ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ С ДВУМЯ КОНЕЧНЫМИ ВПОЛНЕ РАЗВЕТВЛЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

А. А. Гольдберг, В. Г. Таирова

Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция, $n(r, a)$ — число её a-точек, в круге $|z| \leqslant r$, засчитываемых с учетом порядка. Обозначим через $n_1(r, a)$ $(n_2(r, a))$ число a-точек функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r$, если a-точку порядка $m \geqslant 1$ будем засчитывать $m-1$ раз (соответственно $m-2$ раза). Заметим, что $n_2(r, a) = 2n_1(r, a) - n(r, a)$ может принимать отрицательные значения. Через $n_s(r, a)$ будем обозначать число простых a-точек, лежащих в круге $|z| \leqslant r$. Если $n_s(r, a) = O(1)$, то число a называется вполне разветвленным значением ([1], стр. 284). Из теории Р. Неванлинна следует, что целая функция может иметь не более двух конечных вполне разветвленных значений. Возникает вопрос, какую дополнительную информацию о целой функции, например, о порядке ее роста, можно получить, если известно, что она обладает конечными вполне разветвленными значениями. Если целая функция имеет одно вполне разветвленное значение, то это обстоятельство не влечет никаких ограничений на порядок функций. Действительно, если $f(z)$ произвольная целая функция, то у $[f(z)]^2$ точка 0 является вполне разветвленным значением, а порядок роста у $f(z)$ и $[f(z)]^2$ одинаков. Как мы покажем, иначе обстоит дело, когда целая функция обладает двумя вполне разветвленными значениями. Прежде чем формулировать теорему, условимся в случае, когда $n_1(r, a) = O(1)$, обозначать через $n_1(a)$ предел $\lim\limits_{r \to \infty} n_1(r, a)$ и аналогично определять $n_2(a)$, $n_s(a)$.

Теорема. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция конечного нижнего порядка с конечными вполне разветвленными значениями a и c $(a \neq c)$. Тогда*

1) $\sum\limits_{b \neq a,\, c} n_1(r, b) = O(1)$,

2) $n_2(r, a) = O(1)$, $n_2(r, c) = O(1)$,

3) $p = n_2(a) + n_2(c) + 2 \sum\limits_{b \neq a,\, c} n_1(b) + 2 > 0$,

4) $T(r, f) \sim P r^{\frac{p}{2}}$, *где P — некоторое положительное число,*

$n(r, w) \sim \frac{Pp}{2} r^{\frac{p}{2}}$ *для всех $w \neq \infty$,*

$n_1(r, a) \sim \frac{Pp}{4} r^{\frac{p}{2}}$, $n_1(r, c) \sim \frac{Pp}{4} r^{\frac{p}{2}}$.

Следствие 1. В условиях теоремы порядок ρ функции $f(z)$ является целым кратным от $\frac{1}{2}$. Если дополнительно предположить, что $n_s(a) = n_s(c) = 0$, то порядок $\rho \geqslant 1$.

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы и, кроме того, $n_2(a) + n_2(c) = 0$ (это выполняется, в частности, если все a-точки и c-точки имеют порядок, в точности равный 2), то порядок ρ функции $f(z)$ является натуральным числом.

Следствие 3. Если $f(z)$ имеет конечный нижний порядок и $n_s(a) = n_s(c) = n_2(a) = n_2(c) = \sum\limits_{b \neq a, c, \infty} n_1(b) = 0$ (то есть все a-точки и все c-точки $f(z)$ имеют порядок равный 2, а все остальные b-точки простые), то

$$f(z) = \pm \left\{\frac{a-c}{2} \sin(Az + B) + \frac{a+c}{2}\right\},$$

где $A \neq 0$ и B — некоторые комплексные числа.

Следствие 3 вытекает из некоторых фактов, устанавливаемых при доказательстве теоремы, но его нетрудно доказать и непосредственно.

Отметим еще, что целая функция с двумя конечными вполне разветвленными значениями может иметь бесконечный нижний порядок, например, функция $\sin e^z$ с вполне разветвленными значениями ± 1 (± 1-точки имеют порядок 2, а все остальные w-точки простые).

Мы условимся для простоты в дальнейшем называть областями и области в собственном смысле слова, и замкнутые области, и области с частью границы. Жордановой дугой называем гомеоморфный образ любого промежутка, а не обязательно сегмента или интервала. В каком смысле употреблен тот или иной термин всегда ясно из контекста. Если это может вызвать недоразумения, мы говорим о замкнутых областях и т. д.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть L — некоторое конечное или счетное множество точек в конечной z-плоскости. Тогда в каждом кружке $|z - z_0| < \delta$ найдется точка $z' \in L$, обладающая тем свойством, что каждая прямая, проходящая через z', пересекается с L не более, чем в одной точке.*

Действительно, пусть M — множество всех прямых, проходящих по крайней мере через две точки из L. Очевидно, M — конечно или счетно. Проведем через z_0 прямую m с угловым коэффициентом, отличным от всех угловых коэффициентов прямых из M. Прямые из M пересекаются с m в конечном или счетном числе точек. За z' достаточно взять любую точку из $m \cap \{|z - z_0| < \delta\} \backslash M$.

