = & -\Pi'_{00\nu\nu} + \Pi'_{\nu000} \\ -\Pi''_{\mu0\mu0} - \Pi''_{0\mu0\mu} & = & \Pi''_{\mu\nu\nu} + \Pi''_{\nu\mu\nu} & = & \Pi''_{00\nu\nu} + \Pi''_{\nu000}. \end{array}
 \end{aligned}$$

Den Werth von a_{00} schreibt man; um das Bildungsgesetz hervortreten zu lassen, besser ausführlich:

$$\begin{aligned}
 a_{00} &= \\
 = & \frac{-(e_\mu - e_\nu)^2 \sigma_\lambda \sigma_\lambda \sigma_\lambda \sigma_\lambda + (e_\lambda - e_\nu)^2 \sigma_\mu \sigma_\mu \sigma_\mu \sigma_\mu + (e_\lambda - e_\mu)^2 \sigma_\nu \sigma_\nu \sigma_\nu \sigma_\nu}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} \\
 = & -(e_\mu - e_\nu)^2 \sigma_\alpha' \sigma_\beta' \sigma_\gamma' \sigma_\delta' + \sigma_\mu \alpha' \sigma_\mu \beta' \sigma_\mu \gamma' \sigma_\mu \delta' + \sigma_\nu \alpha' \sigma_\nu \beta' \sigma_\nu \gamma' \sigma_\nu \delta' \\
 = & (e_\mu - e_\nu)^2 \sigma_\alpha'' \sigma_\beta'' \sigma_\gamma'' \sigma_\delta'' + \sigma_\mu \alpha'' \sigma_\mu \beta'' \sigma_\mu \gamma'' \sigma_\mu \delta'' + \sigma_\nu \alpha'' \sigma_\nu \beta'' \sigma_\nu \gamma'' \sigma_\nu \delta''.
 \end{aligned}$$

Der den sämtlichen Grössen a_{ik} in (6, II) gemeinsame Nenner fällt heraus, oder genauer, er geht in den Factor -1 über, wenn man in den Definitionsgleichungen der Grössen ξ_i (6, II, S. 195) rechter Hand den allen gemeinsamen Nenner unterdrückt, und statt der \mathcal{G} -Functionen die Θ -Functionen benutzt.

III.

Die auf die Grössen a, b, c, d auszuübende Substitution $(0, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu)$ zieht für die neuen Argumente die folgenden Substitutionen nach sich:

$$[\omega_\lambda + 2\omega_\mu, \omega_\lambda, \omega_\lambda, \omega_\lambda], [\omega_\mu + 2\omega_\nu, \omega_\mu, \omega_\mu, \omega_\mu], [\omega_\nu + 2\omega_\lambda, \omega_\nu, \omega_\nu, \omega_\nu].$$

Man erhält jetzt, durch eine ähnliche Rechnung wie vorhin, die Coefficiententafel

$$(6, III): -(e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu) \left\{ \begin{array}{ccc} a_{00}, & & \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{array} \right\} =$$

$$= - \frac{\Pi_{0000} + (e_\lambda - e_\mu)^2 \Pi_{\mu\mu\mu\mu} - (e_\lambda - e_\nu)^2 \Pi_{\nu\nu\nu\nu}}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}$$

$$= - \frac{\Pi'_{0000} + (e_\mu - e_\nu)^2 \Pi'_{\nu\nu\nu\nu} - (e_\mu - e_\lambda)^2 \Pi'_{\lambda\lambda\lambda\lambda}}{(e_\mu - e_\nu)(e_\mu - e_\lambda)}$$

$$= - \frac{\Pi''_{0000} + (e_\nu - e_\lambda)^2 \Pi''_{\lambda\lambda\lambda\lambda} - (e_\nu - e_\mu)^2 \Pi''_{\mu\mu\mu\mu}}{(e_\nu - e_\lambda)(e_\nu - e_\mu)},$$

$\Pi_{\nu\nu\mu\mu} - \Pi_{\mu\mu\nu\nu}$	$-\Pi_{0\nu0\nu} + \Pi_{\nu0\nu0}$	$\Pi_{\mu00\mu} + \Pi_{0\mu\mu0}$
$= -\Pi'_{00\lambda\lambda} + \Pi'_{\lambda\lambda00}$	$= \Pi'_{\nu0\nu0} + \Pi'_{0\nu0\nu}$	$= \Pi'_{\lambda\nu\lambda\nu} - \Pi'_{\nu\lambda\lambda\nu}$
$= \Pi''_{\lambda\lambda00} + \Pi''_{00\lambda\lambda}$	$= \Pi''_{\mu\lambda\mu\lambda} - \Pi''_{\lambda\mu\lambda\mu}$	$= -\Pi''_{0\mu\mu0} + \Pi''_{\mu00\mu}$
$-\Pi_{0\nu\nu0} + \Pi_{\nu00\nu}$	$\Pi_{\mu\mu00} + \Pi_{00\mu\mu}$	$\Pi_{\nu\nu\mu\mu} - \Pi_{\mu\nu\nu\nu}$
$= \Pi'_{\nu00\nu} + \Pi'_{0\nu\nu0}$	$= \Pi'_{\lambda\lambda\nu\nu} - \Pi'_{\nu\nu\lambda\lambda}$	$= -\Pi'_{0\lambda0\lambda} + \Pi'_{\lambda0\lambda0}$
$= \Pi''_{\mu\lambda\mu\lambda} - \Pi''_{\lambda\mu\lambda\mu}$	$= -\Pi''_{00\mu\mu} + \Pi''_{\mu\mu00}$	$= \Pi''_{\lambda0\lambda0} + \Pi''_{0\lambda0\lambda}$
$\Pi_{\mu0\mu0} + \Pi_{0\mu0\mu}$	$\Pi_{\nu\mu\mu\nu} - \Pi_{\mu\nu\nu\mu}$	$-\Pi_{00\nu\nu} + \Pi_{\nu\nu00}$
$= \Pi'_{\lambda\nu\lambda\nu} - \Pi'_{\nu\lambda\lambda\nu}$	$= -\Pi'_{0\lambda\lambda0} + \Pi'_{\lambda0\lambda\lambda}$	$= \Pi'_{\nu\nu00} + \Pi'_{00\nu\nu}$
$= -\Pi''_{\mu0\mu0} + \Pi''_{0\mu0\mu}$	$= \Pi''_{\lambda0\lambda\lambda} + \Pi''_{0\lambda\lambda\lambda}$	$= \Pi''_{\mu\mu\lambda\lambda} - \Pi''_{\lambda\lambda\mu\mu}$

Hierzu ist Aehnliches zu bemerken, wie zu den Formeln unter II. Der Coefficient a_{00} lautet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 a_{00} &= \\
 &= -\frac{1}{e_\mu - e_\nu} \left\{ (e_\mu - e_\nu)^2 \sigma \sigma \sigma \sigma + \sigma_\mu \sigma_\mu \sigma_\mu \sigma_\mu - \sigma_\nu \sigma_\nu \sigma_\nu \sigma_\nu \right\} \\
 &= -\frac{1}{e_\nu - e_\lambda} \left\{ (e_\nu - e_\lambda)^2 \sigma \sigma \sigma \sigma + \sigma_\nu \sigma_\nu \sigma_\nu \sigma_\nu - \sigma_\lambda \sigma_\lambda \sigma_\lambda \sigma_\lambda \right\}' \\
 &= -\frac{1}{e_\lambda - e_\mu} \left\{ (e_\lambda - e_\mu)^2 \sigma \sigma \sigma \sigma + \sigma_\lambda \sigma_\lambda \sigma_\lambda \sigma_\lambda - \sigma_\mu \sigma_\mu \sigma_\mu \sigma_\mu \right\}'' .
 \end{aligned}$$

Mit den aufgezählten 16 Fällen sind die verschiedenen sich darbietenden Möglichkeiten, aus linearen Verbindungen der Grössen H_{xlmn} die Coefficienten einer orthogonalen Substitution zusammenzusetzen, noch nicht erschöpft. Es geht nämlich aus den Formeln (6, 1) eine ähnliche Coefficiententafel überhaupt immer dann hervor, wenn man die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einer Substitution der Gruppe Γ unterwirft, die aus der in § 1 (S. 193, 194) definirten Gruppe durch Vertauschung der Grössen a, b, c, d mit den Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entspringt. Die Zahl der wesentlich verschiedenen Substitutionen dieser Gruppe ist, wie gesagt, 256. *Es gibt also 256 verschiedene Coefficiententafeln der angegebenen Art.*

Eine Uebersicht über die Gesamtheit dieser Formeln erhält man, wenn man die Gruppe Γ oder $\Gamma_{(256)}$ wieder in zwei Untergruppen von je 16 Substitutionen zerlegt. Der Identität sind zuzuordnen die Aenderung einer der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ um $4\omega_2$ oder zweier dieser Grössen um dasselbe Vielfache von $2\omega_2$. Als Erzeugende der ersten Untergruppe können dann gelten die auf $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auszuführenden Substitutionen $[2\omega_2, 0, 0, 0]$, $[\omega_2, \omega_2, \omega_2, \omega_2]$ u. s. w.; als Erzeugende der zweiten Untergruppe die Substitutionen, bei denen α ungeändert bleibt, während β, γ, δ um solche halbe Perioden wachsen, deren Summe gleich Null ist.

Die erste Untergruppe führt zu den bereits aufgestellten Formeln; durch die zweite gehen aus jeder von diesen noch 15 weitere Coefficiententafeln hervor.

In jeder der 16 Reihen von je 16 orthogonalen Substitutionen, die auf solche Art entstehen, gruppieren sich die einzelnen Glieder wieder nach dem Schema $4 + 9 + 6$. Das erste, für sich allein stehende, unter einer der Formen I... III begriffene Glied ist in doppelter Hinsicht ausgezeichnet. Erstens algebraisch dadurch, dass in ihm die Differenzen der Grössen e_λ, e_μ, e_ν rational vorkommen,

während die übrigen 15 Coefficiententafeln die Quadratwurzeln jener Differenzen enthalten; zweitens, im Zusammenhange hiermit, durch die besonders einfache Vertheilung der zehn Substitutionscoefficienten auf die in § 1 aufgestellten Formelfamilien (in denen wir uns jetzt die Grössen a, b, c, d durch die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ersetzt denken wollen). Es ist nämlich in den Fällen I...III, nicht aber in den übrigen 240 Fällen, immer der erste Coefficient a_{00} der ersten Familie (I) entnommen, und die übrigen neun Coefficienten vertheilen sich auf die neun Familien des Typus (II); die sechs Familien des Typus (III) kommen in diesen Tafeln überhaupt nicht vor¹⁾.

