УДК 517.535.4

А. Э. ЕРЕМЕНКО

О СЧИТАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ a-ТОЧЕК ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ

Пусть H_R означает множество функций, голоморфных в круге $\{z: |z| < R \leqslant \infty\} = U_R$. Отвечая на вопрос П. Эрдеша [1, с. 155], А. А. Гольдберг в работе [2] построил пример функции $f \in H_\infty$ со свойствами ($R = \infty$):

$$\varlimsup_{r \to R} \frac{n(r, a, f)}{n(r, b, f)} = \infty, \quad \forall a, \ b \in C, \ a \neq b; \tag{1}$$

$$\varlimsup_{r \to R} \frac{n(r, a, f)}{A(r, f)} = \infty, \quad \forall a \in C; \tag{2}$$

$$\varliminf_{r \to R} \frac{n(r, a, f)}{A(r, f)} = 0, \quad \forall a \in C. \tag{3}$$

Здесь $n(r, a, f)$ — считающая функция последовательности a-точек, а $\pi A(r, f)$ — сферическая площадь образа круга U_r при отображении f. Метод, использованный в работе [2], не позволяет строить такие функции при $R < \infty$.

В настоящей работе этот результат А. А. Гольдберга усиливается и переносится на случай $R < \infty$.

Введем на H_R топологию равномерной сходимости на компактах. Известно, что при этом получится полное метрическое пространство. Назовем множество остаточным, если оно является счетным пересечением открытых всюду плотных множеств (т. е. его дополнение имеет 1-ю категорию по Бэру). Из теоремы Бэра [3, с. 74] следует, что любое остаточное множество в H_R непусто.

Теорема 1. *Множество функций из H_R со свойствами* (1), (2), (3) *остаточно.*

При доказательстве теоремы ограничимся наиболее интересным случаем $R < \infty$ (доказательство в случае $R = \infty$ проходит аналогично, некоторые новые затруднения преодолеваются, как в [2]). Достаточно рассмотреть случай $R = 1$.

Нам потребуется следующий результат Хеймана ([4], лемма 2):

Лемма 1. *Пусть $\{c_0, c_1, \ldots, c_A\}$ — набор комплексных чисел, $\sum_{j=0}^{A} |c_j| < 1$. Существует функция $\omega \in H_1$, отображающая U_1 на себя так, что каждая точка из U_1 имеет ровно $2A$ прообразов и*

$$\omega(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_A z^A + O(|z|^{A+1}), \ z \to 0.$$

Требуемыми свойствами обладает функция

$$\omega(z) = \frac{\sum_{j=0}^{A} c_j z^j + z^{2A+1}}{1 + \sum_{j=0}^{A} \bar{c}_j z^{2A+1-j}}.$$

В работе [2] построены односвязные римановы поверхности гиперболического типа $F_n^1(q, s, m)$, $F_n^2(q, s, m)$, m, $n \in N$, $n > n_0(m)$, $s \geqslant 2^n$, $0 < q < 1$, обладающие следующими свойствами: а) пусть $g_n^i(z; q, s, m) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ — функция, отображающая U_1 на $F_n^i(q, s, m)$, $i = 1, 2$, тогда

$$|b_k| \leqslant s, \tag{4}$$

$$g_n^i(z; q, s, m) \rightrightarrows sz, \ q \to 0. \tag{5}$$

(знак $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость на компактах); б) существуют последовательности компактов $\{K_n\}$, $\{K_n'\}$, $\{K_n''\}$, такие, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n'' = \boldsymbol{C}$, $K_n \cap K_n'' = \varnothing$ и для всех $a \in K_n$

$$\frac{n\left(1-0, a, g_n^1(z; q, s, m)\right)}{A\left(1-0, g_n^1(z; q, s, m)\right)} > m; \tag{6}$$

