

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа защищалась мною как докторская диссертация в Математическом институте Академии Наук СССР им. В. А. Стеклова в январе 1948 г. Работа была выполнена под руководством академика М. А. Лаврентьева, которому я выражаю большую благодарность и признательность.

За ценные указания и неизменный интерес к моей работе выражаю благодарность действительному члену Академии педагогических наук А. И. Маркушевичу.

г. Львов, май 1949 г.

Л. Волковский

Введение

Как известно, всякую открытую односвязную риманову поверхность F можно конформно отобразить на круг $|z| < R \leq \infty$. Если $R < \infty$, то поверхность называется поверхностью *гиперболического типа*, если $R = \infty$ — *параболического типа*. Проблема типа односвязной римановой поверхности состоит в том, чтобы указать необходимые и достаточные условия, позволяющие определить тип данной поверхности F .

Изучение проблемы типа возможно аналитическое и геометрическое.

Аналитическое изучение проблемы типа составляет главное содержание современной теории распределения значений мероморфных функций. В этой теории изучается вопрос о приближении мероморфной функции $w = f(z)$, $|z| < R \leq \infty$ к произвольному значению a при исчерпании круга $|z| < R$ кругами $|z| < r$, $r \rightarrow R$. Сперва вводятся функции $m(r, a)$ и $N(r, a)$, из которых первая характеризует близость $f(z)$ к a на окружности $|z| = r$, а вторая — среднюю плотность корней уравнения $f(z) - a = 0$ внутри круга $|z| < r$ и доказывается (*первая основная теорема*), что для всех значений a

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r) + O(1), \quad (1)$$

где $T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty)$ и $O(1)$ — постоянная, зависящая от a . Затем, изучается асимптотическое поведение величин $m(r, a)$, $N(r, a)$ и $T(r)$ при $r \rightarrow R$. Оказывается, что для подавляющего большинства значений a величина $N(r, a)$ асимптотически эквивалентна $T(r)$, что в точной количественной форме устанавливается во *второй основной теореме*, представляющей далеко идущее обобщение классической теоремы Пикара. Если для каждого значения a ввести дефект

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow R} \frac{N(r, a)}{T(r)} \quad (2)$$

и индекс ветвления

$$\vartheta(a) = \lim_{r \rightarrow R} \frac{N_1(r, a)}{T(r)}, \quad (3)$$

где величина $N_1(r, a)$ связана с кратными корнями уравнения $f(z) - a = 0$ в круге $|z| < r$, то из второй основной теоремы в случае $R = \infty$ получается так называемое *соотношение дефектов*

$$\sum_{(a)} \delta(a) + \vartheta(a) \leq 2. \quad (4)$$

Величины $\delta(a)$ и $\vartheta(a)$ могут быть непосредственно определены для обширных классов поверхностей F , и соотношение дефектов (4) представляет тогда необходимое условие для параболического типа. В этом случае, если для каких-либо $q \geq 3$ точек $w = a_k$, $k = 1, 2, \dots, q$, поверхности F имеют только точки ветвления, порядок которых, соответственно, не меньше чем $m_k - 1$ и

$$\sum_{k=1}^q \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) > 2, \quad (5)$$

то из (5) следует, что

$$\sum_{k=1}^q \delta(a_k) + \vartheta(a_k) > 2$$

и, следовательно, для указанных поверхностей соотношение (5) представляет достаточное условие для гиперболического типа.

Изучение асимптотического поведения величин $m(r, a)$, $N(r, a)$ и $T(r)$ можно связать с геометрическим изучением исчерпания поверхности F поверхностями F_r , на которые функция $w = f(z)$ отображает круги $|z| < r$, что приводит к теории поверхностей наложения и теории распределения значений по Альфорсу.*

К последнему примыкает геометрическое изучение проблемы типа, к которому относятся и настоящие исследования. Исходным пунктом служит представление поверхности F в виде предела последовательности односвязных поверхностей $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$. Для определения типа поверхности F используется в той или другой форме один из следующих критериев: для параболического типа поверхности F необходимо и достаточно, чтобы конформный радиус $\rho(F_n, P)$ в произвольной правильной конечной точке $P \in F$ неограниченно возрастал или, что эквивалентно, чтобы неограниченно возрастал модуль $\mu(F'_n)$ двусвязных поверхностей F'_n , получаемых из F_n удалением общего фиксированного круга.

Для получения достаточного признака параболического типа поверхности F можно вместо исчерпания ее с помощью поверхностей F_n строить *регулярное кольцообразное ее исчерпание* с помощью семей-

* См. книгу Неванлинна „Однозначные аналитические функции“ (русский перевод, 1941 г.)

ства линий Γ_ρ , $\rho_0 \leq \rho < \infty$ (см. ниже, п. 8), однолистно заполняющих концентрически расположенные на F двусвязные области D_1, D_2, \dots, D_n . Тогда, по признаку Грётша, модуль $\mu(F')$ двусвязной части F' поверхности F , получаемой из нее удалением некоторого круга, удовлетворяет соотношению

$$\mu(F') \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \geq \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{L(\rho)},$$

где, при понятных обозначениях,

$$L(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{d\rho}{dn} ds,$$

откуда в самой общей форме следует признак параболического типа Альфорса, заключающийся в требовании расходимости интеграла

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{L(\rho)}. \quad (6)$$

Для получения достаточного признака гиперболического типа мною было предложено (в кандидатской диссертации, 1937 г.) строить лучеобразное исчерпание поверхности F , позволяющее с помощью принципа Грётша оценивать модуль $\mu(F')$ сверху. Вместо лучеобразного исчерпания всей поверхности F можно строить лучеобразное исчерпание некоторой „полуполосы“ на F , основания которой уходят к границе поверхности (см. п. 9).

Получаемые таким образом признаки лишь в редких случаях являются точными (некоторые случаи приводятся ниже в главах 4 и 5). Успех тут зависит от того, насколько близко построенные кольцеобразно и лучеобразно исчерпания поверхности F приближаются к исчерпанию ее семействами линий, соответствующих окружностям $|z| = r$ и лучам $\arg z = t$ при конформном отображении поверхности F на круг $|z| < R \leq \infty$. Поэтому эффективное с точки зрения проблемы типа построение указанных выше семейств линий на F удастся лишь для отдельных классов односвязных римановых поверхностей и существенно опирается на метрико-топологические их свойства. При этом существенную помощь часто оказывают возможность предварительных квазиконформных преобразований рассматриваемых поверхностей и использование метода склеивания.

Краткий обзор работы. В гл. 1 излагаются континуальный принцип Грётша и связанные с ним признаки типа, а также даны предварительные сведения относительно методов квазиконформных отображений деформаций и склеивания.

В гл. 2 и 3 дается развернутое приложение признака параболического типа Альфорса к поверхностям с конечным числом точек ветвления на каждом листе (гл. 2) и к поверхностям со сближающимися точками ветвления (гл. 3).

В гл. 4 рассматривается большое количество задач на склеивание, возникающих при определении типа различных классов поверхностей, рассматриваемых в гл. 5.

В гл. 5 дается развернутое приложение методов квазиконформных отображений, деформаций и склеивания к определению типа различных классов односвязных римановых поверхностей.

Нумерация теорем, определений, пунктов — сплошная по всей работе. Ссылки на использованную литературу приводятся в квадратных скобках.

Глава I

Основные методы изучения проблемы типа односвязной римановой поверхности, связанные с принципом Грётша и квазиконформными отображениями

§ 1. Континуальное выражение принципа Грётша *

1. Предварительное замечание. ** Пусть в плоскости $z = x + iy$ дана ограниченная двусвязная область G и однолистно покрывающая ее система замкнутых жордановых линий Γ_ρ ($\alpha < \rho < \beta$), изменяющихся непрерывно вместе с ρ . ***

Предположим, что семейство линий Γ_ρ обладает следующими дифференциальными свойствами: можно указать такое множество $E \subset G$, замкнутое относительно G , **** что в области $G - E$ линии Γ_ρ имеют непрерывно вращающиеся касательные и параметр ρ , рассматриваемый как функция $\rho(x, y)$, обладает непрерывными частными производными $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, не обращающимися одновременно в нуль.

В этом случае можно говорить о несобственных интегралах вида

$$\int_{\Gamma_\rho, G-E} \varphi(z) ds,$$

где $\Gamma_\rho, G-E$ — пересечение Γ_ρ с $G - E$ и ds — дифференциал дуги вдоль $\Gamma_\rho, G-E$, рассматриваемых как пределы

$$\int_{\Gamma_\rho, G-E} \varphi(z) ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho^{(m)}} \varphi(z) ds,$$

* Известные две леммы Грётша [1] в литературе получили название „принципа Грётша“. Приводимые ниже леммы 1, 2 представляют одну из форм континуального выражения этого принципа и в разном виде встречаются у разных авторов (см. [2] — [8]). Указанная здесь форма этих лемм возникла в результате нашего устного собеседования с проф. Лопатинским.

** В несколько иной форме указанное ниже предложение имеется у Лопатинского (см. [9], лемма 2).

*** Указанная непрерывность означает, что максимум расстояний от точек какой-либо линии Γ_ρ до близкой линии $\Gamma_{\rho+\Delta\rho}$ стремится к нулю вместе с $\Delta\rho$.

**** То есть E содержит все свои предельные точки, принадлежащие G .

получаемые при исчерпании $\Gamma_\rho, G-E$ их частями $\Gamma_\rho^{(m)}$, лежащими в области $G-E$, вместе со всеми своими концами (если эти пределы не зависят для рассматриваемых функций $\varphi(z)$ от выбора исчерпания). В дальнейшем нам удобно будет условиться такие несобственные интегралы записывать в виде

$$\int_{\Gamma_\rho, G-E} \varphi(z) ds = \int_{\Gamma_\rho} \chi(z) \varphi(z) ds,$$

где $\chi(z)$ равна 1 для $z \in (G-E)$ и равна 0 для $z \in E$, т. е. $\chi(z)$ — характеристическая функция множества $G-E$ относительно G .

Вышесказанное применимо, в частности, к положительной функции $\frac{dn}{d\rho} = 1: \frac{d\rho}{dn}, \frac{d\rho}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2}$; поэтому можно говорить о функции

$$\psi(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} \chi(z) \frac{dn}{d\rho} ds, \quad (1)$$

определенной для всех ρ ($\alpha < \rho < \beta$), но обращающейся, возможно, в ∞ для какого-то множества значений ρ .

Докажем следующее предложение: *функция $\psi(\rho)$ суммируема на интервале (α, β) , причем*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(\rho) d\rho = \text{mes}(G-E)$$

или, при другой записи

$$\text{mes}(G-E) = \int_{\alpha}^{\beta} d\rho \int_{\Gamma_\rho} \chi(z) \frac{dn}{d\rho} ds. \quad (2)$$

Приступая к доказательству этого предложения, заметим сперва, что для любого достаточно малого четырехугольника $D, \bar{D} \subset (G-E)$, ограниченного дугами двух близких линий $\Gamma_{\rho'}, \Gamma_{\rho''}$ ($\rho' < \rho''$) и двух близких нормалей n_1, n_2 (проведенных к некоторой линии $\Gamma_\rho, \rho' < \rho < \rho''$, в двух близких ее точках), имеет место соотношение

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\rho \int_{\Gamma_\rho} \chi_D(z) \frac{dn}{d\rho} ds = \int_{\rho'}^{\rho''} d\rho \int_{\Gamma_\rho, D} \frac{dn}{d\rho} ds = \iint_D dx dy = \text{mes } D$$

(здесь $\chi_D(z)$ — характеристическая функция множества D относительно G и $\Gamma_{\rho, D}$ — пересечение Γ_ρ с D).

Область $G-E$ можно, очевидно, представить в виде суммы счетного числа попарно взаимно простых „областей — четырехугольников“

$\{D_k\} (k = 1, 2, \dots)$: $G - E = \sum_{k=1}^{\infty} D_k = \lim_{m \rightarrow \infty} G_m$, где $G_m = \sum_{k=1}^m D_k$. Для характеристических функций областей G_m имеем $\chi_{G_m}(z) = \sum_{k=1}^m \chi_{D_k}(z)$, откуда легко получаем соотношение

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\rho \int_{\Gamma_{\rho}} \chi_{G_m}(z) \frac{dn}{d\rho} ds = \sum_{k=1}^m \int_{\alpha}^{\beta} d\rho \int_{\Gamma_{\rho}} \chi_{D_k}(z) \frac{dn}{d\rho} ds = \sum_{k=1}^m \text{mes } D_k = \text{mes } G_m.$$

Так как неотрицательные функции

$$\psi_m(\rho) = \int_{\Gamma_{\rho}} \chi_{G_m}(z) \frac{dn}{d\rho} ds$$

не убывают и сходятся, очевидно, к функции (1), т. е. $\psi(\rho)$, то применяя теорему Беппо-Леви, * имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \psi_m(\rho) d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(\rho) d\rho$$

и так как

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi_m(\rho) d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} d\rho \int_{\Gamma_{\rho}} \chi_{G_m}(z) \frac{dn}{d\rho} ds = \text{mes } G_m < \text{mes } G,$$

то функция $\psi(\rho)$ суммируема на (α, β) . Из предыдущего и очевидного соотношения

$$\text{mes}(G - E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } G_m$$

следует соотношение (2).

Примечание. Вместо двусвязной области G , покрытой замкнутыми линиями Γ_{ρ} , можно рассматривать „четырёхугольники“ (односвязные области с четырьмя отмеченными достижимыми граничными точками, разбивающими границу области на два „основания“ и две „боковые стороны“), покрытые жордановыми дугами Γ_{ρ} , соединяющими

* Эта теорема читается так: если суммируемые на множестве e неотрицательные и неубывающие функции $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ сходятся к функции f , конечной или нет, то

$$\lim \int_e f_n d\omega = \int_e f d\omega \tag{3}$$

($d\omega$ — элемент множества e , т. е. элементарная дуга, площадь и т. п.; если f не суммируема на e , то равенство (3) означает, что предел слева равен ∞ ; см. например, [10], стр. 49).

основания или боковые стороны четырехугольника. При тех же предположениях о линиях Γ_ρ снова имеет место соотношение (2). Доказательство такое же.

Для приложений полезно заметить, что соотношение (2) сохраняется при непрерывно-дифференцируемых преобразованиях параметра ρ (иногда удобно от конечного интервала (α, β) перейти к бесконечному интервалу вида (ρ_0, ∞)).

Наконец, в силу аддитивности меры и интеграла, соотношение (2) сохраняется, если G состоит из конечного или счетного числа попарно взаимно простых двусвязных областей $\{G_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$), заполняемых линиями Γ_ρ , когда ρ пробегает, соответственно, попарно взаимно простые интервалы (α_k, β_k) , заполняющие почти весь интервал (α, β) .

2. Лемма 1. Прежде чем сформулировать эту лемму, введем следующее определение:

Определение 1. Пусть Γ_ρ ($\alpha < \rho < \beta$) — произвольное семейство жордановых линий, заполняющих однолистно и непрерывно некоторую область G . Мы скажем, что множество точек $E \subset G$ обладает N -свойством относительно семейства линий Γ_ρ (с данным параметром ρ), если E замкнуто относительно G , имеет плоскую меру нуль и почти для всех ρ множества $\Gamma_{\rho, E}$, представляющие пересечения Γ_ρ и E , имеют линейную меру нуль.

Примечание. Если множество E определения 1 состоит не более чем из счетного множества точек и счетного числа спрямляемых дуг, то положительную меру может иметь не более чем счетное число множеств $\Gamma_{\rho, E}$. Поэтому в таком случае множество E обладает N -свойством относительно семейства линий Γ_ρ независимо от выбора параметра ρ .

Лемма 1.* В кольце $K_\mu: 1 < |z| < \mu, \mu < \infty$, дано семейство попарно взаимно простых замкнутых жордановых линий Γ_ρ , где ρ пробегает интервал (α, β) , исключая быть может замкнутое относительно него множество его значений e меры нуль.

Пусть семейство линий Γ_ρ обладает следующими свойствами:

- 1) каждая линия Γ_ρ делит кольцо K_μ на две двусвязные области;
- 2) для $\rho \notin e$ линии Γ_ρ изменяются непрерывно вместе с ρ ;
- 3) исключая из множества G , образованного точками всех линий Γ_ρ , некоторое множество E , обладающее N -свойством относительно семейства линий Γ_ρ , линии Γ_ρ во всех точках имеют непрерывно вращающиеся касательные и параметр ρ , рассматри-

* Лемма 1 является усилением леммы, приводимой у Неванлинна ([3], стр. 324) и используемой им для вывода признака параболического типа Альфорса. Как мы увидим ниже (п. 8), лемма 1 приводит к более общей формулировке признака Альфорса и точно устанавливает его связь с оценкой модуля двусвязной области. Эта же лемма полезна при рассмотрении задачи на склеивание (см. ниже, гл. 4).

ваемый как функция $\rho(x, y)$, обладает непрерывными частными производными $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, не обращающимися одновременно в нуль.

Если при этих условиях для всех $\rho \in \bar{E}$ положить

$$L(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{d\rho}{dn} ds \quad (4)$$

(пренебрегая множествами Γ_ρ, E меры нуль, являющимися пересечениями линий Γ_ρ и E), то имеет место неравенство

$$\int \frac{d\rho}{L(\rho)} \leq \frac{\ln \mu}{2\pi}, \quad (5)$$

обращающееся в равенство тогда и только тогда, когда линии Γ_ρ являются окружностями с центром в начале, заполняющими, с точностью до множества меры нуль, все кольцо K_μ .

Доказательство. Условимся, для упрощения записи, пренебрегать при интегрировании по Γ_ρ и по $\alpha < \rho < \beta$ нуль-множествами Γ_ρ, E и множествами значений ρ меры нуль.

Проведем в K_μ радиальный разрез и полученный „четыреугольник“ отобразим конформно на прямоугольник R с основаниями длиной $\frac{\ln \mu}{2\pi}$, соответствующими обоим краям разреза и высотой, равной 1. Образы G, E, Γ_ρ, ds и dn в R будем обозначать, соответственно, через $G', E', \Gamma'_\rho, ds'$ и dn' . Для семейства линий Γ'_ρ в R имеет место соотношение, аналогичное (2). Так как $\text{mes } E = 0$, то $\text{mes } E' = 0$, и мы получаем соотношение

$$\frac{\ln \mu}{2\pi} \geq \text{mes } G' = \int_{\alpha}^{\beta} d\rho \int \frac{dn'}{d\rho} ds'. \quad (6)$$

Из конформности отображения K_μ на R следует, что $\frac{ds'}{dn'} = \frac{ds}{dn}$ и что множество E' обладает N -свойством относительно семейства линий Γ'_ρ . Из первого следует инвариантность $L(\rho)$ относительно конформных отображений:

$$\int_{\Gamma'_\rho} \frac{d\rho}{dn'} ds' = \int_{\Gamma_\rho} \frac{d\rho}{dn} ds = L(\rho),$$

а из второго, что почти для всех ρ

$$\int_{\Gamma'_\rho} ds' \geq 1. \quad (7)$$

В силу неравенства Шварца

$$\int_{\Gamma'_\rho} \frac{dn'}{d\rho} ds' \cdot \int_{\Gamma'_\rho} \frac{d\rho}{dn'} ds' \geq \left(\int_{\Gamma'_\rho} ds' \right)^2 \quad (8)$$

(оба интеграла слева для рассматриваемых — почти всех — значений ρ отличны от нуля; а priori возможно, что второй интеграл обращается в ∞ , но тогда неравенство, очевидно, сохраняется) и из предыдущего следует, что почти для всех ρ

$$\int_{\Gamma'_\rho} \frac{dn'}{d\rho} ds' \geq \frac{1}{L(\rho)},$$

и из (6) следует (5).

Для того, чтобы в (5) имело место равенство, требуется, во-первых, чтобы $\frac{\ln \mu}{2\pi} = \text{mes } G$, что эквивалентно тому, что линии Γ_ρ заполняют почти все кольцо K_μ . Далее, требуется одновременное обращение в равенства неравенств (7) и (8), что возможно только тогда, когда почти для всех ρ линии Γ'_ρ являются вертикальными сечениями R и, соответственно, линии Γ_ρ являются окружностями, с центром в начале.

Из непрерывной зависимости линий Γ_ρ от ρ следует, что в случае равенства в (5) линии Γ_ρ для всех $\rho \in e$, являются окружностями вида $|z| = \text{const}$. Отсюда, далее, следует, что не покрытым в K_μ остается множество окружностей $|z| = r$, где r образуют на отрезке $1 < x < \mu$ некоторое множество меры нуль, гомеоморфное множеству e . Это позволяет доопределить семейство линий Γ_ρ для $\rho \in e$. Поэтому можно сказать, что *экстремальный случай, когда*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\rho}{L(\rho)} = \frac{\ln \mu}{2\pi}$$

характеризуется тем, что линии Γ_ρ являются окружностями $|z| = \text{const}$, заполняющими сплошь все кольцо K_μ .

3. Лемма 2. В кольце K_μ : $1 < |z| < \mu$, $\mu < \infty$, дано семейство попарно взаимно простых жордановых линий P_t , где t пробегает интервал (α, β) , исключая быть может замкнутое относительно него множество его значений e меры нуль.

Пусть семейство линий P_t обладает следующими свойствами:

1) каждая линия P_t является сечением кольца K_μ , соединяющим окружности $|z| = 1$ и $|z| = \mu$;

2) для $t \in e$ линии P_t изменяются непрерывно вместе с t ;

3) выполняется свойство (3), указанное в лемме 1, с заменой Γ_ρ на P_t и ρ на t .

Если при этих условиях для всех $\rho \in e$ положить

$$\Lambda(t) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{dt}{dv} d\lambda, \tag{9}$$

где $\frac{dt}{dv} = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2}$, $d\lambda$ — дифференциал дуги на P_t , и при интегрировании вдоль P_t пренебрегается множествами меры нуль, то имеет место неравенство

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{\Lambda(t)} \leq \frac{2\pi}{\ln \mu}, \tag{10}$$

обращающееся в равенство тогда и только тогда, когда линии P_t являются радиальными сечениями кольца K_μ , заполняющими его целиком с точностью до множества меры нуль.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1, только кольцо K_μ с радиальным разрезом конформно отображается на прямоугольник с основаниями длиной 1, соответствующими обоим краям разреза, и высотой $\frac{2\pi}{\ln \mu}$.

Аналогично лемме 1 в экстремальном случае, когда

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{\Lambda(t)} = \frac{2\pi}{\ln \mu},$$

линии P_t можно доопределить для $t \in e$, включая также $t = \alpha$ и $t = \beta$; полученное таким образом экстремальное семейство линий P_t совпадает с радиальными сечениями кольца, заполняющими его сплошь.

Заметим, что из (10) с помощью неравенства Шварца получается неравенство

$$\frac{\ln \mu}{2\pi} \leq \frac{1}{(\beta - \alpha)^2} \int_\alpha^\beta \Lambda(t) dt$$

или, в силу (9),

$$\frac{\ln \mu}{2\pi} \leq \frac{1}{(\beta - \alpha)^2} \int_\alpha^\beta dt \int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda. \tag{11}$$

Запишем еще соотношения (5) и (11) в виде

$$\int_\alpha^\beta \int_{\Gamma_\rho} \frac{d\rho}{\frac{d\rho}{dn} ds} \leq \frac{\ln \mu}{2\pi} \leq \frac{1}{(\beta - \alpha)^2} \int_\alpha^\beta dt \int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda. \tag{12}$$

4. **Примечания к леммам 1, 2.** 1) В приложениях лемм 1, 2 к проблеме типа односвязной римановой поверхности наиболее часто приходится иметь дело с теми частными случаями, когда множество E , о котором говорится в леммах 1, 2, состоит не более чем из счетного множества точек и счетного числа спрямляемых дуг, и множество e , о котором говорится там же, не более чем счетное. В подобных случаях можно обойтись без интеграла Лебега.

2) Величины $L(\rho)$, $\Lambda(t)$ и μ — инвариантны относительно конформных отображений кольца K_μ . Поэтому для любой двусвязной области D (конечнолистной или бесконечнолистной) с конечным модулем $\mu(D)$ и, соответственно, с леммами 1, 2, определенными семействами линий Γ_ρ и P_t , имеют место неравенства

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\rho}{L(\rho)} \leq \frac{\ln \mu(D)}{2\pi} \quad (13)$$

и

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\Lambda(t)} \leq \frac{2\pi}{\ln \mu(D)}, \quad (14)$$

обращающиеся в равенства для экстремальных семейств линий Γ_ρ и P_t , которые характеризуются тем, что при конформном отображении D на кольцо $K_{\mu(D)}$ эти линии переходят в концентрические окружности (соответственно радиальные сечения), заполняющие почти все кольцо $K_{\mu(D)}$.

3) Вместо кольца K_μ леммы 1, 2 можно формулировать для прямоугольника R , рассматривая семейства линий Γ_ρ (теперь уже не замкнутые) и линий P_t , соединяющих соответственно основания и боковые стороны R . Если $M(R)$ — модуль прямоугольника R , т. е. отношение его основания к высоте, то получаем неравенства

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\rho}{L(\rho)} \leq M(R) \quad (15)$$

и

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\Lambda(t)} \leq \frac{1}{M(R)}, \quad M(R) \leq \frac{1}{(\beta - \alpha)^2} \int_{\alpha}^{\beta} \Lambda(t) dt, \quad (16)$$

обращающиеся в равенства только тогда, когда семейства линий Γ_ρ и P_t представляют вертикальные, соответственно горизонтальные, сечения R , заполняющие его почти полностью (второе неравенство в (16) следует из первого).

С помощью конформных отображений соотношения (15) и (16) переносятся на произвольные четырехугольники.

4) Основные неравенства (5) и (10) и аналогичные с ними неравенства инвариантны относительно непрерывно дифференцируемых преобразований параметра ρ , соответственно t .

5. Связь лемм 1, 2 с принципом Грётша. Пусть D произвольная двусвязная область с конечным модулем $\mu(D)$ и G_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — конечное число попарно взаимно простых двусвязных областей, расположенных в D кольцеобразно, т. е. так, что в каждой области G_k можно провести замкнутую линию, разбивающую D на две двусвязные области.

Беря для каждой области G_k экстремальное семейство линий Γ_ρ определенных для ρ , пробегающих некоторый интервал (α_k, β_k) , имеем

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{d\rho}{L(\rho)} = \frac{\ln \mu(G_k)}{2\pi},$$

где $\mu(G_k)$ — модуль области G_k . Суммируя по k и изменяя, если нужно, ρ так, чтобы интервалы $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ заполняли однолистно некоторый интервал (α, β) , исключая конечное число его точек, будем иметь

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln \mu(G_k)}{2\pi} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\rho}{L(\rho)} \leq \frac{\ln \mu(D)}{2\pi}$$

или

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln \mu(G_k)}{2\pi} \leq \frac{\ln \mu(D)}{2\pi}, \tag{17}$$

обращающееся в равенство только тогда, когда при конформном отображении области D на кольцо, области G_k переходят в concentricкие заполняющие его кольца.