Es ist nicht unsere Absicht, diesen Gegenstand, der mit der Theorie der den Periodenvierteln entsprechenden Functionen \mathcal{G}_{ik} nahe zusammenhängt, im Einzelnen zu erörtern; doch werden wir später (in § 5) wenigstens in einem Specialfalle die 16 orthogonalen Substitutionen wirklich aufstellen, die aus einem Coefficientensystem des Typus III entspringen. —

Wir haben die in diesem Paragraphen mitgetheilten Sätze aus den Additionstheoremen JACOBI's hergeleitet. Es ist daher wohl nicht überflüssig, ausdrücklich darauf hinzuweisen, dass das Ergebniss einen ganz anderen Charakter hat, als jene Formeln. Sieht man nämlich von der zweiten Hälfte etwa des unter I ausgesprochenen Theorems ab, die, wie gesagt, den JACOBI'schen Sätzen gegenüber nichts Neues bietet, so gehört der übrig bleibende Satz eigentlich gar nicht der Theorie der elliptischen Functionen, sondern der *Algebra* an: Die Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten a_{ik} sind

1) Für den mit der Theorie der hyperelliptischen Functionen bekannten Leser braucht nur kurz angedeutet zu werden, wie man die Gruppierung der 256 Formelsysteme durch eine doppelte Charakteristikenbezeichnung darstellen kann. Das einzelne System wird bezeichnet durch eine Haupt- und eine Nebencharakteristik. Die Hauptcharakteristiken unterscheiden die 16 Reihen, die aus den Tafeln I...III entspringen. Die erste Reihe erhält die Charakteristik $(135) = (246)$, die aus II hervorgehenden Reihen werden den neun übrigen geraden Charakteristiken, die aus III entspringenden Reihen den ungeraden Charakteristiken $(1) \dots (6)$ zugeordnet. In jeder Reihe erhält das erste, ausgezeichnete Glied die Nebencharakteristik $(135) = (246)$, u. s. w. — In gleicher Weise hätten wir auch schon die 256 WEIERSTRASS'schen Additionstheoreme bezeichnen können. —

Dem Umstande entsprechend, dass eine gerade Charakteristik ausgezeichnet ist, verwendet man übrigens hier besser eine Bezeichnung durch zweimal zwei Indices (Sächs. Ber. 1892, S. 161).

algebraische Folgen der zwischen den Quadraten der ζ -Functionen bestehenden linearen Gleichungen. —

In den beiden folgenden Paragraphen beschäftigen wir uns mit einem Specialfall der in den §§ 1 ... 3 entwickelten Theorie, der in mehrfacher Hinsicht ein besonderes Interesse beanspruchen darf. Um eine einfache und zusammenhängende Darstellung zu erzielen, werden wir dabei die Ergebnisse der §§ 2 und 3 nicht voraussetzen, sondern wir wollen unmittelbar an die Formeln des § 1 anknüpfen.

§ 4.

Die desmische Fläche vierter Ordnung.

Halten wir in den Formeln des § 1 die Perioden 2ω und $2\omega'$ fest, und betrachten wir nur die Grössen a, b, c, d als veränderlich, so können wir durch diese Formeln jeden Raumpunkt darstellen, und zwar noch auf ∞^1 verschiedene Weisen. Dagegen erhalten wir nur Punkte einer *Fläche*, wenn wir etwa b, c und d einander gleich setzen. Wir werden von den drei wesentlich verschiedenen Flächen, die aus den Annahmen I, II und III hervorgehen, hier nur die letzte und einfachste behandeln, in dem Umfange, wie es für unseren augenblicklichen Zweck wünschenswerth ist; erwähnt mag jedoch werden, dass die in den Fällen I und II entstehenden Flächen von der *zwölften* Ordnung sind, und dass die Fläche I dualistisch ist zu der Fläche III.

Um die durch die genannte Annahme hervorgerufene Specialisirung der coordinirten Parametersysteme in symmetrischer Weise darzustellen, führen wir sechs neue Zeichen s_i, t_i ein¹⁾, Grössen, die durch die folgenden Gleichungen verbunden sind:

$$(1) \quad \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 0, \\ t_1 = s_2 - s_3, \quad t_2 = s_3 - s_1, \quad t_3 = s_1 - s_2. \end{cases}$$

Die zwischen den Grössen a, b, \dots u. s. w. bestehenden Gleichungen werden nun befriedigt durch die Annahme

1) Es wird wohl kein Missverständniss dadurch verursacht werden, dass im ersten und zweiten Abschnitt die Bezeichnungen s_i in einem anderen Sinne verwendet worden sind.

$$(2) \begin{cases} a = t_1, & b = c = d = s_1, & \alpha = 0, & \beta = \beta' = \beta'' = -2s_1, \\ a' = t_2, & b' = c' = d' = s_2, & \alpha' = 0, & \gamma = \gamma' = \gamma'' = -2s_2, \\ a'' = t_3, & b'' = c'' = d'' = s_3, & \alpha'' = 0, & \delta = \delta' = \delta'' = -2s_3. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6, III) des § 4 gehen jetzt über in die folgenden:

$$(3) \begin{cases} 2\xi_0 = \sigma(2s_1) \frac{\sigma t_1}{\sigma s_1}, & 2\eta_0 = \sigma(2s_2) \frac{\sigma t_2}{\sigma s_2}, & 2\delta_0 = \sigma(2s_3) \frac{\sigma t_3}{\sigma s_3}, \\ 2\xi_1 = \sigma(2s_1) \frac{\sigma_\lambda t_1}{\sigma_\lambda s_1}, & 2\eta_1 = \sigma(2s_2) \frac{\sigma_\lambda t_2}{\sigma_\lambda s_2}, & 2\delta_1 = \sigma(2s_3) \frac{\sigma_\lambda t_3}{\sigma_\lambda s_3}, \\ 2\xi_2 = \sigma(2s_1) \frac{\sigma_\mu t_1}{\sigma_\mu s_1}, & 2\eta_2 = \sigma(2s_2) \frac{\sigma_\mu t_2}{\sigma_\mu s_2}, & 2\delta_2 = \sigma(2s_3) \frac{\sigma_\mu t_3}{\sigma_\mu s_3}, \\ 2\xi_3 = \sigma(2s_1) \frac{\sigma_\nu t_1}{\sigma_\nu s_1}, & 2\eta_3 = \sigma(2s_2) \frac{\sigma_\nu t_2}{\sigma_\nu s_2}, & 2\delta_3 = \sigma(2s_3) \frac{\sigma_\nu t_3}{\sigma_\nu s_3}. \end{cases}$$

Zwischen diesen Grössen bestehen nach wie vor die Gleichungen (7), (8), (9) des § 4. Wir wollen sie, *abweichend von der bisher festgehaltenen Annahme*, dadurch in Beziehung zu den Untersuchungen des zweiten Abschnittes setzen, dass wir sie den drei Tetraedern der *zweiten* Reihe zuordnen (II, § 8). Die zu den Tetraedern der »ersten« Reihe gehörigen Coordinaten mögen mit x_i, y_i, z_i bezeichnet, und so gewählt werden, dass zwischen ihnen wieder dieselben linearen Gleichungen bestehen, die zwischen den Grössen ξ_i, η_i, δ_i stattfinden. Dies erreichen wir durch den Ansatz (vgl. § 3, Nr. 2):

$$(4) \begin{cases} \xi_0 = x_2 - x_3 = y_2 - y_3 = z_2 - z_3, \\ \xi_1 = -x_2 - x_3 = y_0 + y_1 = -z_0 + z_1, \\ \xi_2 = -x_0 + x_1 = -y_2 - y_3 = z_0 + z_1, \\ \xi_3 = x_0 + x_1 = -y_0 + y_1 = -z_2 - z_3, \\ \\ \eta_0 = x_3 - x_1 = y_3 - y_1 = z_3 - z_1, \\ \eta_1 = -x_3 - x_1 = y_0 + y_2 = -z_0 + z_2, \\ \eta_2 = -x_0 + x_2 = -y_3 - y_1 = z_0 + z_2, \\ \eta_3 = x_0 + x_2 = -y_0 + y_2 = -z_3 - z_1, \\ \\ \delta_0 = x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2, \\ \delta_1 = -x_1 - x_2 = y_0 + y_3 = -z_0 + z_3, \\ \delta_2 = -x_0 + x_3 = -y_1 - y_2 = z_0 + z_3, \\ \delta_3 = x_0 + x_3 = -y_0 + y_3 = -z_1 - z_2. \end{cases}$$

Die so definirten Grössen x_i, y_i, z_i werden nun ebenfalls ganz einfache Producte von σ -Functionen. Mit Hülfe der Formeln (4) in § 3 (S. 204) findet man nach kurzer Rechnung:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = - (e_\mu - e_\nu) \sigma_{s_1} \sigma_{\lambda s_1} \cdot \sigma_{s_2} \sigma_{\lambda s_2} \cdot \sigma_{s_3} \sigma_{\lambda s_3}, \\ x_1 = \sigma_{s_1} \sigma_{\lambda s_1} \cdot \sigma_{\mu s_2} \sigma_{\nu s_2} \cdot \sigma_{\mu s_3} \sigma_{\nu s_3}, \\ x_2 = \sigma_{\mu s_1} \sigma_{\nu s_1} \cdot \sigma_{s_2} \sigma_{\lambda s_2} \cdot \sigma_{\mu s_3} \sigma_{\nu s_3}, \\ x_3 = \sigma_{\mu s_1} \sigma_{\nu s_1} \cdot \sigma_{\mu s_2} \sigma_{\nu s_2} \cdot \sigma_{s_3} \sigma_{\lambda s_3}, \\ \\ y_0 = - (e_\nu - e_\lambda) \sigma_{s_1} \sigma_{\mu s_1} \cdot \sigma_{s_2} \sigma_{\mu s_2} \cdot \sigma_{s_3} \sigma_{\mu s_3}, \\ y_1 = \sigma_{s_1} \sigma_{\mu s_1} \cdot \sigma_{\nu s_2} \sigma_{\lambda s_2} \cdot \sigma_{\nu s_3} \sigma_{\lambda s_3}, \\ y_2 = \sigma_{\nu s_1} \sigma_{\lambda s_1} \cdot \sigma_{s_2} \sigma_{\mu s_2} \cdot \sigma_{\nu s_3} \sigma_{\lambda s_3}, \\ y_3 = \sigma_{\nu s_1} \sigma_{\lambda s_1} \cdot \sigma_{\nu s_2} \sigma_{\lambda s_2} \cdot \sigma_{s_3} \sigma_{\mu s_3}, \\ \\ z_0 = - (e_\lambda - e_\mu) \sigma_{s_1} \sigma_{\nu s_1} \cdot \sigma_{s_2} \sigma_{\nu s_2} \cdot \sigma_{s_3} \sigma_{\nu s_3}, \\ z_1 = \sigma_{s_1} \sigma_{\nu s_1} \cdot \sigma_{\lambda s_2} \sigma_{\mu s_2} \cdot \sigma_{\lambda s_3} \sigma_{\mu s_3}, \\ z_2 = \sigma_{\lambda s_1} \sigma_{\mu s_1} \cdot \sigma_{s_2} \sigma_{\nu s_2} \cdot \sigma_{\lambda s_3} \sigma_{\mu s_3}, \\ z_3 = \sigma_{\lambda s_1} \sigma_{\mu s_1} \cdot \sigma_{\lambda s_2} \sigma_{\mu s_2} \cdot \sigma_{s_3} \sigma_{\nu s_3}. \end{array} \right.$$