для всех $a \in K_n'$

$$\frac{n\left(1-0, a, g_n^2(z; q, s, m)\right)}{A\left(1-0, g_n^2(z; q, s, m)\right)} < \frac{1}{m}; \tag{7}$$

для любой пары $a \in K_n$, $b \in K_n''$

$$\frac{n\left(1-0, a, g_n^1(z; q, s, m)\right)}{n\left(1-0, b, g_n^1(z; q, s, m)\right)} > m; \tag{8}$$

в) для любых a, $b \in \boldsymbol{C}$, $a \neq b$ существует бесконечное множество номеров n, таких, что $a \in K_n$, $b \in K_n''$ и бесконечное множество таких номеров n, что $a \in K_n'$. Нам потребуется

Лемма 2. *Пусть даны $f \in H_1$, компакт $K \subset U_1$, действительное число $\varepsilon > 0$ и натуральное число $m > 0$. Тогда при всех $n > n_0(m)$ существуют функции h_n^1, h_n^2 из H_1 со следующими свойствами:*

$$|f(z) - h_n^1(z)| < \varepsilon, \quad |f(z) - h_n^2(z)| < \varepsilon, \quad z \in K;$$

функция h_n^1 удовлетворяет условиям (6), (8), а функция h_n^2 — условию (7).

Доказательство. Пусть $r < 1$ таково, что $K \subset U_r$. Положим $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Выберем последовательно натуральное число N, действительное число $s \geqslant 2^n$ и натуральное A так, чтобы

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| r^k < \frac{\varepsilon}{5}; \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{N} |a_k| < s; \tag{10}$$

$$A > N, \ s(1-r)^{-1} r^{A+1} < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{11}$$

В силу (10) мы можем воспользоваться леммой 1 и взять такую функцию $\omega(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, чтобы

$$c_k = a_k/s,\ 0 \leqslant k \leqslant N; \quad (12) \qquad c_k = 0,\ N < k \leqslant A. \quad (13)$$

По неравенству Коши получаем

$$|c_k| \leqslant 1,\ k=1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Пусть теперь $\rho = \max\limits_{|z|=r} |\omega(z)| < 1$. Фиксируем натуральное число B так, чтобы

$$s\rho^{B+1}(1-\rho)^{-1} < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{15}$$

Рассмотрим функцию $g_n^i(z; q, s, m)$, $i=1, 2$, причем, пользуясь свойством (5), выберем q так, чтобы

$$N|b_1 - s| < \frac{\varepsilon}{5}; \quad (16) \qquad \sum_{k=2}^{B} |b_k| \rho^k < \frac{\varepsilon}{5}. \quad (17)$$

Положим $h_n^i = g_n^i(\omega(z); q, s, m)$. В силу свойств функции ω, h_n^i обладают свойствами (6), (7), (8) вместе с g_n^i.

Имеем при $z \in K \subset U_r$ в силу (9), (17), (4), (15):

$$|f(z) - h_n^i(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \{\omega(z)\}^k \right| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{N} a_k z^k - \right.$$

$$\left. - b_1 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| r^k + \sum_{k=2}^{B} |b_k| \rho^k + \sum_{k=B+1}^{\infty} |b_k| \rho^k \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=0}^{N} a_k z^k - b_1 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right| + \frac{3\varepsilon}{5}. \tag{18}$$

С помощью (12), (13), (16), (14), (4), (11) оценим

$$\left| \sum_{k=0}^{N} a_k z^k - b_1 \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{N} a_k z^k - s \sum_{k=0}^{N} c_k z^k \right| +$$

$$+ |b - s| \sum_{k=0}^{N} |c_k| r^k + |b_1| \sum_{k=A+1}^{\infty} |c_k| r^k \leqslant \frac{2\varepsilon}{5}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим $|f - h_n^i| < \varepsilon$, $z \in K$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Докажем, например, остаточность множества функций со свойством (2). Для функций со свойствами (1), (3) доказательство аналогично. Обозначим $E_{mn} = \left\{ f \in H_1 : (\exists a \in K_n)(\forall r < 1) \left[\left(r \geqslant 1 - \frac{1}{m} \right) \Rightarrow (n(r, a, f) \leqslant mA(r, f)) \right] \right\}$, $m, n \in N$, $n > n_0(m)$.