Пусть $w = f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условиям теоремы, $z = \varphi(w)$ — функция, обратная к $f(z)$, F — риманова поверхность, на которую $w = f(z)$ отображает конечную z-плоскость. Так как $w = f(z)$ имеет конечный нижний порядок, то в силу теоремы Данжуа-Карлемана-Альфорса ([1], гл. XI, § 3) F имеет над ∞ конечное число прямо критических точек. Обозначим это число через p. Тогда над конечной частью w-плоскости лежит не более p критических точек F с проекциями на w-плоскость $g_1, \ldots, g_l$ $(0 \leqslant l \leqslant p)$. Отметим на конечной w-плоскости проекции всех алгебраических точек ветвления F и точки $g_1, \ldots, g_l$, полученное конечное или счетное множество обозначим через L. Выберем точку $w_0 \overline{\in} L$ такую, что каждая прямая, проходящая через w_0, пересекается с L не более, чем в одной точке.

Рассмотрим все аналитические элементы функции $\varphi(w)$ с центрами над w_0 и образуем их прямолинейные звезды S_ν, которые будем называть листами F. Очевидно, каждый лист представляет собой конечную w-плоскость с разрезами по конечному или счетному числу полупрямых $\arg(w - w_0) = \theta_j$, $|h_j| \leqslant |w| < \infty$, где $h_j = |h_j| \exp(i\theta_j) \in L$. Точки h_j будем называть вершинами разрезов; в конечной части плоскости вершины разрезов, соответствующие фиксированному листу S_ν, могут иметь точки сгущения только в точках $g_1, \ldots, g_l$. Очевидно, риманову поверхность F можно представлять составленной из листов S_ν, у которых надлежащим образом отождествлены края разрезов. Если вершине разреза h_j на листе

S_ν соответствует на F алгебраическая точка ветвления, то соответствующий разрез называется разрезом первого рода, если же h_j соответствует граничный элемент F, то разрез назовем разрезом второго рода.

Выберем число ρ, $0 < \rho < \infty$ так, чтобы часть римановой поверхности F, лежащая над $\rho < |w| < \infty$, состояла из p связных кусков, которые являются окрестностями p прямо критических точек над ∞, причем на $|w| = \rho$ нет точек из L и точки a, c, $g_1, \ldots, g_l$ лежат в $|w| < \rho$. Обозначим через F'_ρ часть F, лежащую над $|w| \leqslant \rho$, через F''_ρ — часть F, лежащую над $\rho < |w| < \infty$, через S^ρ_ν — пересечение S_ν с $\{|w| \leqslant \rho\}$. Прообразы F'_ρ и F''_ρ в z-плоскости при отображении $w = f(z)$ обозначим соответственно через D'_ρ и D''_ρ. Множество D''_ρ состоит из p областей $D_{\rho j}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, причем, не уменьшая общности, можно считать, что граница D''_ρ или имеет в качестве связных некомпактных компонентов границы p жордановых дуг с обеими ветвями, уходящими к $z = \infty$, или (что возможно лишь в случае $p = 1$) граница D''_ρ не имеет ни одного связного некомпактного компонента границы.

Действительно, предположив, что хотя бы одна область $D_{\rho j}$ имеет больше чем один связный некомпактный компонент границы, мы могли бы за счет увеличения ρ добиться того, чтобы граница этой области содержала только один связный некомпактный компонент, поскольку в противном случае этой области соответствовали бы на F по крайней мере две прямо критические точки. Обозначим границу $D_{\rho j}$ через $K_{\rho j}$, а единственный связный некомпактный компонент $K_{\rho j}$ (если он существует) — через $K^\infty_{\rho j}$. Пусть D^ρ_ν — образ листа S^ρ_ν при отображении $z = \varphi(w)$. Очевидно, D^ρ_ν является некомпактным или компактным множеством в зависимости от того, есть ли на S^ρ_ν разрезы второго рода или же они отсутствуют.

Кроме того, каждый круг $|z| \leqslant R$ имеет не пустое пересечение с конечным числом D^ρ_ν. Края разреза первого рода на S^ρ_ν при отображении $z = \varphi(w)$ переходят в две жордановы кривые на D'_ρ, которые имеют одну общую точку — концы кривых, соответствующие вершине разреза, другие два конца лежат на $K = \bigcup\limits_{j=1}^{p} K_{\rho j}$. Края разреза второго рода на S^ρ_ν при отображении $z = \varphi(w)$ переходят в две жордановы кривые на D'_ρ, которые взаимно не пересекаются в D'_ρ, причем один конец каждой из них лежит на K, а другой конец, соответствующий вершине разреза, переходит в $z = \infty$.

Из условий теоремы следует, что, кроме конечного числа листов S^ρ_ν (обозначим их через $\overline{S}^\rho_\nu$), все листы S^ρ_ν имеют не менее двух разрезов. Заметим также, что K^ρ_ν — образ дуг $|w| = \rho$, являющихся границей одного листа S^ρ_ν, при отображении $z = \varphi(w)$ является ограниченным множеством.

Лемма 2. *Пусть края некоторого разреза на листе $S^\rho_{\nu_1}$ при отображении $z = \varphi(w)$ переходят в кривые l'_1 и l''_1. Если l'_1 и l''_1 оканчиваются на одном связном компоненте K, то связная дуга l_1, лежащая на K и соединяющая концы l'_1 и l''_1, содержит хотя бы одну граничную дугу некоторой области $\overline{D}^\rho_\nu$, соответствующей листу $\overline{S}^\rho_\nu$.*

Предположим, что наше утверждение не справедливо, то есть все области D^ρ_ν, имеющие общие точки с l_1, соответствуют листам не менее чем с двумя разрезами. Дуги l'_1, l''_1 и l_1 образуют жорданов треугольник, у которого вершины, общие для l'_1 и l_1, а также для l''_1 и l_1, — конечные точки, а вершина, общая для l'_1 и l''_1, лежит в $|z| < \infty$ или в $z=\infty$, в зависимости от того, является ли разрез разрезом первого или второго рода.

