УДК 517.53

А. Э. ЕРЕМЕНКО

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Известно (см., например [1, с. 273]), что для целых функций $f(z)$ нижнего порядка $\lambda < 1$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r,\ 0)}{\ln M(r,\ f)} \geqslant \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}. \tag{1}$$

В настоящей статье этот результат обобщается на субгармонические в R^n, $n \geqslant 2$ функции. Основные трудности возникают при перенесении на субгармонические в R^n функции в случае $n \geqslant 3$ одной леммы о представлении целой функции с помощью конечных канонических произведений [1, с. 263], что представляет, по-видимому, самостоятельный интерес.

Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в R^n, $n \geqslant 2$; μ — мера, ассоциированная с $u(x)$ по Риссу; $\mu(r)$ — мера шара радиуса r с центром в начале координат; $\mu(r_1) = 0$ для некоторого $r_1 > 1$. Считаем, что $u(0) = 0$. Обозначим

$$E_r = \{x : x \in R^n,\ |x| \leqslant r\};$$
$$S_r = \{x : x \subset R^n,\ |x| = r\};$$

$$M(r,\ u) = M(r) = \max_{E_r} u^+(x),\ \ \sigma = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)};$$

$$T(r) = m(r) = \sigma^{-1} \int_{S_1} u^+(r,\ y)\, d\sigma_y;$$

$$N(r) = \max\{n-2,\ 1\} \int_0^r t^{1-n} \mu(t)\, dt,$$

$\theta = \frac{x}{|x|}$; $Y_k(\theta)$ — однородный гармонический полином степени k, рассматриваемый на S_1; $C_k(\varphi)$ — коэффициент при r^k в разложении

$$(r^2 + 1 - 2r\cos\varphi)^{\frac{2-n}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(\varphi)\, r^k,\ \ r < 1. \tag{2}$$

Нам потребуются следующие свойства $Y_k(\theta)$ и $C_k(\varphi)$ (см. [2, с. 76]; [3, с. 239]):

$$|C_k(\varphi)| \leqslant Ak^{n-3}; \tag{3}$$

$$\int_{S_1} C_k(\widehat{x,\ y})\, Y_l(y)\, d\sigma_y = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ A_1^{-1} Y_k(\theta), & k = l, \end{cases} \tag{4}$$

где $(\widehat{x,\ y})$ — угол между векторами x и $y \subset S_1$; A_1 — некоторая постоянная $A_1 \leqslant Ak$; k — степень $Y_k(\theta)$. Здесь и в дальнейшем через A обозначаем абсолютные постоянные, разные, зависящие только от размерности. Определим нижний порядок функции $u(x)$ по формуле

$$\lambda = \underline{\lim}_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r}.$$

Следующая теорема обобщает соотношение (1).

Теорема. *Пусть* $\lambda < 1$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r)}{M(r)} \geqslant \frac{\sin \pi\lambda \Gamma(\lambda)(n-2)!}{\pi\Gamma(n+1+\lambda)}. \qquad (5)$$

Оценка достигнута.

Нам потребуется

Лемма. *При любом* $R > 0$ *и при любом целом* $p \geqslant 0$ *имеет место представление*

$$u(x) = \alpha_R(x) + \omega_R(x), \quad |x| < \frac{R}{2},$$

где
$$\alpha_R(x) = \int\limits_{E_R} H_p(x, \xi)\, d\mu_\xi;$$

$$H_p(x, \xi) = -|x-\xi|^{2-n} + |\xi|^{2-n} \sum_{m=0}^{p} C_m(\hat{x}, \xi)\left(\frac{r}{|\xi|}\right)^m; \; n \geqslant 3;$$

$$H_p(x, \xi) = \ln\left|1 - \frac{x}{\xi}\right| + \operatorname{Re}\left(\frac{x}{\xi} + \cdots + \frac{1}{p}\left(\frac{x}{\xi}\right)^p\right); \; n = 2;$$

$$|\omega_R(x)| \leqslant K\left(\frac{r}{R}\right)^{p+1} T(2R) + 0(r^p).$$

Здесь K *зависит только от* n *и от* p.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 3$. Положим

$$\Pi(x) = -\int\limits_{|\xi|<R} |x-\xi|^{2-n} d\mu_\xi.$$

Тогда $h(x) = u(x) - \Pi(x)$ будет гармонической в $\{|x| < R\}$ функцией и, следовательно, представляется в виде $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta) r^k$, $r < R$, где в силу (4) $Y_k(\theta) r^k = A_1 \int\limits_{S_1} h(ry) C_k(\widehat{x, y})\, d\sigma_y$.

