Доказательство Шталя гипотезы Бессиса, Муссы и Виллани

А. Ерёменко

Харьков, 24 июня 2013

Теорема. *Пусть A и B – эрмитовы матрицы, причём B неотрицательна. Тогда функция*

$$f(t) = \operatorname{Tr}\exp(A - tB)$$

абсолютно монотонна, т. е.

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-ts} d\mu(s),$$

где μ – неотритцательная мера.

Эквивалентные переформулировки:

1. Все коэффициенты многочлена $t \mapsto \operatorname{Tr}(A + Bt)^p$, $p \in \mathbf{N}$, неотрицательны.

2. Функция $t \mapsto \operatorname{Tr}(A + tB)^{-p}$, $p \geq 0$, абсолютно монотонна.

Не уменьшая общности, считаем что B диагональная с собственными значениями $b_n > b_{n-1} > \ldots, b_1 > 0$.

Собственные значения $A - tB$ находятся из уравнения

$$\det(\lambda I - A + tB) = 0.$$

Это многочлен от λ. Выносим t за скобку и полагаем $y = \lambda/t$, $x = 1/t$, получаем

$$0 = \det(yI + B - xA) = \prod_{j=1}^{n} (y + b_j - x a_{j,j}) + O(x^2),$$

где $O(x^2)$ – многочлен делящийся на x^2.

Отсюда получается что

$$\lambda_j(t) = -b_j t + a_{j,j} + O(1/t), \quad t \to \infty,$$

и все λ_j вещественны на вещественной оси. По теореме Реллиха, они аналитически продолжаются из окрестности бесконечности в окрестность вещественной оси.

Простой частный случай. Пусть A тоже диагональна. Тогда

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{a_{j,j}} e^{-b_j t} = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{j=1}^{n} \delta_{b_j}(s) ds.$$

Так что в этом случае μ – дискретная мера с положительными атомами в точках b_j.

В общем случае, дискретная компонента меры та же, но будет еще непрерывная компонента с носителем на (b_1, b_n).

Штaль угадал такое явное выражение для плотности:

$$d\mu(s) = \left(\sum_{j=1}^{n} e^{a_{j,j}} \delta_{b_j}(s) + w(s) \right) ds,$$

где

$$w(s) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j : b_j < s} \int_C e^{\lambda_j(\zeta) + s\zeta} d\zeta,$$

где C – достаточно большая окружность с центром в 0. Заметим что правая часть – ето сумма вычетов в некоторых полюсах функции $\lambda(\zeta) + s\zeta$.

Теперь достаточно взять преобразование Лапласа от w и убедиться что оно равно f. При этом не используется ничего кроме теоремы Коши в плоскости.

Лемма 1. *Для любого* s

$$\sum_{j=1}^{n} \int_C e^{\lambda_j(\zeta)+s\zeta} d\zeta = 0.$$

Доказательство: ето интеграл от целой функции по замкнутому контуру.

Теперь считаем преобразование Лапласа от w:

$$\int_0^\infty w(s)ds = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} e^{-ts} w(s)ds =: \sum_{k=1}^{n-1} I_k(t).$$

Фиксируем $t > 0$ и деформируем контур так чтобы положительный луч был вне контура. Новый контур обозначаем C'. По определению w, имеем:

$$I_k(t) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{\lambda_j(\zeta)+s(\zeta-t)} d\zeta ds.$$

Меняя порядок интегрирования и порядок суммирования, получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} I_k(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \int_{b_j}^{b_n} e^{s(\zeta-t)} ds d\zeta$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{\lambda_j(\zeta)} \left(e^{b_n(\zeta-t)} - e^{b_j(\zeta-t)} \right) \frac{d\zeta}{\zeta - t}.$$

Заметим что

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{C'} e^{\lambda_j(\zeta)} e^{b_n(\zeta-t)} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = 0,$$

по той же причине что и в Лемме 1 (t у нас вне контура!).

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1} I_k(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{\lambda_k(\zeta) + b_j(\zeta-t)} \frac{d\zeta}{\zeta - t}.$$

На бесконечности имеем

$$\lambda_j(\zeta) = -b_j \zeta + a_{j,j} + r_j(\zeta),$$

где $r_j(\infty) = 0$, так что по формуле Коши для каждого j получается

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{\lambda_j(\zeta)+b_j(\zeta-t)}\frac{d\zeta}{\zeta-t}\\
&= -\frac{e^{-b_jt+a_{j,j}}}{2\pi i}\int_{C'} e^{r_j(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-t}\\
&= e^{-b_jt+a_{j,j}}(e^{r_j(t)}-1) = e^{\lambda_j(t)} - e^{-b_jt+a_{j,j}}.
\end{aligned}
$$

Складывая все эти выражения, получаем формулу для плотности.