Aus den 16 dreigliedrigen linearen Gleichungen, die zwischen diesen 12 Grössen bestehen, hebt sich jedesmal das Product von drei σ -Functionen heraus. Man gelangt so zu den folgenden, unter der Voraussetzung $u + v + w = 0$ bestehenden Additionstheoremen

$$(7) \quad (e_\mu - e_\nu) \sigma_\lambda u \sigma_\lambda v \sigma_\lambda w + (e_\nu - e_\lambda) \sigma_\mu u \sigma_\mu v \sigma_\mu w + (e_\lambda - e_\mu) \sigma_\nu u \sigma_\nu v \sigma_\nu w = 0,$$

$$(8) \quad \sigma_\mu u \sigma_\nu v \sigma_\nu w \quad - \sigma_\nu u \sigma_\mu v \sigma_\mu w + (e_\mu - e_\nu) \sigma_\lambda u \sigma_\nu v \sigma_\nu w = 0,$$

$$(9) \quad \sigma_\nu u \sigma_\mu v \sigma_\nu w \quad + \sigma_\mu u \sigma_\nu v \sigma_\lambda w \quad + \sigma_\nu u \sigma_\lambda v \sigma_\nu w = 0,$$

von denen wiederum das erste *eine*, das zweite *neun* und das dritte *sechs* verschiedene Formeln umfasst. Wir haben diese Formeln (7), (8), (9) hier mit abgeänderter Bezeichnung der Argumente angeführt, weil wir sie später gebrauchen werden. Uebrigens können sie aus den Additionstheoremen des § 1 auch unmittelbar durch geeignete Specialisirungen der Parameter a, b, c, d hergeleitet werden.

Die Darstellung der Grössen x_i, y_i, z_i durch die Formeln (6) liefert ohne Weiteres die *Gleichung* unserer Fläche. Setzen wir zur Abkürzung

$$(10) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \sigma(2s_1) \sigma(2s_2) \sigma(2s_3),$$

so ergibt sich

$$(11) \quad 4\rho \cdot x_2 x_3 = \frac{\sigma_\mu s_1 \sigma_\nu s_1}{\sigma_{s_1} \sigma_{\lambda s_1}}, \quad 4\rho \cdot x_0 x_1 = - (e_\mu - e_\nu) \frac{\sigma_{s_1} \sigma_{\lambda s_1}}{\sigma_\mu s_1 \sigma_\nu s_1}.$$

Die nicht hingeschriebenen Ausdrücke der übrigen Producte $x_i x_k$ gehen hieraus durch cyclische Vertauschung von 1, 2, 3 hervor;

ebenso ergeben sich die entsprechenden Producte $y_i y_x$ und $z_i z_x$, wenn man λ, μ, ν durch μ, ν, λ und ν, λ, μ ersetzt. Aus (11) folgt nun

$$(12) \quad \begin{cases} 16 \rho^2 \cdot x_0 x_1 x_2 x_3 = - (e_\mu - e_\nu), \\ 16 \rho^2 \cdot y_0 y_1 y_2 y_3 = - (e_\nu - e_\lambda), \\ 16 \rho^2 \cdot z_0 z_1 z_2 z_3 = - (e_\lambda - e_\mu), \end{cases}$$

d. h., es besteht neben der Identität

$$(13) \quad x_0 x_1 x_2 x_3 + y_0 y_1 y_2 y_3 + z_0 z_1 z_2 z_3 = 0$$

(vgl. Nr. 5, S. 144) noch die identische Gleichung

$$(14) \quad e_\lambda \cdot x_0 x_1 x_2 x_3 + e_\mu \cdot y_0 y_1 y_2 y_3 + e_\nu \cdot z_0 z_1 z_2 z_3 = 0,$$

die keine Folge der linearen Gleichungen (7), (8), (9) des § 4 ist, und (so lange die Grösse G (S. 194, Nr. 7) nicht verschwindet) die Punkte einer irreduciblen Fläche des Raumes definirt. Es ist dies die aus den Untersuchungen mehrerer Geometer bekannte sogenannte *desmische Fläche* vierter Ordnung, zwölfter Classe, die Reciproke der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche zweiten Grades¹⁾ (der zu Eingang des § erwähnten Fläche I).

Es ist hier nicht der geeignete Ort für eine eingehende Untersuchung dieser merkwürdigen Fläche 4. O. Immerhin wird es nützlich sein, ihre Darstellung durch die Parameter s_1, s_2, s_3 noch durch wenige Worte zu erläutern.

Die Fläche (14) gehört einem ganzen Büschel von desmischen Flächen 4. O. an, einem Flächenbüschel, dessen Besonderheit darin besteht, dass es drei in Ebenenquadrupel zerfallende Flächen enthält. Die Fläche enthält daher 16 gerade Linien, die Schnittlinien von je drei Tetraederflächen (II. Abschn. § 8). Die zwölf Schnittpunkte dieser Geraden, die Ecken der desmischen Tetraeder der zweiten Reihe, sind *Knotenpunkte* unserer Fläche. Zu ihnen gehören unbestimmte Werthe der Parameter s_1, s_2, s_3 . Es werden nämlich die

1) STAHL, Crelle's Journal Bd. 104, S. 78 (1887); WÄLSCH, Acta Leopoldina 1888. HUMBERT, Journal de Mathématiques 1891 p. 353. Von diesen sehr interessanten Abhandlungen enthält die zuletzt genannte die Parameterdarstellung:

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{\sigma t}{\sigma s} : \frac{\sigma_1 t}{\sigma_1 s} : \frac{\sigma_2 t}{\sigma_2 s} : \frac{\sigma_3 t}{\sigma_3 s}.$$

Herr HUMBERT hat allein auf diese Formel, mit grossem geometrischem Geschick, eine umfassende Theorie der Fläche gegründet.

Ecken des τ -Tetraeders erhalten, wenn wir, unter $\tilde{\omega}$ eine halbe Periode verstehend, der Reihe nach

$$\begin{aligned} s_1 &\equiv 2\tilde{\omega} & s_1 &\equiv 2\tilde{\omega} + \omega_\lambda, \\ s_1 &\equiv 2\tilde{\omega} + \omega_\mu, & s_1 &\equiv 2\tilde{\omega} + \omega, \end{aligned} \quad (\text{modd. } 4\omega, 4\omega')$$

setzen, bei unbestimmt gelassenen Werthen von t_1 . Im ersten Falle $s_1 \equiv 2\tilde{\omega}$ z. B. entspricht den modd. $4\omega, 4\omega'$ verschiedenen, in der Form $\pm t_1 + 2\tilde{\omega}$ enthaltenen Werthsystemen je eine (von der Wahl des Vorzeichens unabhängige) Fortschreitungsrichtung durch den Doppelpunkt $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; den vier Geraden durch den Doppelpunkt, längs deren die Fläche von dem Tangentialkegel des Doppelpunktes berührt wird, entsprechen insbesondere die Parametersysteme

$$t_1 \equiv 2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega} + 2\omega_\lambda, 2\tilde{\omega} + 2\omega_\mu, 2\tilde{\omega} + 2\omega, \quad (\text{modd. } 4\omega, 4\omega').$$

Den ∞^1 Punkten der 16 auf der Fläche verlaufenden geraden Linien entsprechen also nur discrete Werthsysteme der Parameter s_1, s_2, s_3 : Systeme von drei halben Perioden, deren Summe gleich Null ist.

Nimmt man diesen Fall aus, so entspricht jedem System von drei Grössen s_1, s_2, s_3 , deren Summe den Werth Null hat, ein bestimmter Flächenpunkt.

Umgekehrt entspricht vermöge der Formeln (2) und (3) einem gegebenen Flächenpunkt (abgesehen von den Knotenpunkten) ein »bestimmtes« Parametersystem, sofern man die folgenden Substitutionen als von der Identität nicht verschieden betrachtet:

1) Die Vermehrung von s_1, s_2, s_3 um solche Vielfache $2\tilde{\omega}$ einfacher Perioden, deren Summe $= 0$ ist,

2) Den gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller drei Grössen s_1, s_2, s_3 .¹⁾

Besondere Aufmerksamkeit zieht das Coordinatensystem auf unserer Fläche auf sich, das von den Curven $s_i = \text{const.}, t_i = \text{const.}$ gebildet wird. Wir würden uns indessen zu weit von unserem eigent-

1) Definiert man die desmische Fläche nicht durch die Formeln (3), sondern etwa durch das erste der drei Formelsysteme (6), so kann man an Stelle der Gleichung $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ die Congruenz $s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'}$ setzen. Man hat dann eine umfassendere Gruppe von Aenderungen der identischen Substitution zuzuordnen. Hierdurch wird aber der einfache Zusammenhang zwischen den Grössen $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, x_i, y_i, z_i$ zerstört. Es ist daher zweckmässiger, nur solche Systeme von drei Parametern zu benutzen, deren Summe *gleich* Null ist.

lichen Gegenstände entfernen, wollten wir den merkwürdigen Eigenschaften dieser Curven eine eingehende Untersuchung widmen. Wir haben dazu um so weniger Veranlassung, als Herr HUMBERT bereits, auf ähnlicher Grundlage, eine solche Untersuchung geliefert hat, auf die wir hier verweisen können. Bemerkt sei jedoch, dass die von Herrn HUMBERT geführten Beweise sich zum Theil beträchtlich abkürzen lassen. Herrn HUMBERT ist nämlich der durch den JACOBI'schen Fundamentalsatz gegebene Zusammenhang zwischen den drei Parameterdarstellungen (3) entgangen; er musste daher die von ihm gefundenen schönen Sätze auf eine umständlichere Weise begründen, als es mit den uns zu Gebote stehenden Hilfsmitteln möglich ist. —

Geht man zur Grenze $e_\mu - e_\lambda = 0$ über, so verwandelt sich das Büschel von desmischen Flächen 4. O. in das Flächenbüschel

$$(15) \quad \bar{Z}_0 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_3 - 4c^2 \bar{Y}_0 \bar{Y}_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 = 0,$$

wobei die Grössen \bar{Z}_i, \bar{Y}_i die in § 14 des II. Abschnittes (S. 180) erklärte Bedeutung haben. Ersetzen wir im Grenzfall gleichzeitig s_1, s_2, s_3 durch $\frac{\bar{\alpha}_1}{2}, \frac{\bar{\alpha}_2}{2}, \frac{\bar{\alpha}_3}{2} - \pi$, so tritt an Stelle der entwickelten Formeln das Formelsystem (vgl. II, § 14):

$$(16) \quad \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3 = 2\pi, \quad \bar{a}_i = 2c \sin \bar{\alpha}_i,$$

$$(17) \quad \bar{Z}_0 = c^2 \sin \bar{\alpha}_1 \sin \bar{\alpha}_2 \sin \bar{\alpha}_3, \quad \bar{Z}_i = \sin \bar{\alpha}_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{Y}_0 = 2 \sin \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \cdot \sin \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \cdot \sin \frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \bar{Y}_1 = 2 \sin \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \cdot \cos \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \cdot \cos \frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \bar{Y}_2 = 2 \cos \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \cdot \sin \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \cdot \cos \frac{\bar{\alpha}_3}{2}, \\ \bar{Y}_3 = 2 \cos \frac{\bar{\alpha}_1}{2} \cdot \cos \frac{\bar{\alpha}_2}{2} \cdot \sin \frac{\bar{\alpha}_3}{2} \text{ 1)}. \end{array} \right.$$

Der Parameter c^2 ist für die einzelne Fläche 4. O. nicht wesentlich im Sinne der projectiven Geometrie. Jede dieser Flächen hat im Anfangspunkt der Coordinaten $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = 0$ einen dreifachen (sogenannten triplanaren) Punkt; ausserdem hat sie sechs Doppelpunkte $\bar{Z}_0 = 0, \bar{Y}_i = 0, \bar{Y}_x = 0$ im Unendlichen. (Vgl. die

1) Die Formeln (17) sind schon von Herrn HUMBERT angegeben worden.