Пусть сначала он является разрезом первого рода. Область $D^{\rho}_{\nu_1}$ может лежать или внутри треугольника $l'_1 l''_1 l_1$, или вне его. Предположим, что $D^{\rho}_{\nu_1}$ лежит вне $l'_1 l''_1 l_1$. Тогда внутри треугольника $l'_1 l''_1 l_1$ найдется область $D^{\rho}_{\nu_2}$ $(\nu_2 \neq \nu_1)$ такая, что у $S^{\rho}_{\nu_2}$ образ одного из краев разреза совпадает с l'_1. Но в силу нашего предположения, у $S^{\rho}_{\nu_2}$ есть по крайней мере еще один разрез, который необходимо должен быть разрезом первого рода. Обозначим образы его краев при отображении $z=\varphi(w)$ через l'_2, l''_2. Вместе с некоторой связной дугой $l_2 \subset l_1$ кривые l'_2 и l''_2 образуют жорданов треугольник $l'_2 l''_2 l_2$, причем $D^{\rho}_{\nu_2}$ лежит вне этого треугольника. Повторяя эти рассуждения, получим бесконечную последовательность областей $D^{\rho}_{\nu_1}$, $D^{\rho}_{\nu_2}$, $D^{\rho}_{\nu_3}$, ... , причем все они, за исключением $D^{\rho}_{\nu_1}$, содержатся в замкнутой области, ограниченной жордановым треугольником $l'_1 l''_1 l_1$. Так как с каждым ограниченным кругом $|z| \leqslant R < \infty$ может пересекаться только конечное число областей D^{ρ}_{ν}, то мы получаем противоречие. Если $D^{\rho}_{\nu_1}$ лежит внутри треугольника $l'_1 l''_1 l_1$, то рассуждения проводим точно так же, как и относительно $D^{\rho}_{\nu_2}$.

Пусть теперь общая вершина l'_1 и l''_1 лежит в $z=\infty$. Очевидно, что в этом случае связный компонент K, на котором лежат концы l'_1 и l_1, не может быть компактным. Так как этот компонент вместе с l'_1 разделяет конечную z-плоскость на три непересекающиеся области, то $D^{\rho}_{\nu_1}$ не может лежать вне треугольника $l'_1 l''_1 l_1$ (внутренностью этого треугольника считаем ограниченную им область, содержащуюся в D'_{ρ}). Если же $D^{\rho}_{\nu_1}$ лежит внутри треугольника $l'_1 l''_1 l_1$, то обозначим образы краев другого разреза $S^{\rho}_{\nu_1}$ через l'_2 и l''_2. Общая вершина l'_2 и l''_2 обязательно будет конечной точкой, и мы приходим к рассмотренному случаю. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что в каждом компоненте D''_{ρ}, ограниченном компактным связным компонентом K, содержится по крайней мере одна область $\overline{D}^{\rho}_{\nu}$, соответствующая $\overline{S}^{\rho}_{\nu}$. Так как число листов $\overline{S}^{\rho}_{\nu}$ не превышает $n_s(a)+n_s(c)$, то и число компактных компонентов K не превышает $n_s(a)+n_s(c)$. Отсюда следует, что и в случае $p=1$ K должно иметь некомпактный компонент. Какой бы круг $|z| \leqslant R$ мы ни взяли, выбирая ρ достаточно большим, можно добиться того, чтобы D''_{ρ} не пересекалось с $|z| \leqslant R$. Таким образом, если R настолько велико, что $|z| \leqslant R$ содержит все простые a-точки и c-точки $f(z)$, то взяв ρ достаточно большим, можно добиться того, чтобы D''_{ρ} состояло из p односвязных областей $D_{\rho j}$, каждая из которых ограничена одной кривой $K^{\infty}_{\rho j}$, обе ветви которой уходят к $z=\infty$. В дальнейшем считаем, что ρ выбрано именно так, и, вместо $K^{\infty}_{\rho j}$ будем писать просто $K_{\rho j}$.

Далее, ни один из листов S^{ρ}_{ν} не обладает разрезами второго рода. Действительно, допустим, что лист $S^{\rho}_{\nu_1}$ имеет разрез второго рода. Обозначим через l''_1 образ при отображении $z=\varphi(w)$ одного из краев этого разреза. Один из концов l'_1 лежит в $z=\infty$, другой — в некоторой точке $z_0 \in K$. Очевидно, всегда можно соединить некоторую точку $z_1 \in l'_1$, $z_1 \neq z_0$ с точкой z_2 на некоторой кривой $K_{\rho j_0}$ жордановой кривой l_2 так, что жорданов треугольник, образованный частью дуги l'_1 от $z=\infty$ до z_1, дугой l_2 и одной из двух дуг, на которые $K_{\rho j_0}$ делится точкой z_0, ограничивает замкнутую область, не содержащую $D^{\rho}_{\nu_1}$ и точек из $K \setminus K_{\rho j_0}$. Так как с l_2 пересекаются конечное число D^{ρ}_{ν}, то эта область содержит бесконечное число областей D^{ρ}_{ν}. Но образы краев всех разрезов на листах

S_ν^ρ, соответствующих этим D_ν^ρ, обязательно имеют общие точки с $K_{\rho j_0}$. Из леммы 2 можно сделать вывод, что среди S_ν^ρ имеется бесконечное число $\overline{S}_\nu^\rho$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Для фиксированного листа S_ν вершины разрезов могут иметь точки сгущения только в точках $g_1, \ldots, g_l$, причем если g_j является такой точкой сгущения, то g_j будет и вершиной разреза второго рода. Поэтому мы можем сделать вывод, что каждый лист S_ν^ρ может иметь самое большее конечное число разрезов, причем все они первого рода.