Аналогично, беря в той же области D конечное число попарно взаимно простых „четырёхугольников“ S_k ($k = 1, 2, \dots, n$), боковые стороны которых расположены на обоих граничных компонентах области D , применяя к ним экстремальный случай (16) и используя (14), получим неравенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{M(S_k)} \leq \frac{2\pi}{\ln \mu(D)}, \tag{18}$$

обращающееся в равенство только тогда, когда при конформном отображении области D на кольцо области S_k переходят в заполняющие его четырёхугольники, примыкающие друг к другу вдоль радиальных сечений кольца.

Неравенства (17) и (18), с условиями их обращения в равенства, совпадают с двумя леммами Грётша [1], выражающими так называемый принцип Грётша.

6. Леммы 1, 2 как континуальное выражение принципа Грётша. Рассмотрим для простоты случай, когда в условиях леммы 1 множества E и e пусты. Разбивая область G , заполненную линиями Γ_ρ , на односвязные части G_1, G_2, \dots, G_n при помощи линий $\Gamma_{\rho_1}, \Gamma_{\rho_2}, \dots, \Gamma_{\rho_{n-1}}$, соответствующих некоторому разбиению интервала (α, β) : $\alpha < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{n-1} < \beta$, и полагая

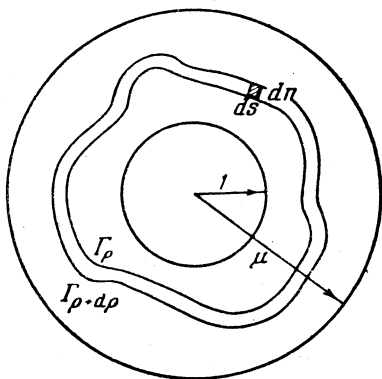
$$M_k = \frac{\ln \mu(G_k)}{2\pi},$$

будем иметь по первой лемме Грётша

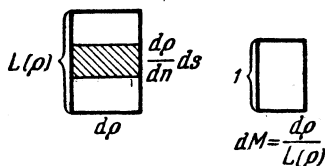
$$\sum_{k=1}^n M_k \leq \frac{\ln \mu}{2\pi}.$$

Неограниченно измельчая разбиение интервала (α, β) и совершая, формально, предельный переход к континуальному разбиению области G , будем иметь

$$\int_{\alpha}^{\beta} (dM)_\rho \leq \frac{\ln \mu}{2\pi},$$



где $(dM)_\rho$ означает модуль бесконечно узкого прямоугольника, соответствующего бесконечно узкой двусвязной области, заключенной между линиями Γ_ρ и $\Gamma_{\rho+d\rho}$ (под прямоугольником R , соответствующим некоторой двусвязной области D , понимаем прямоугольник, для которого $M(R) = \frac{\ln \mu(D)}{2\pi}$). Непосредственно из геометрических соображений видно (фиг. 1), что



Фиг. 1

$$(dM)_\rho = \frac{d\rho}{\int_{\Gamma_\rho} \frac{d\rho}{dn} ds} = \frac{d\rho}{L(\rho)}. \quad (19)$$

Соотношение (19) вместе с предыдущим неравенством приводит к соотношению леммы 1:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\rho}{L(\rho)} \leq \frac{\ln \mu}{2\pi}.$$

Если при аналогичных условиях для леммы 2 боковые стороны бесконечно узкой полоски, заключенной между линиями P_t и P_{t+dt} , рассматривать как основания, то модуль такой полоски равен

$\frac{dt}{\Lambda(t)}$ (фиг. 2), и неравенство (10) леммы 2 может быть получено предельным переходом из неравенства (18) второй леммы Грётша.

Из сказанного следует, что леммы 1, 2 можно рассматривать как континуальное выражение принципа Грётша.*

7. Теоремы о возрастании и сходимости модулей двусвязных областей и четырехугольников. Отметим несколько известных теорем, вытекающих из лемм Грётша.

Теорема 1. Пусть D_1 и D_2 — две двусвязные области, причем $D_1 \subset D_2$ и $\mu(D_1) < \infty$. Тогда

$$\mu(D_1) < \mu(D_2). \quad (20)$$

Доказательство. Если $\mu(D_2) = \infty$, то (20) очевидно. Если же $\mu(D_2) < \infty$, то (20) следует из соотношения (17) первой леммы Грётша при $n = 1$.

Теорема 2. Пусть $\{D_n\}$ — произвольная последовательность монотонно расширяющихся двусвязных областей:

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots; \mu(D_n) < \infty$$

и $D = \lim D_n$ — предельная область. Тогда

$$\mu(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_n). \quad (21)$$

* Строгое доказательство соотношения (19), выявляющего основное геометрическое значение величины $L(\rho)$, можно получить (E и e пустые) следующим образом. Обозначим через Δ_ρ двусвязную область, заключенную между линиями Γ_ρ и $\Gamma_{\rho+\Delta\rho}$. Тогда, на основании леммы 1,

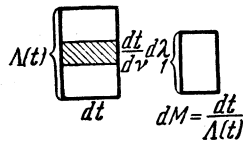
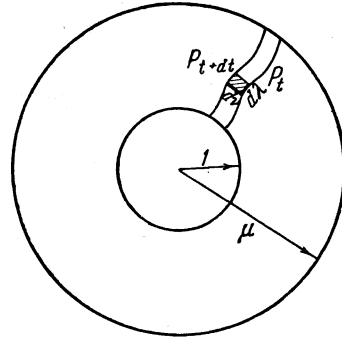
$$(\Delta M)_\rho = \frac{\ln \mu(\Delta_\rho)}{2\pi} \geq \int_\rho^{\rho+\Delta\rho} \frac{d\rho}{L(\rho)} > (1-\varepsilon) \frac{\Delta\rho}{L(\rho)},$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ вместо $\Delta\rho$. Предельным переходом получаем

$$(dM)_\rho \geq \frac{d\rho}{L(\rho)}.$$

Разобьем теперь Δ_ρ на конечное число элементарных четырехугольников при помощи нормалей к линии Γ_ρ . При достаточно малом $\Delta\rho$ и достаточно малом разбиении области Δ_ρ каждый из полученных четырехугольников можно ε -квазиконформно (квазиконформно с характеристикой $p < 1 + \varepsilon$; см. ниже п. 11) превратить в прямоугольник со сторонами, равными Δs и Δn (обозначая так отрезки на Γ_ρ и нормалях к ней). Отсюда следует, что модуль каждого четырехугольника разбиения заключен между $(1 \pm \varepsilon) \frac{\Delta s}{\Delta n}$ (см. п. 11). По второй лемме Грётша имеем

$$\frac{1}{(\Delta M)_\rho} > (1-\varepsilon) \sum \frac{\Delta s}{\Delta n} = \frac{1-\varepsilon}{\Delta\rho} \sum \frac{\Delta\rho}{\Delta n} \Delta s,$$



Фиг. 2

Доказательство. В силу теоремы 1 последовательность $\{\mu(D_n)\}$ монотонно возрастает, оставаясь меньше $\mu(D)$. Предположим, от противного, что $\tilde{\mu} = \lim \mu(D_n) < \mu(D)$. Используя конформное отображение D на кольцо (одна или обе граничные окружности этого кольца могут вырождаться в точки), мы легко выделим из D двусвязную область D' такую, что $\bar{D}' \subset D$ и $\tilde{\mu} < \mu(D') < \mu(D)$. Так как области D_n расширяются и сходятся к D , то, начиная с некоторого значения n , будем иметь $D' \subset D_n$; следовательно $\mu(D') < \mu(D_n)$, откуда $\mu(D') < \tilde{\mu}$, что приводит к противоречию.

Примечание. С помощью теории нормальных семейств аналитических функций легко показать, что в случае однолистных двусвязных областей для выполнения (21) достаточна сходимость D_n к D как к ядру [4]. Для неоднотных областей это в общем случае неверно.

Аналогично получаются следующие две теоремы:

Теорема 1'. Пусть S_1 и S_2 — два четырехугольника, причем $S_1 \subset S_2$; основания S_1 входят в основания S_2 и модуль $M(S_1) < \infty$. Тогда

$$M(S_1) < M(S_2), \quad (20')$$

т. е., другими словами, при расширении через боковые стороны модуль четырехугольника возрастает.

Теорема 2'. Пусть $\{S_n\}$ — произвольная последовательность четырехугольников, из которых каждый следующий является расширением своего предыдущего через его боковые стороны, и пусть $S' = \lim S_n$ — предельный «четыреугольник» (конформный образ S может вырождаться в полосу или полуполосу; в этом случае $M(S) = \infty$). Тогда

$$M(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(S_n). \quad (21')$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{(\Delta M)_\rho} > \frac{1 - \varepsilon_1}{\Delta \rho} L(\rho),$$

где $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ вместе с $\Delta \rho$. Предельным переходом получаем

$$(dM)_\rho \leq \frac{d\rho}{L(\rho)}.$$

Из обеих оценок для $(dM)_\rho$ следует соотношение (19):

$$(dM)_\rho = \frac{d\rho}{L(\rho)}.$$

В общем случае (не считая E и e пустыми) можно показать, что соотношение (19) имеет место почти для всех ρ .

Аналогичное соотношение имеет место для величины $\Lambda(t)$.

§ 2. Общие признаки типа открытой односвязной римановой поверхности

8. Признак параболического типа Альфорса. Введем следующее определение:

Определение 2. Пусть на произвольной открытой односвязной римановой поверхности F , расположенной над плоскостью $w = u + iv$, дано семейство простых замкнутых линий Γ_ρ , определенных для всех значений ρ ($0 < \rho_0 < \rho < \infty$), исключая быть может конечное число или неограниченно возрастающую последовательность значений $\{\rho_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Мы скажем, что семейство линий Γ_ρ производит регулярное кольцообразное исчерпание поверхности F , если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) линии Γ_ρ попарно не имеют общих точек и, отделяемые ими от F , односвязные части F_ρ при $\rho \rightarrow \infty$ монотонно расширяются и сходятся к F , а при $\rho \rightarrow \rho_0$ — не стягиваются в точку;

2) для $\rho \neq \rho_k$ ($k = 1, 2, \dots$) линии Γ_ρ изменяются непрерывно вместе с ρ (возможно в сферической метрике);

3) исключая из множества G , образованного точками всех линий Γ_ρ , некоторое множество E , замкнутое относительно G и состоящее не более чем из счетного множества точек и счетного числа спрямляемых дуг, линии Γ_ρ во всех точках имеют непрерывно вращающиеся касательные, и параметр ρ , рассматриваемый как функция $\rho(u, v)$, обладает непрерывными частными производными $\frac{\partial \rho}{\partial u}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial v}$, не обращающимися одновременно в нуль.

Признак параболического типа Альфорса [10]. Пусть F — произвольная открытая односвязная риманова поверхность и Γ_ρ — семейство линий на F , производящее регулярное кольцообразное ее исчерпание. Тогда для параболического типа поверхности F достаточна расходимость интеграла

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{L(\rho)}, \tag{1}$$

где

$$L(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{d\rho}{dn} ds. \tag{2}$$

Инвариантную относительно конформных отображений поверхности F величину $L(\rho)$ будем в дальнейшем называть k — длиной линий Γ_ρ . Относительно конформно-геометрического значения $L(\rho)$ см. подстрочное примечание к п. 6.

Доказательство признака Альфорса. Обозначим через F_ρ односвязную часть F , отсекаемую от нее линией Γ_ρ , и через F' — двусвязную часть F , получаемую из нее удалением множества (континуума) $F_{\rho_0} = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} F_\rho$. Если, допуская противное, F — гиперболического типа, то модуль $\mu(F') < \infty$ и, на основании леммы 1 (с $\alpha = \rho_0$ и $\beta = \infty$), интеграл (1) сходится, что невозможно.

Примечание 1. В формулировке признака Альфорса у Неванлинна ([3], стр. 324) Γ_ρ представляют линии уровня некоторой функции $U(P)$, определенной на F . У самого Альфорса [10] $U(P)$ представляет неевклидово расстояние от фиксированной точки P_0 до произвольной точки $P \in F$, измеренное в некоторой конформно инвариантной дифференциальной метрике

$$d\rho = \lambda(P) |d\omega|. \quad (3)$$

Выделяя из каждой такой линии уровня $U(P) = \rho$ ту ее компоненту (если их много), которая отделяет точку P_0 от границы поверхности F , мы получаем семейство линий, производящее регулярное кольцообразное исчерпание поверхности F . Выделение этого семейства, отмеченное и использованное еще Кобеяши [11], имеет то достоинство, что k — длина всей линии уровня $U(P) = \rho$ заменяется k — длиной выделенной ее части, что может иметь существенное значение для расходимости интеграла (2).

Примечание 2. Известно, что признак Альфорса является только достаточным: легко, например, построить семейство эксцентрических окружностей, заполняющих всю область $\rho_0 < |\omega| < \infty$, для которых интеграл (1) сходится.

9. S-признак гиперболического типа. * Условимся под „полуполосой“ S на римановой поверхности F понимать топологический образ прямоугольной полуполосы.

Введем следующее определение:

Определение 3. Пусть на произвольной открытой односвязной римановой поверхности F , расположенной над плоскостью $\omega = u + iv$, дано семейство жордановых линий P_t ($0 < t < 1$), выходящих из внутренних точек поверхности F , оканчивающихся на ее границе ** и заполняющих на F однолистно некоторую полуполосу S . Мы скажем, что семейство P_t производит регулярное

* Указанный ниже признак представляет незначительное изменение признака гиперболического типа, данного мною в кандидатской диссертации 1937 г. (см. также [8]).

** Т. е. речь идет о линиях $\omega = \omega(\tau)$, $0 \leq \tau < 1$, обладающих тем свойством, что никакая последовательность точек $\omega(\tau_n)$ на F при $\tau_n \rightarrow 1$ не имеет предельной точки, являющейся точкой F .

исчерпание S , если оно удовлетворяет третьему условию определения 2 с заменой Γ_ρ на P_t и ρ — на t .

Пусть F — произвольная открытая односвязная риманова поверхность. Отобразив ее конформно на круг $|z| < R \leq \infty$, легко убеждаемся, что если F — параболического типа, то всякая полуполоса S на ней всегда конформно эквивалентна прямоугольной полуполосе, в то время как на поверхности F — гиперболического типа всегда можно указать как полуполосы S , конформно эквивалентные прямоугольной полуполосе, так и полуполосы S , конформно эквивалентные прямоугольнику. В последнем случае S можно рассматривать как четырехугольник с конечным модулем $M(S)$, и из предыдущего следует, что возможность выделения из поверхности F полуполосы S с конечным модулем является необходимым и достаточным условием для гиперболического типа поверхности F .

Используя лемму 2, легко получаем следующую теорему:

Теорема 3. (*S-признак гиперболического типа*). Пусть F — произвольная открытая односвязная риманова поверхность и P_t ($0 < t < 1$) — семейство линий на F , производящее регулярное исчерпание некоторой полуполосы S . Тогда для гиперболического типа поверхности F достаточно, чтобы

$$\iint_{(S)} \frac{dt}{dv} d\lambda dt = \int_0^1 \Lambda(t) dt < \infty, \tag{4}$$

где

$$\Lambda(t) = \int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda. \tag{5}$$

В частности, достаточно, чтобы

$$\Lambda(t) < N, \tag{6}$$

где N не зависит от t .

Доказательство. Проведем в S последовательность поперечных сечений γ_n , встречающих ровно один раз каждую линию P_t и при $n \rightarrow \infty$ удаляющихся к границе поверхности. Обозначая через P_{tn} части линий P_t , лежащие в четырехугольниках S_n , отсекаемых от S сечениями γ_n и применяя второе неравенство из (16) п. 4, получаем соотношение

$$M(S_n) \leq \int_0^1 \Lambda_n(t) dt,$$

где

$$\Lambda_n(t) = \int_{P_{tn}} \frac{dt}{dv} d\lambda.$$

Отсюда, на основании теоремы 2', при $n \rightarrow \infty$ следует, что

$$M(S) \leq \int_0^1 \Lambda(t) dt$$

и, в силу (4), $M(S) < \infty$ и F — гиперболического типа.

§ 3. Методы квазиконформных отображений, склеивания и квазиконформных деформаций

10. N -квазиконформное отображение. Введем следующее определение:

Определение 4. *Отображение $w = f(z) = u + iv$ круга $|z| < R \leq \infty$ называется N -квазиконформным отображением (или, коротко, N -отображением), если оно является внутренним* и обладает следующими двумя свойствами:*

1) *исключая из круга $|z| < R$ множество E , обладающее N -свойством относительно семейства окружностей $\{|z| = r\}$, ($0 < r < R$), и семейства радиальных отрезков $\{\arg z = t, 0 < |z| < R\}$ ($0 \leq t < 2\pi$), (см. конец п. 1), функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и якобиан*

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} > 0;$$

2) *преобразованное множество $f(E)$ обладает N -свойством относительно семейств линий Γ_r и P_t , соответствующих окружностям $|z| = r$ и радиальным отрезкам $\arg z = t$ круга $|z| < R$.*

N -отображения по существу включаются в почти аналитические преобразования Лаврентьева [2]. Для точек $z \notin E$ N -отображение $f(z)$ в малом является аффинным преобразованием, переводящим в круги некоторые эллипсы с отношением полуосей $\frac{a}{b} = p(z) \geq 1$ и углом $\theta(z)$ (там, где $p(z) \neq 1$) между главной осью и осью x -ов; величины $p(z)$ и $\theta(z)$ являются характеристиками отображения.

Определение 5. *N -отображение $w = f(z)$ круга $|z| < R \leq \infty$ называется Q -квазиконформным отображением или просто Q -отображением, если характеристика $p(z)$ этого отображения удовлетворяет условию*

$$p(z) \leq Q < \infty, \quad (7)$$

где Q не зависит от выбора точки $z \notin E$.

* Отображение $f(z)$ называется внутренним (по Стоилову), если оно непрерывно, всякое открытое множество переводит в открытое множество и никакой континуум не переводит в точку (см. [12]).

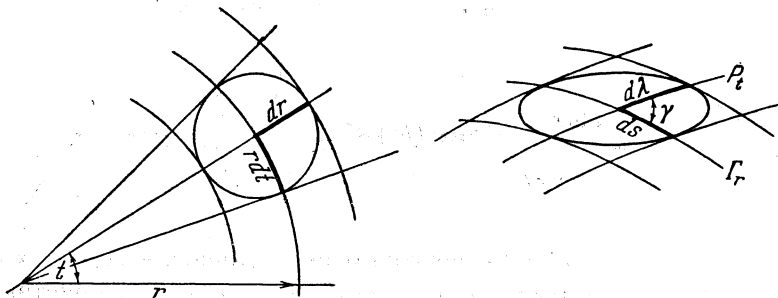
N -отображение и Q -отображение будем называть, соответственно, N_1 -отображениями и Q_1 -отображениями, если множество E , входящее в определения 4, 5, в каждой замкнутой области, расположенной в круге $|z| < R$, состоит не более чем из счетного числа спрямляемых дуг и еще возможно конечного числа точек, и таким же свойством обладает преобразованное множество $f(E)$.

Примечание. С помощью конформных отображений все указанные определения переносятся на отображения односвязных римановых поверхностей.

11. Метод квазиконформных отображений. Пусть функция $w = f(z)$ производит N -отображение круга $|z| < R \leq \infty$ на данную открытую односвязную риманову поверхность F . Обозначим через F' двусвязную часть F , соответствующую некоторому кольцу $r_0 < |z| < R$ ($r_0 > 0$). В силу определения 4, для оценки модуля $\mu(F')$ применимы леммы 1, 2 с линиями Γ_r и P_t , соответствующими на F окружностям $|z| = r$ и радиальным отрезкам $\arg z = t$. Из соотношения (12) § 1 следует тогда соотношение

$$\int_{r_0}^R \frac{dr}{\int_{\Gamma_r} \frac{dr}{dn} ds} \leq \frac{\ln \mu(F')}{2\pi} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{r\pi} dt \int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda, \tag{8}$$

которое позволяет формулировать достаточные условия для конечности или бесконечности $\mu(F')$ и, следовательно, достаточные условия для гиперболического, соответственно параболического типа поверхности F .



Фиг. 3

Таким образом, строя различные N -квазиконформные отображения F на круг $|z| < R \leq \infty$ и рассматривая соответствующие линии Γ_r и P_t , имеем возможность получать различные критерии для типа F . В этом заключается основная идея метода квазиконформных отображений в применении к проблеме типа.

Для применения соотношения (8) его удобнее записать в координатах плоскости z или плоскости $\zeta = \xi + i\eta = \ln z$ (в плоскости ζ

кольцу $r_0 < |z| < R$ с разрезом вдоль соответствующего отрезка положительной действительной полуоси соответствует прямоугольник или полуполоса S_R : $\ln r_0 < \xi < \ln R$, $0 < \eta < 2\pi$.

Чтобы получить указанное преобразование соотношения (8), рассмотрим в круге $|z| < R$ бесконечно малый круг радиуса dr с центром в некоторой точке $z \in E$. Тогда, обозначая через $\gamma = \gamma(z)$ угол между линиями Γ_r и P_t в соответствующей точке на F , будем иметь (см. фиг. 3):

$$r dt = dr, \quad \frac{dn}{d\lambda} = \frac{dv}{ds} = \sin \gamma,$$

откуда

$$L(r) = \int_{\Gamma_r} \frac{dr}{dn} ds = r \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{ds}{d\lambda} dt,$$

$$\Lambda(t) = \int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda = \int_{r_0}^R \frac{1}{\sin \gamma} \frac{d\lambda}{ds} d \ln r,$$

и из (8) следует, что

$$2\pi \int_{r_0}^R \frac{d \ln r}{2\pi} \frac{1}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{ds}{d\lambda} dt} \leq \ln \mu(F') \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_{r_0}^R \frac{1}{\sin \gamma} \frac{d\lambda}{ds} d \ln r$$

или, полагая

$$p_1(z) = \frac{1}{\sin \gamma} \frac{ds}{d\lambda}, \quad p_2(z) = \frac{1}{\sin \gamma} \frac{d\lambda}{ds}, \quad (9)$$

имеем *

$$2\pi \int_{r_0}^R \frac{d \ln r}{2\pi} \frac{1}{\int_0^{2\pi} p_1(z) dt} \leq \ln \mu(F') \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_{r_0}^R p_2(z) d \ln r. \quad (10)$$

Величины $p_1(z)$ и $p_2(z)$ инвариантны относительно конформных отображений и обе не превосходят вышеуказанной характеристики $p(z)$ (это следует из того, что величины ds и $d\lambda$ являются сопряженными полу диаметрами рассмотренного выше бесконечно малого эллипса). Обозначим верхнюю грань $p_1(z)$, $p_2(z)$ и $p(z)$ на окружности $|z| = r$, соответственно, через $q_1(r)$, $q_2(r)$ и $q(r)$. Обозначая еще через $d\sigma_z = r dr dt$ и $d\sigma_\xi = d\xi d\eta$ ($\xi = \ln r$, $\eta = y$) элементы площади в круге $|z| < R$ и области S'_R , мы на основании (10) можем сформулировать следующую теорему:

* Соотношение (10) было получено мною в кандидатской диссертации.

Теорема 4. Пусть функция $w = f(z)$ производит N -квазиконформное отображение круга $|z| < R \leq \infty$ на данную открытую односвязную риманову поверхность F . Тогда для параболического типа поверхности F достаточна расходимость (в порядке ослабления признака) одного из следующих интегралов:

$$\int_{r_0}^R \frac{d \ln r}{2\pi} , \int_{r_0}^R \frac{dr}{r q_1(r)} \text{ и, при } R = \infty, \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r q(r)} \tag{11}$$

$$\int_0^R p_1(z) dt$$

(последний случай имеется у Лаврентьева [2]). Для гиперболического типа поверхности F достаточна сходимость (в порядке ослабления признака) одного из следующих интегралов:

$$\iint_{(r_0 < |z| < R)} p_r(z) d\sigma_z, \int_{r_0}^R q_2(r) d \ln r \tag{12}$$

и, при $R < \infty$, эквивалентных между собой интегралов

$$\iint_{(r_0 < |z| < R)} p(z) d\sigma_z, \iint_{(S_R)} p(z(r)) d\sigma_r \tag{13}$$

или, что слабее, эквивалентных между собой интегралов *

$$\int_{r_0}^R q(r) dr, \int_{\ln r_0}^{\ln R} q(r(\xi)) d\xi. \tag{14}$$

Заметим еще, что если отображение $f(z)$ является Q -отображением, то из (10) следует, что

$$\frac{1}{Q} \ln \frac{R}{r_0} \leq \ln \mu(F') \leq Q \ln \frac{R}{r_0}, \tag{15}$$

откуда вытекает теорема о сохранении типа при Q -отображениях: **

Теорема 5. При Q -отображениях тип односвязной римановой поверхности не меняется.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что при Q -отображении $w = f(z)$ круга $|z| < R$ на поверхность F последняя—параболического типа, если $R = \infty$, и гиперболического, если $R < \infty$. Но это непосредственно следует из (15).

* Признак гиперболического типа, выраженный через интегралы (13) и (14), был недавно получен и использован Ле-Ван Тьем [13].

** Теорема 4, в принципе (соотношение (15)) восходящая к Грётшу [14], встречается у Какутани [15] и Тайхмюллера [16].

12. Метод склеивания и метод квазиконформных деформаций.*

В применении к проблеме типа односвязной римановой поверхности метод склеивания состоит в следующем: при помощи разного рода сечений данная открытая односвязная риманова поверхность разбивается на конечное или бесконечное число частей, которые при помощи Q -отображений преобразуются в некоторые плоские области (обычно полуплоскости, полуполосы, полосы и т. п.). Вместо того, чтобы семейства линий Γ_ρ и P_ρ , позволяющие применить соотношение (12), п. 3, строить на самой поверхности F , их строят в полученных плоских областях, идентифицируя при этом граничные точки, соответствующие одинаковым точкам на F .

Систематически методом склеивания пользовался Блан [17], [18] (см. также [6], [8], [13], [15], [16], [19]). В своей общей форме метод склеивания опирается на фундаментальные исследования Лаврентьева [2] (см. ниже, гл. 4).

Идея метода квазиконформных деформаций состоит в том, что из данной поверхности F , тип которой нужно определить, удаляются некоторые области G_k ($k = 1, 2, \dots$), вместо которых затем вклеиваются другие, продеформированные области G_k^* , связанные с областями G_k Q -отображениями, оставляющими неподвижными граничные контуры этих областей. Дополняя указанные Q -отображения тождественным отображением самой на себя той части F , которая не подвергалась деформации, получаем Q -отображение F на полученную из нее поверхность F^* . На основании теоремы 5 поверхности F и F^* одного и того же типа (если число деформируемых областей G_k бесконечно велико, то для применимости теоремы 5 требуется равномерная ограниченность характеристик используемых Q -отображений). Переход от определения типа поверхности F к определению типа поверхности F^* , полученной из F указанным образом, составляет основную идею метода квазиконформных отображений.