Fig. 16, S. 184.) Sie enthält noch zehn gerade Linien, nämlich die vier Geraden $\bar{Z}_0 = 0$, $\bar{Y}_i = 0$, und die sechs Geraden $\bar{Y}_i = 0$, $\bar{Y}_x = 0$, von denen jede zwei Geraden der allgemeinen desmischen Fläche 4. O. entspricht. Die Doppelpunktparameter sind die Vielfachen von π ; der dreifache Punkt entspricht dem Parameterwerth ∞ .

Die Fläche geht durch eine (imaginäre) dualistische Transformation über in die *Krümmungsmittelpunktsfläche eines Paraboloids*. (Vgl. SALMON-FIEDLER, Geometrie des Raumes, 3. Aufl., Bd. II, S. 345.)

§ 5.

Orthogonale Substitutionen und sphärische Dreiecke, die mit der desmischen Fläche vierter Ordnung verknüpft sind.

Wir bringen jetzt die Betrachtungen des § 4 mit der im II. Abschnitt durchgeführten Untersuchung in engeren Zusammenhang, indem wir, festhaltend an der bereits in § 4 eingeführten Vorstellungsweise (also abweichend von dem in § 3 beobachteten Verfahren) die Grössen X, Y, Z in folgender Weise durch die Grössen x, y, z ausdrücken:

$$(1) \begin{cases} X_0 = \sqrt{\rho} \cdot x_0, & X_1 = \sqrt{\rho} \cdot x_1, & X_2 = \sqrt{\rho} \cdot x_2, & X_3 = \sqrt{\rho} \cdot x_3, \\ Y_0 = -\sqrt{\rho} \cdot y_0, & Y_1 = \sqrt{\rho} \cdot y_1, & Y_2 = \sqrt{\rho} \cdot y_2, & Y_3 = \sqrt{\rho} \cdot y_3, \\ Z_0 = -\sqrt{\rho} \cdot z_0, & Z_1 = -\sqrt{\rho} \cdot z_1, & Z_2 = -\sqrt{\rho} \cdot z_2, & Z_3 = -\sqrt{\rho} \cdot z_3. \end{cases}$$

Setzen wir nun in den Formeln (4) des § 3 $v = 0$, so folgt:

$$(2) \begin{cases} \frac{\sigma_\mu u \sigma_\nu u}{\sigma u \sigma_\lambda u} = \frac{\sigma_\mu(2u) + \sigma_\nu(2u)}{\sigma(2u)}, \\ - (e_\mu - e_\nu) \frac{\sigma u \sigma_\lambda u}{\sigma_\mu u \sigma_\nu u} = \frac{\sigma_\mu(2u) - \sigma_\nu(2u)}{\sigma(2u)}. \end{cases}$$

Führen wir diese Werthe in die Formeln (6) des § 4 ein, so gelangen wir zu den folgenden Ausdrücken der Coefficienten $a_{11} \dots a_{33}$ (vgl. II, § 5, S. 142):

$$(3, 1) \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \Bigg| = \begin{cases} \frac{\sigma_\lambda(2s_1)}{\sigma(2s_1)} & \frac{\sigma_\mu(2s_3)}{\sigma(2s_3)} & \frac{\sigma_\nu(2s_2)}{\sigma(2s_2)} \\ \frac{\sigma_\nu(2s_3)}{\sigma(2s_3)} & \frac{\sigma_\lambda(2s_2)}{\sigma(2s_2)} & \frac{\sigma_\mu(2s_1)}{\sigma(2s_1)} \\ \frac{\sigma_\mu(2s_2)}{\sigma(2s_2)} & \frac{\sigma_\nu(2s_1)}{\sigma(2s_1)} & \frac{\sigma_\lambda(2s_3)}{\sigma(2s_3)} \end{cases}$$

Die auf der rechten Seite stehenden σ -Quotienten sind also, in dieser Anordnung, proportional den Coefficienten einer orthogonalen Substitution.

Man kann dies natürlich auch sofort durch Ausrechnung bestätigen: Die Summen der Quadrate von je drei Gliedern in einer Horizontalreihe haben (unabhängig von unserer Voraussetzung $s_1 + s_2 + s_3 = 0$) den nämlichen Werth vermöge der Identitäten zwischen den Quadraten von je drei σ -Functionen, und die Summen der Producte entsprechender Glieder in parallelen Reihen verschwinden zufolge der Identitäten (9) des § 4.

Für den zehnten Coefficienten a_{00} , den wir als Function der Grössen $2s_1, 2s_2, 2s_3$ durch ein besonderes Zeichen

$$(4) \quad a_{00} = Q(2s_1, 2s_2, 2s_3)$$

darstellen wollen, ergibt sich eine ganze Reihe verschiedener Ausdrücke. Man kann ihn zunächst ebenfalls aus den Formeln (4) des § 3 herleiten, indem man wieder die obigen Formeln (2) benutzt; man kann ihn zweitens berechnen mit Hülfe der Formeln (9) in II, § 5 (S. 142); man kann ihn endlich finden, indem man aus der Quadratsumme der Glieder in irgend einer Vertical- oder Horizontalreihe die Wurzel zieht und das Vorzeichen gehörig bestimmt. Wenn man alle diese Ausdrücke mit einander vergleicht, so ergibt sich:

Die durch die Formel (4) definirte Function Q dreier durch die Gleichung $u + v + w = 0$ verbundener Argumente hat den Werth

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & Q(u, v, w) \\ & = -\frac{1}{e_\mu - e_\nu} \left(\frac{\sigma_\mu u}{\sigma u} \frac{\sigma_\mu v}{\sigma v} \frac{\sigma_\mu w}{\sigma w} - \frac{\sigma_\nu u}{\sigma u} \frac{\sigma_\nu v}{\sigma v} \frac{\sigma_\nu w}{\sigma w} \right) \\ & = \frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} \left(\frac{\sigma_\lambda v}{\sigma v} \frac{\sigma_\lambda w}{\sigma w} - \frac{\sigma_\mu u}{\sigma u} \frac{\sigma_\nu u}{\sigma u} \right) \\ & = \sqrt{\varphi u + \varphi v + \varphi w} \\ & = -(\xi u + \xi v + \xi w) \\ & = \frac{1}{2} \frac{\varphi' v - \varphi' w}{\varphi v - \varphi w} = \frac{1}{2} \frac{\varphi' w - \varphi' u}{\varphi w - \varphi u} = \frac{1}{2} \frac{\varphi' u - \varphi' v}{\varphi u - \varphi v}. \end{aligned} \right.$$

Von diesen Formeln umfasst die erste drei, die zweite neun verschiedene Ausdrücke der Function Q . Die Gleichheit der Ausdrücke in den beiden ersten Zeilen ist eine Folge der Identitäten (7) und (8) des § 4; die Gleichheit der Ausdrücke in den drei letzten

Zeilen bildet das bekannte Additionstheorem der \wp -Function. ζu ist das in der SCHWARZ'schen Formelsammlung mit $\frac{\zeta' u}{\wp u}$ bezeichnete Integral 2. Gattung.

Die Substitutionscoefficienten a_{ik} sind, als Functionen von zweien der Argumente s_i betrachtet, in ihrer Veränderlichkeit durch eine Gleichung beschränkt, die man entweder aus der Gleichung (14) des § 4, oder auch aus der zwischen den Quadraten der Functionen \wp_1, \wp_2, \wp_3 bestehenden Identität ablesen kann:

$$(6) \quad \begin{cases} (e_\mu - e_\nu) a_{11}^2 + (e_\nu - e_\lambda) a_{23}^2 + (e_\lambda - e_\mu) a_{32}^2 \\ = (e_\mu - e_\nu) a_{22}^2 + (e_\nu - e_\lambda) a_{31}^2 + (e_\lambda - e_\mu) a_{13}^2 \\ = (e_\mu - e_\nu) a_{33}^2 + (e_\nu - e_\lambda) a_{12}^2 + (e_\lambda - e_\mu) a_{21}^2 = 0. \end{cases}$$

Zu der nämlichen Gleichung gelangt man von der Formel (7) des § 4 aus, da die linke Seite der Gleichung

$$(7) \quad (e_\mu - e_\nu) a_{11} a_{22} a_{33} + (e_\nu - e_\lambda) a_{23} a_{31} a_{12} + (e_\lambda - e_\mu) a_{32} a_{13} a_{21} = 0$$

in das Product aus a_{00} und der linken Seite von (6) zerfällt¹⁾. —

Wir schliessen hier die linearen Substitutionen der Argumente $s_1, s_2, s_3, \omega, \omega'$ an, die die Transformationen der in § 11 des zweiten Abschnittes besprochenen Gruppen $G_{16}, G_{96}, G_{192}, G_{576}$ hervorrufen.