Отсюда, учитывая (3), имеем

$$Y_k(\theta) r^k = A_1 \int\limits_{S_1} u(ry) C_k(\widehat{x, y})\, d\sigma_y -$$
$$- A_1 \int\limits_{S_1} \Pi(ry) C_k(\widehat{x, y})\, d\sigma_y = J_1 - J_2;$$
$$|J_1| \leqslant 2A_1 k^{n-3} T(r) \leqslant A k^{n-2} T(r). \qquad (6)$$

Пусть $0 < r < R$;

$$Y_k(\theta) = -\frac{1}{r^k} J_2 + \gamma(x). \tag{7}$$

Здесь $|\gamma(x)| \leqslant A_k^{n-2} r^{-k} T(R)$.
Далее,

$$|J_2| \leqslant A_1 \int\limits_{S_1} |\Pi(ry)| |C_k(\widehat{x, y})| \, d\sigma_y \leqslant$$
$$\leqslant Ak^{n-2} \int\limits_{S_1} d\sigma_y \int\limits_{|\xi| \leqslant R} |ry - \xi|^{2-n} d\mu_\xi \leqslant$$
$$\leqslant Ak^{n-2} \int\limits_{|\xi| \leqslant R} d\mu_\xi \int\limits_{S_1} |ry - \xi|^{2-n} d\sigma_y \leqslant$$
$$\leqslant Ak^{n-2} \int\limits_{|\xi| \leqslant R} |\xi|^{2-n} d\mu_\xi \leqslant$$
$$\leqslant Ak^{n-2} (R^{2-n} \mu(R) + N(R) \leqslant Ak^{n-2} T(2R),$$

Таким образом, при $r \to R$ получаем

$$|Y_k(\theta)| \leqslant Ak^{n-2} \frac{T(2R)}{R^k}. \tag{8}$$

Теперь положим в (7) $r = 1$. Учитывая, что $\mu(r_1) = 0$, $r_1 > 1$, получим

$$Y_k(\theta) = -J_2 + \gamma(\theta) =$$
$$= A_1 \int\limits_{S_1} C_k(\widehat{x, y}) \left\{ \int\limits_{r_1 \leqslant |\xi| \leqslant R} \sum_{m=0}^{\infty} C_m(\widehat{y, \xi}) \left(\frac{1}{|\xi|} \right)^m |\xi|^{2-n} d\mu_\xi \right\} d\sigma_y + \gamma(\theta).$$

Интегрируем абсолютно и равномерно сходящийся ряд почленно и меняем порядок интегрирования. Так как при фиксированном ξ функция $C_k(y, \xi)$ является однородным гармоническим полиномом от y, в силу (4) имеем

$$Y_k(\theta) = \int\limits_{|\xi| \leqslant R} C_k(\widehat{x, \xi}) \frac{1}{|\xi|^k} |\xi|^{2-n} d\mu_\xi + \gamma(\theta).$$

Отсюда

$$\sum_{m=0}^{p} Y_m(\theta) r^m + \Pi(x) = \alpha_R(x) + 0(r^p).$$

Теперь рассмотрим остаток

$$\omega_R(x) = u(x) - \alpha_R(x) = h(x) - \sum_{m=0}^{p} Y_m(\theta) r^m + 0(r^p) =$$
$$= \sum_{m=p+1}^{\infty} Y_m(\theta) r^m + 0(r^p).$$

Учитывая (8), получаем

$$|\omega_R(x)| \leqslant K\left(\frac{r}{R}\right)^{p+1} T(2R) + 0(r^p).$$

При $n=2$ лемма доказывается таким же методом (см., например [3, лемма 5а]).

Доказательство теоремы. В случае $n=2$ доказательство проходит, как для целых функций [1, с. 273]. Рассмотрим случай $n \geqslant 3$. Пусть

$$\varphi(a) = \int_a^\infty \{g(n, \delta)(1-\tau^{2-n})^+ + (\tau+1)^{2-n} - 1\} \frac{d\tau}{\tau^{1+\delta}},$$

где $a \geqslant 0$; $\tau \in R$; $0 < \delta < 1$, $g(n, \delta) = \dfrac{\pi\Gamma(\delta+n-1)}{\sin \pi\delta\Gamma(n-1)\Gamma(\delta)}$.