Покажем, что F_ρ' имеет, кроме точек ветвления первого порядка над a и c, только конечное число точек ветвления, и дадим грубую оценку

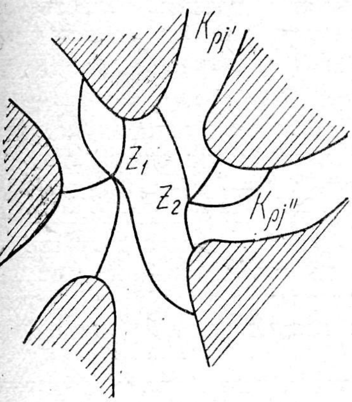

Рис. 1.

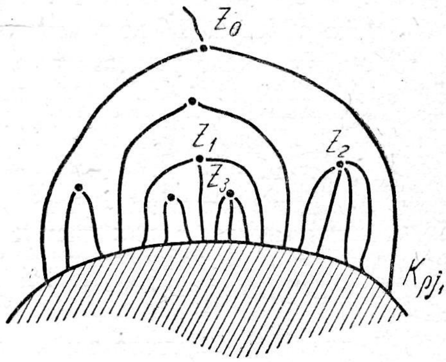

Рис. 2.

сверху для их числа. Пусть точка z_0 является прообразом точки ветвления порядка $m \geqslant 1$ на F_ρ'. Тогда z_0 является общей граничной точкой для $m+1$ области D_ν^ρ, причем из z_0 исходят $m+1$ жорданова кривая $\varkappa_j(z_0)$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, каждая из которых является общей граничной дугой для двух соседних областей $D_{\nu'}^\rho$ и $D_{\nu''}^\rho$, соответствующей двум склеенным краям разрезов на $S_{\nu'}^\rho$ и $S_{\nu''}^\rho$. Эти жордановы дуги оканчиваются на кривых $K_{\rho j}$. Две жордановы дуги $\varkappa_i(z_1)$ и $\varkappa_j(z_2)$ могут иметь общую точку, только если $z_1 = z_2$, причем эта точка $z_1 = z_2$ и будет общей. Обозначим через $K(z_0)$ сумму кривых $\bigcup\limits_{j=1}^{m+1} \varkappa_j(z_0)$, $m = m(z_0)$. Нетрудно убедиться, что если множества $K(z_1)$, $K(z_2)$ $z_1 \neq z_2$, каждое имеет общие точки с тремя различными кривыми $K_{\rho j}$, две из которых $K_{\rho j'}$ и $K_{\rho j''}$ фиксированы, то нельзя указать третье множество $K(z_3)$, $z_3 \neq z_1$, z_2 с тем же свойством. Действительно, множество $K(z_1) \cup K(z_2)$ делит D_ρ' на конечное число односвязных областей, среди которых только одна граничит одновременно и с $K_{\rho j'}$, и с $K_{\rho j''}$, но эта область не граничит ни с какой другой из областей $K_{\rho j}$ (см. рис. 1). Пусть K_{z_0} имеет общие точки не более чем с двумя кривыми $K_{\rho j}$ и $m(z_0) \geqslant 2$. Тогда по крайней мере две кривые $\varkappa_j(z_0)$, например, $\varkappa_1(z_0)$ и $\varkappa_2(z_0)$ имеют общие точки с одной кривой $K_{\rho j_1}$. Пусть в области G, ограниченной кривыми $\varkappa_1(z_0)$, $\varkappa_2(z_0)$ и некоторой дугой кривой $K_{\rho j_1}$, лежит t множеств $K(z_j)$, $m(z_j) \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant t$. Используя лемму 2, легко показать индукцией по t, что в G будут содержаться не менее $1+t$ областей $\overline{D}_\nu^\rho$, соответствующих листам $\overline{S}_\nu^\rho$ (см. рис. 2). Действительно, среди областей, на которые множества $K(z)$ делят G, листам $\overline{S}_\nu^\rho$ будут соответствовать те и только те области, которые ограничены $K_{\rho j}$ и только одним $K(z)$, при этом число таких областей не увеличится, если из G выбросить все $K(z)$ с $m(z)=1$. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что в G отсутствуют $K(z)$ с $m(z)=1$. Но, очевидно, добавление каждого $K(z)$ с $m(z)\geqslant 2$ увеличивает число областей $D_\nu^\rho \subset G$ по меньшей мере на единицу. Следовательно, число алгебраических точек ветвления порядка $\geqslant 2$ поверхности F'_ρ не превышает числа $p(p-1)+n_s(a)+n_s(c)$. Остается оценить число точек ветвления F'_ρ первого порядка, лежащих не над a и c. Для этого оценим число областей $\widetilde{D}_\nu^\rho$, соответствующих листам S_ν^ρ более чем с двумя разрезами. Очевидно, что если области $D_{\nu_1}^\rho$ и $D_{\nu_2}^\rho$, $\nu_1 \neq \nu_2$, имеют каждая общие точки с тремя различными кривыми $K_{\rho j}$, две из которых — $K_{\rho j'}$ и $K_{\rho j''}$ — фиксированы, то нельзя указать еще третью область $D_{\nu_3}^\rho$, $\nu_3 \neq \nu_1, \nu_2$, с тем же свойством. Учитывая лемму 2, получаем, как выше, что число областей $\widetilde{D}_\nu^\rho$ не превышает $p(p-1)+n_s(a)+n_s(c)$. Кроме того, очевидно, что число разрезов у каждого листа S_ν^ρ не превышает $p+n_s(a)+$ $+n_s(c)$. Таким образом, число точек ветвления первого порядка, каждая из которых служит вершиной разреза хотя бы на одном листе не менее чем с тремя разрезами, не превышает $[p(p-1)+n_s(a)+n_s(c)]\times$ $\times[p+n_s(a)+n_s(c)]$. Нам остается учесть только точки ветвления первого порядка, лежащие не над a и c, обладающие тем свойством, что на соединяющихся в них листах может быть самое большее еще одна вершина разреза, следовательно, каждый из этих листов не разветвлен или над a, или над c, поэтому таких точек ветвления не больше $n_s(a)+$ $+n_s(c)$.