Zunächst entsprechen der Gruppe G_{16} der KUMMER'schen Configuration die 16 nach der Festsetzung des § 4 (S. 214) noch verschiedenen Aenderungen der Parameter s_x um halbe Perioden $\tilde{\omega}$, deren Summe Null ist. Insbesondere die erzeugenden Operationen S_i, Σ_i (S. 167) haben als Aequivalent die folgenden linearen Substitutionen der Parameter s_x :

		s_1'	s_2'	s_3'			s_1'	s_2'	s_3'
(8)	S_1	$s_1 - 2\omega_\mu$	$s_2 + \omega_\mu$	$s_3 + \omega_\mu$		Σ_1	$s_1 - 2\omega_\nu$	$s_2 + \omega_\nu$	$s_3 + \omega_\nu$
	S_2	$s_1 + \omega_\mu$	$s_2 - 2\omega_\mu$	$s_3 + \omega_\mu$		Σ_2	$s_1 + \omega_\nu$	$s_2 - 2\omega_\nu$	$s_3 + \omega_\nu$
	S_3	$s_1 + \omega_\mu$	$s_2 + \omega_\mu$	$s_3 - 2\omega_\mu$		Σ_3	$s_1 + \omega_\nu$	$s_2 + \omega_\nu$	$s_3 - 2\omega_\nu$

¹⁾ Die drei Ausdrücke (6) (und ebenso die linke Seite von (7), getheilt durch a_{00}) haben denselben Werth für jede orthogonale Substitution. Bildet man ihre Summe, und setzt man diese gleich Null, so entsteht die vom Verfasser als Normalform bezeichnete Gleichungsform der desmischen Fläche 4. O. (Sächs. Ber. 1892, S. 155).

Fügen wir hierzu die Vertauschungen der Grössen s_1, s_2, s_3 , so erfahren die Grössen x_i die Vertauschungen der Gruppe G_{96} ; die Gruppen G_{192} und G_{576} entstehen sodann, wenn wir noch lineare Periodentransformationen hinzufügen: Die Gruppe G_{192} entsteht durch Zufügung der Vertauschung von μ und ν ; G_{576} entsteht, wenn man sämtliche Vertauschungen von λ, μ, ν hinzunimmt.

Die Gruppe G_{96} umfasst im Allgemeinen alle collinearen Transformationen, die die desmische Fläche 4. O. in sich selbst überführen; ausgenommen sind nur die Fälle $g_3 = 0$ und $g_2 = 0$; im ersten Fall lässt die Fläche, wenn etwa $e_\lambda = 0$ angenommen wird, noch die Transformationen von G_{192} zu, im zweiten 288 Transformationen, die eine invariante Untergruppe von G_{576} bilden. —

Die genannten linearen Transformationen der Parameter s_x (Nr. 8) haben nur Vorzeichenwechsel der Substitutionscoefficienten a_{ix} , der unter (3) angegebenen σ -Quotienten zur Folge. Dagegen erhält man wesentlich neue Gruppierungen von σ -Quotienten zu Coefficientensystemen orthogonaler Substitutionen, wenn man die Parameter s_x um *Periodenviertel* vermehrt, deren Summe gleich Null ist. Betrachtet man der Einfachheit halber jetzt auch noch die unter (8) angegebenen Aenderungen als nicht wesentlich verschieden von der identischen Substitution, so bleiben im Ganzen noch 16 Aenderungen der Grössen s_x um Periodenviertel, deren jede zu einem neuen Coefficientensystem führt. Diese 16 Anordnungen der σ -Quotienten lassen sich, ähnlich wie die Formeln (6) des § 1, in drei Typen ordnen, von denen der erste einen, der zweite neun, der dritte sechs verschiedene Fälle umfasst. Den ersten Fall haben wir unter (3, I) bereits angeführt. Als Vertreter des zweiten Typus wählen wir die durch die Substitution

$$s'_1 = s_1 - \omega_\lambda, \quad s'_2 = s_2 + \frac{\omega_\lambda}{2}, \quad s'_3 = s_3 + \frac{\omega_\lambda}{2}$$

aus (3, I) hervorgehende Coefficiententafel:

$$(3, II) \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\sigma_\lambda(2s_1)}{\sigma(2s_1)}, & \sqrt{e_\lambda - e_\mu} \cdot \frac{\sigma_\nu(2s_3)}{\sigma_\lambda(2s_3)}, & \sqrt{e_\lambda - e_\nu} \cdot \frac{\sigma_\mu(2s_2)}{\sigma_\lambda(2s_2)}, \\ \sqrt{e_\lambda - e_\nu} \cdot \frac{\sigma_\mu(2s_3)}{\sigma_\lambda(2s_3)}, & -\sqrt{e_\lambda - e_\mu} \sqrt{e_\lambda - e_\nu} \cdot \frac{\sigma(2s_2)}{\sigma_\lambda(2s_2)}, & -\frac{\sigma_\mu(2s_1)}{\sigma(2s_1)}, \\ \sqrt{e_\lambda - e_\mu} \cdot \frac{\sigma_\nu(2s_2)}{\sigma_\lambda(2s_2)}, & -\frac{\sigma_\nu(2s_1)}{\sigma(2s_1)}, & -\sqrt{e_\lambda - e_\mu} \sqrt{e_\lambda - e_\nu} \cdot \frac{\sigma(2s_3)}{\sigma_\lambda(2s_3)}; \end{array} \right.$$

als Vertreter des dritten die Tafel, die aus (3, I) durch die Substitution

$$s_1' = s_1 + \frac{\omega_\lambda}{2}, \quad s_2' = s_2 + \frac{\omega_\mu}{2}, \quad s_3' = s_3 + \frac{\omega_\nu}{2}$$

hervorgeht:

$$(3, III) \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{e_\lambda - e_\mu} \sqrt{e_\lambda - e_\nu} \frac{\sigma(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)}, \quad \sqrt{e_\nu - e_\mu} \frac{\sigma_\nu(2s_3)}{\sigma_\nu(2s_3)}, \quad \sqrt{e_\mu - e_\nu} \frac{\sigma_\lambda(2s_2)}{\sigma_\mu(2s_2)}, \\ -\sqrt{e_\nu - e_\lambda} \sqrt{e_\nu - e_\mu} \frac{\sigma(2s_3)}{\sigma_\nu(2s_3)}, \quad \sqrt{e_\mu - e_\lambda} \frac{\sigma_\nu(2s_2)}{\sigma_\mu(2s_2)}, \quad \sqrt{e_\lambda - e_\mu} \frac{\sigma_\nu(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)}, \\ -\sqrt{e_\mu - e_\nu} \sqrt{e_\mu - e_\lambda} \frac{\sigma(2s_2)}{\sigma_\mu(2s_2)}, \quad \sqrt{e_\lambda - e_\nu} \frac{\sigma_\mu(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)}, \quad \sqrt{e_\nu - e_\lambda} \frac{\sigma_\mu(2s_3)}{\sigma_\nu(2s_3)}. \end{array} \right.$$

Bei der mit unseren Formeln zusammenhängenden Darstellung sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen beschränken wir uns auf den einfachsten und interessantesten Fall (3, I). Wir können uns nunmehr kurz fassen. Die Formeln (6) des § 4 liefern uns, wenn wir die Formeln (2) in II, § 6 (S. 143) berücksichtigen, und über die Vorzeichen der zunächst nur durch die Producte $l_i l_x$, $\lambda_i \lambda_x$ gegebenen Grössen l , λ eine geeignete Entscheidung treffen, unmittelbar den Ansatz:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} l_x = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_x}{2} = \frac{\sigma_\omega \sigma_\lambda s_x \sigma_\mu s_x}{\sigma_\lambda \omega \sigma s_x \sigma_\nu s_x} = -i \cdot \frac{\Theta_\lambda s_x \Theta_\mu s_x}{\Theta s_x \Theta_\nu s_x} \\ = \frac{\sigma_\lambda(2s_x) + \sigma_\mu(2s_x)}{\sqrt{e_\mu - e_\lambda} \sigma(2s_x)} = \frac{\sqrt{e_\mu - e_\lambda} \sigma(2s_x)}{\sigma_\lambda(2s_x) - \sigma_\mu(2s_x)} \\ = \frac{\zeta s_x - \zeta_\nu s_x}{\sqrt{e_\mu - e_\lambda}} = \frac{\sqrt{e_\mu - e_\lambda}}{\zeta_\lambda s_x - \zeta_\mu s_x}, \\ \lambda_x = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_x}{2} = \frac{\sigma_\omega \sigma_\lambda s_x \sigma_\nu s_x}{\sigma_\lambda \omega \sigma s_x \sigma_\mu s_x} = \frac{\Theta_\lambda s_x \Theta_\nu s_x}{\Theta s_x \Theta_\mu s_x} \\ = \frac{\sigma_\lambda(2s_x) + \sigma_\nu(2s_x)}{\sqrt{e_\nu - e_\lambda} \sigma(2s_x)} = \frac{\sqrt{e_\nu - e_\lambda} \sigma(2s_x)}{\sigma_\lambda(2s_x) - \sigma_\nu(2s_x)} \\ = \frac{\zeta s_x - \zeta_\mu s_x}{\sqrt{e_\nu - e_\lambda}} = \frac{\sqrt{e_\nu - e_\lambda}}{\zeta_\lambda s_x - \zeta_\nu s_x}. \end{array} \right. \quad (x = 1, 2, 3)$$

Die Functionen $\zeta_\lambda u$, $\zeta_\mu u$, $\zeta_\nu u$ sind die in der SCHWARZ'schen Formelsammlung (Art. 25) mit $\frac{\sigma'_\lambda u}{\sigma_\lambda u}$, $\frac{\sigma'_\mu u}{\sigma_\mu u}$, $\frac{\sigma'_\nu u}{\sigma_\nu u}$ bezeichneten Integrale. 2. Gattung.

Durch die Formeln (9) sind die Cotangenten der halben Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks als eindeutige homogene Functionen 0^{ter} Grades von sechs Verhältnissgrössen

$$\omega_\lambda : \omega_\mu : \omega_\nu : s_1 : s_2 : s_3$$

dargestellt, zwischen denen zwei lineare Gleichungen stattfinden:

$$\omega_\lambda + \omega_\mu + \omega_\nu = 0, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0. \quad -$$

Für die Cosinus und Sinus der Seiten und Winkel ergeben sich die Ausdrücke:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos a_x = \frac{\sigma_\mu(2s_x)}{\sigma_\lambda(2s_x)}, \quad \sin a_x = \sqrt{e_\mu - e_\lambda} \cdot \frac{\sigma(2s_x)}{\sigma_\lambda(2s_x)}, \\ \cos \alpha_x = \frac{\sigma_\nu(2s_x)}{\sigma_\lambda(2s_x)}, \quad \sin \alpha_x = \sqrt{e_\nu - e_\lambda} \cdot \frac{\sigma(2s_x)}{\sigma_\lambda(2s_x)}, \end{array} \right.$$

woraus unmittelbar die bei gegebenen Werthen von ω und ω' zwischen den Seiten und Winkeln stattfindende Relation abgelesen werden kann:

$$(11) \quad P : H = \sqrt{e_\mu - e_\nu} : \sqrt{e_\nu - e_\lambda}.$$

Diese Proportion ist wieder nichts Anderes, als die Gleichung der desmischen Fläche k . O., bezogen auf das System transcendenten Coordinaten, das von den sechs Winkelgrössen a_x, α_x gebildet wird. (Vgl. Nr. 6.) —

Unsere Entwicklung setzt uns nicht nur in den Stand, die Cotangenten l_x, λ_x der halben Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks als eindeutige Functionen von drei unabhängigen Veränderlichen auszudrücken, sondern auch umgekehrt zu gegebenen Werthen der l_x, λ_x die Argumente in allgemeinsten Weise zu bestimmen.