Обычно метод склеивания комбинируется с методом квазиконформных деформаций, а зачастую и с общим методом квазиконформных отображений.

* Развернутое изложение и применение этих методов дается ниже, в гл. 4 и 5.

Глава II

Поверхности с конечным числом точек ветвления на каждом листе

§ 4. Исследования Кобейши *

13. Определение 6. Односвязная риманова поверхность называется поверхностью с конечным числом точек ветвления на каждом листе, если из каждой точки вдоль прямолинейных лучей видно не более конечного числа точек ветвления и никаких, отличных от точек ветвления бесконечного порядка, граничных точек.

14. Величины $h(P)$, $\tau(P)$ и функция Кобейши $f(P)$. Пусть F — произвольная поверхность с конечным числом точек ветвления на каждом листе, расположенная над плоскостью w , и P — произвольная правильная (т. е. имеющая однолиственную окрестность) точка F , расположенная над некоторой точкой w (не исключая $w = \infty$). Если тогда „сферически ближайшая“ ** к P точка ветвления F или одна из них, если их несколько, расположена над некоторой точкой $w = a$, то полагаем

$$h(P) = \ln \left| \frac{w - a}{1 + \overline{a} w} \right|. \quad (1)$$

Обозначая через $\sigma(P)$ сферическое расстояние от P до сферически ближайшей к ней точке ветвления на F , имеем***

$$h(P) = \ln \operatorname{tg} \sigma(P). \quad (2)$$

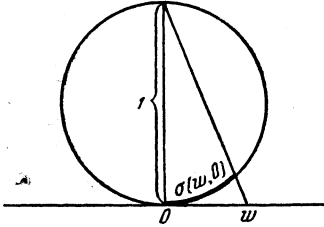
* Излагаемые ниже исследования Кобейши представляют извлечение из его работ [14], [19] (см. также изложение признака Кобейши у Неванлинна [3]). Результаты Кобейши, излагаемые нами с некоторым отступлением от оригинала, имеют основное значение при получении разного рода признаков параболического типа для рассматриваемых в этой главе поверхностей.

** Т. е. при введении на F сферической метрики с помощью сферы Римана.

*** Обозначим через $\sigma(w_1, w_2)$ сферическое расстояние между точками w_1 и w_2 . Тогда (см. фиг. 4) $\operatorname{tg} \sigma(w, 0) = |w|$. Производя преобразование вращения сферы $w' = \frac{w - a}{1 + \overline{a} w}$ и замечая, что при этом $\sigma(w, a) = \sigma(w', 0)$, получаем из предыдущего соотношения

$$\left| \frac{w - a}{1 + \overline{a} w} \right| = \operatorname{tg} \sigma(w, a). \quad (3)$$

Условимся в дальнейшем под „большими сферическими окружностями на плоскости w “ понимать стереографические образы на плоскости w больших окружностей сферы Римана. Условимся затем угол $d\theta$, заключенный между дугами $l(w, a)$ и $l(w + dw, a)$ больших сферических кругов, соединяющих точку a с бесконечно близкими точками w и $w + dw$, расположенными на некоторой кривой C , не проходящей через a , называть *сферической угловой мерой элемента дуги кривой C относительно точки a* . Нетрудно убедиться (как в примечании к соотношению (2)), что



Фиг. 4

$$d\theta = \left| d \arg \frac{w-a}{1+\bar{a}w} \right|. \quad (4)$$

Зафиксируем теперь на F произвольную правильную точку P_0 и для любой правильной точки P положим

$$\tau(P) = \tau(P, P_0) = \min \int_C d\theta, \quad (5)$$

где интеграл берется по всевозможным, не проходящим через точки ветвления, путям C , соединяющим на F точки P и P_0 , и $d\theta$ означает угловую меру (4) элемента дуги пути C относительно сферически ближайшей к нему точки ветвления.

Функцией Кобеяши мы будем называть функцию

$$f(P) = |h(P)| + \tau(P). \quad (6)$$

15. Сеть Кобеяши T . Совокупность дуг больших сферических окружностей на F , точки которых сферически равно удалены от двух сферически ближайших к ним точек ветвления, образуют на F некоторую сеть T , называемую сетью Кобеяши. Точки на F , сферически равноудаленные более чем от двух точек ветвления, образуют *вершины сети T* , а заключенные между ними или отсекаемые ими от T дуги образуют *стороны сети T* . Из определения 6 легко следует, что вершины сети T не могут иметь точек сгущения на F и каждая из них сферически равноудалена не более чем от конечного числа точек ветвления.

Точки на T будем обозначать через Q , а дуги больших сферических окружностей, соединяющих их со сферически ближайшими к ним точками ветвления, — через $l(Q)$ или просто l . Для всех точек P такой

Для точки P имеем $\sigma(P) = \sigma(w, a)$ и (2) следует из (1) с помощью (3) (относительно линейных преобразований, связанных с вращением сферы, см., например, Форд, „Автоморфные функции“, ОНТИ, 1936).

дуги l величина $\tau(P)$ имеет одно и то же значение, которое мы будем обозначать через $\tau(l)$.^{*} Величину $\tau(l)$ можно рассматривать как угловое расстояние от дуги l до „нулевой дуги“, проходящей через точку P_0 (если P_0 лежит на сети T , то таких нулевых дуг l_0 имеется несколько).

16. Поверхность F^* со складками. Прежде чем приступить к установлению признаков параболического типа для изучаемых нами поверхностей, полезно геометрически наглядно представить себе отображение поверхности F с помощью функции

$$t(P) = h(P) + i\tau(P). \quad (7)$$

Рассмотрим сперва, как отображается функцией $t(P)$ произвольный сектор S поверхности F , ограниченный дугой γ , лежащей на одной из сторон сети T , и двумя дугами l_1 и l_2 , соединяющими концы γ с одной и той же сферически ближайшей к γ точкой ветвления. Пусть a — проекция этой точки ветвления на плоскость w .

При пробегании γ в определенном направлении величина $\tau(P)$ либо монотонно возрастает или убывает, либо возрастает до некоторого максимума, после чего монотонно убывает. Так как величина $\arg \frac{w-a}{1+aw}$ на γ всегда изменяется только монотонно, то в первом случае, в силу (4) и (5), всюду вдоль γ выполняется одно из двух соотношений

$$d\tau = \pm d \arg \frac{w-a}{1+aw}. \quad (8)$$

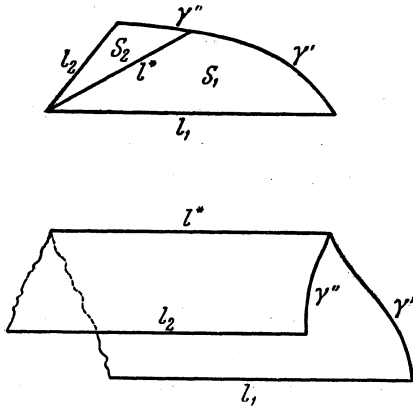
Отсюда, в силу (1), следует, что с точностью до сдвига, параллельного мнимой оси, причем если в (8) стоит знак минус, то еще дополнительного перегибания вокруг прямой, параллельной действительной оси, отображение S с помощью функции $t(P)$ совпадает с отображением S с помощью функции

$$t = \ln \frac{w-a}{1+aw}, \quad (9)$$

которая отображает S на полуполосу, ограниченную справа криволинейной дугой, соответствующей дуге γ . Если же величина $\tau(P)$ на γ имеет точку максимума, то соединяя эту точку дугой l с вершиной сектора S , разобьем последний на два сектора S_1 и S_2 , к каждому из которых применимо предыдущее заключение. При этом, если в (8)

^{*} Используя сеть T , можно было величину $\tau(P)$ определить сперва для точек Q , принадлежащих T , рассматривая в (5) пути C , расположенные целиком на сети T (точку P_0 при помощи l_0 переносим на сеть T в некоторую ее точку Q_0) и полагая затем $\tau(l) = \tau(Q)$, равно как $\tau(P) = \tau(l)$ для точек P на l (см., например, Неванлинна [3]). Указанное выше построение $\tau(P)$ имеет свои достоинства (см. ниже, § 10).

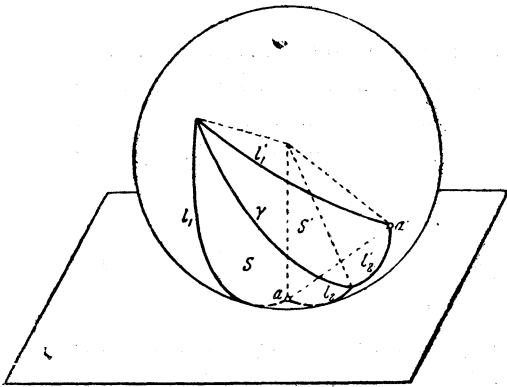
одному сектору соответствует знак плюс, то другому — знак минус, откуда следует, что в рассматриваемом случае отображение S с помощью функции $t(P)$ приводит к горизонтальной складке (фиг. 5).



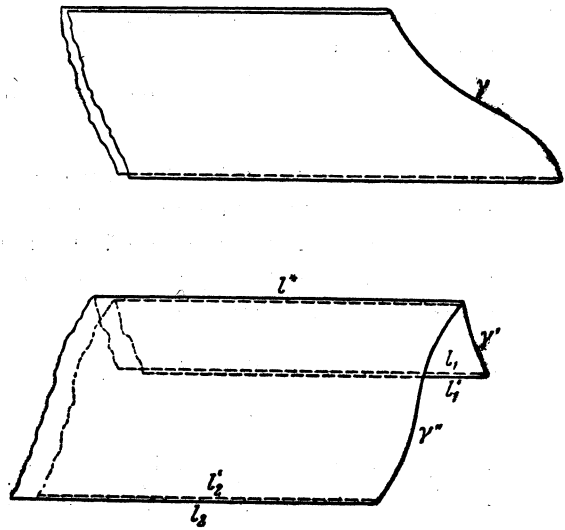
Фиг. 5

На F к сектору S примыкает вдоль γ сферически симметричный с S сектор S' , отображаемый с помощью функции $t(P)$ на ту же полуполосу, возможно со складкой, что и S , только на обратную ее сторону (см. фиг. 6: при возрастании $\arg \frac{\omega - a}{1 + a\omega}$ вдоль γ соответствующая величина $\arg \frac{\omega - a'}{1 + a'\omega}$ убывает, и наоборот).

Склеивая полученные для S и S' полуполосы вдоль их общей боковой стороны, мы в качестве образа области $S + S'$ получаем двойную полуполосу с боковой складкой и, возможно, еще двумя горизонтальными складками (фиг. 7).



Фиг. 6



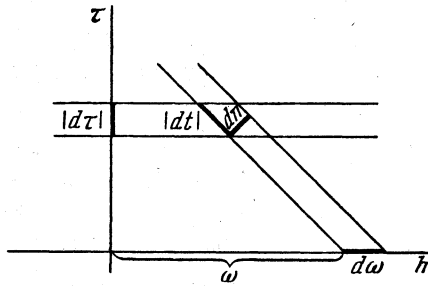
Фиг. 7

Продолжая с помощью функции $t(P)$ полученное для области $S + S'$ отображение за свободные граничные дуги l этой области, получим кусочно конформное отображение поверхности F на некоторую поверхность F^* со складками, расположенную над верхней полуплоскостью $I(t) \geq 0$ плоскости $t = h + i\tau$.

17. Признак параболического типа и теорема Кобеяши. Положим

$$\omega_0 = f(P_0) \tag{10}$$

и для $\omega > \omega_0$ обозначим через G_ω область на F , точки которой достижимы из точки P_0 путями, вдоль которых $f(P) < \omega$. Области G_ω на F^* соответствует некоторая область G_ω^* , получаемая при неограниченном продолжении элемента поверхности F^* с центром в точке P_0^* , образе точки P_0 , над треугольником, отсекаемом от верхней полуплоскости $I(t) \geq 0$ прямыми $|h| + \tau = \omega$. Отсюда следует, что граница Γ_ω^* области G_ω^* , а значит и граница Γ_ω области G_ω , распадается не более чем на конечное число замкнутых контуров. Отсюда, предполагая F открытой поверхностью, заключаем, что один из контуров Γ_ω (обозначим его через Γ_ω^0) представляет внешнюю



Фиг. 8

границу области G_ω , отделяющую P_0 от границы F : контур Γ_ω^0 отделяет от F односвязную ее часть F_ω , состоящую из G_ω и частей F , прилегающих к G_ω вдоль отличных от Γ_ω^0 граничных ее контуров.

Подсчитаем конформно инвариантную k -длину (п. 8) $\frac{d\omega}{dn} ds$ элемента дуги на Γ_ω . Так как отображение F на F^* кусочно конформно, то

$$\left(\frac{d\omega}{dn} ds\right)_{\Gamma_\omega} = \left(\frac{d\omega}{dn} ds\right)_{\Gamma_\omega^*}.$$

Далее, легко видеть (см. фиг. 8), что

$$\left(\frac{d\omega}{dn} ds\right)_{\Gamma_\omega^*} = \sqrt{2} |dt| = 2 |d\tau|,$$

и так как $|d\tau| = d\theta$, то для k -длины $L_0(\omega)$ части Γ_ω^0 всей границы Γ_ω^0 имеем

$$L_0(\omega) = \int_{\Gamma_\omega^0} \frac{d\omega}{dn} ds = 2 \int_{\Gamma_\omega^0} d\theta. \tag{11}$$

Линии Γ_ω^0 на F позволяют применить признак Альфорса (п. 8), из которого немедленно следует

Признак Кобеяши. Для того, чтобы открытая односвязная риманова поверхность F с конечным числом точек ветвления на

каждом листе была параболического типа, достаточна расходимость интеграла*

$$\int \frac{d\omega}{\int_{\Gamma_\omega^0} d\theta} \quad (12)$$

Вспомним теперь о других l , соединяющих точки T со сферически ближайшими к ним точками ветвления. На F^* каждой такой дуге l соответствует полупрямая, выходящая из точки, лежащей на одной из боковых складок F^* и идущей в $-\infty$ параллельно действительной оси. Отсюда, возвращаясь к F , заключаем, что на каждой дуге l , для которой $\tau(l) \leq \omega$, лежат не более чем две точки Γ_ω .

Заметив это, обозначим через \tilde{E}_ω множество всех дуг l , для которых $\tau(l) \leq \omega$, затем через E_ω — множество всех дуг l , имеющих хотя бы одну общую точку с Γ_ω , т. е. множество всех дуг l , достижимых из точки P_0 путями, вдоль которых $f(P) \leq \omega$ и, наконец, через E_ω^0 — множество всех дуг l , имеющих хотя бы одну общую точку с Γ_ω^0 . Для каждого из множеств \tilde{E}_ω , E_ω и E_ω^0 определим соответственно угловую меру $\tilde{\theta}(\omega)$, $\theta(\omega)$ и $\theta^0(\omega)$, полагая

$$\tilde{\theta}(\omega) = \int_{\tilde{E}_\omega} d\theta, \quad \theta(\omega) = \int_{E_\omega} d\theta, \quad \theta^0(\omega) = \int_{E_\omega^0} d\theta, \quad (13)$$

где $d\theta$ означает угол между двумя бесконечно близкими дугами l , выходящими из одной и той же точки ветвления.

Так как каждая точка Γ_ω^0 определяет одну или несколько (если рассматриваемая точка лежит на сети T) дуг l множества E_ω^0 и на каждой дуге l этого множества лежат не более чем две точки Γ_ω^0 , то

$$\int_{\Gamma_\omega^0} d\theta \leq 2\theta^0(\omega). \quad (14)$$

Записывая (13) в виде

$$\tilde{\theta}(\omega) = \int_0^\omega n(\tau) d\tau, \quad \theta(\omega) = \int_0^\omega n(\tau, \omega) d\tau, \quad \theta^0(\omega) = \int_0^\omega n^0(\tau, \omega) d\tau, \quad (15)$$

где $n(\tau)$, $n(\tau, \omega)$ и $n^0(\tau, \omega)$ обозначают, соответственно, число дуг l множеств \tilde{E}_ω , E_ω и E_ω^0 , удовлетворяющих условию

$$\tau(l) = \tau.$$

* Нижний предел интеграла в (12) — любое положительное число $\geq \omega_0$. В дальнейшем, если не будет опасности вызвать недоразумение, мы также иногда этот нижний предел не будем указывать.

где $0 \leq \tau \leq \omega$, мы на основании (14) и признака Кобеяши получаем следующую теорему:

Теорема Кобеяши. *Для того чтобы открытая односвязная риманова поверхность F с конечным числом точек ветвления на каждом листе была параболического типа, достаточна расходимость (в порядке усиления признака) одного из следующих интегралов:*

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\int_0^{\omega} n(\tau) d\tau}, \quad \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\int_0^{\omega} n(\tau, \omega) d\tau}, \quad \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\int_0^{\omega} n^0(\tau, \omega) d\tau} = \int \frac{d\omega}{\theta^0(\omega)}. \quad (16)$$

§ 5. Продолжение исследований Кобеяши

18. Оценка $\theta^0(\omega)$ через разветвленность поверхности (частный случай). Условимся через α обозначать произвольную алгебраическую точку ветвления поверхности F , через m_α — ее кратность, через λ — произвольную точку ветвления бесконечного порядка поверхности F и через U_α, U_λ — области на F , состоящие из всех ее точек, для которых α , соответственно λ , являются сферически ближайшими точками ветвления. Граничные линии всех областей U_α и U_λ образуют, очевидно, выше рассмотренную сеть T .

Обозначая через $\theta_\alpha^0(\omega)$ и $\theta_\lambda^0(\omega)$ угловые меры частей множества E_ω^0 , лежащих, соответственно, в областях U_α и U_λ , будем иметь

$$\theta^0(\omega) = \sum_{(\alpha)} \theta_\alpha^0(\omega) + \sum_{(\lambda)} \theta_\lambda^0(\omega). \quad (1)$$

Каждая величина $\theta_\alpha^0(\omega)$ не превосходит полной угловой меры соответствующей области U_α (рассматриваемой как множество дуг l), равной $2\pi m_\alpha$. Так как $m_\alpha \leq 2(m_\alpha - 1)$, то первое слагаемое в (1) не превосходит умноженной на 4π величины

$$V^0(\omega) = \sum_{(\alpha)} (m_\alpha - 1), \quad (2)$$

где суммирование распространено на те α (указано ноликом при Σ), области U_α которых имеют общие точки с Γ_ω^0 . Итак,

$$\sum_{(\alpha)} \theta_\alpha^0(\omega) \leq 4\pi V^0(\omega). \quad (3)$$

Оценку второго слагаемого из (1) проведем сперва в том частном случае, когда поверхность F обладает тем свойством, что на граничной линии каждой ее области U_λ имеется ровно одна точка (обозначим ее через Q_λ^*), по обе стороны от которой вдоль указанной линии

величина $\tau(Q)$ монотонно возрастает (заметим, что это условие выполняется всегда, когда поверхность F не имеет алгебраических точек ветвления). В этом случае, полагая

$$\tau_\lambda = \tau(\theta_\lambda^*)$$

и рассматривая образ U_λ на F^* , немедленно заключаем, что

$$\theta_\lambda^0(\omega) \leq 2(\omega - \tau_\lambda) \leq 2\omega,$$

откуда, обозначая через $p^0(\omega)$ число точек λ , области U_λ которых имеют общие точки с Γ_ω^0 , имеем оценку

$$\sum_{(\lambda)} \theta_\lambda^0(\omega) \leq 2\omega p^0(\omega). \quad (4)$$

Вспомянув (3) и (1), заключаем, что

$$\theta^0(\omega) \leq 4\pi V^0(\omega) + 2\omega p^0(\omega)$$

или окончательно

$$\theta^0(\omega) < C[\omega p^0(\omega) + V^0(\omega)], \quad (5)$$

где C — абсолютная постоянная.

19. Теорема о параболическом типе. Из теоремы Кобеяши и соотношения (5) вытекает следующая теорема:

Теорема 6. *Для того чтобы открытая односвязная риманова поверхность F с конечным числом точек ветвления на каждом листе и единственной, для каждой из ее областей U_λ , граничной точкой с минимальным значением τ_λ была параболического типа, достаточна расходимость интеграла*

$$\int_a^\infty \frac{d\omega}{\omega p^0(\omega) + V^0(\omega)}, \quad (6)$$

где $p^0(\omega)$ и $V^0(\omega)$ имеют вышеуказанные значения.

Примечание 1. Если при условии теоремы 6 поверхность F имеет конечное число точек ветвления бесконечного порядка, то для параболического типа поверхности F достаточна расходимость интеграла*

$$\int_a^\infty \frac{d\omega}{V^0(\omega)}. \quad (7)$$

* Это следует из такой леммы: если $f(x)$ и $g(x)$ — две положительные монотонно возрастающие функции вещественного переменного x , определенные для $x > 0$, и если при $x \rightarrow \infty$ функция $g(x) = O(x)$, то интегралы

$$\int_a^\infty \frac{dx}{f(x) + g(x)}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{f(x)} \quad (a > 0)$$

сходятся или расходятся одновременно (см. [20]).

В этом можно усмотреть известное обобщение теоремы Неванлинна о параболическом типе открытых односвязных римановых поверхностей с конечным числом точек ветвления.

Примечание 2. Для приложений теоремы 6 полезно заметить, что расходимость интегралов (6) и (7) следует из расходимости интегралов

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^p(\omega) + V(\omega)} \quad (6')$$

и

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d\omega}{V(\omega)}, \quad (7')$$

где $p(\omega)$ означает число точек λ , области U_λ которых имеют общие точки с областью G_ω , следовательно, имеют точки, достижимые из P_0 путями, вдоль которых $f(P) < \omega$, и V_ω означает сумму порядков точек α , области U_α которых имеют общие точки с областью G_ω .

20. Оценка $\theta^0(\omega)$ через разветвленность поверхности (общий случай). Займемся снова оценкой второго слагаемого соотношения (1), не делая однако более дополнительных предположений относительно F .

К каждой области U_λ вдоль некоторых дуг, расположенных на ее границе, могут примыкать области U_α и $U_{\lambda'}$, $\lambda' \neq \lambda$. Обозначим через $U_{\lambda\alpha}$ и $U_{\lambda\lambda'}$ части U_λ , состоящие из всех „секторов S “, опирающихся на общие граничные дуги с областью U_α , соответственно, $U_{\lambda'}$, $\lambda' \neq \lambda$. Тогда

$$U_\lambda = \sum_{(\alpha)} U_{\lambda\alpha} + \sum_{(\lambda' \neq \lambda)} U_{\lambda\lambda'}$$

и обозначая через $\theta_{\lambda\alpha}^0(\omega)$ и $\theta_{\lambda\lambda'}^0(\omega)$ угловые меры частей множества E_ω^0 , дуги l которых лежат, соответственно, в областях $U_{\lambda\alpha}$ и $U_{\lambda\lambda'}$, будем иметь

$$\theta_\lambda^0(\omega) = \sum_{(\alpha)} \theta_{\lambda\alpha}^0(\omega) + \sum_{(\lambda' \neq \lambda)} \theta_{\lambda\lambda'}^0(\omega)$$

и, следовательно

$$\sum_{(\lambda)} \theta_\lambda^0(\omega) = \sum_{(\lambda)} \sum_{(\alpha)} \theta_{\lambda\alpha}^0(\omega) + \sum_{(\lambda)} \sum_{(\lambda' \neq \lambda)} \theta_{\lambda\lambda'}^0(\omega).$$

Обозначая через $V_1^0(\omega)$ сумму порядков точек α , области U_α которых граничат с областями U_λ , имеющими общие точки с Γ_ω^0 , будем иметь

$$\sum_{(\lambda)} \sum_{(\alpha)} \theta_{\lambda\alpha}^0(\omega) \leq 4\pi V_1^0(\omega). \quad (8)$$

Вспоминая (1) и (3), имеем

$$\theta^0(\omega) \leq 4\pi [V^0(\omega) + V_1^0(\omega)] + \sum_{(\lambda)} \sum_{(\lambda' \neq \lambda)} \theta_{\lambda\lambda'}^0(\omega). \quad (9)$$

Чтобы оценить внутреннюю сумму в (9), заметим сперва, что всякая линия γ , состоящая из двух дуг l , именно l_{λ_1} и l_{λ_2} , выходящих из разных точек λ_1 и λ_2 и оканчивающихся в одной и той же точке на T , разбивает поверхность F на две односвязные части. Для той из них, которая не содержит точку P_0 (если P_0 лежит на γ , то можно говорить о любой из указанных частей F), величина $\tau(l)$ для любой дуги l удовлетворяет соотношению

$$\tau(l) = \tau(\gamma) + \tau(l, \gamma), \quad (10)$$

где $\tau(\gamma) = \tau(l_{\lambda_1}) = \tau(l_{\lambda_2})$ и

$$\tau(l, \gamma) = \min_C \int_C d\theta, \quad (11)$$

где C пробегает всевозможные, не проходящие через точки ветвления пути, соединяющие на F линии l и γ .