Следовательно, число алгебраических точек ветвления поверхности F'_ρ без учета точек ветвления первого порядка, лежащих над a и c, не превосходит некоторого числа A, зависящего только от p, $n_s(a)$ и $n_s(c)$ и не зависящего от ρ. Поэтому число этих точек ветвления и у поверхности F не превосходит числа A. Следовательно, нами доказаны утверждения 1) и 2) теоремы. Заметим еще, что F не имеет над конечной частью плоскости ни логарифмических точек ветвления (им соответствовали бы разрезы второго рода), ни вообще каких-либо критических точек (если бы таковые существовали и не являлись бы логарифмическими точками ветвления, то множество проекций алгебраических точек ветвления было бы счетным).

Мы получили, что число проекций точек ветвления поверхности F конечно, поэтому поверхность F может быть изображена с помощью комплекса отрезков ([1], гл. XI, § 2; [2], стр. 181—184, мы используем терминологию из [2]). Пусть, кроме a, c, ∞, точки ветвления F проектируются в точки $b_1, \ldots, b_q$. Проведем кривую сечения C так, чтобы базисные точки располагались на ней в следующем порядке при положительном C: $a, b_1, b_2, \ldots, b_q, c, \infty$. Комплекс отрезков, соответствующий F, обозначим через $\mathfrak{K}$. Очевидно, $\mathfrak{K}$ имеет p логарифмических областей, соответствующих $w=\infty$, причем каждый узел комплекса $\mathfrak{K}$ лежит на краю одной из этих областей. Кроме конечного числа многоугольников, все алгебраические элементарные области являются или квадратами, соответствующими точкам ветвления первого порядка над a и c, или двуугольниками, соответствующими гладким листам над $b_1, \ldots, b_q$. Поэтому ясно, что если мы исключим из $\mathfrak{K}$ достаточно большой связный кусок $\mathfrak{K}_0$, состоящий из конечного числа многоугольников и граничащий со всеми p логарифмическими областями, то оставшаяся часть комплекса отрезков будет состоять из p связных частей, изображенных на рис. 3 и называемых синус-концами. Таким образом, комплекс $\mathfrak{K}$ состоит из конечного ядра $\mathfrak{K}_0$ и p синус-концов. Так как синус-концы являются частным случаем периодических концов, то наша поверхность F принадлежит хорошо изученному классу поверхностей с p периодическими концами ([2], гл. VIII, §§ 1—3). Применяя известные формулы, получим утверждение 4) теоремы (при желании могли бы сформулировать утверждения и об аргументах w-точек). Остается доказать утверждение 3) теоремы.

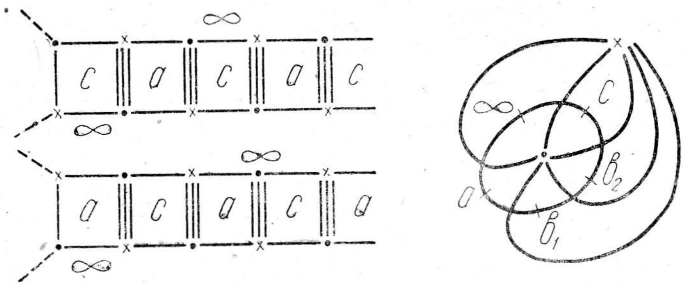

Рис. 3.