Пусть Q — множество тождественно постоянных функций. Для доказательства теоремы достаточно установить, что множества $E_{mn} \cup Q$ замкнуты и не содержат внутренних точек, т. е. $\bigcup\limits_{\substack{m, n \\ n > n_0(m)}} E_{mn} \cup Q$ есть множество 1-й категории по Бэру. Покажем, что $E_{mn} \cup Q$ замкнуто. Пусть $f_j \in E_{mn} \cup Q$, $f_j \rightrightarrows f$, $a_j \in K_n$, $n(r, a_j, f_j) \leqslant mA(r, f_j)$ при $r \geqslant 1 - \frac{1}{m}$. Выбирая, если нужно, подпоследовательность, считаем, что $a_j \to a \in K_n$. Тогда $f_j - a_j \rightrightarrows f - a$, и, если $f \notin Q$, то по известной теореме Гурвица $n(r, a_j, f_j) \to n(r, a, f)$ почти для всех $r < 1$. Кроме того, очевидно, $A(r, f_j) \to \to A(r, f)$. Отсюда $n(r, a, f) \leqslant mA(r, f)$ при $r \geqslant 1 - \frac{1}{m}$, т. е. $f \in E_{mn}$.

Тот факт, что множество $E_{mn} \cup Q$ не содержит внутренних точек, т. е. в любой окрестности функции $f \in E_{mn} \cup Q$ найдется функция $h_n^1 \notin E_{mn} \cup Q$, следует из леммы 2. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $\Phi(r)$ — произвольная положительная неубывающая функция на $(0, R)$. В работе Готье и Хенгартнера [5] доказано, что множество функций из H_R со свойством $\overline{\lim\limits_{r \to R}} \max\limits_{|z|=r} \times \times |f(z)| / \Phi(r) = \infty$ является остаточным. Следовательно, существуют функции произвольно быстрого роста, удовлетворяющие (1), (2), (3).

Лемма 2 дает возможность эффективно строить примеры функций со свойствами (1) — (3). При этом можно получить даже несколько больше. Следующий результат приведем без доказательства.

Теорема 2. *Пусть дана последовательность $r_k \to R$, $0 < R \leqslant \infty$. Существует функция $f \in H_R$ со следующими свойствами: для любых a, $b \in C$, $a \neq b$ существуют последовательности $\{r_k^1\}$, $\{r_k^2\}$, $\{r_k^3\}$, $r_k^i \to R$, $r_k^i < r_k$, $i = 1, 2, 3$, такие, что*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{n(r_k^1, a, f)}{n(r_k^1, b, f)} = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{n(r_k^2, a, f)}{A(r_k^2, f)} = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{n(r_k^3, a, f)}{A(r_k^3, f)} = 0.$$

Автор благодарит А. А. Гольдберга за руководство работой и ценные замечания.

Список литературы: 1. *Hayman W. K.* New problems.— Proc. Symposium on Complex Analysis. Canter-Bury, 1973, London Math. Soc. Lect. Note Series, vol. 12, Cambridge, 1974, p. 155—180. 2. *Гольдберг А. А.* Считающие функции последовательностей a-точек для целых функций.— «Сиб. мат. журн.», 1977, № 24, с. 20—25. 3. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М., «Мир», 1974. 158 с. 4. *Hayman W. K.* On the Valiron deficiencies of integral functions of infinite order.— «Ark för Mat.», 1972, 10, N 2, p. 163—172. 5. *Gauthier P., Hengartner W.* The value distribution of mast functions of one or several complex variables.— «Ann Math.», 1972, 96, N 1, p. 31—52.

Поступила 26 июня 1976 г.