Рассмотрим теперь всевозможные сечения γ , определяемые дугами l_λ фиксированной области U_λ . Каждая дуга l_λ , определяющая сечение γ_λ , должна очевидно принадлежать некоторой области $U_{\lambda\lambda'}$ или является граничной дугой l для такой области. Среди всех сечений γ_λ либо существует одно сечение, γ_λ^* , проходящее через точку P_0 , либо существуют два (или одно) сечения, γ_λ' и γ_λ'' , отделяющие от поверхности F односвязную ее часть F_λ , которая содержит точку P_0 и через которую не проходит ни одно сечение γ_λ . Если в области U_λ совершать обход вокруг точки λ в обе стороны от сечения γ_λ^* , в первом случае, и в обе стороны от сечений (сечения) γ_λ' и γ_λ'' , не вводящие на F_λ , во втором случае, то, как это легко следует из (10), величина $\tau(l)$ при прохождении областей $U_{\lambda\lambda'}$ будет монотонно возрастать. Так как на дугах l , встречающих линию Γ_ω^0 , величина $\tau(l) \leq \omega$, то обозначая через l_λ^* соответственно l_λ' и l_λ'' дуги l_λ , принадлежащие сечению γ_λ^* или, соответственно, сечениям γ_λ' и γ_λ'' , на основании вышеизложенного имеем или соотношение

$$\sum_{(\lambda' \neq \lambda)} \theta_{\lambda\lambda'}^0(\omega) \leq 2[\omega - \tau(l_\lambda^*)] \quad (12)$$

или соотношение

$$\sum_{(\lambda' \neq \lambda)} \theta_{\lambda\lambda'}^0(\omega) \leq [\omega - \tau(l_\lambda')] + [\omega - \tau(l_\lambda'')]; \quad (13)$$

следовательно, всегда

$$\sum_{(\lambda' \neq \lambda)} \theta_{\lambda\lambda'}^0(\omega) \leq 2\omega. \quad (14)$$

Обозначая через $p_1^0(\omega)$ число точек λ , области U_λ которых содержат части $U_{\lambda\lambda'}$, имеющие общие точки с Γ_ω^0 , будем иметь

$$\sum_{(\lambda)} \sum_{(\lambda' \neq \lambda)} \theta_{\lambda\lambda'}^0(\omega) \leq 2\omega p_1^0(\omega), \quad (15)$$

и из (9) следует, что

$$\theta^0(\omega) \leq 4\pi [V^0(\omega) + V_1^0(\omega)] + 2\omega p_1^0(\omega). \quad (16)$$

Обозначим через $V_2^0(\omega)$ сумму порядков точек α , области U_α которых имеют общие точки с Γ_ω^0 или граничат хотя бы с одной областью U_λ α имеющей общие точки с Γ_ω^0 . Тогда, очевидно, $V^0(\omega)$ и $V_1^0(\omega)$ не превосходят $V_2^0(\omega)$, и на основании (16) мы можем сформулировать следующую лемму:

Лемма: Для произвольной односвязной римановой поверхности с конечным числом точек ветвления на каждом листе имеет место соотношение

$$\theta^0(\omega) < C [\omega p_1^0(\omega) + V_2^0(\omega)], \quad (17)$$

где C — абсолютная постоянная, $p_1^0(\omega)$ — число точек λ , области U_λ которых содержат части $U_{\lambda\lambda'}$, имеющие общие точки с Γ_ω^0 и $V_2^0(\omega)$ — сумма порядков точек α , для которых области U_α или примыкающие к ним области $U_{\lambda\alpha}$ имеют общие точки с Γ_ω^0 .

Следствие. Если поверхность F имеет p логарифмических точек ветвления и полную алгебраическую разветвленность, равную V , то

$$\theta^0(\omega) < C(p\omega + V). \quad (18)$$

21. Теорема о параболическом типе. Из теоремы Кобейши и соотношения (17) вытекает следующая теорема:

Теорема 7. Для того чтобы открытая односвязная риманова поверхность F с конечным числом точек ветвления на каждом листе была параболического типа, достаточна расходимость интеграла

$$\int_\omega^\infty \frac{d\omega}{p_1^0(\omega) + V_2^0(\omega)}, \quad (19)$$

где $p_1^0(\omega)$ и $V_2^0(\omega)$ имеют вышеуказанное значение.

Примечание. Аналогично теореме 6 и здесь если $p_1^0(\omega) = O(1)$, то для параболического типа поверхности F достаточна расходимость интеграла

$$\int \frac{d\omega}{V_2^0(\omega)}. \quad (20)$$

Затем, расходимость интегралов (19) и (20) следует из расходимости интегралов

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega p_1(\omega) + V_2(\omega)} \quad (19')$$

и

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{d\omega}{V_2(\omega)}, \quad (20')$$

где $p_1(\omega)$ и $V_2(\omega)$ определяются как выше $p_1^0(\omega)$ и $V_2^0(\omega)$, только требование наличия у областей $U_{\lambda\lambda'}$, U_{α} и $U_{\lambda\alpha}$ общих точек с G_{ω}^0 заменяется требованием наличия у этих областей общих точек с областью G_{ω} (требование „ ω -достижимости“ из точки P_0).

§ 6. Класс поверхностей $F_{|\omega|=1}$

Применяя полученные выше результаты, мы в этом параграфе будем выводить признаки параболического типа для различных классов поверхностей с конечным числом точек ветвления на каждом листе, расположенных над точками единичной окружности $|\omega| = 1$. Общий класс таких поверхностей будем обозначать через $F_{|\omega|=1}$.

22. Теорема о параболическом типе поверхностей класса $F_{|\omega|=1}$. Пусть F — произвольная поверхность класса $F_{|\omega|=1}$. Ее сеть Кобяеши T состоит из лучей, обозначаемых далее через d , соединяющих точки 0 и ∞ и равноудаленных от двух ближайших к ним точек ветвления. Причислим к вершинам сети T все точки F , расположенные над точками 0 , ∞ , и лучи d сети T будем называть ее сторонами. Сеть T и дуги l , проведенные ко всем ее вершинам (каждая такая дуга l либо совпадает с радиусом единичного круга $|\omega| < 1$, либо с продолжением такого радиуса до ∞), разбивают F на „сектора“ S , опирающиеся на сторону d и ограниченные сбоку двумя дугами l , образующими вместе единый луч, идущий из 0 в ∞ и проходящий через одну из ближайших к d точек ветвления. Рассматривая каждый сектор S как множество дуг l , идущих из его вершины к основанию, и определяя для этого множества, как раньше для E_{ω} , его угловую меру, убеждаемся, что

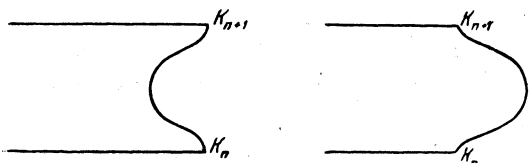
$$\int_S d\theta = \pi; \quad (1)$$

следовательно, угловая мера $\theta^0(\omega)$, о которой говорилось выше (п. 17, (13)), удовлетворяет соотношению

$$\theta^0(\omega) \leq \pi n^0(S, \omega) \quad (2)$$

Переходя от какого-либо сектора S на плоскости w к его стереографическому образу на сфере Римана (фиг. 9), легко убеждаемся, что при пробегании основания d сектора S от его вершин к экватору, величина $\sigma(Q)$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает в зависимости от того, будут ли углы сектора S при его основании больше или меньше $\frac{\pi}{2}$.

Из рассмотренного изменения величин $\tau(Q)$ и $\sigma(Q)$ следует, что функция $t(P)$ (см. п. 16, (7)), отображает каждый сектор S на одну из указанных на фиг. 10 областей.



Фиг. 10

На основании вышеизложенного, обозначая через K_n^* и d^* образы вершин K_n и сторон d сети T на F^* , можно утверждать следующее: Точки K_n^* на F^* расположены над точками $i\pi n$. Каждая пара сторон d вида

(обе) $K_n K_{n+1}$ или $n-1 K_n$, с общей вершиной K_n , определяет на F^* горизонтальную складку $h \leq 0$, $\tau = i\pi n$. Указанными горизонтальными складками исчерпываются горизонтальные складки F^* .

24. Поверхности $F^{(\delta)}$. Будем теперь рассматривать поверхности класса $F_{|\omega|=1}$, обладающие тем свойством, что их точками ветвления являются изолированные точки, имеющие свободные от других точек ветвления окрестности радиуса не менее чем $\sin \frac{\delta}{2}$, где δ — некоторое фиксированное число:

$$0 < \delta \leq \pi. \quad (4)$$

Класс таких поверхностей будем обозначать через $F^{(\delta)}$. Он включает в себя, с точки зрения проблемы типа, обычно рассматриваемый класс поверхностей $F^{(q)}$, точки ветвления которых расположены над q фиксированными точками плоскости w .*

Пусть F произвольная поверхность класса $F^{(\delta)}$. Рассмотрим какой-либо сектор S на F и его образ S^* на F^* (см. выше, фиг. 9 и 10). Покажем, что при помощи Q -квазиконформной деформации S^* , оставляющей неподвижными ее горизонтальные основания, ее легко преобразовать в прямоугольную полуполосу (т. е. можно выпрямить образ d^* основания d сектора S).

* Квазиконформно сдвигая точки ветвления (см. ниже, п. 71) поверхности класса $F^{(q)}$, можно всегда добиться, чтобы они проектировались в q произвольно заданных точках единичной окружности. При помощи сдвига точек ветвления легко также превратить всякую поверхность класса $F^{(\delta)}$ в поверхность класса $F^{(q)}$ с $q < \frac{4\pi}{\delta}$.

Для этого заметим, что S на плоскости w представляет угол, величина α которого удовлетворяет условию

$$\frac{\delta}{2} \leq \alpha \leq \pi - \frac{\delta}{2}. \tag{5}$$

Вводя в S полярные координаты (ρ, ϑ) и преобразуя их так, что

$$\rho_1 = \rho, \vartheta_1 = \frac{\pi\vartheta}{2\alpha}, \tag{6}$$

превратим S в сектор S_1 с углом $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. В силу (5) преобразование (6) представляет Q -преобразование, где

$$Q = \max \left[\frac{\pi}{\delta}, 2 - \frac{\delta}{\pi} \right]. \tag{7}$$

Если a — проекция вершины S на плоскость w , то, отвлекаясь от возможной горизонтальной складки, отображение S на S^* несущественно отличается от конформного отображения S посредством функции

$$t = \ln \frac{w-a}{1+\overline{aw}} \tag{8}$$

(см. п. 16 (19)). Используя (8), легко получить для S_1 в качестве ее образа прямоугольную полуполосу S_1^* , представляющую Q — деформацию области S^* .

Деформируя аналогично все сектора S , мы получим новую поверхность со складками F_1^* , получающуюся из F^* выпрямлением ее боковых складок d^* . Поверхность F_1^* особенно пригодна для получения признаков параболического типа поверхностей класса $F^{(8)}$.

В дальнейшем плоскость $t = h + i\tau$ подвергнем еще сжатию $\tau' = \frac{\tau}{\pi}$ и поверхность, получаемую при этом из F_1^* , снова будем обозначать через F^* . *

25. Теоремы о параболическом типе поверхностей класса $F^{(8)}$. Новая поверхность F^* со складками расположена над вторым квадрантом полуплоскости $I(t) \geq 0$. Рассмотрим области G_ω^* на F^* , расположенные над треугольниками, отсекаемыми от указанного квадранта прямыми $\tau - h = \omega$, и содержащие точку K_0^* (напомним, что точка K_0 была принята за точку P_0). Предполагая снова, что F — открытая поверхность, выделим из границы Γ_ω^* каждой области G_ω^* внешнюю границу Γ_ω^{0*} , отделяющую точку K_0^* от границы поверхности F^* . Возвращаясь от F^* к F , получим на F семейство линий Γ_ω^0 , несколько отличных от прежних линий Γ_ω^0 , но снова производящих регулярное

* Подобная форма поверхности со складками для поверхностей класса $F^{(9)}$ была недавно указана Ле-Ван-Тьем [13].

исчерпание F и позволяющих применить все вышерассмотренные теоремы о типе.

Заметив это, обозначим через Γ_n^0 линию Γ_ω^0 для $\omega = n$ и оценим величину $n^0(S, \omega)$, входящую в интеграл (3), для $n-1 < \omega \leq n$ ($n=1, 2, \dots$). Пусть S — сектор, имеющий общие точки с Γ_ω^0 и d — его основание, соединяющее некоторые вершины K_i и K_{i+1} ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$). Из рассмотрения прямоугольной полуполосы S^* соответствующей S на F^* , непосредственно следует, что по крайней мере для вершины K_i сектора S соответствующая дуга l встречается линию Γ_ω^0 следовательно и линию Γ_n^0 . Так как вокруг каждой вершины $K_0, K_1, \dots, K_n, \dots$ сети T циклически примыкают друг к другу не более $q = \left[\frac{4\pi}{\delta} \right]^*$ секторов S , то для $n-1 < \omega \leq n$ величина $n^0(S, \omega)$, входящая в интеграл (3) удовлетворяет соотношению

$$n^0(S, \omega) \leq qv^0(K, n), \quad (9)$$

где $v^0(K, n)$ означает число всех вершин K_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) сети T , из которых вдоль соответствующих дуг l видна линия Γ_n^0 .

Из теоремы 8 получаем следующую теорему:

Теорема 9 (признак Виттиха **). *Для того чтобы открытая односвязная риманова поверхность F класса $F^{(8)}$ была параболического типа, достаточно расходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v^0(K, n)}. \quad (10)$$

Примечание. В приложениях величину $v^0(K, n)$ часто заменяют числом всех вершин K до n -го поколения включительно (см. ниже, подстрочное примечание к ряду (21'')).

Предположим теперь дополнительно, что поверхность F обладает тем свойством (см. п. 18), что на граничной линии каждой области U_λ имеется ровно одна точка, по обе стороны от которой вдоль указанной линии величина $\tau(Q)$ монотонно возрастает. Если через $p^0(n)$ и $V^0(n)$ обозначить число областей U_λ , соответственно сумму развет-

* $[a]$ означает, как обычно, наибольшее целое число, не превосходящее a .

** Виттих [21, 22] рассматривает класс поверхностей $F^{(9)}$. Вместо $v^0(K, n)$ у него фигурирует величина $\sigma(n)$, равная числу вершин границы части T_n сети T (для поверхностей класса $F^{(9)}$, с указанным в подстрочном примечании к п. 24 расположением точек ветвления, сеть T совпадает с комплексом отрезков рассматриваемой поверхности), отсекаемой от нее линией Γ_n^0 . Построение поверхности F^* со складками, связанное с методом Кобеяши, у него отсутствует. Метод Виттиха применим и для класса поверхностей $F^{(8)}$ (см. также ниже примечание к теореме 10).

ленностей областей U_α , пересекаемых линией Γ_n^0 , то из рассмотрения F^* немедленно следует, что для $n-1 < \omega \leq n$

$$p^0(\omega) \leq p^0(n), \quad V^0(\omega) \leq V^0(n)$$

и из теоремы 6 получаем следующую теорему:

Теорема 10 (второй признак Виттиха *). Для того чтобы открытая односвязная риманова поверхность F класса $F^{(8)}$, с единственной для каждой из ее областей U_λ граничной точкой с минимальным значением τ_λ , была параболического типа, достаточна расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^0(n) + V^0(n)}, \quad (11)$$

где $p^0(n)$ и $V^0(n)$ имеют вышеуказанные значения.

26. Поверхности $F_{q, |\omega|=1}$. Рассмотрим еще поверхности класса $F_{|\omega|=1}$, имеющие на каждом листе не более q точек ветвления. Класс таких поверхностей обозначим через $F_{q, |\omega|=1}$. Он, очевидно, включает в себя класс поверхностей $F^{(8)}$ с $q = \left[\frac{4\pi}{\delta} \right]$.

Пусть F — произвольная поверхность класса $F_{q, |\omega|=1}$. Из рассмотрения на F^* образа S^* произвольного сектора S на F , опирающегося на некоторую сторону d сети Кобяши T , непосредственно следует, что если сектор S имеет общие точки с линией Γ_ω^0 , то по крайней мере из одной его вершины K вдоль соответствующей дуги l должна быть видна линия Γ_ω^0 , и сама вершина K либо лежит на Γ_ω^0 , либо принадлежит области G_ω (в отличие от случая поверхностей класса $F^{(8)}$ с видоизмененными поверхностями F^* , здесь нельзя утверждать, что из двух вершин сектора S указанным свойством всегда обладает вершина с меньшим индексом). Так как вокруг каждой вершины K сети T циклически примыкают друг к другу не более q секторов S , то величина $n^0(S, \omega)$, входящая в интеграл (3), удовлетворяет соотношению

$$n^0(S, \omega) \leq qn^0(K, \omega), \quad (12)$$

где $n^0(K, \omega)$ означает число вершин K сети T , достижимых из вершины K_0 (принятой у нас за точку P_0) путями, вдоль которых функция Кобяши $f(P) \leq \omega$, и обладающих еще тем свойством, что из них вдоль соответствующих дуг l видна линия Γ_ω^0 .

* У Виттиха [22] вместо $p^0(n)$ используется обозначение $\sigma_1(n)$ и вместо величины $V^0(n)$ стоит величина $\sigma_2(n)$, равная сумме кратностей точек ветвления α , области U_α которых пересекаются линией Γ_n^0 .

Применяя свою теорему к классу поверхностей $F^{(q)}$, Кобяши [19] выводит признаки параболического типа, эквивалентные признакам Виттиха, почему признаки параболического типа, указанные в теоремах 9 и 10, следовало бы называть признаками Виттиха—Кобяши. Приведенный здесь вывод теорем 9 и 10 для класса поверхностей $F^{(8)}$, мне представляется более простым.

Из теоремы 8 следует, что для *параболического типа открытой односвязной римановой поверхности* F класса $F_{q, |\omega|=1}$ достаточна *расходимость интеграла*

$$\int_{n^0(K, \omega)}^{\infty} \frac{d\omega}{n^0(K, \omega)}. \quad (13)$$

27. Поверхности $\Lambda_{q, |\omega|=1}$. Рассмотрим подробнее поверхности класса $F_{q, |\omega|=1}$, имеющие только точки ветвления бесконечного порядка. Класс таких поверхностей будем обозначать через $\Lambda_{q, |\omega|=1}$.

Пусть F произвольная поверхность класса $\Lambda_{q, |\omega|=1}$. Проведя на F всевозможные сечения, расположенные над окружностью $|\omega|=1$, разобьем F на листы H , расположенные над кругом $|\omega|<1$ и его дополнением $|\omega|>1$. Распределение по поколениям вершин K сети T поверхности F приводит к распределению по поколениям листов H : нулевой лист H_0 содержит нулевую вершину K_0 ; листы H_1 первого поколения содержат вершины K_1 первого поколения и т. д. Точки ветвления F также распределяются по поколениям: точки ветвления, видимые (вдоль радиальных лучей) из вершины K_0 , образуют нулевое поколение точек ветвления W_0 ; другие точки ветвления, видимые из всех вершин K_1 , образуют первое поколение точек ветвления W_1 и т. д. Проекции точек ветвления на плоскость ω условимся обозначать маленькими буквами: w_0, w_1, \dots . Под W_n будем понимать произвольную точку ветвления n -го поколения.

Рассмотрим какой-нибудь лист H_n ($n=1, 2, \dots$). Из условия, что F имеет только точки ветвления бесконечного порядка, легко следует, что лист H_n имеет ровно один предшествующий ему лист H_{n-1} , к которому он примыкает вдоль некоторой дуги δ_{ij} единичной окружности $|\omega|=1$, соединяющей какие-то две точки ветвления W_i и W_j , где $i \leq j \leq n-1$. Кроме следов от этих точек, на границе листа H_n имеется след по крайней мере от одной точки ветвления W_n n -го поколения. Для всех таких точек W_n листа H_n определим меньшую из величин

$$\left| \arg \frac{W_n}{W_i} \right| \leq \pi, \quad \left| \arg \frac{W_n}{W_j} \right| \leq \pi$$

и положим

$$\alpha_n = \max_{(H_n)} \min \left\{ \left| \arg \frac{W_n}{W_i} \right|, \left| \arg \frac{W_n}{W_j} \right| \right\}_{H_n}, \quad (14)$$

где H_n означает совокупность всех листов n -го поколения.

Введем следующее определение:

Поверхность F класса $\Lambda_{q, |\omega|=1}$ называется поверхностью с точками ветвления, сближающимися по поколениям (соответственно, монотонно сближающимися по поколениям), если последователь-

ность $\{\alpha_n\}$ стремится к нулю (соответственно, стремится к нулю монотонно убывая).

28. Продолжение. Будем рассматривать поверхность F класса $\Lambda_{q,r} |w|=1$ с точками ветвления, монотонно сближающимися по поколениям.

Начиная с некоторого значения $n = n_0$, будем иметь

$$\alpha_n < \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

Положим для $n \geq n_0$

$$\omega_n = \max \left[n\pi, \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{4} \right| \right] \quad (16)$$

и оценим величину $n^0(K, \omega)$, входящую в интеграл (13), для $\omega \leq \omega_{n+1}$ (заметим, что в силу (15) и условия $\alpha_n \searrow 0^*$ величина ω_n монотонно возрастает).

Обозначим через $\omega(K)$ наименьшее значение ω , для которого на F существует путь, соединяющий K_0 с K , вдоль которого $f(P) \leq \omega$. Если такой путь пересекает граничную дугу δ_{ij} некоторого листа H_n , сферическая длина которой $\sigma(\delta_{ij}) < \frac{\pi}{2}$, то минимум величины $h(P) = |\ln \operatorname{tg} \sigma(P)|$ на δ_{ij} равен $\left| \ln \operatorname{tg} \frac{\sigma(\delta_{ij})}{2} \right|$, и так как, очевидно, на δ_{ij} величина $\tau(P) = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$, то минимум $f(P)$ на δ_{ij} равен $\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\sigma(\delta_{ij})}{2} \right|$, откуда следует, что в рассматриваемом случае

$$\omega(K) \geq \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\sigma(\delta_{ij})}{2} \right|. \quad (17)$$

Если же $\sigma(\delta_{ij}) \geq \frac{\pi}{2}$, то минимум $|h(P)|$ на δ_{ij} равен нулю и вместо (17) имеем

$$\omega(K) \geq \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi. \quad (17')$$

Из определения рассматриваемых поверхностей следует, что на каждом листе H_{n+1} имеется не более одной граничной дуги $\delta_{\nu\mu}$, общей с некоторым листом H_{n+2} , для которой

$$\sigma(\delta_{\nu\mu}) > \frac{\alpha_{n+1}}{2}. \quad (18)$$

Если путь, ведущий из K_0 в некоторую вершину K , проходит на листе H_{n+1} через дугу $\delta_{\nu\mu}$, для которой не выполняется условие (18), то в силу (17)

$$\omega(K) > \left(n + \frac{3}{2} \right) \pi + \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\sigma(\delta_{\nu\mu})}{2} \right| > (n+1)\pi + \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha_{n+1}}{4} \right| > \omega_{n+1}.$$

* Знак \searrow означает: монотонно убывая.

Отсюда следует, что к каждому листу H_{n+1} примыкает не более чем один лист H_{n+2} с вершиной K_{n+2} , для которой

$$\omega(K_{n+2}) \leq \omega_{n+1};$$

к этому листу H_{n+2} — не более чем один лист H_{n+3} с вершиной K_{n+3} , для которой

$$\omega(K_{n+3}) \leq \omega_{n+1}$$

и т. д.

Так как для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ величина $\tau(K_m) = m\pi$ и, очевидно, $\omega(K_m) \geq \tau(K_m)$, то из требования

$$\omega(K_m) < \omega,$$

где $\omega \leq \omega_{n+1}$, следует, что $m < \left[\frac{\omega}{\pi} \right]$.

Предположим, что вершина некоторого листа H_{n+1} удовлетворяет условию

$$\omega(K) < \omega. \quad (19)$$

Тогда лист H_{n+1} образует начало цепочки листов H_{n+1}, H_{n+2}, \dots , последовательно примыкающих друг к другу, вершины K_{n+1}, K_{n+2}, \dots которых удовлетворяют условию (19), и, в силу предыдущего, число членов такой цепочки не превосходит $\left[\frac{\omega}{\pi} \right] - n$.

Обозначим через $\varphi(n)$ число всех листов H_{n+1} , т. е. число всех листов $(n+1)$ -го поколения. Тогда число всех вершин K_{n+1}, K_{n+2}, \dots удовлетворяющих условию (19), не превосходит $\varphi(n) \left\{ \left[\frac{\omega}{\pi} \right] - n \right\}$, и так как число всех вершин K_0, K_1, \dots, K_n не превосходит, очевидно, $n\varphi(n)$, то число всех вершин K , удовлетворяющих условию (19), не превосходит $\varphi(n) \left[\frac{\omega}{\pi} \right] < \varphi(n) \omega_{n+1}$. Отсюда следует, что для $\omega \leq \omega_{n+1}$ величина

$$n^0(K, \omega) < \varphi(n) \omega. \quad (20)$$

Оценивая с помощью (20) интеграл (13), получаем следующую теорему:

Теорема 11. *Для того чтобы односвязная риманова поверхность F класса $\Lambda_{q, |\omega|=1}$ с точками ветвления, монотонно сближающимися по поколениям, была параболического типа, достаточна расходимость ряда*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} \ln \frac{\max \left[(n+1)\pi, \ln \frac{1}{\alpha_{n+1}} \right]}{\max \left[n\pi, \ln \frac{1}{\alpha_n} \right]}. \quad (21)$$

В частности, если $\ln \frac{1}{\alpha_n}$ растет быстрее чем n , то вместо ряда (21) следует рассматривать ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} \ln \frac{\ln \frac{1}{\alpha_{n+1}}}{\ln \frac{1}{\alpha_n}}; \quad (21')$$

если же величина $\ln \frac{1}{\alpha_n}$ растет медленнее чем n , то ряд (21) заменяем рядом

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} \ln \frac{n+1}{n},$$

эквивалентным рядом*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\varphi(n)}. \quad (21'')$$

В случае, когда последовательность $\{\alpha_n\}$ убывает не монотонно, вместо ряда (21) получается аналогичный ряд, распространенный на монотонно убывающую подпоследовательность $\alpha_{n_1} > \alpha_{n_2} > \dots > \alpha_{n_k} > \dots$, где α_{n_1} есть наибольшее (или первое из них, если их много) значение α_n , и α_{n_k} ($k = 2, 3, \dots$) определяется как первое число последовательности $\{\alpha_n\}$, которое следует за $\alpha_{n_{k-1}}$ и удовлетворяет соотношению $\alpha_{n_k} > \alpha_n$ для всех $n > n_k$.

* Расходимость ряда (21'') обеспечивает также параболический тип поверхности класса $F^{(q)}$ или $F^{(s)}$, имеющей только логарифмические точки ветвления (см. [3], теорема Кобеяши). Это утверждение легко вытекает из общего признака Виттиха (теорема 9), так как величина $\nu^0(K, n)$, входящая в интеграл (10), очевидно не превосходит числа всех вершин K до n -го поколения включительно, которое в рассматриваемом случае не превосходит $n\varphi(n)$.

Глава III

Поверхности со сближающимися точками ветвления *

§ 7. Поверхности с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в ∞ , или класс поверхностей A_∞

29. Определение класса поверхностей A_∞ . Односвязная риманова поверхность F , имеющая бесконечно много алгебраических точек ветвления, называется поверхностью с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в ∞ , если из нее можно выделить такую последовательность односвязных римановых поверхностей $\{F_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), каждая из которых имеет не более конечного числа только алгебраических точек ветвления и ограничена одним замкнутым контуром, расположенным для поверхности F_n над окружностью $|\omega| = \rho_n$, причем

- 1) $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots; \rho_n \rightarrow \infty$,
- 2) $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$,
- 3) $\lim F_n = F$.

Сокупность всевозможных поверхностей с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в ∞ , будем называть классом поверхностей A_∞ .

30. Признак параболического типа. Пусть F — произвольная поверхность класса A_∞ .