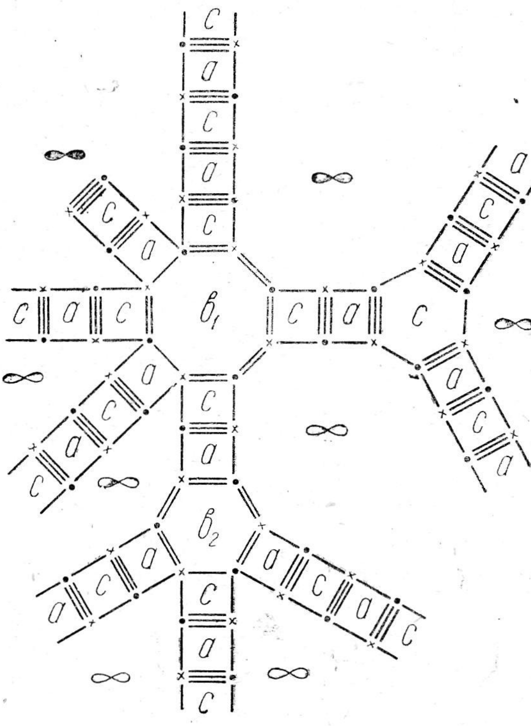

Рис. 4.

$$n_s(a) = 3,\quad n_2(a) = -3,\ n_s(c) = 2,\ n_2(c) = -1,$$
$$n_1(b_1) = 3,\quad n_1(b_2) = 2,\ p = 2(3+2) + (-3-1) + 2 = 8$$

Обозначим через $r(w)$ — порядок w-точки функции $f(z)$, $w = a$, $b_1, \ldots, b_q, c$ (см. рис. 4). На комплексе отрезков w — точке соответствует $2r(w)$ — угольник. Обозначим через $\nu(w)$ — число w-точек $f(z)$, переходящих при отображении $w = f(z)$ в точки $\overline{w}$ на F_0 — части F, соответствующей ядру $\mathfrak{K}_0$, если число этих точек считать без учета порядка. Многоугольник из $\mathfrak{K}_0$, соответствующий точке w, будем называть w — многоугольником. Легко видеть, что каждый b_j-многоугольник $(2 \leqslant j \leqslant q-1)$ по сторонам, начинающимся со знака $\times$ (при положительном обходе), граничит с b_{j+1}-многоугольниками, по сторонам, начинающимся со знака $\cdot$, граничит с b_{j-1}-многоугольниками *. Каждый b_1-многоугольник по сторонам, начинающимся со знака $\times$, граничит с b_2-многоугольниками, а по сторонам, начинающимся со знака $\cdot$, граничит или с a-многоугольником, или синус-концом. Каждый b_q-многоугольник по сторонам, начинающимся с $\times$, граничит или с c-многоугольником, или с синус-концом, а по сторонам, начинающимся с $\cdot$, граничит с b_{q-1}-многоугольниками. Каждый a-многоугольник по сторонам, начинающимся с $\times$, граничит с b_1-многоугольниками **, а по сторонам, начинающимся с $\cdot$, граничит с логарифмической областью. Каждый c-многоугольник по сторонам, начинающимся с $\times$, граничит с логарифмической областью, а по сторонам, начинающимся с $\cdot$, граничит с b_q-многоугольником.

Так как каждый узел лежит на краю некоторой логарифмической области, то два многоугольника из комплекса отрезков могут иметь не более одного общего отрезка. Обозначим через T число отрезков из $\mathfrak{K}_0$, являющихся общей стороной для двух многоугольников из $\mathfrak{K}_0$. Очевидно,

$$p + 2T = \sum_{j=1}^{q} \sum_{\bar{b}_j \in F_0} 2r(b_j) + \sum_{\bar{a} \in F_0} r(a) + \sum_{\bar{c} \in F_0} r(c). \tag{1}$$

Внутри каждого многоугольника из $\mathfrak{K}_0$ отметим точку и точки, лежащие в двух смежных многоугольниках, соединим жордановым отрезком, пересекающим общую сторону этих двух многоугольников. Эти отрезки будем проводить так, чтобы они нигде попарно не пересекались, кроме, возможно, отмеченных точек. Мы получим систему отрезков σ, дополнение которой до расширенной комплексной плоскости состоит из одной односвязной области. Действительно, предположив, что дополнение имеет по крайней мере два связных компонента, получим, что узлы $\mathfrak{K}$, лежащие в компоненте, не содержащем ∞, не лежат на краю логарифмической элементарной области $\mathfrak{K}$. Очевидно, число отмеченных точек равно $\sum\limits_{j=1}^{q} \nu(b_j) + \nu(a) + \nu(c)$, а число отрезков равно T. По формуле Эйлера

$$\sum_{j=1}^{q} \nu(b_j) + \nu(a) + \nu(c) - T = 1. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{aligned} p &= \sum_{j=1}^{q} \sum_{\bar{b}_j \in F_0} 2r(b_j) + \sum_{\bar{a} \in F_0} r(a) + \sum_{\bar{c} \in F_0} r(c) + \\ &\quad + 2 - 2\sum_{j=1}^{q} \nu(b_j) - 2\nu(a) - 2\nu(c) = \\ &= 2\sum_{j=1}^{q} \sum_{\bar{b}_j \in F_0} (r(b_j) - 1) + \sum_{\bar{a} \in F_0} (r(a) - 2) + \sum_{\bar{c} \in F_0} (r(c) - 2) + \\ &\quad + 2 = 2\sum_{j=1}^{q} n_1(b_j) + n_2(a) + n_2(c) + 2, \end{aligned}$$

то есть утверждение 3) теоремы.

---

* Мы принимаем во внимание также двуугольники.

** Или с c-многоугольником, или с синус-концом при $q = 0$. Для простоты мы будем считать $q > 0$, что, очевидно, не уменьшает общности.