Непосредственным вычислением с помощью теории вычетов убеждаемся в том, что $\varphi(0)=0$. При $a \to \infty$ функция $\varphi(a) \to 0$. Кроме того, $\varphi'(a)$ меняет знак только один раз, если $0 \leqslant a < \infty$, причем с плюса на минус. Следовательно, $\varphi(a) \geqslant 0$. Положим $F(a) = a^\delta \varphi(a)$.

Очевидно, $F(a)$ ограничена при $0 \leqslant a < \infty$. Имеем для любых a и b

$$\int_a^b \left\{g(n, \delta)(1-\tau^{2-n})^+ + (\tau+1)^{2-n} - 1\right\} \frac{d\tau}{\tau^{1+\delta}} =$$
$$= a^{-\delta}F(a) - b^{-\delta}F(b).$$

Положим $\tau = \dfrac{r}{t}$, умножим обе части на t^{2-n} и проинтегрируем по $d\mu(t)$ от 0 до R:

$$\int_\gamma^\beta \{g(n, \delta)N(r) - \check{\alpha}_R(r)\} \frac{dr}{r^{1+\delta}} =$$
$$= \gamma^{-\delta} \int_0^R F\left(\frac{\gamma}{t}\right) t^{2-n} d\mu(t) - \beta^{-\delta} \int_0^R F\left(\frac{\beta}{t}\right) t^{2-n} d\mu(t);$$

$$\check{\alpha}_R(r) = \int_0^R \left\{-\frac{1}{|r+t|^{n-2}} + 1\right\} d\mu(t).$$

По лемме при $p=0$ имеем $u(x) = \alpha_R(x) + \omega_R(x)$; $M(r, u) \leqslant$ $\leqslant M(r, \alpha_R) + K\left(\dfrac{r}{R}\right) T(2R)$.

Очевидно,

$$M(r, \alpha_R) \leqslant \check{\alpha}_R(r);$$

$$\int_{\gamma}^{\beta} \check{\alpha}_R(r) \frac{dr}{r^{1+\delta}} \geqslant \int_{\gamma}^{\beta} M(r, u) \frac{dr}{r^{1+\delta}} - K\frac{B}{R} T(2R).$$

Отсюда

$$\int_{\gamma}^{\beta} \{g(n, \delta) N(r) - M(r)\} \frac{dr}{r^{1+\delta}} \geqslant \gamma^{-\delta} \int_{0}^{R} F\left(\frac{\gamma}{t}\right) t^{2-n} d\mu(t) -$$

$$- K\left(\beta^{-\delta} N(2R) + \frac{\beta^{1-\delta}}{R} T(2R)\right). \qquad (9)$$

Пусть теперь γ_0 — сколь угодно большое число. Зафиксируем $\gamma > \gamma_0$ так, чтобы выполнялось

$$\gamma^{-\delta} \int_{0}^{R} F\left(\frac{\gamma}{t}\right) t^{2-n} d\mu(t) > 0, \; R \geqslant 2\gamma.$$

Пусть теперь $\lambda < \delta < 1$. Так как $\lambda < 1$, то существует последовательность значений R_i, для которых

$$\lim_{i \to \infty} R_i^{-\delta} T(2R_i) = 0, \; \lambda < \delta < 1.$$

Возьмем, наконец, $\beta_i = \frac{1}{2} R_i$. Тогда правая часть (9) будет больше нуля, следовательно, в некоторой точке подынтегральное выражение больше нуля.

Мы показали, что для сколь угодно большого γ_0 существует точка $r > \gamma_0$, в которой подынтегральное выражение (9) больше нуля. Отсюда следует (5) с δ вместо λ. Устремив δ к λ, получим утверждение теоремы.

Пусть теперь масса сосредоточена на луче, исходящем из начала координат, и $\mu(t) = t^{n-2+\lambda}$. Для субгармонической функции $u(x) = \int_{R^n} H_0(x, \xi)\, d\mu_\xi$ в (5) имеет место равенство.

Автор благодарит А. А. Гольдберга и И. В. Островского за постановку задачи и интерес, проявленный к этой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 592 с.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971. 432 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., «Наука», 1974. 295 с.

Поступила 7 марта 1975 г.