Зафиксируем на F произвольную точку P_0 , расположенную над точкой $\omega = 0$, и продолжая неограниченно элемент поверхности F с центром в точке P_0 над кругом $|\omega| < \rho$ ($\rho > 0$), выделим из F некоторую область G_ρ , расположенную над этим кругом и содержащую точку P_0 . Из того, что $F \in A_\infty$, следует, что область G_ρ ограничена не более чем конечным числом замкнутых контуров, расположенных над окружностью $|\omega| = \rho$. Один из них, Γ_ρ , представляет внешнюю границу G_ρ , отделяющую от F односвязную ее часть F_ρ , состоящую из G_ρ и всех частей поверхности F , примыкающих к G_ρ вдоль ее остальных граничных контуров, если они вообще имеются.

* В связи с этой главой см. [23].

Семейство линий Γ_ρ ($\rho_0 < \rho < \infty$; $\rho_0 > 0$) производит регулярное кольцеобразное исчерпание F (см. п. 8) и позволяет применить к ней признак Альфорса. Обозначая через $V(\rho)$ полную алгебраическую разветвленность области G_ρ , имеем

$$L(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{d\rho}{dn} ds = \int_{\Gamma_\rho} ds \leq 2\pi\rho [V(\rho) + 1], \quad (1)$$

и из признака Альфорса следует, что для параболического типа поверхности F достаточна расходимость интеграла

$$\int \frac{d\rho}{\rho V(\rho)}. \quad (2)$$

Для $\rho_1 < \rho_2$ имеем $G_{\rho_1} \subset G_{\rho_2}$ и, следовательно, $V(\rho_1) \leq V(\rho_2)$. Поэтому, задаваясь произвольной последовательностью

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots; \quad \rho_1 > 0, \rho_n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

закключаем, что для расходимости интеграла (2) достаточна расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V(\rho_{n+1})} \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}, \quad (4)$$

откуда получаем следующую теорему*.

Теорема 12. Пусть $\{V_n\}$ — произвольная наперед заданная монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел и

* Эта теорема вытекает из более общего признака параболического типа Альфорса для поверхностей, имеющих над всей конечной плоскостью $|w| < \infty$ только алгебраические точки ветвления. Для такого рода поверхностей Альфорс [24] определяет Γ_ρ как границу областей G_ρ , точки которых отстоят на данной поверхности F на расстоянии ρ от фиксированной ее точки P_0 , и доказывает, что для параболического типа F достаточна расходимость интеграла (2), где $V(\rho)$ имеет то же значение, что и выше, но только теперь уже для других областей G_ρ .

Если точки ветвления F , расположенные над областью $|w| < \infty$, фактически расположены над конечным кругом $|w| < R < \infty$, то, как показал Радойич [25], используя только внешнюю границу областей Альфорса G_ρ , можно доказать, что для параболического типа F достаточна расходимость интеграла

$$\int \frac{\rho d\rho}{V(\rho)}. \quad (2')$$

Ниже будет показано (см. п. 98, примечание к теореме 52), что для некоторого подкласса поверхностей класса A_∞ признак параболического типа, указанный в теореме 12, является не только достаточным, но и необходимым.

$\{\rho_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, возрастающая настолько быстро, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{n+1}} \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \quad (5)$$

расходится.

Тогда, для того чтобы поверхность F класса A_{∞} была параболического типа, достаточно, чтобы полная алгебраическая разветвленность $V(\rho)$ областей G_{ρ} поверхности F удовлетворяла соотношению

$$V(\rho_n) \leq V_n, \quad (6)$$

начиная с некоторого значения n .

§ 8. Поверхности с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в 0 и ∞ , или класс поверхностей $A_{0, \infty}$.

31. Определение класса поверхностей $A_{0, \infty}$. Односвязная риманова поверхность F , имеющая бесконечно много алгебраических точек ветвления, называется поверхностью с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в 0 и ∞ , если из нее можно выделить такую последовательность односвязных римановых поверхностей $\{F_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), каждая из которых имеет не более конечного числа только алгебраических точек ветвления и ограничена либо одним замкнутым контуром, либо конечным числом „бесконечно-листных спиралей“ расположенных для поверхности F_n над любой из окружностей $\ln |w| = \omega_n$ и $\ln \frac{1}{|w|} = \omega_n$, причем:

- 1) $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots$; $\omega_n \rightarrow \infty$,
- 2) $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$,
- 3) $\lim F_n = F$.

Совокупность всевозможных поверхностей с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в 0 и ∞ , будем называть классом поверхности $A_{0, \infty}$.

32. Семейство линий Γ_{ω} . Пусть F — произвольная поверхность класса $A_{0, \infty}$.

Зафиксируем на F произвольную правильную точку P_0 , расположенную над некоторой точкой окружности $|w| = 1$ и, продолжая неограниченно элемент поверхности F с центром в точке P_0 над кольцом $|\ln |w|| < \omega$ ($\omega > 0$), выделим из F область G_{ω} , расположенную над этим кольцом и содержащую точку P_0 . Введем в области G_{ω} неевклидовы координаты $h(P)$, $\tau_{\omega}(P)$ и определим функцию $f_{\omega}(P)$, полагая

$$h(P) = \ln |w|, \quad (1)$$

где P — произвольная точка области G , расположенная над точкой w ,

$$\tau_\omega(P) = \min \int_C |d \arg w|, \quad (2)$$

где C пробегает всевозможные пути, расположенные в G_ω и соединяющие P и P_0 (пути C могут проходить и через точки ветвления), и

$$f_\omega(P) = |h(P)| + \tau_\omega(P). \quad (3)$$

Обозначим через \tilde{G}_ω часть G_ω , точки которой достижимы из P_0 путями, вдоль которых $f_\omega(P) < \omega$. Из того, что F принадлежит классу $A_{0, \infty}$, следует, что область G_ω имеет не более конечного числа только алгебраических точек ветвления, откуда, далее, следует, что область \tilde{G}_ω конечнолиственна и ограничена конечным числом замкнутых контуров, один из которых, Γ_ω , представляет внешнюю границу \tilde{G}_ω , отделяющую от F односвязную ее часть \tilde{F}_ω , состоящую из \tilde{G}_ω и всех частей F , примыкающих к \tilde{G}_ω вдоль ее остальных граничных контуров, если они вообще имеются.

Семейство линий Γ_ω ($\omega_0 < \omega < \infty$; $\omega_0 > 0$) производит регулярное кольцообразное исчерпание F . Прежде чем однако применить к F признак Альфорса, рассмотрим отображение области G_ω с помощью функции

$$t(P) = h(P) + i\tau_\omega(P). \quad (4)$$

Как мы сейчас увидим, это приводит к некоторой области G_ω^* со складками.

33. Область G_ω^* со складками. Условимся через l обозначать „отрезки“ на G_ω , расположенные над радиальными сечениями кольца $|\ln |w|| < \omega$: Отрезки l , проходящие через точки ветвления G_ω , будут разветвленные, остальные — обычные простые отрезки. Величину $\tau_\omega(P)$, общую, очевидно, для всех точек каждого отрезка l , будем обозначать через $\tau_\omega(l)$. Величину $\tau_\omega(l)$ можно рассматривать как угловое расстояние от отрезка l до „нулевого отрезка“ l_0 , проходящего через точку P_0 .

Проведем в области G_ω сечения вдоль всех разветвленных отрезков l и вдоль l_0 . Область G_ω при этом распадется на конечное число областей S , примыкающих к одному или двум отрезкам — сечениям.

Пусть S_a одна из областей разбиения G_ω , имеющая только одну сторону — основание, примыкающее к некоторому сечению, пусть l_a . Тогда при пробегании S_a от l_a вокруг начала координат величина $\tau_\omega(l)$, очевидно, строго монотонно возрастает, начиная от значения $\tau_\omega(l_a)$. Так как величина $\arg w$ при этом также меняется строго монотонно, то из (2) следует, что все время выполняется одно из соотношений

$$d\tau_\omega = \pm d \arg w,$$

откуда следует, что с точностью до сдвига, параллельного мнимой оси, отображение области S_a с помощью функции $t(P)$ на плоскость $t = h + i\tau$ совпадает с отображением S_a с помощью функции $t = \ln w$ или $\bar{t} = \ln \bar{w}$; при этом образ $t(S_a)$ представляет полуполосу $|h| < \omega$, $\tau > \tau_\omega(l_a)$.

Пусть теперь S_a имеет два основания, примыкающие к двум сечениям l_a и $l_{a'}$ (они могут совпадать), и пусть $\tau_\omega(l_a) \leq \tau_\omega(l_{a'})$. Тогда при пробегании S_a от l_a к $l_{a'}$ величина $\tau_\omega(l)$ монотонно возрастает либо до $\tau_\omega(l_{a'})$, — в этом случае образ $t(S_a)$ представляет прямоугольник $|h| < \omega$, $\tau_\omega(l_a) < \tau < \tau_\omega(l_{a'})$, — либо $\tau_\omega(l)$ возрастает до некоторого максимума, после чего убывает до $\tau_\omega(l_{a'})$ — в этом случае образ $t(S_a)$ представляет „прямоугольник“ с горизонтальной складкой по отрезку, где $\tau = \max \tau_\omega(l)$.

Склеивая образы $t(S)$ всех областей S , получаем некоторую область G_ω^* с горизонтальными складками и точками ветвления, расположенную над полуполосой $|h| < \omega$, $\tau \geq 0$. Функция $t(P)$ производит кусочно конформное отображение G_ω на G_ω^* . Точка P_0 переходит в точку P_0^* , расположенную над точкой $t=0$, и области \tilde{G}_ω на G_ω^* соответствует некоторая область \tilde{G}_ω^* , расположенная над треугольником, ограниченным отрезками прямых $|h| + \tau = \omega$, $\tau = 0$ и содержащая точку P_0^* . Образ Γ_ω^* линии Γ_ω расположен над прямыми $|h| + \tau = \omega$.

34. Признаки параболического типа. Полагая, как обычно,

$$L(\omega) = \int_{\Gamma_\omega} \frac{d\omega}{dn} ds$$

и переходя к Γ_ω^* , имеем

$$\left(\frac{d\omega}{dn} ds\right)_{\Gamma_\omega} = \left(\frac{d\omega}{dn} ds\right)_{\Gamma_\omega^*} = \sqrt{2} (|dt|)_{\Gamma_\omega^*} = 2 (|d\tau|)_{\Gamma_\omega^*};$$

следовательно

$$L(\omega) = 2 \int_{\Gamma_\omega^*} |d\tau|$$

и из признака Альфорса следует, что для параболического типа поверхности F класса $A_{0,\infty}$ достаточна расходимость интеграла

$$\int_{\Gamma_\omega^*} \frac{d\omega}{\int |d\tau|}. \quad (6)$$

Для оценки внутреннего интеграла в (6) заметим, что на каждом простом отрезке l , имеющем общие точки с \tilde{G}_ω и, следовательно, достижимом из P_0 путями, вдоль которых $f(P) < \omega$, имеется не более двух точек линии Γ_ω . Поэтому, если через $n_\omega(l, \tau)$ обозначить число

всех простых отрезков l , имеющих общие точки с \tilde{G}_ω и удовлетворяющих условию $\tau_\omega(l) = \tau$, то будем иметь

$$\int_{\Gamma_\omega^*} |d\tau| \leq 2 \int_0^\omega n_\omega(l, \tau) d\tau,$$

что приводит к следующей теореме:

Теорема 13. *Для того чтобы поверхность F класса $A_{0,\infty}$ была параболического типа, достаточна расходимость интеграла*

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{\int_0^\omega n_\omega(l, \tau) d\tau}. \quad (7)$$

Примечание. Доказанная теорема применима к произвольным поверхностям, имеющим над областью $0 < |\omega| < \infty$ только алгебраические точки ветвления при том дополнительном, однако, условии, чтобы области G_ω имели не более конечного числа точек ветвления с величиной $\tau_\omega < C$ для любого числа $C > 0$ (легко показать, что это не всегда имеет место). В примечании к поверхностям, имеющим только алгебраические точки ветвления над всей конечной плоскостью $|\omega| < \infty$, теорема 13 позволяет установить параболический тип во многих случаях, когда критерий Альфорса, указанный в подстрочном примечании к теореме 12, оказывается недостаточным. Назовем, например, поверхность функции $\arcsin \omega$.*

35. Продолжение. Займемся теперь другой оценкой внутреннего интеграла в (6). Для этого снова разобьем G_ω на области S . Из рассмотренного выше изменения $\tau_\omega(l)$ в областях S (см. п. 33) следует, что каждая такая область сообщает внутреннему интегралу в (6) значение, не превосходящее 4ω . Поэтому, если через $n_\omega(S)$ обозначить число всех областей S , имеющих общие точки с \tilde{G}_ω , то будем иметь

$$\int_{\Gamma_\omega^*} |d\tau| \leq 4\pi n_\omega(S).$$

* Для этой поверхности внутренний интеграл в (7) растет как 2ω и интеграл (7) расходится. Величина же

$$L(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{d\rho}{dn} ds = \int_{\Gamma_\rho} ds,$$

где Γ_ρ состоит из точек, отстоящих на поверхности на расстоянии ρ от фиксированной ее точки, растет как $\frac{\rho^2}{2}$ и интеграл $\int_0^\infty \frac{d\rho}{L(\rho)}$ расходится. Заметим, что в рассматриваемом случае применим признак Радойчица (см. то же примечание к теореме 12), из которого следует параболический тип рассматриваемой поверхности.

Для оценки величины $n_\omega(S)$ заметим, что если какая-либо область S имеет общие точки с \tilde{G}_ω , то ее основание или, если их два, по крайней мере одно из них, имеет общие точки с \tilde{G}_ω ; поэтому, если только это основание не проходит через точку P_0 , то оно должно проходить через точку ветвления области G_ω , которая либо принадлежит \tilde{G}_ω , либо видна оттуда вдоль некоторого отрезка l . Так как к m -кратному отрезку-сечению l примыкает не более $2m$ областей S (отклонение от $2m$ возможно за счет областей, имеющих два основания, оба принадлежащих рассматриваемому отрезку сечению), то обозначая через $\tilde{V}(\omega)$ сумму порядков точек ветвления области G_ω , принадлежащих \tilde{G}_ω или видных из нее вдоль отрезков l , и учитывая еще две области S , примыкающие к нулевому отрезку l_0 , если он не проходит через точку ветвления, будем иметь

$$n_\omega(S) \leq 2[1 + \tilde{V}(\omega)],$$

откуда следует, что для расходимости интеграла (6) достаточна расходимость интеграла

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega \tilde{V}(\omega)}. \quad (8)$$

Обозначим через $V(\omega)$ полную алгебраическую разветвленность области G_ω .^{*} Тогда $\tilde{V}(\omega) \leq V(\omega)$ и для расходимости интеграла (8) достаточно, чтобы расходился интеграл

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega V(\omega)}. \quad (8')$$

Для $\omega_1 < \omega_2$, очевидно, $G_{\omega_1} \subset G_{\omega_2}$; следовательно $V(\omega_1) \leq V(\omega_2)$. Поэтому, задаваясь произвольной последовательностью

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots; \omega_1 > 0, \omega_n \rightarrow \infty,$$

закключаем, что расходимость интеграла (8) следует из расходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V(\omega_{n+1})} \ln \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n},$$

откуда получаем следующую теорему:

Теорема 14. Пусть $\{\omega_n\}$ — произвольная наперед заданная монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел и

^{*} До сих пор G_ω могла бы иметь и бесконечно много точек ветвления. Для дальнейшего существенно, что G_ω имеет конечное число точек ветвления, что всегда имеет место для поверхностей класса A_0, ∞ .

$\{\omega_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, возрастающая настолько быстро, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{n+1}} \ln \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} \quad (9)$$

расходится.

Тогда, для того чтобы поверхность F класса $A_{0, \infty}$ была параболического типа, достаточно, чтобы полная алгебраическая разветвленность областей G_{ω} поверхности F удовлетворяла соотношению

$$V(\omega_n) \leq V_n, \quad (10)$$

начиная с некоторого значения n .

§ 9. Поверхности с точками ветвления, сближающимися в ∞ , или класс поверхности W_{∞}

36. Определение класса поверхностей W_{∞} . Односвязная риманова поверхность F , имеющая бесконечно много точек ветвления, называется поверхностью с точками ветвления, сближающимися в ∞ , если из нее можно выделить такую последовательность односвязных римановых поверхностей $\{F_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), каждая из которых имеет не более конечного числа точек ветвления, и ограничена либо одним замкнутым контуром, либо конечным числом бесконечнолистных спиралей, расположенных для поверхности F_n над окружностью $|\omega| = \rho_n$, причем:

- 1) $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots$; $\rho_n \rightarrow \infty$,
- 2) $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$,
- 3) $\lim F_n = F$.

Совокупность всевозможных поверхностей с точками ветвления, сближающимися в ∞ , будем называть классом поверхностей W_{∞} . Поверхности класса W_{∞} , имеющие не более конечного числа алгебраических точек ветвления (следовательно, обязательно бесконечно много логарифмических точек ветвления), будем называть поверхностями с логарифмическими точками ветвления, сближающимися в ∞ . Они образуют некоторый подкласс Λ_{∞} класса W_{∞} .

§ 37. Величины $h(P)$ и $\tau_{\omega}(P)$. Пусть F — произвольная поверхность класса W_{∞} .

Зафиксируем на F произвольную правильную точку P_0 , расположенную над некоторой точкой ω_0 ($|\omega_0| = \rho_0 < \infty$); обозначим через $r(P)$ расстояние от произвольной правильной точки P поверхности F , не расположенной в ∞ , до ближайшей к ней точке ветвления (таких

ближайших точек может оказаться несколько, но всегда конечное число) и положим

$$h(P) = \ln \frac{r(P)}{r(P_0)}. \quad (1)$$

Продолжая неограниченно элемент поверхности F с центром в точке P_0 , выделим из F область G_ω , точки которой удовлетворяют условию

$$h(P) < \omega. \quad (2)$$

В области G_ω определим величину $\tau_\omega(P)$, полагая

$$\tau_\omega(P) = \min \int_C d\theta, \quad (3)$$

где C пробегает всевозможные, не проходящие через точки ветвления пути, соединяющие внутри G_ω точки P и P_0 , и $d\theta$ означает угол, под которым виден элемент дуги $d\omega$ пути C из ближайшей к этому элементу точки ветвления области G_ω .

38. Области G_ρ и соотношение $G_\omega \subset G_{\rho_\omega}$. Продолжая неограниченно элемент поверхности F с центром в точке P_0 над кругом $|w| < \rho$ ($\rho > \rho_0$), выделим из F область G_ρ , расположенную над этим кругом и содержащую точку P_0 . Область G_ρ ограничена конечным числом *многолистных* замкнутых линий и бесконечнолистных спиралей, расположенных над окружностью $|w| = \rho$, а также, возможно, еще некоторым числом (оно может равняться ∞) простых замкнутых линий, расположенных над той же окружностью.

Обозначим через $n(\rho)$ число точек ветвления области G_ρ и положим

$$\kappa(\rho) = \frac{\rho}{n(\rho)}. \quad (4)$$

Потребуем от рассматриваемых поверхностей класса W_∞ , чтобы для них выполнялось условие

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow \infty} \kappa(\rho) = \infty. \quad (5)$$

Покажем, что при этом условии каждому значению ω можно поставить в соответствие такое число ρ_ω , чтобы выполнялось соотношение

$$G_\omega \subset G_{\rho_\omega}. \quad (6)$$

В самом деле, рассмотрим произвольную область G_ρ ($\rho \geq 2\rho_0$) и предположим, что в некоторой области G_ω существует путь C , соединяющий точку P_0 с границей указанной области G_ρ . Так как в области G_ω величина $h(P) < \omega$, то из (1) следует, что вдоль всего пути C выполняется соотношение

$$r(P) < r(P_0) e^\omega. \quad (7)$$

Отнесем теперь каждой точке ветвления F , не расположенной в ∞ , область U , состоящую из всех точек F , для которых данная точка ветвления является строго ближайшей. Рассматривая проекции области G_ω и пути C на плоскость ω и вспоминая, что точка P_0 расположена над точкой ω_0 ($|\omega_0| = \rho_0$), мы на основании (7) заключаем, что путь C на F должен пересекать больше, чем $\left[\frac{\rho - \rho_0}{r(P_0)e^\omega} \right]$ различных областей U , откуда следует, что

$$n(\rho) \geq \left[\frac{\rho - \rho_0}{r(P_0)e^\omega} \right] + 1 > \frac{\rho - \rho_0}{r(P_0)e^\omega};$$

следовательно,

$$\ln \kappa(\rho) = \ln \frac{\rho}{n(\rho)} < \omega + \ln \frac{\rho}{\rho - \rho_0} + \ln r(P_0)$$

или, так как у нас $\rho \geq 2\rho_0$,

$$\ln \kappa(\rho) < \omega + 1 + \ln r(P_0).$$

Отсюда следует, что если взять такое значение $\rho \geq 2\rho_0$, чтобы

$$\ln \kappa(\rho) \geq \omega + 1 + \ln r(P_0), \quad (8)$$

то область $G_\omega \subset G_\rho$. В силу (5) такие значения существуют. Наименьшее значение $\rho \geq 2\rho_0$, для которого выполняются (8), обозначим через ρ_ω . Для ρ_ω , очевидно, выполняется (6).

39. Множество E_ω и его угловая мера $\theta(\omega)$. Границы областей U , отнесенных выше к точкам ветвления, образуют на F некоторую сеть T , точки которой имеют по крайней мере две ближайшие к ним точки ветвления. Условимся через l обозначать линии (отрезки или лучи), идущие из точек ветвления до встречи с T . Каждой линии l , целиком или частично расположенной в некоторой области G_ω , отнесем в качестве величины $\tau_\omega(l)$ общее значение $\tau_\omega(P)$ для ее точек, лежащих в G_ω . Обозначим через E_ω множество всех линий l , для которых, при заданном ω , выполняется условие

$$\tau_\omega(l) \leq \omega$$

и положим

$$\theta(\omega) = \int_{E_\omega} d\theta,$$

где $d\theta$ — угол между бесконечно близкими линиями l , выходящими из одной и той же точки ветвления.

В дальнейшем нам потребуются оценка угловой меры $\theta(\omega)$ множества E_ω через разветвленность F . Для получения такой оценки нам потребуются одна лемма, которую мы сперва и рассмотрим.

Пусть Φ — произвольная односвязная риманова поверхность с конечным числом ветвления. * Определим на Φ величину

$$\tau(P) = \min_C \int_C d\theta, \quad (9)$$

где C пробегает на Φ всевозможные конечные, не проходящие через точки ветвления пути, соединяющие правильную не расположенную в ∞ точку P с фиксированной, как раньше, точкой P_0 и $d\theta$ имеет то же значение, что при определении величины $\tau_\omega(P)$. Построим затем сеть T , состоящую из отрезков и лучей, равноудаленных от двух ближайших к ним точек ветвления. Для алгебраических точек ветвления α поверхности Φ и логарифмических ее точек ветвления λ обозначим области U , отнесенные им, как выше к точкам ветвления F , соответственно, через U_α и U_λ . Оценивая угловую меру $\theta(\omega)$ множества E_ω линий l , определенных теперь на Φ , мы после выкладок, протекающих вполне аналогично выкладкам, проводившимся при выводе леммы § 5, п. 20, приходим к следующему результату:

Лемма. Для произвольной односвязной римановой поверхности Φ , имеющей не более p логарифмических точек ветвления, расположенных над всей конечной плоскостью $|\omega| < \infty$ и полную алгебраическую разветвленность, не превосходящую V , имеет место соотношение

$$\theta(\omega) < C(p\omega + V), \quad (10)$$

где C — абсолютная постоянная. **

Вернемся к поверхности F и рассмотрим произвольную ее область G_p . Совокупность ее граничных спиралей или, если их нет, один из ее замкнутых граничных контуров, отделяют от F односвязную ее часть F_p , состоящую из G_p и всех частей F , примыкающих к G_p вдоль ее остальных граничных контуров, если они имеются. Дополняя F_p вдоль ее граничных спиралей или, если их нет, вдоль ее замкнутого граничного контура, окрестностями точек ветвления, расположенных в ∞ (в случае простого замкнутого граничного контура таким дополнением служит область $|\omega| > \rho$), получим некоторую односвязную риманову поверхность Φ_p с конечным числом точек ветвления.

Обозначим через $p(\rho)$ число логарифмических точек ветвления области G_p и через $V(\rho)$ — полную алгебраическую разветвленность поверхности F_p . Легко убедиться, что для Φ_p число логарифмических точек ветвления не превосходит $2p(\rho)$, и если $p(\rho) \neq 0$, то полная

* Подразумевается, что кроме логарифмических точек ветвления Φ не имеет других граничных точек.

** См. п. 20, соотношение (18).

алгебраическая ее разветвленность совпадает с $V(\rho)$ (если $p(\rho) \neq 0$, то область G_ρ не может быть ограничена замкнутыми контурами, ибо иначе поверхность F могла бы иметь только конечное число точек ветвления, что несовместимо с условием, что F принадлежит классу W_∞). Если же $p(\rho) = 0$, то полная алгебраическая разветвленность Φ_ρ не превосходит $2V(\rho)$.

Условившись через τ_ρ , $E_{\rho\omega}$ и $\theta_\rho(\omega)$ обозначать для Φ_ρ определенные, как выше для Φ , величины τ , множество E_ω и его угловую меру $\theta(\omega)$, мы, на основании соотношения (10) вышеприведенной леммы, будем иметь

$$\theta_\rho(\omega) < C[p(\rho)\omega + V(\rho)], \quad (11)$$

где C — абсолютная постоянная.