Рассмотрим некоторые простейшие обобщения доказанной теоремы. Предположим, что $f(z)$ — трансцендентная мероморфная в $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка с конечными вполне разветвленными значениями a и $c\ (a \neq c)$ и конечным числом полюсов. Обозначим через $\overline{n}(\infty) = n(\infty) - n_1(\infty)$ число полюсов функции $f(z)$ без учета их порядка. Тогда останутся в силе все утверждения теоремы, лишь утверждение 3) заменится следующим:

$$3')\quad p = n_2(a) + n_2(c) + 2 \sum_{b \neq a,\, c} n_1(b) + 2 - 2\overline{n}(\infty) > 0.$$

Действительно, для доказательства этого обобщения теоремы потребуется провести лишь незначительную модификацию прежнего доказательства. В нашем случае при достаточно большом ρ множество D''_ρ будет состоять из p неограниченных областей и $\overline{n}(\infty)$ ограниченных областей. Но так как к этим $\overline{n}(\infty)$ ограниченным областям может примыкать лишь конечное число областей D^ρ_ν, то в последующие рассуждения придется внести незначительные изменения. В комплексе отрезков $\mathfrak{K}_0$ теперь будут встречаться $\overline{n}(\infty)$ алгебраических ∞-многоугольников. При расстановке отмеченных точек и построении системы отрезков σ не будем принимать во внимание ∞-многоугольники. Теперь дополнение до расширенной комплексной плоскости будет состоять из односвязной области и, по формуле Эйлера, вместо (2), получим

$$\sum_{j=1}^{q} \nu(b_j) + \nu(a) + \nu(c) - T = 1 - \overline{n}(\infty), \qquad (2')$$

откуда следует 3').

Другое обобщение можно получить следующим образом. Пусть $w = f(z)$ — трансцендентная мероморфная в $z \neq \infty$ функция с конечным числом полюсов, отображающая конечную z-плоскость на риманову поверхность F. Односвязную замкнутую область в расширенной w-плоскости назовем вполне разветвленной, если все связные куски F, лежащие над D, за возможным исключением конечного числа, неоднолистны (см. [1], гл. XIII, § 7). Пусть F_r — образ $|z| \leqslant r$ при отображении функцией $w = f(z)$. Если D — некоторая односвязная замкнутая область в расширенной w-плоскости, то через $n_2(r, D)$ обозначим удвоенную сумму порядков разветвления островов поверхности F_r, лежащих над D, минус сумма чисел листов этих островов. Заметим, что если остров — односвязная двулистная область с одной точкой ветвления первого порядка *, то от такого острова $n_2(r, D)$ не получает никакого прироста. Если остров однолистен, то его взнос в $n_2(r, D)$ равен -1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{r \to \infty} n_2(r, D)$, то мы обозначим его через $n_2(D)$. Теперь можем сформулировать такой результат.

Если функция $f(z)$ имеет две непересекающиеся ограниченные вполне разветвленные замкнутые области D_1 и D_2, то:

$$1'')\quad \sum_{\substack{b \neq \infty \\ b \overline{\in} D_1 \cup D_2}} n_1(r, b) = O(1);$$

2'') *все связные куски F, лежащие над D_j, кроме конечного числа, односвязны и двулистны с одной точкой ветвления первого порядка* ($j = 1,2$);

* Из односвязности и двулистности острова уже следует наличие единственной точки ветвления, причем первого порядка.

$$3'')\ p = n_2(D_1) + n_2(D_2) + 2 \sum_{\substack{b \neq \infty \\ b \overline{\in} D_1 \cup D_2}} n_1(b) + 2 - 2\overline{n}(\infty) > 0;$$

4″) $T(r, f) \sim Pr^{\frac{p}{2}}$, *где P — некоторое положительное число,* $n(r, w) \sim$ $\sim \frac{Pp}{2} r^{\frac{p}{2}}$, *для всех* $w \neq \infty$.

Чтобы доказать это, возьмем такой кружок в w-плоскости, чтобы ни один луч, имеющий начало в этом кружке, не пересекал одновременно D_1 и D_2 (кружок выбираем вне D_1 и D_2). Если D_1 и D_2 расположены так, что выбор такого кружка невозможен, то предварительно произведем такое гомеоморфное преобразование конечной w-плоскости на себя, чтобы образы D_1 и D_2 лежали внутри двух непересекающихся замкнутых кругов, тогда нужный нам выбор кружка наверное возможен. Такое же гомеоморфное преобразование проведем на каждом листе F.

Тогда, почти дословно повторяя доказательства утверждений 1) и 2) основной теоремы, докажем утверждения 1″) и 2″). Нужно только, разбивая поверхность F (или её образ, если проводилось дополнительное гомеоморфное отображение) на листы, применить лемму 1 к кружочку, о котором речь шла выше. Тогда условия теоремы позволяют нам утверждать, что на всех листах S_ν^ρ, кроме, возможно, конечного числа имеются по крайней мере два разреза с вершинами соответственно в D_1 и в D_2.