Теперь осталось доказать что выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j:b_j<s}\int_C e^{\lambda_j(\zeta)+s\zeta}d\zeta$$

положительно при любом положительном s. Зафиксируем s и k так что $b_k < s < b_{k+1}$.

Идея Шталя – замнить контур интегрирования C на такой гомологичный контур (на римановой поверхности S функции λ) на котором подинтегральная функция положительна!

При етом не исползуеця ничего кроме условий Коши–Римана и теоремы Коши на S.

Вообще S может быть несвязна, но это никак не мешает. λ -мероморфная функция на S с простыми полюсами в n точках над ∞. Заметим что в силу нашего выбора s и k, при $j \leq k$ голоморфные ветви

$$\lambda_j(\zeta) + s\zeta = (s - b_j)\zeta + \dots$$

строго возрастают, а при $j < k$ они строго убывают (все при достаточно больших по модулю вещественных ζ).

Так что при больших $|\zeta|$, функции $\mathrm{Im}(\lambda_j(\zeta) + s\zeta)$ имеют тот же знак что $\mathrm{Im}\zeta$ если $j \leq k$ и противоположный знак если $j > k$.

На S есть антиконформная инволюция (комплексное сопряжение). Неподвижные точки этой инволюции образуют n кривых лежащих над вещественной осью.

Ети кривые разбивают S на 2 части, S^+ и S^-, которые проектируются в верхнюю и нижнюю полуплоскости. Рассмотрим открытые множества:

$$D^+ := \{\zeta : |\zeta| < R, \mathrm{Im}\zeta > 0, \mathrm{Im}(\lambda(\zeta) + s\zeta) > 0\},$$

$$D^- := \{\zeta : |\zeta| < R, \mathrm{Im}\zeta < 0, \mathrm{Im}(\lambda(\zeta) + s\zeta) < 0\},$$

а также

$$D = \mathrm{int}(\overline{D^+} \cup \overline{D^-}).$$

Множество $\{\zeta : |\zeta| = R\}$ состоит из n окружностей соответствующих ветвям λ_j, причём окружности C_j принадлежат ∂D когда $j \leq k$ и не пересекаются с ∂D когда $j > k$.

Пусть D_1 – компонента D которая имеет на границе какие-нибудь окружности C_j. Мы заменим интегрирование по етим C_j на интегрирование по *остальной части* ∂D_1. Интеграл только поменяет знак, потому что форма

$$e^{\lambda(\zeta)+s\zeta}d\zeta$$

очевидно голоморфна на D.

Область D_1 – это риманова поверхность конечного типа; её граница состоит из конечного числа кривых параметризованных окружностью.

Лемма 2. *Никакая граничная кривая ∂D не может проектироваться в открытую верхнюю или нижнюю полуплоскость.*

Доказательство. Пусть $g(\zeta) = \lambda(\zeta) + s\zeta$. На такой граничной кривой по определению будет $\mathrm{Im} g = 0$, тогда как $\mathrm{Im} g > 0$ в D. Поэтому в силу условий Коши–Римана $\mathrm{Re} g$ строго монотонна, а никакая функция не может быт строго монтонной на замкнутой кривой.

Так что любая граничная кривая содержит часть (может быть только точку) над вещественной осью, и симметричные куски (может быт пустые) над дополнением к вещественной оси.

Пишем

$$e^g = e^{\mathrm{Re} g + i \mathrm{Im} g} = e^{\mathrm{Re} g}(\cos(\mathrm{Im} g) + i \sin(\mathrm{Re} g)),$$

и интегрируем по двум симметричным кускам γ^+, γ^-. Поскольку $\mathrm{Im} g = 0$ на кривой, а $\mathrm{Re} g$ возрастает, то $\phi(s) = \exp g(\gamma(t))$ вещественна и возрастает, как функция натурального параметра t на γ^+. Так что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{g(\zeta)}d\zeta \\ = \ & \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma^+}+\int_{\gamma^-}\right)\phi(t)(d\xi(t)+id\eta(t)) \\ = \ & \frac{1}{\pi}\int_{\gamma^+}\phi(t)d\eta(t) = -\frac{1}{\pi}\eta(t)d\phi(t) < 0, \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали по частям, и исползовали что $\eta(t) = 0$ на концах γ^+ в силу Леммы 2.

Вот и все!

Список литературы

D. Bessis, P. Moussa and M. Villani, Monotonic variational approximations to the functional integrals in quantum statistical mechanics, J. Math. Phys., 16 (1975) 2318–2385.

E. Lieb and R. Steiringer, Equivalent forms of the Bessis–Moussa– Villani conjecture, J. Stat. Phys., 115 (2004) 185–190.

H. Stahl, Proof of the BMV conjecture, arXiv:1107.4785.

Purdue University

eremenko@math.purdue.edu

www.math.purdue.edu/˜eremenko