Dem Beweise schicken wir den folgenden Satz voraus:

Durch die Formeln (9) oder (10) wird die in § 4 des I. Abschnittes definirte Gruppe \mathfrak{G}_{64} isomorph bezogen auf eine gewisse Gruppe von linearen Substitutionen der Argumente $\omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu, s_1, s_2, s_3$.

Wie man durch geeignete Aenderungen der Argumente s_x allein die Gruppe \mathfrak{G}_{16} , oder vielmehr die durch diese Gruppe hervorgerufenen Aenderungen der Grössen l_x, λ_x erzeugen kann, haben wir soeben schon gesehen (Nr. 8); es handelt sich also nur noch um die Hervorbringung der Substitutionen T und \mathbf{T} , die einfache Vorzeichenwechsel der Grössen l_x, λ_x im Gefolge haben. (Vgl. S. 102, Nr. 3.) Wir bemerken nun, dass die linearen Periodentransformationen, die e_λ, e_μ, e_ν ungeändert lassen, die Vorzeichen der Quadrat-

wurzeln $\sqrt{e_\mu - e_\lambda}$, $\sqrt{e_\nu - e_\lambda}$ thatsächlich noch beeinflussen. Die fraglichen Transformationen haben, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bedeuten, die der Bedingung

$$(\alpha + \delta)^2 = 2\beta\gamma$$

genügen, die Gestalt

$$(12) \quad \begin{cases} \omega'_\mu = \omega_\mu + 2\alpha\omega_\mu + 2\beta\omega_\nu, \\ \omega'_\nu = \omega_\nu + 2\gamma\omega_\mu + 2\delta\omega_\nu. \end{cases}^1)$$

Wir finden nun, mit Hülfe der Formeln (6), S. 75

$$\frac{\sigma_\lambda \omega'_\mu}{\sigma \omega'_\mu} = (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\sigma_\lambda \omega_\mu}{\sigma \omega_\mu}, \quad \frac{\sigma_\lambda \omega'_\nu}{\sigma \omega'_\nu} = (-1)^{\gamma+\delta} \frac{\sigma_\lambda \omega_\nu}{\sigma \omega_\nu}.$$

Die Periodentransformationen (12) zerfallen demnach in vier Schaaren, die in folgender Weise den Substitutionen von \mathfrak{S}_4 (S. 102) zugeordnet sind:

$$(13) \quad \begin{cases} 1 : \alpha + \beta \equiv 0 & \gamma + \delta \equiv 0 \\ T : \alpha + \beta \equiv 1 & \gamma + \delta \equiv 0 \\ T : \alpha + \beta \equiv 0 & \gamma + \delta \equiv 1 \\ TT : \alpha + \beta \equiv 1 & \gamma + \delta \equiv 1 \end{cases} \pmod{2}.$$

Diese Substitutionen also rufen, verbunden mit den Substitutionen (8), dieselben Aenderungen der Grössen l_x, λ_x hervor, wie die Substitutionen der Gruppe \mathfrak{S}_{64} .

Zu bemerken ist jedoch, dass die Substitution TT auch durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel aller Grössen s_i hervorgebracht werden kann. Es entsteht also eine möglichst umfassende mit \mathfrak{S}_{64} holoëdrisch isomorphe Gruppe, wenn wir die folgenden Substitutionen der Identität zuordnen:

- 1) Die Aenderungen der Grössen s_x um Vielfache ganzer Perioden,
- 2) die Substitution $s'_x = -s_x$, verbunden mit den Periodentransformationen (12), die der Bedingung $\beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2}$ (d. h. $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$, $\alpha + \delta \equiv 0 \pmod{4}$) genügen.

¹⁾ Herr F. KLEIN bezeichnet diese Gruppe als (homogene) „Hauptcongruenzgruppe der zweiten Stufe“ innerhalb der Gruppe der Modulsstitutionen. Ihre Untergruppe $\beta + \gamma \equiv 0 \pmod{2}$ gehört, nach der Terminologie des Herrn KLEIN, zur vierten Stufe. S. F. KLEIN, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, ausgearbeitet und vervollständigt von R. FRICKE (Leipzig, Teubner, 1890—92) Bd. I, S. 388 u. ff.

Die Aenderungen 1) und 2) umfassen bereits die ganze Vieldeutigkeit der Argumente ($\omega : s$), die zu gegebenen Werthen l_x, λ_x gehören.

Sind nämlich die Grössen l_x, λ_x bekannt, so können wir mit Hülfe der Gleichung (14) in § 4 (S. 213) die Verhältnisse der Grössen e_λ, e_μ, e_ν rational darstellen. Haben wir sodann über den Werth einer dieser Grössen, und damit auch über die Werthe der übrigen entschieden, so ergeben sich $2\omega, 2\omega'$ als ein Paar solcher primitiver Perioden des Integrals

$$\int \frac{d\varphi}{2\sqrt{(\varphi-e_\lambda)(\varphi-e_\mu)(\varphi-e_\nu)}},$$

für die der reelle Theil des Quotienten $\frac{\omega'}{\omega i}$ positiv ist¹⁾. Die ihnen innewohnende Vieldeutigkeit ist zunächst noch gegeben durch die Formeln (12), ohne hinzutretende Beschränkung. Jetzt können wir, auf Grund der Formeln (3, 1) die Grössen s_x finden, abgesehen vom Vorzeichen, und abgesehen von Vielfachen ganzer Perioden, die noch zu ihnen hinzutreten können. Tragen wir nun die gefundenen Werthe in (9) auf der rechten Seite ein, so sind die Gleichungen (9) möglicher Weise noch nicht erfüllt, da die Vorzeichen links und rechts noch verschieden sein können. Diesen Mangel haben wir noch zu beseitigen durch eine geeignete Periodentransformation, nach Anweisung der Formeln (13). Die den Grössen $s_1, s_2, s_3, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu$ jetzt noch anhaftende Vieldeutigkeit ist dieselbe, die wir oben unter 1) und 2) angegeben haben. —

Die Formeln (10) gehen im Falle $\lambda = 3, \mu = 1, \nu = 2$ in die von LAGRANGE entdeckten bekannten Formeln über. Man kann sie natürlich auch im Rahmen der WEIERSTRASS'schen Theorie unmittelbar begründen, indem man das in der Form

1) Da die in die Definition der \mathcal{G} -Function aufgenommene Bedingung $\Re\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$ auf einer willkürlichen Entscheidung zwischen zwei an und für sich gleichwerthigen Möglichkeiten beruht, so können die zwischen den Grössen l_x, λ_x bestehenden Gleichungen noch auf eine zweite Art durch ganz ähnlich gebildete Functionen befriedigt werden. Diese beiden Parameterdarstellungen der Mannigfaltigkeit M_3^8 (S. 136, Anmerkung) sind natürlich als verschieden anzusehen, da es nicht möglich ist, die eine durch analytische Fortsetzung in die andere überzuführen.

$$\frac{\sigma_{\mu u}}{\sigma_{\lambda u}} = \frac{\sigma_{\mu v}}{\sigma_{\lambda v}} \cdot \frac{\sigma_{\mu w}}{\sigma_{\lambda w}} - (e_{\mu} - e_{\lambda}) \frac{\sigma_v}{\sigma_{\lambda v}} \cdot \frac{\sigma_w}{\sigma_{\lambda w}} \cdot \frac{\sigma_{\mu u}}{\sigma_{\lambda u}},$$

$$\frac{\sigma_{\nu u}}{\sigma_{\lambda u}} = \frac{\sigma_{\nu v}}{\sigma_{\lambda v}} \cdot \frac{\sigma_{\nu w}}{\sigma_{\lambda w}} - (e_{\nu} - e_{\lambda}) \frac{\sigma_v}{\sigma_{\lambda v}} \cdot \frac{\sigma_w}{\sigma_{\lambda w}} \cdot \frac{\sigma_{\mu u}}{\sigma_{\lambda u}}$$

geschriebene specielle Additionstheorem (8) des § 4 mit den beiden Cosinussätzen der sphärischen Trigonometrie vergleicht. Der von uns eingeschlagene längere Weg hat aber den Vorzug, dass er tiefer in das Wesen der Sache hineinführt, und insbesondere die Beziehung der Formeln (10) zu der in § 3 nachgewiesenen Darstellung orthogonaler Substitutionen durch elliptische Functionen von vier Argumenten aufdeckt. In der That erhält man das Coefficientensystem (3, I) und (4), wenn man in die Formeln (6, III) des § 3 die durch die Formeln (1), (2) des § 4 (S. 211) gegebene besondere Annahme einführt, mit der unwesentlichen Aenderung, dass die Grössen $a_{11} \dots a_{33}$ das Vorzeichen gewechselt haben, und dass gleichzeitig die beiden letzten Verticalreihen vertauscht sind. — Auch wenn man die Substitutionscoefficienten in dieser letzten Anordnung, ohne sie vorher vertauscht zu haben, zur Darstellung eines sphärischen Dreiecks benutzt, ergibt sich ein bemerkenswerther specieller Satz:

Man kann die Cosinus der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks auch mit Hilfe der folgenden Formeln durch elliptische Functionen von zwei Argumenten ausdrücken:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \cos a_1 = - \frac{\sigma(v+w)\sigma_{\lambda v}}{\sigma_{\lambda}(v+w)\sigma_v}, \quad \cos \alpha_1 = - \frac{\sigma(v+w)\sigma_{\lambda w}}{\sigma_{\lambda}(v+w)\sigma_w}, \\ \cos a_2 = - \frac{\sigma(v+w)\sigma_{\mu v}}{\sigma_{\mu}(v+w)\sigma_v}, \quad \cos \alpha_2 = - \frac{\sigma(v+w)\sigma_{\mu w}}{\sigma_{\mu}(v+w)\sigma_w}, \\ \cos a_3 = - \frac{\sigma(v+w)\sigma_{\nu v}}{\sigma_{\nu}(v+w)\sigma_v}, \quad \cos \alpha_3 = - \frac{\sigma(v+w)\sigma_{\nu w}}{\sigma_{\nu}(v+w)\sigma_w}. \end{array} \right.$$

In diesem Falle werden jedoch nicht, wie in dem eben betrachteten, gleichzeitig auch die Sinus der Seiten und Winkel durch eindeutige Functionen dargestellt.