Вернемся, наконец, к оценке $\theta(\omega)$ для поверхности F . Рассмотрим произвольную область G_ω . Ей соответствует содержащая ее область $G_{\rho\omega}$, последней — поверхность $\Phi_{\rho\omega}$. Из определения всех трех следует, что для всякой правильной точки P области G_ω можно указать точку ветвления этой области, которая является ближайшей (или одной из них) для P точкой ветвления как для поверхности F , так и для поверхности $\Phi_{\rho\omega}$. Отсюда следует, что всякая линия l , определенная на F и выходящая из какой-либо точки ветвления G_ω , в той своей части, которая пробегает в G_ω , лежит на вполне определенной линии l и для поверхности $\Phi_{\rho\omega}$. При этом элементарный угол $d\theta$ между двумя такими бесконечно близкими линиями l для F и $\Phi_{\rho\omega}$ имеет, очевидно, одно и то же значение; поэтому

$$\tau_{\rho\omega}(P) \leq \tau_\omega(P);$$

следовательно,

$$\tau_{\rho\omega}(l) \leq \tau_\omega(l), \quad (12)$$

откуда следует, что

$$\theta(\omega) \leq \theta_\rho(\omega) \quad (13)$$

или, в силу (11),

$$\theta(\omega) < C[p(\rho_\omega)\omega + V(\rho_\omega)]. \quad (14)$$

40. Признак параболического типа. С помощью функций

$$f_\omega(P) = |h(P)| + \tau_\omega(P) \quad (15)$$

определим на F линии Γ_ω ($0 < \omega < \infty$) как линии уровня

$$f_\omega(P) = \omega. \quad (16)$$

Замечая, что с увеличением ω величина $\tau_\omega(P)$ в фиксированной точке P может, очевидно, только уменьшаться, убеждаемся, что линии Γ_ω

производят такое исчерпание F , которое позволяет применить признак Альфорса (см. п. 8, примечание 1). Строя область G_ω^* со складками, на которую функция

$$t_\omega(P) = h(P) + i\tau_\omega(P) \quad (17)$$

кусочно конформно отображает G_ω , и рассматривая там образ Γ_ω^* линий Γ_ω , получаем соотношения

$$L(\omega) = \int_{\Gamma_\omega} \frac{d\omega}{dn} ds = 2 \int_{\Gamma_\omega} d\theta \leq 4\theta(\omega),$$

откуда, применяя признак Альфорса и учитывая (14), заключаем, что для параболического типа поверхности F достаточна расходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{P(\rho_\omega)\omega + V(\rho_\omega)}. \quad (18)$$

Отсюда уже легко вывести следующую интересующую нас теорему:

Теорема 15. Пусть $\{p_n\}$ и $\{V_n\}$ — две произвольные наперед заданные монотонно возрастающие последовательности натуральных чисел и $\{\rho_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, возрастающая настолько быстро, что последовательность величин

$$x_n = \frac{\rho_n}{p_n + V_n} \quad (19)$$

неограниченно и монотонно возрастает, притом так, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_{n+1}} \ln \frac{p_{n+1} \ln x_{n+1} + V_{n+1}}{p_{n+1} \ln x_n + V_{n+1}} \quad (20)$$

расходится.

Тогда, для того чтобы поверхность F класса W_∞ была параболического типа, достаточно, чтобы для областей G_ρ и поверхностей F_ρ , выделяемых из F как выше, величины $p(\rho)$ и $V(\rho)$, равные, соответственно, числу логарифмических точек ветвления G_ρ и полной алгебраической разветвленности F_ρ , удовлетворяли условиям

$$p(\rho_n) \leq p_n \quad V(\rho_n) \leq V_n, \quad (21)$$

начиная с некоторого значения n .

Доказательство. Так как в условиях теоремы 15 последовательность величин $\{x_n\}$ монотонно и неограниченно возрастает, то начиная с некоторого значения $n = n_0$ имеем

$$\ln x_n > 1 + \ln r(P_0).$$

Полагая для $n \geq n_0$

$$\omega_n = \ln x_n - 1 - \ln r(P_0),$$

мы для $\omega \leq \omega_n$ будем иметь

$$\rho_\omega \leq \rho_n. \quad (22)$$

В самом деле, по определению величины ρ_ω это есть наименьшее значение $\rho \geq 2\rho_0$, для которого выполняется соотношение (8):

$$\ln x(\rho) \geq \omega + 1 + \ln r(P_0),$$

где

$$x(\rho) = \frac{\rho}{n(\rho)}$$

и $n(\rho)$ означает число точек ветвления области G_ρ . Это число, очевидно, не превосходит $p(\rho) + V(\rho)$; поэтому, в силу (21), для $\rho = \rho_n$ имеем

$$n(\rho_n) \leq p_n + V_n;$$

следовательно,

$$\ln \frac{\rho_n}{n(\rho_n)} \leq \ln \frac{\rho_n}{p_n + V_n} = \omega_n + 1 + \ln r(P_0),$$

и так как, очевидно, можно считать $\rho_n > 2\rho_0$, то

$$\rho_{\omega_n} \leq \rho_n,$$

откуда следует соотношение (22) и для $\omega < \omega_n$.

В силу (22) для $\omega_n < \omega \leq \omega_{n+1}$ имеем $\rho_\omega \leq \rho_{n+1}$; поэтому, в силу (21), соответствующая часть интеграла (18) не меньше, чем величина

$$\frac{1}{p_{n+1}} \ln \frac{p_{n+1}\omega_{n+1} + V_{n+1}}{p_{n+1}\omega_n + V_{n+1}},$$

откуда следует, что расходимость ряда (20) влечет за собой расходимость интеграла (18), а с ним и параболический тип поверхности \mathcal{F} .

Примечание 1. Для подкласса Λ_∞ класса поверхностей W_∞ , имеющих ограниченное число алгебраических точек ветвления, можно в теореме 15 вместо (19) положить

$$x_n = \frac{\rho_n}{p_n} \quad (23)$$

и вместо ряда (20) рассматривать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_{n+1}} \ln \frac{\ln x_{n+1}}{\ln x_n}. \quad (24)$$

Примечание 2. Ниже (п. 112) будет построена поверхность гиперболического типа, имеющая две логарифмические точки ветвления, расположенные над всей конечной плоскостью $|w| < \infty$, и бесконечно много алгебраических точек ветвления, расположенных в ∞ . Существование такой поверхности поясняет, почему при определении класса Λ_∞ мы требовали, чтобы его поверхности имели ограниченное число алгебраических точек ветвления.

Там же будет построена поверхность гиперболического типа, имеющая бесконечно много только логарифмических точек ветвления, из которых одна расположена над областью $0 < |w| < \infty$. Существование такой поверхности показывает, что если для классов поверхностей A_∞ , $A_{0, \infty}$ и Λ_∞ достаточно быстрое сближение точек ветвления в ∞ или, соответственно, в 0 и ∞ , обеспечивает параболический тип поверхности, то уже для класса $\Lambda_{0, \infty}$, имеющему к Λ_∞ такое же отношение, как $A_{0, \infty}$ к A_∞ , указанное сколь угодно быстрое сближение логарифмических точек в 0 и ∞ , даже при полном отсутствии алгебраических точек ветвления, еще не обеспечивает параболический тип поверхности. В следующем параграфе будет дано общее понятие поверхности со сближающимися точками ветвления, позволяющее обеспечить параболический тип поверхности при достаточно быстром сближении точек ветвления поверхности.

§ 10. Общий класс поверхностей со сближающимися точками ветвления

41. Определение общего класса поверхностей со сближающимися точками ветвления. Односвязная риманова поверхность F , имеющая бесконечно много точек ветвления, называется поверхностью со сближающимися точками ветвления, если из нее можно выделить такую последовательность односвязных римановых поверхностей $\{F_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), каждая из которых имеет не более конечного числа точек ветвления и ограничена либо одним замкнутым контуром, либо конечным числом бесконечнолистных спиралей, расположенных для поверхности F_n над „сферическими окружностями“, радиусы которых не превосходят величины d_n ,* причем

- 1) $d_1 < d_2 < \dots < d_n < \dots; d_n \rightarrow 0$,
- 2) $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$,
- 3) $\lim F_n = F$.

Совокупность всех таких поверхностей образует класс поверхностей со сближающимися точками ветвления.

* Под сферической окружностью радиуса d на плоскости w понимается стереографический образ окружности на сфере Римана, радиус которой на сфере равен d .

Пусть F — произвольная поверхность со сближающимися точками ветвления и $\{F_n\}$ — выделенная из нее последовательность поверхностей, удовлетворяющая условиям данного выше определения. Дополняя каждую поверхность F_n вдоль всякого ее граничного контура окрестностью точки ветвления, расположенной над сферическим центром окружности, над которой расположен рассматриваемый граничный контур (для простого замкнутого контура указанное дополнение представляет собой однолистный кружок), получим некоторую последовательность полных (более не расширяемых) односвязных римановых поверхностей $\{\Phi_n\}$ с конечным числом точек ветвления.*

Обозначим через p_n число логарифмических точек ветвления Φ_n и через V_n — полную алгебраическую ее разветвленность. Скорость возрастания p_n и V_n можно рассматривать как характеристику степени разветвленности F , скорость же убывания d_n — как характеристику сближения точек ветвления F .

42. Классы поверхностей $F_{p,v}$ и $F_{d,p,v}$. Пусть p и V — произвольные натуральные числа и d — произвольное положительное число, меньшее $\frac{\pi}{2}$.

Классом поверхностей $F_{p,v}$ будем называть совокупность всех односвязных римановых поверхностей (полных), имеющих не более p логарифмических точек ветвления и полную алгебраическую разветвленность, не превосходящую V .

Классом поверхностей $F_{d,p,v}$ будем называть совокупность всех односвязных римановых поверхностей, которые получаются из поверхностей класса $F_{p,v}$ путем удаления либо окрестности одной правильной точки или алгебраической точки ветвления, либо попарно взаимно простых, включая граничные контуры, окрестностей любого числа ≥ 1 логарифмических точек ветвления, причем каждая удаляемая окрестность проектируется на плоскость w в сферический круг с центром (сферическим), находящимся в проекции соответствующей точки ветвления и радиусом (сферическим), не превосходящим d .

Из определения поверхностей со сближающимися точками ветвления следует, что каждую такую поверхность F можно представить в виде предела последовательности поверхностей $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$, принадлежащих, соответственно, классам поверхностей F_{d_n, p_n, v_n} , где p_n и V_n неограниченно монотонно возрастают и $d_n \rightarrow 0$. Обратное, всякая риманова поверхность F с бесконечным числом точек ветвления, допускающая такого рода представление, есть поверхность со сближающимися точками ветвления.

43. Признак параболического типа. Докажем следующую теорему:

Теорема 16. Пусть $\{p_n\}$ и $\{V_n\}$ — произвольные наперед заданные монотонно возрастающие последовательности натуральных

* Заметим, что последовательность $\{\Phi_n\}$ сходится к F как к ядру (см. [26]).

ных чисел и $\{d_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, убывающая монотонно и настолько быстро, что последовательность величин

$$\frac{1}{p_n} \ln \frac{p_n \ln \frac{1}{d_n} + V_n}{p_n + V_n} \quad (1)$$

неограниченно возрастает.

Тогда, для того чтобы поверхность F со сближающимися точками ветвления была параболического типа, достаточно, чтобы ее можно было представить в виде предела последовательности поверхностей $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$, принадлежащих, соответственно, классам поверхностей F_{d_n, p_n, V_n} .

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что

$$d_n < \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

Зафиксируем на поверхности F произвольную правильную точку P_0 , отстоящую от сферически ближайшей или ближайших к ней точек ветвления на сферическое расстояние $\sigma(P_0)$, которое, очевидно, меньше, чем $\frac{\pi}{2}$, и зафиксируем настолько малое число $\eta > 0$, чтобы

$$\eta < \sigma(P_0) < \frac{\pi}{2} - \eta. \quad (3)$$

Начиная с некоторого значения $n = n'$ точка P_0 будет принадлежать всем поверхностям F_n . Дополним каждую поверхность F_n до поверхности Φ_n (см. конец п. 41) и для $n \geq n'$ определим на Φ_n величины $\sigma(P)$, $h(P)$, $\tau(P)$, функцию Кобеяши $f(P)$, множества E_ω , области G_ω и линии Γ_ω , как это делалось выше (гл. 2, § 4) при рассмотрении поверхностей с конечным числом точек ветвления на каждом листе. Условимся эти величины для Φ_n обозначить с дополнительным индексом n внизу, т. е. так: $\sigma_n(P)$, $h_n(P)$ и т. д.

Величину $\sigma(P)$ можно определить и для поверхности F , причем

$$\sigma(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(P), \quad (4)$$

откуда, в применении к точке P_0 , легко следует, что ее можно заключить в столь малый однолистный сферический кружок Q_0 со сферическим центром в точке P_0 , что начиная с некоторого значения $n = n''$ кружок Q_0 будет принадлежать всем поверхностям F_n и для всех его точек, пусть P^* , будет выполняться соотношение

$$\eta < \sigma_n(P^*) < \frac{\pi}{2} - \eta \quad (5)$$

и следовательно (см. п. 14, (2))

$$|h_n(P^*)| < |\ln \operatorname{tg} \eta|. \quad (6)$$

Так как $\tau_n(P_0) = 0$, то для всех точек P^* круга Q_0 величина $\tau_n(P^*) < \frac{\pi}{2}$; поэтому, полагая

$$\omega_0^* = \frac{\pi}{2} + |\ln \operatorname{tg} \eta|, \quad (7)$$

будем иметь

$$f_n(P^*) = |h_n(P^*)| + \tau_n(P^*) < \omega_0^*. \quad (8)$$

Положим еще

$$\omega_n = |\ln \operatorname{tg} d_n|. \quad (9)$$

Так как $d_n \searrow 0$, то начиная с некоторого значения $n = n'''$ будем иметь

$$\omega_n > \omega_0^*.$$

Обозначим через n_0 большее из чисел n' , n'' , n''' и рассмотрим какую-нибудь область $G_{\omega n}$ ($n \geq n_0$), для произвольного значения ω ($\omega_0^* < \omega < \omega_n$). Пусть P — произвольная точка поверхности Φ_n , не принадлежащая F_n . Для такой точки $\sigma_n(P) \leq d_n$, и так как $d_n < \frac{\pi}{4}$, то

$$|h_n(P)| = |\ln \operatorname{tg} \sigma_n(P)| \geq \omega_n$$

и, следовательно,

$$f_n(P) \geq \omega_n.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая область $G_{\omega n} \subset F_n$ и, кроме того, в силу (8), содержит целиком кружок Q_0 .

Рассмотрим границу $\Gamma_{\omega n}$ области $G_{\omega n}$.

Если Φ_n имеет логарифмические точки ветвления, то внешняя граница $\Gamma_{\omega n}^0$ области $G_{\omega n}$ отделяет от Φ_n односвязную ее часть $\Phi_{\omega n}$, состоящую из $G_{\omega n}$ и всех частей Φ_n , примыкающих к ней вдоль остальных граничных ее контуров, если они имеются.

Покажем, что $\Phi_{\omega n} \subset F_n$. В самом деле, если F_n ограничена бесконечнолистными спиралями, то это очевидно. Если же F_n ограничена одним замкнутым контуром γ , то отделяемая этим контуром от Φ_n двусвязная ее часть $\Phi_{\gamma n}$, не лежащая на F_n , должна, в силу односвязности Φ_n , либо содержать все логарифмические точки ветвления Φ_n , либо ни одной. Последнее, однако, невозможно, так как тогда F имела бы только конечное число точек ветвления, что противоречит тому, что она является поверхностью со сближающимися точками ветвления. Но тогда $\Phi_{\gamma n}$ может лежать только вне $\Phi_{\omega n}$ и, следовательно, $\Phi_{\omega n} \subset F_n$.

Предположим теперь, что Φ_n не имеет логарифмических точек ветвления и, следовательно, является замкнутой поверхностью. В этом слу-

чае прежнее определение внешнего контура $\Gamma_{\omega n}^0$ области $G_{\omega n}$ на Φ_n уже невозможно. Желая, однако, чтобы и здесь $\Phi_{\omega n} \subset F_n$, примем за внешний контур $\Gamma_{\omega n}^0$ области $G_{\omega n}$ тот ее граничный контур, который в отделяемой им от Φ_n односвязной части $\Phi_{\omega n}$, содержащей $G_{\omega n}$, не содержит односвязной области, дополняющей F_n до Φ_n .

Удалим теперь из $\Phi_{\omega n}$ кружок Q_0 ; оставшуюся двусвязную область обозначим через $\Phi'_{\omega n}$ и ее модуль — через μ_n . Так как у нас $\omega > \omega_0^*$, то, очевидно, $\Phi'_{\omega n} \supset \Phi'_{\omega_0 n}$; поэтому, в силу леммы 1 (п. 2), имеем

$$\frac{\ln \mu}{2\pi} \geq \int_{\omega_0^*}^{\omega} \int_{\Gamma_{\omega n}^0} \frac{d\omega}{dn} ds; \quad (10)$$

таким образом, для того чтобы $\mu_n \rightarrow \infty$ и, следовательно, F была параболического типа, достаточно, чтобы интеграл (10) неограниченно возрастал вместе с ω .

Из соотношений (14) п. 17 и (18) п. 20 следует, что

$$\int_{\Gamma_{\omega n}^0} \frac{d\omega}{dn} ds < C(p_n \omega + V_n);$$

поэтому для неограниченного возрастания интеграла (10) достаточно, чтобы неограниченно возрастала величина

$$\frac{1}{p_n} \ln \frac{p_n \omega + V_n}{p_n \omega_0^* + V_n};$$

откуда, беря $\omega = \omega_n$, получаем условие параболичности теоремы 16.

Примечание. Рассмотренные выше классы поверхностей A_{∞} , $A_{0, \infty}$ и W_{∞} составляют подклассы общего класса поверхностей со сближающимися точками ветвления. Полученные, однако, для них признаки типа являются более сильными, чем признак параболического типа, указанный в теореме 16.

44. Примечание к теореме 16. Пусть F — поверхность со сближающимися точками ветвления и $\{\Phi_n\}$ — соответствующая ей последовательность поверхностей с конечным числом точек ветвления, о которой говорилось выше.

При выводе теоремы 16 мы рассматривали различные расположенные на F семейства линий $\Gamma_{\omega n}^0$ ($n \geq n_0$, $\omega_0^* < \omega < \omega_n$), взятые, соответственно, с поверхностями Φ_n , где они были определены для всех значений $\omega_0^* < \omega < \infty$. Используя эти семейства линий $\Gamma_{\omega n}^0$, желательно было бы построить для F единое семейство линий Γ_{ω}^0 ($\omega_0^* < \omega < \infty$), производящее регулярное кольцообразное ее исчерпание. Это позволило бы применить к F признак Альфорса и привело бы к усилению теоремы 16.

Естественным представляется положить Γ_ω^0 совпадающими с линиями $\Gamma_{\omega n}^0$ для $\omega_{n-1} < \omega \leq \omega_n$. Однако при этом нужно еще убедиться, что для двух значений ω' и ω'' , взятых из разных интервалов (ω_{n-1}, ω_n) , односвязные части $F_{\omega'}$ и $F_{\omega''}$, соответственно отсекаемые линиями $\Gamma_{\omega'}^0$ и $\Gamma_{\omega''}^0$ от F , не имеют общих точек, что требуется при регулярном кольцеобразном исчерпании F .

В общем случае это не имеет места; однако указанное свойство монотонности линий Γ_ω^0 восстанавливается, если рассматривать не всю последовательность $n = 1, 2, \dots$ и значения $\omega_0^* < \omega < \infty$, а только некоторую подпоследовательность значений $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ и, соответственно, значения ω , лежащие в интервалах

$$\omega'_{n_{k-1}} < \omega < \omega_{n_k} \tag{12}$$

где $\omega'_{n_{k-1}}$ — подходящим образом определенные значения $\omega \geq \omega_{n_{k-1}}$.

Чтобы определить последовательности $\{n_k\}$ и $\{\omega'_{n_k}\}$, определим n_0 как выше, в п. 43, и, рассматривая область $G_{\omega_{n_0}} \subset F_{n_0} \subset \Phi_{n_0}$, положим

$$\omega'_{n_0} = \sup_{(n \geq n_0)} f_n(P), \tag{13}$$

где P пробегает указанную область и $f_n(P)$ означает функцию Кобеляши для Φ_n . Определим теперь n_1 как наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям

$$n_1 > n_0, \quad \omega_{n_1} > \omega'_{n_0}; \tag{14}$$

затем положим

$$\omega'_{n_1} = \sup_{(n \geq n_1)} f_n(P)$$

для P , пробегающих область $G_{\omega_{n_1}, n_1} \subset F_{n_1} \subset \Phi_{n_1}$, и т. д. Линии Γ_ω^0 , совпадающие в интервалах $(\omega'_{n_{k-1}}, \omega_{n_k})$ с линиями Γ_{ω, n_k}^0 , образуют на F семейство линий, производящих регулярное кольцеобразное ее исчерпание, и из признака Альфорса следует

Теорема 16'. *Утверждение теоремы 16 остается в силе, если вместо неограниченного возрастания величины (1) требовать расходимость ряда*

$$\sum \frac{1}{P_{n_k}} \ln \frac{P_{n_k} \omega_{n_k} + V_{n_k}}{P_{n_k} \omega'_{n_{k-1}} + V_{n_k}}, \tag{15}$$

где $\{\omega_n\}$ определяются согласно (9) и последовательности $\{n_n\}$ и $\{\omega'_{n_k}\}$ определяются вышеуказанным образом.

Примечание. Если ω_n вместо определения по формуле (9) определять соотношением

$$\omega_n = |\ln \operatorname{tg} 2d_n|, \tag{16}$$

считая $d_n < \frac{\pi}{8}$, то нетрудно показать, что для всех точек $P \in G_{\omega_n, n}$ и всех $m > n$

$$|h_m(P)| < |h_n(P)| + 2$$

и

$$\tau_m(P) < C(p_n + V_n)\omega_n,$$

где C — абсолютная постоянная; откуда, в частности, следует, что

$$\omega'_{n_k} < C(p_{n_k} + V_{n_k})\omega_{n_k}.$$

Эта весьма грубая оценка в частных случаях допускает существенное улучшение. Подобного рода случай мы сейчас рассмотрим.

45. Признак параболического типа для поверхностей $F^{(e)}$. Пусть (e) — произвольное замкнутое множество меры нуль, расположенное на окружности $|w| = 1$, и $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n \geq \dots$ — дополнительные к нему дуги. Обозначим через $F^{(e)}$ односвязную риманову поверхность, получаемую путем приклеивания к кругу $|w| < 1$ логарифмических концов* ко всем дугам $\{\delta_n\}$. Обозначим еще через $\delta_1^n, \delta_2^n, \dots, \delta_n^n$ дуги на окружности $|w| = 1$, дополнительные к дугам $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ и через Φ_n — поверхность, состоящую из круга $|w| < 1$ и логарифмических концов, приклеенных ко всем дугам $\{\delta_k, \delta_k^n\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Положим

$$d_n = \max(\delta_1^n, \delta_2^n, \dots, \delta_n^n). \quad (17)$$

Так как $\text{mes } e = 0$, то $d_n \searrow 0$, откуда следует, что поверхность $F^{(e)}$ является поверхностью со сближающимися точками ветвления.

Зафиксируем на всех поверхностях Φ_n в качестве точки P_0 точку $w = 0$ исходного круга $|w| < 1$ и, как выше, определим функции Кобаяши $f_n(P)$, линии $\Gamma_{\omega_n}, \Gamma_{\omega_n}^0$ и т. д.

Считая $d_n < \frac{\pi}{2}$, положим

$$\omega_n = \left| \ln \operatorname{tg} \frac{d_n}{2} \right|. \quad (18)$$

Так как сферическая длина дуги d_n окружности $|w| = 1$ равна $\frac{d_n}{2}$, то область $G_{\omega_n, n}$, определенная на Φ_n , не может иметь общих точек с дугами δ_k^n ($k = 1, 2, \dots, n$), и поэтому она целиком лежит на поверхности $F^{(e)}$. Элементарный подсчет показывает, что для любой точки P линии $\Gamma_{\omega_n, n}$ лежащей внутри центрального кругового сектора, опи-

* Логарифмическим концом называется каждая из обеих частей поверхности логарифмической функции $\ln \frac{w-a}{w-b}$ или $\ln(w-a)$, на которые она распадается при проведении на ней разреза вдоль простой дуги, соединяющей обе точки ветвления (см. ниже п. 74, определение 3).

рающегося на одну из дуг δ_n^k и всех $m > n$, имеют место соотношения

$$|h_m(P)| < |h_n(P)| + 2, \quad \tau_m(P) \leq \tau_n(P),$$

для всех же других точек P линии $\Gamma_{\omega_n, n}$ и $m > n$

$$h_m(P) = h_n(P), \quad \tau_m(P) = \tau_n(P),$$

откуда следует, что для всех $m > n$

$$f_m(P) \leq f_n(P) + 2.$$

Поэтому, если для некоторого $m > n$ величина

$$\omega_m > \omega_n + 2,$$

то область $G_{\omega_n, n}$ лежит целиком внутри области $G_{\omega_n+2, m}$.

Заметив это, выделим из последовательности $\{d_n\}$ такую подпоследовательность $\{d_{n_k}\}$, что для $k = 1, 2, \dots$

$$\omega_{n_{k+1}} > \omega_{n_k} + 2 \tag{19}$$

и для каждого интервала

$$\omega_{n_k} + 2 < \omega < \omega_{n_{k+1}}$$

значений ω определим линии Γ_ω^0 на F как линии $\Gamma_{\omega, n_{k+1}}^0$, взятые с поверхности $\Phi_{n_{k+1}}$.

Так как для любой поверхности Φ_n число логарифмических точек ветвления $p_n = 2n$ и полная алгебраическая разветвленность $V_n = 0$, то полагая, в теореме 16' величины $\omega'_{n_k} = \omega_{n_k} + 2$, получаем следующую теорему:

Теорема 17. Если для множества (e) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{k+1}} \ln \frac{\ln \frac{1}{d_{n_{k+1}}}}{\ln \frac{1}{d_{n_k}}} \tag{20}$$

расходится, то соответствующая поверхность $F^{(e)}$ — параболического типа.

Глава IV

Задачи на склеивание

§ 11. Общие задачи на склеивание

46. Склеивание полукругов и круговых секторов. Рассмотрим сперва некоторые частные задачи на склеивание.

Пусть D_1 и D_2 — два полукруга, на которые интервал Δ ($-1 < x < 1$) вещественной оси плоскости $z = x + iy$ делит круг $|z| < 1$, расположенные, соответственно, в полуплоскостях $I(z) > 0$ и $I(z) < 0$, и пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция (называемая дальше функцией склеивания), возрастающая строго монотонно вместе с x от -1 до 1 .

Мы скажем, что полукруги D_1 и D_2 с функцией склеивания $\varphi(x)$ допускают *конформное склеивание* (или просто склеивание), если можно указать две функции $w = f_1(z)$ и $w = f_2(z)$, отображающие, соответственно, D_1 и D_2 взаимно однозначно и конформно на две взаимно простые области D'_1 и D'_2 , примыкающие друг к другу вдоль простой линии $\Delta' = f_1(\Delta) = f_2(\Delta)$ и вместе с Δ' заполняющие круг $|w| < 1$, причем на Δ' , называемой линией склеивания, выполняется соотношение

$$f_1(x) = f_2[\varphi(x)] \quad (1)$$

для всех $x \in (-1, 1)$. Мы скажем, что склеивание является вполне определенным, если оно определяется с точностью до линейного преобразования круга $|w| < 1$ самого в себя.

Задача на склеивание полукругов D_1 и D_2 состоит в том, чтобы найти, при каких ограничениях на функцию склеивания $\varphi(x)$ склеивание возможно и является вполне определенным.

Аналогично ставится задача на склеивание для круга $|z| < 1$ с радиальным разрезом (область D), граничные радиусы которого связаны соответствующей функцией склеивания, а также задача на склеивание нескольких круговых секторов D_1, D_2, \dots, D_n , составляющих круг $|z| < 1$ и связанных попарно функциями склеивания вдоль общих граничных радиусов.