Выберем в D_j фиксированную точку d_j, отличную от проекции точек ветвления F. Пусть G_1 и G_2 — две непересекающиеся односвязные области, ограниченные каждая одной замкнутой жордановой кривой, такие, что $D_j \subset G_j$ $(j = 1,2)$ и в $G_j \setminus D_j$ не лежат проекции точек ветвления F. Если над D_j лежит односвязный двулистный кусок S_D^j поверхности F, то и над G_j лежит кусок $S_G^j \supset S_D^j$ поверхности F с таким же свойством. Отобразим кусок S_D^j квазиконформно так, чтобы единственная точка ветвления первого порядка перешла в точку ветвления, проектирующуюся в d_j, а граница S_G^j осталась неподвижной. Очевидно ([2], стр. 184), это преобразование можно провести так, чтобы характеристика отображения не превышала некоторой постоянной, зависящей только от D_j и G_j. Мы получаем квазиконформное отображение римановой поверхности F на некоторую новую риманову поверхность F', причем характеристика этого отображения может быть не равна 1 только в точках, проектирующихся в области G_1 и G_2, причем она равномерно ограничена. У F' имеются два вполне разветвленных значения над d_1 и d_2. Все величины, относящиеся к F', будем обозначать штрихом. Очевидно, число логарифмических точек ветвления у F и F' одинаково: $p = p'$. Очевидно также, что

$$\overline{n}(\infty) = \overline{n}'(\infty), \quad \sum_{\substack{b \neq \infty \\ b \overline{\in} D_1 \cup D_2}} n_1(b) = \sum_{\substack{b \neq \infty \\ b \overline{\in} D_1 \cup D_2}} n_1'(b).$$

Поэтому

$$p = 2 \sum_{\substack{b \neq \infty \\ b \overline{\in} D_1 \cup D_2}} n_1(b) + 2 - 2\overline{n}(\infty) + 2 \sum_{\substack{b \in D_1 \cup D_1 \\ b \neq d_1,\, d_2}} n_1'(b) + n_2'(d_1) + n_2'(d_2).$$

Легко видеть, что от односвязных двулистных кусков F над D_j с одной точкой ветвления первого порядка $n_2(D_j)$ не получает никакого прироста, но от этого куска не получает прироста и $n_2(d_j)$ и $\sum\limits_{b \neq dj} n_1'(b)$.

Рассмотрим теперь лежащий над D_j кусок S_D^j поверхности F с числом листов n и разветвленностью v. Величина $n_2(D_j)$ получит от этого куска прирост $2v-n$. От этого же куска величина $\sum n_1'(b)$ получит прирост v_j, а величина $n_2'(d_j)$ — прирост $-n$, так как все листы S_G^j неразветвлены над dj. Следовательно,

$$n_2(D_j) = 2 \sum_{\substack{b \in D_j \\ b \neq d_j}} n_1'(b) + n_2'(d_j)$$

и 3″) доказано.

Чтобы доказать 4″), заметим, что квазиконформное отображение F' на $|z| < \infty$ можно построить так, что характеристика отображения $p'(z)$ равномерно ограничена в $|z| < \infty$ и удовлетворяет условиям теоремы Тейхмюллера — Белинского ([2], гл. VI). Если мы возьмем квазиконформное отображение $F \to F' \to \{|z| < \infty\}$, то характеристика этого отображения $p(z)$ может отличаться от $p'(z)$ только в p полуполосах с параллельными сторонами, что следует из свойств отображения $F' \to \{|z| < \infty\}$ ([2], гл. VIII). Так как $p(z)$ равномерно ограничена в $|z| < \infty$, то получаем, что и $p(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Тейхмюллера — Белинского. Это позволяет изучить распределение значений $f(z)$ хорошо известным способом ([2], гл. VIII) и получить утверждение 4″).

Примечание. После того как настоящая статья поступила в редакцию, И. В. Островский обратил наше внимание на статью Сельберга (Selberg H. L., Über einige Eigenschaften bei der Werteverteilung der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung, Avhandlinger Norske Videnskaps — Akademi i Oslo, I, Matem. — Naturvid. Kl., 1928, № 7, 1—17). В этой статье Сельберг доказывает, между прочим, что целая функция $f(z)$ конечного порядка с двумя конечными вполне разветвленными значениями допускает следующее представление в окрестности $z = \infty$:

$$f(z) = \cos(R(\sqrt{z}) + \alpha \ln z), \tag{3}$$

где $R(z)$ — функция, аналитическая в некоторой области $r_0 < |z| < \infty$ и не имеющая в $z = \infty$ существенно особой точки.

Метод Сельберга позволяет без труда заменить в его результате требование конечности порядка $f(z)$ требованием конечности нижнего порядка $f(z)$. Из (3), по-видимому, наши результаты непосредственно не вытекают (хотя можно сразу получить первое утверждение следствия 1) однако, использование (3) существенно упрощает исследование римановой поверхности F (см. выше).

Отметим, что исследование поверхности F проведено нами чисто топологическими методами. Требование, чтобы F была поверхностью параболического типа (то есть, чтобы $f(z)$ была аналитична в $|z| < \infty$) и чтобы $f(z)$ имела конечный нижний порядок, использовалось только для того, чтобы на основании теоремы Данжуа — Карлемана — Альфорса утверждать, что F имеет конечное число критических точек. Ничего не меняя в доказательстве, мы могли предположить, что аналитическая в $|z| < B \leqslant \infty$ функция $f(z)$ с двумя конечными вполне разветвленными значениями имеет конечное число неэквивалентных асимптотических значений, и получить как следствие, что $B = \infty$, $f(z)$ — целая функция и для нее выполняется утверждение нашей теоремы. Если априори не предполагать, что $B = \infty$, то метод Сельберга не применим. Нам же достаточно рассмотреть функцию $f\left(\frac{r}{B-r}e^{i\varphi}\right)$, $0 \leqslant r < B$, вместо $f(re^{i\varphi})$, $0 \leqslant r < \infty$, чтобы, сохраняя прежнее доказательство, исследовать F. То, что риманова поверхность с конечным числом синус-концов имеет параболический тип, хорошо известно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
2. Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям Физматгиз, 1960.