Die Gestalt der in den letzten Paragraphen entwickelten Formeln kann noch in mannigfacher Weise abgeändert werden, insbesondere dadurch, dass man statt der σ -Quotienten die Functionen φu und $\varphi' u$ benutzt. Wir stellen hier einige (bekannte) Relationen zusammen, deren man sich bei solchen Umformungen bedienen kann:

$$(15) \left\{ \begin{aligned}
 \sigma_\lambda(2u) &= \sigma_\lambda^4 u - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) \sigma_\lambda^4 u = \\
 &= \sigma_\lambda^2 \sigma_\mu^2 - (e_\lambda - e_\mu) \sigma_\lambda^2 \sigma_\nu^2 = \sigma_\lambda^2 \sigma_\nu^2 - (e_\lambda - e_\nu) \sigma_\lambda^2 \sigma_\mu^2, \\
 \frac{\sigma_\mu u \sigma_\nu u}{\sigma u \sigma_\lambda u} &= -\frac{1}{2} \frac{\wp' u}{\wp u - e_\lambda} = -2 \frac{(\wp u - e_\mu)(\wp u - e_\nu)}{\wp' u}, \\
 \frac{\sigma_\lambda(2u)}{\sigma(2u)} &= \sqrt{\wp(2u) - e_\lambda} = \\
 &= (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) \cdot \left\{ \frac{1}{\wp'(u \pm \omega_\lambda)} + \frac{1}{\wp' u} \right\} \\
 &= -\frac{(\wp u - e_\lambda)^2 - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp' u} \\
 &= -\frac{4(\wp u - e_\lambda)^2 + g_2 - 12e_\lambda^2}{4\wp' u}.
 \end{aligned} \right.$$

(Vgl. auch Nr. (2) § 5 (S. 216). —

§ 6.

Die Wellenfläche. — Schlusswort.

Dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie mit gewissen Formeln der Theorie der elliptischen Functionen durch ein so enges Band verknüpft sind, wie wir soeben gesehen haben, dies beruht zum Theil auf dem Umstand, dass die aus der Trigonometrie abgeleiteten Gruppen \mathfrak{G}_{16} u. s. w. isomorph sind zu gewissen Gruppen linearer Substitutionen der Argumente $\omega, \omega', u, v, \dots$ elliptischer Functionen. Ein solcher Isomorphismus wird aber noch auf mannigfache andere Arten hergestellt werden können. Es wird nützlich sein, noch mit wenigen Worten eines Beispiels zu gedenken, das einiges Interesse beanspruchen darf, wenn sich auch nicht so bemerkenswerthe Sätze ergeben, wie in den bereits behandelten Fällen.

Betrachten wir die σ - oder θ -Functionen, die zu zwei von einander *unabhängigen* Perioden-Paaren $2\omega, 2\omega'$ und $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$ gehören, und daher durch die Bezeichnungen $\theta_x, \bar{\theta}_x$ unterschieden werden mögen, und setzen wir

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned}
 x_0 &= -\theta u \bar{\theta} v, & x_1 &= \theta_\lambda u \bar{\theta}_\lambda v, \\
 x_2 &= \theta_\mu u \bar{\theta}_\mu v, & x_3 &= \theta_{\nu} u \bar{\theta}_{\nu} v,
 \end{aligned} \right.$$

so erkennen wir sofort, dass wir auch bei dieser Annahme die Gruppe \mathfrak{G}_{16} durch eine Gruppe von linearen Transformationen der Argumente u, v , nämlich von Aenderungen um geeignete Vielfache halber

Perioden hervorbringen können; ja wir können, wenn wir noch Periodentransformationen zu Hilfe nehmen, auch noch die Gruppen G_{96} und G_{192} in ähnlicher Weise erzeugen. Es ergeben sich also auch jetzt wieder einfache Ausdrücke für die Cosinus der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks und seiner sämtlichen Nachbardreiecke. Lassen wir u und v allein sich ändern, so erhalten wir wieder eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Dreiecken, denen im Raume die Punkte einer Fläche entsprechen. Auch hier gelangen wir zu einer bekannten Fläche, dem sogenannten *Tetraedroid*, oder zu der davon nicht wesentlich verschiedenen *Fresnel'schen Wellenfläche*¹⁾.

Aus der Parameterdarstellung (1) folgt, dass die fragliche Fläche nicht allein durch die Substitutionen der Gruppe G_{16} , sondern ausserdem noch durch die Substitution $x_0' = -x_0$, $x_i' = x_i$ in sich selbst übergeführt wird. Ihre Gleichung enthält daher nur die Quadrate der Grössen x_i , und sie ist in diesen Quadraten von der zweiten Ordnung, da man Θ_μ^2 und Θ_ν^2 linear durch Θ^2 und Θ_λ^2 ausdrücken kann, die Grössen x_i^2 also ganze lineare Functionen von zwei Parametern werden. Man schliesst nun leicht, dass die gesuchte Gleichung die Form

$$c_0(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + c_1(x_2^2x_3^2 + x_0^2x_1^2) + * + * = 0$$

haben muss. Die Elimination der Grössen Θ^2 , Θ_λ^2 , $\bar{\Theta}^2$, $\bar{\Theta}_\lambda^2$ lässt sich leicht ausführen. Setzt man

$$(2) \quad a : b : c = \frac{\bar{\Theta}_\lambda^2(0)}{\Theta_\lambda^2(0)} : \frac{\bar{\Theta}_\mu^2(0)}{\Theta_\mu^2(0)} : \frac{\bar{\Theta}_\nu^2(0)}{\Theta_\nu^2(0)},$$

also

$$(3) \quad \begin{cases} e_\mu - e_\nu : e_\nu - e_\lambda : e_\lambda - e_\mu = b^2 - c^2 : c^2 - a^2 : a^2 - b^2, \\ \bar{e}_\mu - \bar{e}_\nu : \bar{e}_\nu - \bar{e}_\lambda : \bar{e}_\lambda - \bar{e}_\mu = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} : \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, \end{cases}$$

so folgt

$$(4) \quad \begin{cases} (x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)(x_2^2x_3^2 + x_0^2x_1^2) + \\ + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)(x_3^2x_1^2 + x_0^2x_2^2) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)(x_1^2x_2^2 + x_0^2x_3^2) = 0. \end{cases}$$

1) Vgl. H. WEBER in Crelle's Journal Bd. 84 (1878) S. 353.

Dies ist die Gleichung des Tetraedroids, eines speciellen Falles der KUMMER'schen Fläche 4. O. Sie geht in die bekannte Gleichung der FRESNEL'schen Wellenfläche

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 1$$

über durch die Substitution

$$x = \sqrt{-bc} \cdot \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \sqrt{-ca} \cdot \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \sqrt{-ab} \cdot \frac{x_3}{x_0}.$$

Die Gleichungen (3) zeigen deutlich die Abhängigkeit der Fläche von einer Gleichung 6. Grades, deren Wurzeln paarweise reciproke Werthe haben.

Indem wir unsere Betrachtungen hiermit beschliessen, wollen wir nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, wie das Begonnene nach mancherlei Richtungen hin fortgesetzt werden kann. Die Trigonometrie bietet in der That einen reichhaltigen Stoff dar, dem sich noch manche neue Seiten abgewinnen lassen werden.

Zunächst weist unsere Darstellung selbst, ebenso wie alle früheren, noch eine wesentliche Lücke auf: Sie gibt uns keinen Einblick in *vollständige* Systeme von Formeln der Trigonometrie. Wir meinen hiermit Folgendes. Man setze einen bestimmten sogenannten *Integritätsbereich* fest, d. h. man betrachte den Inbegriff aller ganzen rationalen Functionen F , die sich z. B. aus den Grössen l_i , λ_i oder etwa aus den Grössen $\cos a_i$, $\sin a_i$, $\cos \alpha_i$, $\sin \alpha_i$ mit numerischen Coefficienten bilden lassen. Welches ist nun die Gesammtheit der Functionen F , die identisch verschwinden? Welches sind die zwischen diesen Functionen bestehenden Relationen (sogenannte Syzygien erster und höherer Ordnung)? Es ist klar, dass man erst dann, wenn diese Fragen für die gebräuchlichsten goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel erledigt sind, mit Sicherheit wird sagen können, dass man auch nur die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln vollständig beherrscht.

Ein anderer Kreis von Fragestellungen bezieht sich darauf, wie man die Relationen $F = 0$ befriedigen kann, dadurch dass man die in ihnen vorkommenden goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel, sei es durch *eindeutige Functionen* von drei unabhängigen Grössen darstellt, sei es überhaupt durch Functionen eines geeigneten,

von vorn herein gegebenen Functionenbereichs. Wir haben zwar gesehen, dass die Cosinus der Seiten und Winkel sich rational durch drei Grössen darstellen lassen, dass die Grössen $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha_j}{2}$ einer ähnlichen Darstellung durch eindeutige transcendente Functionen fähig sind, dass endlich die Grössen $\operatorname{tg} \frac{s_i}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2}$ eindeutig durch vier Grössen ausgedrückt werden können, zwischen denen eine Gleichung besteht; aber dies sind nur gelegentliche Ergebnisse. Eine systematische Theorie solcher Parameterdarstellungen, die ja freilich zu den schwierigsten Gegenständen der Functionentheorie gehören würde, fehlt noch durchaus.

Ferner haben wir nicht behandelt die sogenannten *Invarianten* der betrachteten projectiven Gruppen, d. h. die ganzen homogenen Functionen der Veränderlichen, die sich bei den Transformationen der Gruppe bis auf einen Factor reproduciren, und ebensowenig haben wir die mit unseren Gruppen verknüpften algebraischen *Gleichungen* betrachtet. Es sei z. B. ein sphärisches Dreieck nicht unmittelbar vorgelegt, sondern durch das Dreikant bestimmt, das seine Ecken aus dem Mittelpunkt der Kugel projicirt, und dieses Dreikant selbst sei nicht durch seine einzelnen Kanten oder Flächen, sondern nur durch sein Polarsystem gegeben. Dann wird die Theorie eine andere Gestalt annehmen, indem die bis jetzt rational bekannten Grössen nunmehr als Wurzeln algebraischer Gleichungen defnirt sind. Die Durchführung dieses Gedankens, der die Trigonometrie mit gewissen ternären Formen in Zusammenhang bringt, wird, in den einfachsten Fällen wenigstens, keine Schwierigkeiten bieten. — Noch in anderer Weise kann man einen Zusammenhang zwischen der Trigonometrie und der Formentheorie herstellen durch das bekannte *Hesse'sche Uebertragungsprincip*, indem man jeden Strahl durch den Mittelpunkt der Kugel darstellt durch ein Punktepaar, das dem sogenannten unendlich fernen Kugelkreis angehört. Nicht nur die Trigonometrie, sondern überhaupt die Polygonometrie auf der Kugel wird so in eine keineswegs unfruchtbare Beziehung gesetzt zur Theorie der binären quadratischen Formen. Wieder in anderer Weise könnte man, ebenfalls durch Hesse's Uebertragungsprincip, die ebene Trigonometrie mit der Theorie gewisser binärer Formen verbinden. Ein jedes ebene Dreieck ist nämlich Poldreieck eines einzigen Kreises. Nimmt man:

diesen als Träger des binären Gebietes, so entspricht dem Dreieck eine Form 6. Ordnung, deren vierte Ueberschiebung $(f, f)_4$ identisch verschwindet, und der unendlich fernen Geraden entspricht eine quadratische Form φ . Die goniometrischen Functionen der Winkel des Dreiecks werden irrationale absolute Invarianten im System der Formen f und φ .