47. Возможность склеивания. Нетрудно заметить, что конформное склеивание всегда возможно, если возможно *квазиконформное склеивание*, при котором склеиваемые области D_1, D_2, \dots и линии склеивания переходят сами в себя и соответствующие характеристики $p(z)$ и $\theta(z)$ непрерывно и ограничены в областях D_1, D_2, \dots . В самом деле, по теореме Лаврентьева ([2], теорема 3) существует функция, осуществляющая гомеоморфное квазиконформное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|\omega| < 1$ с характеристиками $p(z)$ и $\theta(z)$ (мы берем характеристики эллипсов, в которые переходят бесконечно малые круги, взятые в областях D_1, D_2, \dots). Суперпозиция первоначального квазиконформного склеивания с последующим квазиконформным отображением круга $|z| < 1$ на круг $|\omega| < 1$ дает конформное склеивание.

Указанное квазиконформное склеивание легко осуществимо в том важном случае, *рассмотренном у Блана* [17],* когда функция (или функции) склеивания $\varphi(x)$ имеет всюду непрерывную положительную производную $\varphi'(x)$ или когда функция $\varphi(x)$ имеет такую производную $\varphi'(x)$ всюду, исключая некоторую точку, пусть $x = 0$, и удовлетворяет условию

$$\frac{1}{K} < \varphi'(x) < K \quad (K > 0) \quad (2)$$

или (только для полукругов) условию

$$\frac{1}{K} < \frac{\varphi'(x)}{x^\alpha} < K \quad (K > 0, \alpha \neq -1). \quad (3)$$

Докажем эти утверждения, сперва с условием (2), для полукругов D_1 и D_2 .

Очевидно, можно считать $\varphi(0) = 0$ (линейное преобразование D_1 и D_2 самих в себя) и можно считать, что

$$\varphi'(-1) = \varphi'(1) = 1 \quad (4)$$

(условие (4) легко достижимо подходящей квазиконформной деформацией одного из полукругов D_1 или D_2 самого в себя, не нарушая условия $\varphi(0) = 0$, и меняя, возможно, лишь постоянную K в условиях (2) или (3). Заметив это, отобразим D_1 и D_2 с помощью функции $\frac{1}{z}$ на области D_1^* и D_2^* („внешние полукруги“) и обозначим через $\varphi^*(x)$

* У Блана, особенно в его работах [17, 18], дано подробное рассмотрение различных задач на склеивание и их применение к проблеме типа односвязной римановой поверхности. Однако вопрос об определенности склеивания Блан не ставит.

($|x| \geq 1$) преобразованную функцию склеивания. Тогда, в силу (4),

$$\varphi'^*(-1) = \varphi'^*(1) = 1 \quad (5)$$

и функция

$$f(x) = \begin{cases} \varphi^*(x) + iy & (|x| \geq 1, y < 0) \\ x + iy & (|x| < 1, y < 0) \end{cases} \quad (6)$$

производит квазиконформное склеивание области D_1^* с областью D_2^* при котором бесконечно малый круг с центром в точке $z \in D_1^*$ переходит в бесконечно малый эллипс с вертикальной или горизонтальной большой осью и отношением полуосей

$$p(z) = \begin{cases} \max \left(\varphi'^*(x), \frac{1}{\varphi'^*(x)} \right) & (|x| \geq 1) \\ 1 & (|x| < 1) \end{cases} \quad (7)$$

В силу (5), для $|x| = 1$ характеристика $p(z) = 1$ и, следовательно, она непрерывна во всей области D_1^* . Так как для функции склеивания $\varphi^*(x)$ сохраняется, как нетрудно убедиться, условие (2), то $p(z) < K$ и, переходя от области склеивания $|z| > 1$, полученной при склеивании D_1^* и D_2^* к кругу $|\omega| < 1$, получаем требуемое квазиконформное склеивание полукругов D_1 и D_2 .

Аналогично поступаем в случае одной области склеивания D (круг $|z| < 1$ с радиальным разрезом). В случае нескольких секторов D_1, D_2, \dots, D_n , заполняющих круг $|z| < 1$, отображаем каждый из них квазиконформно (угловое растяжение) на круг $|z| < 1$ с радиальным разрезом, затем, с помощью функции $\frac{1}{z}$ — на внешность круга $|z| > 1$ с лучевым разрезом, склеиваем эти области как выше и с помощью функции $\omega = z^{-\frac{1}{n}}$ переходим к кругу $|\omega| < 1$, где получаем искомое квазиконформное склеивание.

В случае двух полукругов D_1 и D_2 и условия (3) производим сперва следующее вспомогательное квазиконформное преобразование полукруга D_1 самого в себя:

$$\rho = r^{1+\alpha}, \quad \tau = t, \quad (8)$$

где (r, t) и (ρ, τ) — полярные координаты в D_1 до и после преобразования. Преобразование (8) имеет характеристики $p(z) = 1 + \alpha$, $\theta(z) = t$ (или $t + \frac{\pi}{2}$) для $z \neq 0$ и $p(0) = 1$. Для преобразованной функции склеива-

ния $\psi(\tilde{x})$ (\tilde{x} точка, соответствующая в преобразовании (8) точке x) имеем

$$\psi'(\tilde{x}) = \frac{1}{1+\alpha} \frac{\varphi'(x)}{x^\alpha} \quad (9)$$

и, в силу (3), мы приходим к рассмотренному выше случаю, когда выполняется условие (2).

Примечание. Как мы увидим ниже (п. 52), последний результат для случая одной области D или в случае, когда секторов D_1, D_2, \dots более двух, вообще говоря, не верен.

48. Определенность склеивания. Если в рассмотренных выше задачах склеивание возможно и, исключая быть может сколь угодно малые окрестности изолированных точек, линия склеивания (или линии склеивания) спрямляемы, то с помощью известной теоремы Пенлеве об аналитическом продолжении заключаем, что склеивание является вполне определенным. В дальнейшем мы будем неоднократно пользоваться следующей теоремой:

Теорема 18. Если функция склеивания $\varphi(x)$ полуокругов D_1 и D_2 имеет всюду положительную производную $\varphi'(x)$, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем δ ($0 < \delta < 1$):

$$|\varphi'(x_1) - \varphi'(x_2)| < H |x_1 - x_2|^\delta, \quad (11)$$

где $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ и H — постоянная (такое условие будем коротко называть условием H_δ), то склеивание возможно и линия склеивания — гладкая, причем направление касательной к ней удовлетворяет условию H_δ (возможно с другой постоянной H , чем в (11), но с тем же показателем δ).

Из гладкости линии склеивания вытекает определенность склеивания.

Доказательство. Продолжим сперва функцию $\varphi(x)$ за отрезок $[-1, 1]$, полагая для $x > 1$ и $x < -1$ соответственно

$$\varphi(x) = 1 + (x-1)\varphi'(1) \text{ и } \varphi(x) = -1 + (x+1)\varphi'(-1) \quad (12)$$

(условие (11) при этом, очевидно, сохранится), и рассмотрим квазиконформное склеивание полуокругов D_1 и D_2 , осуществляемое функциями

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1(z) &= \varphi(x) + i[\varphi(x+y) - \varphi(x)] \quad (z \in D_1) \\ \zeta_2(z) &\equiv z \quad (z \in D_2). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Характеристики $p_1(\zeta)$ и $\theta_1(\zeta)$ первого отображения (бесконечно малые круги в области D_1) определяются из соотношений*

$$\left. \begin{aligned} p_1 + \frac{1}{p_1} &= 2 \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(x+y)} + \frac{\varphi'(x+y)}{\varphi'(x)} - 1 \right) \\ \operatorname{tg} \theta_1 &= - \left(\frac{\varphi'(x+y)}{\varphi'(x)} + \sqrt{\left[\frac{\varphi'(x+y)}{\varphi'(x)} \right]^2 + 1} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

откуда видно, что при $y \rightarrow 0$ характеристика $p_1 \rightarrow 1$ и, в силу (11), p_1 и θ_1 в области D_1 и на отрезке $[-1, 1]$ (θ_1 там, где $p_1 \neq 1$) удовлетворяют условию H_8 . Так как для отображения $\zeta_2(z)$ характеристика $p_2(\zeta) \equiv 1$, то характеристики $p(\zeta)$ и $\theta(\zeta)$ обоих отображений $\zeta_1(z)$ и $\zeta_2(z)$, рассматриваемые во всей области склеивания D_ζ , полученной из круга $|z| < 1$, удовлетворяют там условию H_8 . Функция $\psi(\zeta)$, осуществляющая гомеоморфное квазиконформное отображение области D_ζ на круг $|w| < 1$ с характеристиками $p(\zeta)$ и $\theta(\zeta)$, обладает по теореме Шабата ([27], теорема 5) частными производными, также удовлетворяющими условию H_8 , откуда следует, что суперпозиция функций $\zeta(z)$ и $\psi(\zeta)$ дает конформное склеивание полукругов D_1 и D_2 , причем линия склеивания обладает всеми указанными в теореме 18 свойствами. Таким образом теорема 18 доказана.**

49. Общая задача на склеивание. Рассмотрим произвольную конечную или счетную систему односвязных плоских областей $\{\Sigma\}$, каждая из которых ограничена конечным числом сторон, состоящих из прямолинейных отрезков, лучей и прямых. Пусть $\{\varphi\}$ система функций, называемых далее функциями склеивания, каждая из которых устанавливает топологическое соответствие между парой граничных сторон наших областей, причем каждой такой стороне соответствует не более чем одна другая сторона, затем в каждой конечной точке плоскости, называемой далее вершиной, сходятся не более чем конечное

* Для определения характеристик p и θ непрерывно дифференцируемого квазиконформного отображения $\zeta(z) = \xi(z) + i\eta(z)$, $z = x + iy$, имеем соотношения (беря бесконечно малые круги в плоскости z):

$$p + \frac{1}{p} = \frac{E + G}{J}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{G - E + \sqrt{(G - E)^2 + 4F^2}}{-2F}, \quad (14)$$

где

$$E = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad F = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad G = \eta_x^2 + \eta_y^2, \quad J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x.$$

** Первоначально эта теорема была доказана мною в предположении условия H_8 для второй производной от функции склеивания $\varphi(x)$. Указанный выше выбор функции $\zeta_1(z)$, позволяющий заменить вторую производную — первой, был мне указан в устной беседе М. А. Лаврентьевым. Для одной только определенности склеивания (но не гладкости линии склеивания) достаточно, вероятно, требование простой непрерывности и положительности для $\varphi'(x)$.

Недавно указанное предложение было доказано студентом Львовского университета П. П. Белинским. Это приводит к автоматическому усилению приводимых далее теорем, относящихся к задачам на склеивание. *Примеч. при чтении корректуры.*

число попарно соответствующих друг другу граничных сторон и соответствующие области образуют вблизи нее полный или неполный цикл. Предположим еще, что отождествляя соответствующие друг другу пары граничных точек и определяя для них естественным образом окрестности, мы получаем абстрактную односвязную поверхность Φ (может случиться, что для односвязности Φ в нее нужно вклеить одну или больше точек, соответствующих бесконечно удаленным вершинам областей $\{\Sigma\}$). Мы будем тогда предполагать, что эти вершины удовлетворяют указанному выше условию для конечных вершин).

Общая задача на склеивание состоит, во-первых, в том, чтобы найти, при каких ограничениях на указанную выше систему $\{\Sigma, \varphi\}$ для нее возможно конформное склеивание, т. е., в каких случаях на односвязной поверхности Φ , определяемой системой $\{\Sigma, \varphi\}$, возможно введение метрики в окрестностях точек склеивания, которая, в соединении с евклидовой угловой метрикой, перенесенной на остальную часть Φ , превращает ее в *односвязную риманову поверхность*; во-вторых, в случае возможности конформного склеивания требуется узнать, когда оно является вполне определенным, т. е. является определенным с точностью до конформного отображения римановой поверхности склеивания; в третьих, когда склеивание является вполне определенным, требуется определить тип односвязной римановой поверхности склеивания, называемый также типом склеивания.

Заметим сразу, что для возможности вполне определенного склеивания (в целом) достаточно, чтобы в малом (в окрестностях склеиваемых точек) склеивание было возможно всюду и, исключая быть может изолированные точки, было вполне определенным. В самом деле, в этом случае склеивание в малом было бы вполне определенным всюду, ибо всякие две области склеивания для окрестности какой-либо из указанных исключительных точек были бы связаны гомеоморфным соответствием, конформным всюду вне пары точек — образов исключительной точки — и имеющим в этих точках устранимую особенность, поэтому конформными и в этих точках. Теперь, поскольку в малом склеивание является вполне определенным всюду, мы на поверхности склеивания Φ можем ввести требуемую угловую метрику, превращающую ее в односвязную риманову поверхность и склеивание будет определено с точностью до конформного отображения этой поверхности.

Замечая, что склеивание в малом эквивалентно задаче на склеивание полукругов и круговых секторов, мы, опираясь на результаты пп. 47 и 48, можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 19. *Если для данной системы $\{\Sigma, \varphi\}$ функции склеивания, исключая сколь угодно малые окрестности изолированных точек, обладают положительными первыми производными, удовлетворяющими условию H_δ (условие Гёлдера вида (11) с показателем δ ($0 < \delta < 1$) и постоянной H), причем величины δ и H зависят*

от рассматриваемых окрестностей, в окрестностях же исключительных точек функции склеивания удовлетворяют условиям вида (3), если эти точки не являются концами (вершинами) граничных сторон склеиваемых областей и условиям вида (2), если они являются такими вершинами, то для системы $\{\Sigma, \varphi\}$ возможно вполне определенное склеивание.

Примечание. В связи с теоремой 19 полезно отметить следующее очевидное предложение:

для двух систем $\{\Sigma, \varphi\}_I$ и $\{\Sigma, \varphi\}_{II}$, удовлетворяющих условию теоремы 19 и переходящим друг в друга при помощи Q -квазиконформного отображения, непрерывно дифференцируемого вне изолированных точек и кусочно гладких дуг, тип склеивания один и тот же.

В применении к проблеме типа односвязной римановой поверхности имеем следующее предложение:

если, разбивая данную односвязную риманову поверхность F на некоторые области и Q -квазиконформно их деформируя, получаем систему $\{\Sigma, \varphi\}$, удовлетворяющую условиям теоремы 19, то тип F совпадает с типом склеивания для $\{\Sigma, \varphi\}$.

§ 12. Склеивание полуплоскости или полосы

50. Предварительные замечания. Рассмотрим задачу на склеивание для полуплоскости $I(z) > 0$ с функцией склеивания $r^* = \varphi(r)$, $\varphi(0) = 0$, и устанавливающей топологическое соответствие между положительной и отрицательной действительными полуосями $I(z) = 0$ с точками $z = r$ и $z = r^*$. Предполагая, что функция склеивания $\varphi(r)$ удовлетворяет условиям теоремы 19 (точку $r = 0$ рассматриваем как граничную вершину) и, следовательно, склеивание возможно и является вполне определенным, будем определять тип склеивания.

Заметим, что если две функции склеивания $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ удовлетворяют условиям теоремы 19, и всюду, где они дифференцируемы выполняется условие

$$\frac{1}{K} < \frac{\varphi_1'(r)}{\varphi_2'(r)} < K, \quad (1)$$

где K — постоянная, но тип склеивания для обеих функций один и тот же. В самом деле, на основании примечания к теореме 19 достаточно заметить, что преобразование

$$f(z) = \begin{cases} x + iy & (x \geq 0) \\ -\varphi_1[\varphi_2^{-1}(|x|) + iy] & (x \leq 0), \end{cases} \quad (2)$$

переводящее задачу на склеивание с функцией $\varphi_2(r)$ в задачу на склеивание с функцией $\varphi_1(r)$, представляет Q -квазиконформное отобра-

жение полуплоскости $I(z) > 0$ самой на себя с характеристикой $p < K$, непрерывно дифференцируемое вне изолированных полупрямых, соответствующих значениям $x \geq 0$, где одна из функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ (или возможно обе функции) перестает быть непрерывно дифференцируемой.

Отображая полуплоскость $I(z) > 0$ с помощью функции

$$\zeta = \xi + i\eta = \ln z, \quad (3)$$

приходим к задаче на склеивание для полосы S :

$$0 < \eta < \pi, \quad -\infty < \xi < \infty \quad (4)$$

с функцией склеивания

$$\xi^* = f(\xi), \quad (5)$$

где

$$\xi = \ln r, \quad \xi^* = \ln r^*, \quad r^* = \varphi(r), \quad (6)$$

связывающей точки $(\xi, 0)$ и (ξ^*, π) , расположенные на противоположных граничных сторонах S .

Заметим, что для полос условие (1) имеет вид

$$\frac{1}{K} < e^{f_1(\xi) - f_2(\xi)} \cdot \frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)} < K,$$

откуда следует, что если функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$, соответствующие вышерассмотренным функциям $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$, удовлетворяют условиям

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < K, \quad \frac{1}{K} < \frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)} < K, \quad (7)$$

то тип склеивания для функции $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ один и тот же.*

Сделаем еще такое замечание: для того чтобы задача на склеивание для полосы S с независимо заданной функцией склеивания $f(\xi)$, соответствовала задаче на склеивание для полуплоскости $I(z) > 0$ с функцией склеивания $\varphi(r)$, допускающей вполне определенное склеивание, нужно наложить известные ограничения на поведение $f(\xi)$ при $\xi \rightarrow -\infty$.

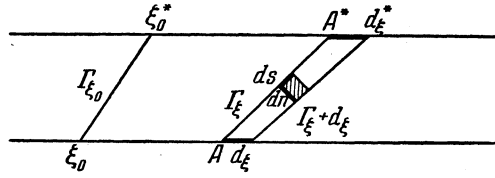
51. Склеивание параболического типа. Рассматривая на полуплоскости $I(z) > 0$ с функцией склеивания $\varphi(r)$ семейство линий Γ_r ,

* Условие (7) несколько лучше, чем аналогичное условие у Блана [18], где вместо второго неравенства стоит

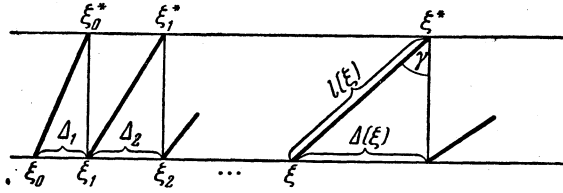
$$\left| \frac{f_1'(\xi)}{f_2'(\xi)} - 1 \right| < \frac{K}{\xi + f_1(\xi)} \quad (8)$$

($\xi > 0$). Правда, у Блана ничего не говорится об условии H_δ , но возможность обойтись требованием непрерывной дифференцируемости функций склеивания у него не доказывается.

представляющих полуокружности, опирающиеся на отрезки $[-\varphi(r), r]$, и применяя признак Альфорса, нетрудно получить достаточный признак для параболического типа склеивания (см., например, Мирберг [39]). Для полосы S , которую, не нарушая общности, мы будем



Фиг. 11



Фиг. 11a

считать имеющей ширину 1, удобнее воспользоваться линиями $\Gamma_\xi (\xi \geq \xi_0 > 0)$, представляющими отрезки, соединяющие точки $A(\xi, 0)$ и $A^*(\xi^*, 1)$, где $\xi^* = f(\xi)$ и $f(\xi)$ — функция склеивания. Обозначая через $l(\xi)$ длину отрезка AA^* , имеем (см. фигуры 11, 11a):

$$\frac{d\xi}{dn} \leq l(\xi) \cdot \max \left[1, \frac{d\xi}{d\xi^*} \right] < l(\xi) \left(1 + \frac{d\xi}{d\xi^*} \right);$$

и так как, очевидно,

$$\int_{\Gamma_\xi} ds = l(\xi) = \sqrt{1 + (\xi^* - \xi)^2},$$

то

$$\int_{\Gamma_\xi} \frac{d\xi}{dn} ds \leq [1 + (\xi^* - \xi)^2] \left(1 + \frac{d\xi}{d\xi^*} \right),$$

и из признаков Альфорса следует, что для параболического типа склеивания достаточна расходимость интеграла

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{[1 + (\xi^* - \xi)^2] \left(1 + \frac{d\xi}{d\xi^*} \right)}$$

или, что эквивалентно, расходимость интеграла

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{\min(d\xi, d\xi^*)}{1 + \Delta^2(\xi)}, \quad (9)$$

где

$$\Delta(\xi) = \xi^* - \xi = f(\xi) - \xi. \quad (10)$$

Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема 20. Для параболического типа склеивания полуплоскости $I(z) > 0$ с функцией склеивания $\varphi(r)$ достаточна расходимость соответствующего интеграла (9).

Рассмотрим частный случай, когда для $\xi > \xi_0$ производная $f'(\xi) \geq 1$. Тогда можно считать $f(\xi_0) > \xi_0$ и вместо интеграла (9) можно рассматривать эквивалентный интеграл

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\Delta^2(\xi)}. \quad (11)$$

Положим для $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n = f(\xi_{n-1}) \quad (12)$$

и

$$\Delta_n = \xi_n - \xi_{n-1}. \quad (13)$$

Тогда

$$\Delta_n = f(\xi_{n-1}) - \xi_{n-1} = \Delta(\xi_{n-1}).$$

Так как $f'(\xi) \geq 1$, то величина $\Delta(\xi)$ монотонно возрастает; следовательно,

$$\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\Delta^2(\xi_n)} \leq \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} \frac{d\xi}{\Delta^2(\xi)} \leq \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\Delta^2(\xi_{n-1})}$$

или

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}^2} \leq \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} \frac{d\xi}{\Delta^2(\xi)} \leq \frac{1}{\Delta_n},$$

откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}^2} \leq \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\Delta^2(\xi)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n}.$$

Но оба крайних ряда сходятся или расходятся одновременно, ибо

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\Delta_k} - \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{(\Delta_{k+1} + \Delta_k)(\Delta_{k+1} - \Delta_k)}{\Delta_k \Delta_{k+1}^2} < \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{\Delta_k} - \frac{1}{\Delta_{k+1}} \right) = \frac{2}{\Delta_1}.$$

Таким образом, мы доказали следующее предложение:

«Если $f'(\xi) \geq 1$ и ряд

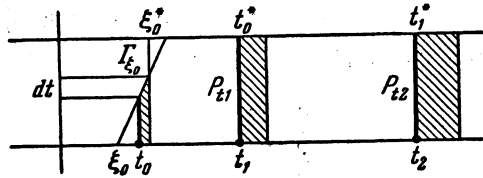
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} \quad (14)$$

расходится, то склеивание параболического типа.

52. Склеивание гиперболического типа. Сохраняя прежние обозначения, предположим, что для $\xi \geq \xi_0$ выполняется соотношение

$$\Delta(\xi) \geq \Delta(\xi_0) > 0, \quad (15)$$

и для каждого значения t ($0 \leq t \leq 1$) обозначим через P_t линию, состоящую из бесконечной последовательности вертикальных сечений



Фиг. 11в

расположенной справа от линии Γ_{ξ_0} части полосы S , проведенных из точек $(t_k, 0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где

$$t_0 = \xi_0 + t \cdot \Delta(\xi_0), \quad t_{k+1} = t_k^* = f(t_k). \quad (16)$$

Область, заключенная между P_t и P_{t+dt} , распадается тогда на бесконечно много бесконечно узких прямоугольников (фиг. 11в). Обозначая их боковые стороны через P_{t_k} , будем иметь

$$\int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{P_{t_k}} \frac{dt}{dv} d\lambda$$

сохраняем обозначения гл. 1, п. 9); и так как, в силу (16),

$$dt_0 = \Delta(\xi_0) dt$$

и, очевидно, $dv = dt_k$, то

$$\int_{P_{t_k}} \frac{dt}{dv} d\lambda = \frac{1}{\Delta(\xi_0) dt_k} \int_{P_{t_k}} d\lambda \leq \frac{1}{\Delta(\xi_0) dt_k} dt_0$$

(неравенство только для $k = 0$) и, следовательно,

$$\int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda \leq \frac{1}{\Delta(\xi_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dt_0}{dt_k}.$$

Из (16) следует, что

$$dt_k = f'(t_{k-1}) dt_{k-1} = \dots = f'(t_{k-1}) f'(t_{k-2}) \dots f'(t_0) dt_0.$$

откуда

$$\frac{dt_0}{dt_k} = \frac{1}{f'(t_0)f'(t_1)\dots f'(t_{k-1})},$$

и на основании S -признака гиперболического типа (п. 9, теорема 3) имеем следующую теорему [8]:

Теорема 21. Для гиперболического типа склеивания полуплоскости $I(z) > 0$ с функцией склеивания $\varphi(r)$ достаточна сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f'(t_0)f'(t_1)\dots f'(t_k)}, \quad (17)$$

где $f(\xi)$ — соответствующая $\varphi(r)$ функция склеивания для полосы S и t_0, t_1, \dots определяются из (16).

В частности, если, начиная с некоторого значения $\xi = \xi_0$,

$$f'(\xi) \geq q > 1, \quad (18)$$

то склеивание всегда гиперболического типа.* При возвращении полуплоскости $I(z) > 0$ условие (18) принимает вид

$$\frac{r\varphi'(r)}{\varphi(r)} \geq q > 1, \quad (19)$$

откуда заключаем, что если функция $\varphi(r)$ при больших r растет как степень r^q ($q > 1$), то склеивание гиперболического типа. Применяя это условие к точке $r = 0$, заключаем, что если вблизи $r = 0$ функция $\varphi(r)$ ведет себя как r^q ($q > 1$), то для окрестности точки $r = 0$ конформное склеивание невозможно (получаемая область склеивания для $0 < r \leq r_0$ в этом случае конформно эквивалентна кольцу). Отсюда становится ясным, почему в случае граничных вершин мы раньше, в пп. 47 и 49, исключали условие (3).

Предположим теперь, что для $\xi > \xi_0$ производная $f'(\xi) \searrow 1$. Полагая для $n = 1, 2, \dots$

$$\Delta_n = t_n - t_{n-1},$$

мы для $n > 2$ будем иметь

$$\Delta_n = \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} f'(\xi) d\xi \leq f'(t_{n-2}) \Delta_{n-1},$$

* В этом частном случае содержатся основные случаи Блана [17], когда $f(\xi) = q\xi$ или $f'(\xi) > K > 2$ и $f''(\xi) \geq 0$. Остальные случаи гиперболического типа у Блана [18] получаются из указанных путем квазиконформных преобразований (см. предыдущее подстрочное примечание).