Die Betrachtung des unendlich fernen Kugelkreises erinnert uns daran, dass man auch auf die Gruppe der collinearen Transformationen eines reellen Kegelschnittes eine Geometrie der Ebene gründen kann, die mit der von LOBATSCHESKI und BOLYAI entworfenen absoluten Geometrie übereinstimmt, durch die sogenannte projective Maassbestimmung. Den Untersuchungen des I. und II. Abschnittes werden sich in diesem Falle ähnliche Ueberlegungen an die Seite stellen lassen, die andere, und zwar verwickeltere Realitätsverhältnisse darbieten. In ähnlicher Weise wird dann auch der III. Abschnitt zu ergänzen sein, in dem wir der Einfachheit halber von den Realitätsverhältnissen gänzlich abgesehen haben. —

Wir haben gelegentlich schon erwähnt, dass die Functionentheorie neuerdings zur Bildung eines Dreiecksbegriffs geführt hat, bei dem vom Dreieck eine zusammenhängende Fläche gefordert wird. Wir haben diesen Dreiecksbegriff, der sehr wohl eine genauere Untersuchung verdient, gänzlich bei Seite gelassen. Andererseits hat Herr SCHILLING kürzlich gefunden, dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie auch dann noch einer einfachen geometrischen Auffassung fähig sind, wenn man den Seiten und Winkeln *complexe* Werthe beilegt (Gött. Nachr. 1894, Nr. 5). Dieser schöne Satz ist aber (was Herrn SCHILLING entgangen ist) nur einer von *drei* ähnlich lautenden Sätzen, die den drei Hauptarten der Raumgeometrie angehören, und den drei Systemen complexer Zahlen entsprechen, die man aus zwei Einheiten bilden kann. Das Dreieck wird so zur Figur eines räumlichen Sechsecks erweitert, bei dem je zwei auf einander folgende Seiten sich rechtwinklig schneiden — einer Figur, die von der grössten Wichtigkeit ist für die Geometrie der Bewegung, und deren Theorie eine grosse Zahl von interessanten Sätzen in sich vereinigt, die man dem grossen französischen Geometer CHASLÉS verdankt.

Nicht geringeres Interesse bietet die Frage nach einer anderen Verallgemeinerung: Wird es möglich sein (wie es durch verschiedene

Umstände wahrscheinlich gemacht wird), die Theorie der *Tetraeders*, zunächst im Nicht-Euclidischen Raume, in ähnlicher Weise zu behandeln wie die des Dreiecks?

Auch die Untersuchungen des III. Abschnittes endlich verlangen eine Fortsetzung. Von noch weitergehenden Verallgemeinerungen absehend, gedenken wir nur der Ausdehnung unserer Betrachtung auf ϑ -Functionen mit zwei Veränderlichen, wie sie durch die Theorie der KUMMER'schen Fläche und durch die ROSENHAIN'schen ϑ -Formeln nahe gelegt wird. Auch in diesen Formeln, die acht Argumente enthalten, tritt das System von linearen Gleichungen auf, das wir wiederholt zu betrachten hatten. Aber auch schon in der Theorie der elliptischen Functionen kann man, wie hier nachträglich bemerkt werden mag, ähnliche Formeln mit acht und mehr Argumenten bilden, zum Beispiel auf Grund des folgenden algebraischen Satzes:

»Sind ξ_i, η_i, ζ_i und $\xi'_i, \eta'_i, \zeta'_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) zwei Systeme von zwölf Grössen, die in der auf S. 196 Nr. 7... 9 angegebenen Beziehung stehen, so definiren die Gleichungen

$$\begin{aligned}\xi_0'' &= \xi_0 \xi_1' + \xi_1 \xi_0', \\ \xi_1'' &= \xi_0 \xi_0' + \xi_1 \xi_1', \\ \xi_2'' &= -\xi_2 \xi_3' - \xi_3 \xi_2', \\ \xi_3'' &= -\xi_2 \xi_2' - \xi_3 \xi_3' \quad (\text{u. s. w.})\end{aligned}$$

ein drittes System von zwölf Grössen $\xi_i'', \eta_i'', \zeta_i''$ von derselben Eigenschaft.«

Wir erwähnen nur *eine* Folgerung dieses Satzes.

Bezeichnen wir mit a, \dots, d'' , $\bar{a}, \dots, \bar{d}''$ zwei Systeme von zwölf Grössen, die in der mehrfach besprochenen Beziehung stehen, so ändert die Summe $\alpha_{00} =$

$$\begin{aligned}& \Theta_{0000} \bar{\Theta}_{0000} + \Theta_{\lambda\lambda\lambda\lambda} \bar{\Theta}_{\lambda\lambda\lambda\lambda} \\ & + \Theta_{\mu\mu\mu\mu} \bar{\Theta}_{\mu\mu\mu\mu} + \Theta_{\nu\nu\nu\nu} \bar{\Theta}_{\nu\nu\nu\nu},\end{aligned}$$

worin zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\Theta_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \Theta_\alpha a \Theta_\beta b \Theta_\gamma c \Theta_\delta d, \\ \bar{\Theta}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \bar{\Theta}_\alpha \bar{a} \bar{\Theta}_\beta \bar{b} \bar{\Theta}_\gamma \bar{c} \bar{\Theta}_\delta \bar{d}\end{aligned}$$

gesetzt ist, ihren Werth nicht, wenn man die Grössen $a \dots d$, $\bar{a} \dots \bar{d}$ durch $a' \dots d'$, $\bar{a}' \dots \bar{d}'$ oder $a'' \dots d''$, $\bar{a}'' \dots \bar{d}''$ ersetzt.

Wir ersehen hieraus, dass die zweite Hälfte des in § 3 unter I (S. 205) formulirten Satzes noch erhalten bleibt, wenn man die dort besprochenen zehn Grössen a_{00} , a_{11} , a_{23} , a_{32} u. s. w. durch die allgemeineren Ausdrücke a_{00} (s. oben),

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\Theta_{\mu\nu\nu} + \Theta_{\nu\nu\mu})(\bar{\Theta}_{\mu\nu\nu} + \bar{\Theta}_{\nu\nu\mu}), \\ a_{23} &= (\Theta_{\mu\nu\nu} + \Theta_{\nu\nu\mu})(\bar{\Theta}_{\mu\nu\nu} + \bar{\Theta}_{\nu\nu\mu}), \\ a_{32} &= (\Theta_{\mu\nu\nu} + \Theta_{\nu\nu\mu})(\bar{\Theta}_{\mu\nu\nu} + \bar{\Theta}_{\nu\nu\mu}) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

ersetzt. Coefficienten einer orthogonalen Substitution sind diese Grössen a_{ik} im Allgemeinen offenbar *nicht*; immerhin sind sie uns erwähnenswerth erschienen, weil sie vermöge ihrer grösseren Allgemeinheit das Bildungsgesetz jener Substitutionscoefficienten deutlicher hervortreten lassen als die auf S. 205 (Nr. 6, I) angegebenen Ausdrücke der Grössen a_{ik} selbst.

Von dem ganzen Kreis unter einander zusammenhängender Probleme, die soeben erwähnt worden sind, und von denen *einige* vielleicht eine genauere Betrachtung verdienen, konnte von uns nur ein kleiner Ausschnitt behandelt werden. Immerhin wird das Mitgetheilte wohl zeigen, dass die Formeln der Trigonometrie doch noch nicht so genau bekannt sind, wie man wohl hier und da geglaubt haben mag, ja dass das Beste vielleicht noch zu thun bleibt. Aehnliches aber gilt von der elementaren Geometrie überhaupt.

So kommen wir am Ende unseres Weges zu dem im Vorwort ausgesprochenen Gedanken zurück. Möchten Andere das Begonnene weiterbilden und vervollständigen; möchte man sich wieder gewöhnen, in der elementaren Geometrie ein dankbares und wichtiges Forschungsgebiet zu erblicken!

Inhalt.

	Seite
I. Abschnitt. Geometrische Untersuchung der sphärischen Dreiecke.	
§ 1. Von der Gestalt eines Kugeldreiecks	90
§ 2. Ungleichungen für die Seiten und Winkel	94
§ 3. Uebergangsformen	96
§ 4. Nachbardreiecke	100
§ 5. Die Gruppe \mathcal{G}	105
§ 6. Eintheilung der sphärischen Dreiecke in zwei Classen	109
§ 7. Die goniometrischen Functionen der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks. — Erweiterte Gruppen	113
§ 8. Ebene Dreiecke	116
II. Abschnitt. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie und ihr Zusammenhang mit der Theorie der orthogonalen Substitutionen .	123
§ 1. Die Grundformeln	124
§ 2. Die DELAMBRE'schen und L'HUILIER'schen Formeln	127
§ 3. Folgerungen aus den L'HUILIER'schen Formeln	134
§ 4. Folgerungen aus den DELAMBRE'schen Formeln	136
§ 5. Einführung der Parameter X, Y, Z und der orthogonalen Substitutionen	140
§ 6. Darstellung der Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks durch die Parameter X, Y, Z	143
§ 7. Umkehrung des in § 6 aufgestellten Satzes	150
§ 8. Die desmischen Tetraeder	152
§ 9. Abbildung der Mannigfaltigkeit aller sphärischen Dreiecke auf den Punktraum.	157
§ 10. Fortsetzung: Die Abbildung der Dreiecke mit reellen Seiten und Winkeln	162
§ 11. Die Gruppen $G_{16}, G_{96}, G_{192}, G_{576}$	167
§ 12. Die Halbmesser der Eckenkreise und der Berührungskreise des Dreiecks	172
§ 13. Kreisvierecke in der Ebene	174
§ 14. Grenzübergang zum ebenen Dreieck	180
III. Abschnitt. Darstellung orthogonaler Substitutionen und sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen.	
Einleitung. Hilfssätze	188
§ 1. Die Gruppierung der WEIERSTRASS'schen und JACOBI'schen Additionstheoreme	192
§ 2. Fortsetzung: Das Aequivalent der Gruppe G_{576}	198
§ 3. Darstellung orthogonaler Substitutionen durch \mathcal{G} -Functionen von vier Argumenten	203
§ 4. Die desmische Fläche vierter Ordnung	210
§ 5. Orthogonale Substitutionen und sphärische Dreiecke, die mit der desmischen Fläche vierter Ordnung verknüpft sind	216
§ 6. Die Wellenfläche. — Schlusswort	225

89062907811



b89062907811a

DATE DUE

FE 23 '83			

DEMCO 38-297

PHYSICS AND MATH

MA/ou

89062907811



B89062907811A