следовательно

$$\frac{1}{f'(t_{n-2})} \leq \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n},$$

поэтому

$$\frac{1}{f'(t_0)f'(t_1)\dots f'(t_n)} \leq \frac{\Delta_1}{\Delta_{n+2}},$$

откуда, беря $t_0 = \xi_0$ и вспоминая результат конца п. 50, получаем следующую теорему:

Теорема 22. Если производная $f'(\xi) \searrow 1$, то склеивание будет гиперболического или параболического типа в зависимости от того, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n}, \quad (20)$$

где

$$\Delta_n = \xi_n - \xi_{n-1}, \quad \xi_n = f(\xi_{n-1}).$$

Примечание. Условие $f'(\xi) \searrow 1$ можно несколько ослабить, используя Q -квазиконформные преобразования и условие (7) для сохранения типа склеивания. Однако ни этим, ни другим путем мне не удалось доказать, что в теореме 22 можно условие $f'(\xi) \searrow 1$ заменить условием $f'(\xi) \geq 1$.

§ 13. Склеивание двух полуплоскостей или двух полос

53. Предварительные замечания. Мы будем рассматривать задачу на склеивание двух плоскостей $I(z) > 0$ и $I(z) < 0$ с функцией склеивания $x^* = \psi(x)$, связывающей их граничные прямые с точками $z = x$ и $z = x^*$. Нас будет интересовать тип склеивания в предположении, что склеивание, возможно, является вполне определенным и функция склеивания $\psi(x)$, начиная с некоторого значения $|x| = r_0$, имеет производную $\psi'(x)$, удовлетворяющую на каждом конечном сегменте условию H_δ (или, более обще, условиям теоремы 19).

Не нарушая общности, можно считать $\psi(0) = 0$. Отображая тогда полуплоскости $I(z) > 0$ и $I(z) < 0$ с помощью функции

$$\zeta = \xi + i\eta = \ln z,$$

соответственно, на полосы $S_1 (0 < \eta < \pi)$ и $S_2 (\pi < \eta < 2\pi)$, мы приходим к задаче на склеивание двух полос S_1 и S_2 с функциями склеивания

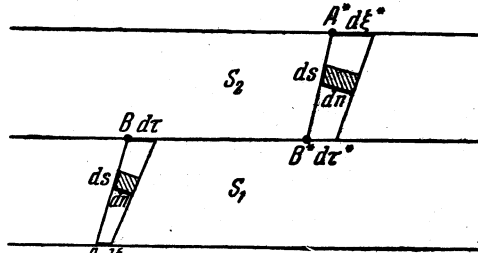
$$\xi^* = f(\xi), \quad \tau^* = \varphi(\tau), \quad (1)$$

связывающими граничные точки $A(\xi, 0)$ и $B(\tau, \pi)$ полосы S_1 с граничными точками $A^*(\xi^*, 2\pi)$ и $B^*(\tau^*, \pi)$ полосы S_2 . Функции $f(\xi)$ и $\varphi(\tau)$ связаны известным образом с функцией $\psi(x)$ и на них переносятся дифференциальные свойства последней.

54. Склеивание параболического типа. Определим функцию $\tau = \tau(\xi)$ так, чтобы

$$\tau - \xi = \xi^* - \tau^*, \quad (2)$$

и примем за линии Γ_ξ пары параллельных отрезков AB и A^*B^* (фиг. 12). Не нарушая общности, будем считать, что полосы S_1 и S_2 имеют ширину 1. Тогда на AB



Фиг. 12

$$\frac{d\xi}{dn} \leq l(\xi) \cdot \max \left[1, \frac{d\xi}{d\tau} \right] < l(\xi) \left(1 + \frac{d\xi}{d\tau} \right)$$

и на A^*B^*

$$\frac{d\xi}{dn} \leq l(\xi) \cdot \max \left[\frac{d\xi}{d\tau^*}, \frac{d\xi}{d\xi^*} \right] < l(\xi) \left(\frac{d\xi}{d\tau^*} + \frac{d\xi}{d\xi^*} \right),$$

где

$$l(\xi) = \int_{AB} ds = \int_{A^*B^*} ds = \sqrt{1 + (\tau - \xi)^2}.$$

Так как

$$\int_{\Gamma_\xi} \frac{d\xi}{dn} ds = \int_{AB} \frac{d\xi}{dn} ds + \int_{A^*B^*} \frac{d\xi}{dn} ds,$$

то из предыдущего, на основании признака Альфорса, следует, что для параболического типа склеивания достаточна расходимость интеграла

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{[1 + (\tau - \xi)^2] \left\{ 1 + \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{d\xi}{d\tau^*} + \frac{d\xi}{d\xi^*} \right\}}$$

или, что эквивалентно, расходимость интеграла

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{\min(d\xi, d\tau, d\tau^*, d\xi^*)}{1 + \Delta^2(\xi)}, \quad (3)$$

где

$$\Delta(\xi) = \tau(\xi) - \xi. \quad (4)$$

Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема 23. Для параболического типа склеивания двух полуплоскостей $I(z) > 0$ и $I(z) < 0$ с функцией склеивания $\psi(x)$ достаточна расходимость интеграла (3).

55. Два примера. Если Γ_ξ определять как совокупность отрезков AB и A^*B^* , взяв при этом $\tau = \xi$, то вместо интеграла (3) получим интеграл

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{1 + \{1 + (\xi^* - \tau^*)^2\} \left(\frac{d\xi}{d\tau^*} + \frac{d\xi}{d\xi^*} \right)}. \quad (5)$$

Аналогичный интеграл получается также, если, сохраняя отрезок AB с $\tau = \xi$, вместо отрезка A^*B^* взять линию, прообраз которой в полуплоскости $I(z) < 0$ есть полуокружность (см. Блан [17]). В некоторых случаях оценка с интегралом (3) лучше, как показывает следующий пример. Пусть

$$\xi^* = f(\xi) = a_1 e^\xi, \quad \tau^* = \varphi(\tau) = a_2 e^\tau \quad (a_1 > a_2).$$

Чтобы определить функцию $\tau(\xi)$ соответственно с условием (2), положим

$$\tau(\xi) - \xi = \delta(\xi).$$

Тогда из (2) следует, что

$$\delta(\xi) = a_1 e^\xi - a_2 e^{\xi + \delta(\xi)},$$

откуда

$$\frac{\delta(\xi)}{a_1 - a_2 e^{\delta(\xi)}} = e^\xi;$$

следовательно,

$$a_1 - a_2 e^{\delta(\xi)} > 0,$$

ибо, очевидно, при $a_1 > a_2$ величина $\delta(\xi) > 0$. Из последнего неравенства имеем

$$\delta(\xi) < \ln \frac{a_1}{a_2}.$$

Легко также убедиться, что $\delta'(\xi) > 0$ и, так как $\tau(\xi) = \xi + \delta(\xi)$, то $d\tau > d\xi$. Так как, далее, $d\tau^* > d\tau$ и $d\xi^* > d\xi$, то

$$\min(d\xi, d\tau, d\tau^*, d\xi^*) = d\xi.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\Delta(\xi) = \tau(\xi) - \xi = \delta(\xi) < \ln \frac{a_1}{a_2},$$

закключаем, что интеграл (3) расходится и, значит, склеивание — параболического типа.

Соответствующий подсчет для интеграла (5) дает

$$\xi^* - \tau^* = (a_1 - a_2) e^\xi, \quad \frac{d\xi}{d\tau^*} = \frac{e^{-\xi}}{a_2}, \quad \frac{d\xi}{d\xi^*} = \frac{e^{-\xi}}{a_1},$$

откуда следует, что интеграл (5) сходится, что не позволяет сделать заключение о типе склеивания.

Если взять функции склеивания

$$\xi^* = a_1 \xi, \quad \tau^* = a_2 \tau,$$

то оба интеграла (3) и (5) сходятся. Из получаемых ниже (п. 57) результатов следует, что в этом случае склеивание гиперболического типа.

56. Симметричный случай. Предположим, что первоначальная функция склеивания $x^* = \psi(x)$ нечетна, т. е. $\psi(-x) = -\psi(x)$. Тогда обе функции склеивания $f(\xi)$ и $\varphi(\tau)$ одинаковы (т. е. $f(\xi) \equiv \varphi(\xi)$); следовательно, соотношение (2), определяющее функцию $\tau(\xi)$, принимает вид

$$\tau(\xi) - \xi = \xi^* - \tau^* = 0,$$

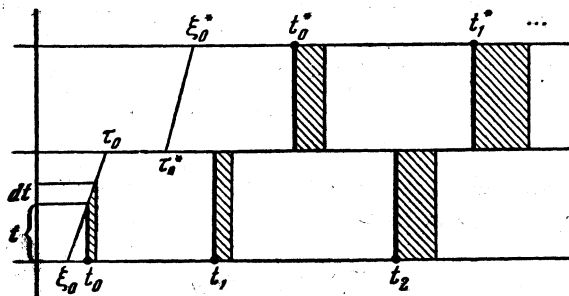
и интеграл (3) приводится к интегралу

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \min(d\xi, d\xi^*). \tag{6}$$

Поэтому в случае симметрии расходимость интеграла (6) обеспечивает параболический тип склеивания (см. Блан [17]). В частности, если, начиная с некоторого значения $\xi = \xi_0$, производная $f'(\xi) \geq 1$, то склеивание — параболического типа. Если же уравнение $f'(\xi) = 1$ имеет сколь угодно большие корни, то склеивание может быть и гиперболического типа.

57. Гиперболический тип склеивания. Будем снова рассматривать полосы S_1 и S_2 шириной 1 с функциями склеивания (1) и функцией $\tau(\xi)$, определяемой соотношением (2), и предположим, что для $\xi \geq \xi_0$ отрезки $\Delta(\xi)$, определяемые согласно (4), удовлетворяют условию

$$\Delta(\xi) \geq \Delta(\xi_0) > 0. \tag{7}$$



Фиг. 12а

Для каждого значения t ($0 \leq t \leq 2$) обозначим через P_t линию, состоящую из бесконечной последовательности вертикальных сечений, расположенных справа от линии Γ_{ξ_0} , частей полос S_1 и S_2 , проведенных в S_1

из точек $(t_k, 0)$, а в S_2 — из точек $(t_k^*, 2)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), определяемых соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= \xi_0 + t \cdot \Delta(\xi_0), \text{ если } 0 \leq t < 1 \\ \varphi(t_0) &= \tau_0^* + (t-1) \cdot \Delta(\xi_0), \text{ если } 1 \leq t < 2 \\ f(t_k) &= t_k^* = \varphi(t_{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Область, заключенная между P_t и P_{t+dt} , снова распадается на бесконечно много бесконечно узких прямоугольников (фиг. 12а).

Вводя функции F и Φ , определенные соотношениями

$$t_{k+1} = F(t_k), \quad t_{k+1}^* = \Phi(t_k^*), \quad (9)$$

и оценивая, как в п. 52, величину

$$\int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda,$$

получим для нее следующую оценку:

$$\int_{P_t} \frac{dt}{dv} d\lambda \leq \frac{1}{\Delta(\xi_0)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{F'(t_0) F'(t_1) \dots F'(t_k)} + \frac{1}{f'(t_0)} \cdot \frac{1}{\Phi'(t_0^*) \Phi'(t_1^*) \dots \Phi'(t_k^*)} \right] \right\},$$

если $0 \leq t < 1$, и такую же оценку, только со множителем $\varphi'(t_0)$, если $1 \leq t < 2$. Отсюда, на основании S -признака гиперболического типа следует, что для гиперболического типа склеивания полуплоскостей $I(z) > 0$ и $I(z) < 0$ с функцией склеивания $\psi(x)$ достаточна сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{F'(t_0) F'(t_1) \dots F'(t_k)} + \frac{1}{\Phi'(t_0^*) \Phi'(t_1^*) \dots \Phi'(t_k^*)} \right]. \quad (10)$$

Если $F' \searrow 1$ и $\Phi' \searrow 1$, то, полагая

$$\Delta_n = t_n - t_{n-1}, \quad \Delta'_n = t_n^* - t_{n-1}^*, \quad (11)$$

легко, как в конце п. 51, доказать, что для сходимости ряда (10) достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta_n} + \frac{1}{\Delta'_n} \right). \quad (12)$$

Однако утверждать здесь, как в теореме 22, что расходимость ряда (12) обеспечивает параболический тип склеивания, вообще говоря, нельзя (противоречащего примера мне все же построить не удалось).

Возвращаясь к (10) и замечая, что

$$\varphi'(t_n) dt_n = dt_{n-1}^* = f'(t_{n-1}) dt_{n-1}$$

и

$$dt_n^* = f'(t_n) dt_n,$$

закключаем, на основании (9), что

$$F'(t_{n-1}) = \frac{dt_n}{dt_{n-1}} = \frac{f'(t_{n-1})}{\varphi'(t_n)}$$

и

$$\Phi'(t_{n-1}^*) = \frac{dt_n^*}{dt_{n-1}^*} = \frac{f'(t_n)}{\varphi'(t_n)}$$

что приводит к следующей теореме:

Теорема 24. Для гиперболического типа склеивания полуплоскостей $I(z) > 0$ и $I(z) < 0$ с функцией склеивания $\psi(x)$ достаточна сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} [1 + \varphi'(t_{n+1})] \frac{\varphi'(t_1) \varphi'(t_2) \dots \varphi'(t_n)}{f'(t_1) f'(t_2) \dots f'(t_n)}, \quad (13)$$

где f и φ — соответствующие функции склеивания (1) для полос S_1 и S_2 и t_1, t_2, \dots определяются из (8).

В частности, если выполняются условия

$$\varphi'(t) < O(1), \quad \frac{\varphi'(t)}{f'(t)} \leq q < 1, \quad (14)$$

то склеивание всегда гиперболического типа. Условия (14) выполняются, например, в том случае, когда функция склеивания $\psi(x)$ растет по абсолютной величине как x^{a_1} , если $x > 0$, и как $|x|^{a_2}$, если $x < 0$, причем $a_1 \neq a_2$. Заменяя z на $\frac{1}{z}$, заключаем отсюда, что если в точке $z = 0$ функция склеивания справа и слева имеет нули разного порядка, то для окрестности $z = 0$ конформное склеивание невозможно (конформное склеивание такой окрестности без самой точки $z = 0$ приводит к кольцу). Вспоминая задачи на склеивание пп. 47, 49, заключаем, что конформное склеивание в окрестности произвольной граничной вершины невозможно, если функции склеивания имеют там нули разного порядка.

Примечание. Выведенные в этом параграфе признаки параболического и гиперболического типов склеивания двух полос при $\tau^* = \varphi(\tau) \equiv \tau$ превращаются в аналогичные признаки типа склеивания для одной полосы. В частном случае возможно, однако, получение признаков типа склеивания двух полос из соответствующих признаков для одной полосы. Как замечает Блан [18], такой случай мы имеем, когда

при $\xi^* = f(\xi)$ величина $\tau = \varphi^{-1}(\tau^*) = f(\tau^*)$. В самом деле, предположим, что мы решили задачу на склеивание для полосы S_1 , рассматривая точки $A(\xi, 0)$ и $B(\tau, 1)$ (где $\tau = \tau(\xi)$ определяется снова из соотношения (2)) как склеиваемые точки. Такое же склеивание мы будем тогда иметь и для полосы S_2 со склеиваемыми точками $B^*(\tau^*, 1)$ и $A^*(\xi^*, 2)$. Пусть в обоих случаях $|\omega| < R$ — круг склеивания и C — линия склеивания. Проводя в обоих кругах разрез по C и склеивая по нему оба круга, мы получим односвязную двулистную поверхность, решающую задачу на склеивание для полос S_1 и S_2 . Тип этого склеивания, очевидно, совпадает с типом склеивания для одной полосы с функцией склеивания $f(\xi)$ (см. Блан, там же). Если $f'(\xi) \searrow 1$, то теорема 22 дает нам необходимое и достаточное условие для типа склеивания.

§ 14. Склеивание бесконечного числа полос

58. Постановка задачи (см. [28]). Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) — произвольная последовательность действительных функций, определенных на интервале $(0, \infty)$ и имеющих всюду положительные первые производные, удовлетворяющие условию H_δ (условие Гёлдера с показателем δ и постоянной H) на каждом сегменте, лежащем на интервале $(0, \infty)$. *

Пусть, далее функции $\varphi_n(t)$ обращаются в нуль в одной и той же точке $t = t_0$:

$$\varphi_n(t_0) = 0 \quad (1)$$

и удовлетворяют предельным соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_n(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \infty. \quad (2)$$

Каждой функции $\varphi_n(t)$ поставим в соответствие в плоскости $z = x + iy$ две симметричные относительно действительной оси $I(z) = 0$ полосы: S_n ($n - 1 < y < n$) и S'_n ($n - 1 < -y < n$), и условимся через (x_n) обозначать любую из граничных точек этих полос, имеющую абсциссу

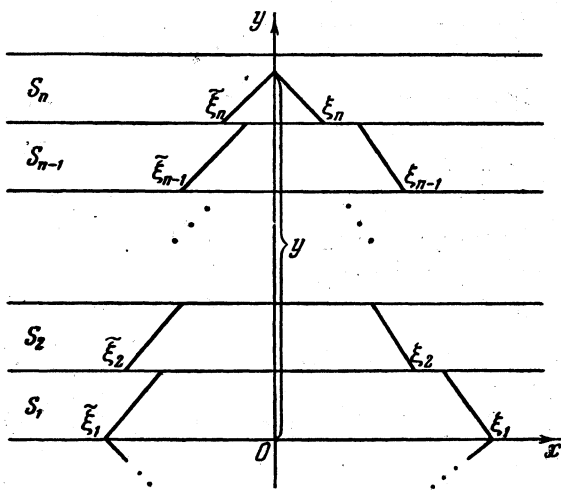
$$x_n = \varphi_n(t). \quad (3)$$

Будем теперь склеивать наши полосы в единую риманову поверхность, требуя, чтобы всякие две точки (x_n) и (x_{n+1}) , лежащие на общей граничной прямой полос S_n и S_{n+1} или S'_n и S'_{n+1} , равно как каждая пара одинаковых точек (x_1) , лежащих на общей граничной прямой

* Величины H и δ зависят от выбора функции и выбора сегмента. Условие H_δ можно, вероятно, заменить требованием непрерывности (см. подстрочное примечание к концу п. 48).

полос S_1 и S'_1 переходили в одну точку. При сделанных выше ограничениях на $\{\varphi_n(t)\}$, склеивание, по теореме 19, возможно, и является вполне определенным. Нас будет интересовать тип склеивания.

59. Признак параболического типа. Обозначим через Γ_y ($0 < y < \infty$) линию, состоящую из конечного числа отрезков, получаемых при выполнении следующего построения: из точки $z = iy$ проводим две прямые, направленные к оси x -ов под углом 45° к мнимой оси до встречи с ближайшей прямой $z = in$ в некоторых точках: $\xi_n(y)$ — справа и $\tilde{\xi}_n(y)$ — слева от мнимой оси. Из точек, соответствующих в нашей задаче на склеивание точкам $\xi_n(y)$ и $\tilde{\xi}_n(y)$, проводим новые прямые, соответственно параллельные прежним, до встречи с прямой $z = i(n-1)$ в некоторых точках: $\xi_{n-1}(y)$ — справа и $\tilde{\xi}_{n-1}(y)$ — слева и т. д. до встречи с осью x -ов. Проводя симметричное построение снизу, от точки $z = -iy$, получим совокупность отрезков, составляющих линию Γ_y (фиг. 13).



Фиг. 13

Оценим k -длину линии Γ_y , т. е. величину

$$L(y) = \int_{\Gamma_y} \frac{dy}{dn} ds, \tag{4}$$

считая, что

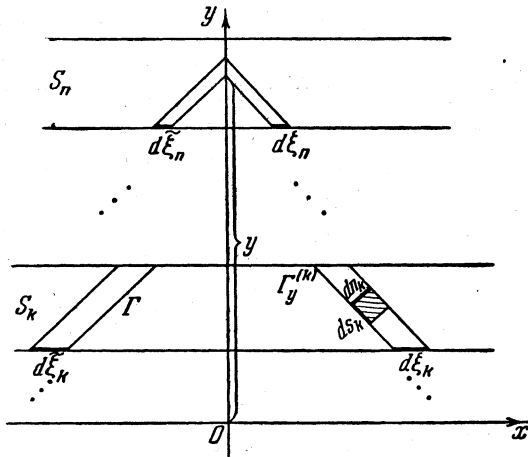
$$n-1 < y < n. \tag{5}$$

Обозначая через Γ_{yk} отрезок линии Γ_y , лежащий в полосе S_k справа от мнимой оси, через ds_k — элемент отрезка Γ_{yk} и через dn_k — элемент нормали (перпендикуляра) к Γ_{yk} , будем иметь (фиг. 14):

$$\int_{\Gamma_{yk}} \frac{dy}{dn_k} ds_k = \sqrt{2} \frac{dy}{d\xi_k} \int_{\Gamma_{yk}} ds_k = 2 \frac{dy}{d\xi_k}.$$

В силу (5) имеем $dy = d\xi_n$; поэтому часть $L_I(y)$ величины $L(y)$, приходящаяся на первый квадрант плоскости z , удовлетворяет соотношению

$$L_I(y) < 2 \sum_{k=1}^n \frac{d\xi_n}{d\xi_k}.$$



Фиг. 14

Аналогично, для части $L_{II}(y)$ величины $L(y)$, приходящейся на второй квадрант, имеем

$$L_{II}(y) < 2 \sum_{k=1}^n \frac{d\tilde{\xi}_n}{d\tilde{\xi}_k},$$

откуда, учитывая еще вторую половину линии Γ_y , расположенную в нижней полуплоскости $I(z) < 0$, получаем оценку:

$$L(y) < 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\xi_n}{d\xi_k} + \frac{d\tilde{\xi}_n}{d\tilde{\xi}_k} \right). \quad (6)$$

Предположим теперь, что функции $\{\varphi_n(t)\}$ обладают еще тем свойством, что для всех $n = 1, 2, \dots$ существует конечная верхняя граница

$$m_n = \sup_{(0 < t < \infty)} \frac{\varphi'_{n+1}(t)}{\varphi_n(t)} < \infty. \quad (7)$$

Тогда для всех $y (0 < y < \infty)$ и всех $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$\frac{d\xi_{k+1}}{d\xi_k} \leq m_k,$$

следовательно,

$$\frac{d\xi_n}{d\xi_k} = \frac{d\xi_n}{d\xi_{n-1}} \cdot \frac{d\xi_{n-1}}{d\xi_{n-2}} \cdots \frac{d\xi_{k+1}}{d\xi_k} \leq m_{n-1} m_{n-2} \cdots m_k,$$

откуда, полагая

$$p_n = m_1 m_2 \cdots m_n, \quad (8)$$

имеем

$$\frac{d\xi_n}{d\xi_k} \leq \frac{p_{n-1}}{p_{k-1}}.$$

Аналогично имеем

$$\frac{d\tilde{\xi}_n}{d\tilde{\xi}_k} \leq \frac{p_{n-1}}{p_{k-1}};$$

следовательно, в силу (6),

$$L(y) < 8 \sum_{k=1}^n \frac{p_{n-1}}{p_{k-1}}.$$

Отсюда

$$\int_{n-1}^n \frac{dy}{L(y)} > \frac{1}{8} \frac{1}{n \sum_{k=1}^n \frac{p_{n-1}}{p_{k-1}}},$$

и интеграл

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{L(y)} \quad (y_0 > 0)$$

расходится вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_{k-1}}}$$

или, что эквивалентно, вместе с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}. \quad (9)$$

Из признака Альфорса получаем следующую теорему:

Теорема 25. Для того, чтобы открытая односвязная риманова поверхность, получаемая при конформном склеивании бесконечного числа полос $\{S_n, S'_n\}$ с функциями склеивания $\{\varphi_n(t)\}$, удовлетворяющими вышеперечисленным условиям, была параболического типа, достаточна расходимость ряда (9), где величины $\{p_n\}$ определяются из соотношений (7) и (8).

60. Два примера. Мы скажем, что последовательность функций $\{\varphi_n(t)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) порождается функцией $f(t)$ и последовательностью положительных чисел $\{\lambda_n\}$, если

$$\varphi_n(t) = f(\lambda_n t) - f(\lambda_n t_0). \quad (10)$$

Пусть

$$f(t) = \ln \ln(1+t). \quad (11)$$

Элементарное исследование функции $f(t)$ показывает, что для всяких двух положительных чисел α и β ($\alpha < \beta$) и всех значений t ($0 \leq t \leq \infty$), выполняется соотношение

$$1 \leq \frac{\alpha f'(\alpha t)}{\beta f'(\beta t)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad (12)$$

причем равенство слева достигается только для $t = 0$ (берем $t \rightarrow 0$).

Возьмем теперь произвольную монотонно возрастающую последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

и определим соответствующие функции $\{\varphi_n(t)\}$ из (10). Тогда из (12) следует, что

$$m_n = \sup_{(0 < t < \infty)} \frac{\varphi_{n+1}'(t)}{\varphi_n'(t)} = \sup_{(0 < t < \infty)} \frac{\lambda_{n+1} f'(\lambda_{n+1} t)}{\lambda_n f'(\lambda_n t)} = 1;$$

следовательно, для всех $n = 1, 2, \dots$ величина p_n из (8) равна 1, и ряд (9) расходится.

Возьмем теперь монотонно убывающую последовательность

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$$

Тогда из (12) следует, что

$$m_n \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$$

(равенство только для $\lambda_{n+1} = \lambda_n$); следовательно,

$$p_n = m_1 m_2 \dots m_n \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}},$$

и ряд (9) расходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$.

Из теоремы 25 следует такая теорема:

Теорема 26. *Открытая односвязная риманова поверхность, получаемая при конформном склеивании бесконечного числа полос с функциями склеивания $\{\varphi_n(t)\}$, порождаемыми функцией*

$$f(t) = \ln \ln(1+t)$$

и последовательностью положительных чисел $\{\lambda_n\}$, всегда параболического типа, если

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \dots$$

или

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(t) = -\ln \ln \operatorname{cth}^2 t. \quad (13)$$

Элементарное исследование показывает, что для всяких двух поло-

жительных чисел α и β ($\alpha < \beta$) и всех значений t ($0 \leq t \leq \infty$) выполняется соотношение

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha f'(\alpha t)}{\beta f'(\beta t)} \leq 1, \quad (14)$$

причем равенство слева достигается только для $t=0$ и справа — только для $t=\infty$.

Повторяя те же выкладки, что и выше, приходим к следующей теореме:

Теорема 27. *Открытая односвязная риманова поверхность, получаемая при конформном склеивании бесконечного числа полос с функциями склеивания $\{\varphi_n(t)\}$, порождаемыми функцией*

$$f(t) = -\ln \ln^2 t$$

и последовательностью положительных чисел $\{\lambda_n\}$, всегда параболического типа, если

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$$

или

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Примечание. С помощью квазиконформных отображений можно ослабить требование монотонного изменения последовательностей $\{\lambda_n\}$, входящих в последние две теоремы. Можно ли однако отбросить требование монотонности, мне выяснить не удалось.

Обе указанные теоремы будут ниже (пп. 110, 113) использованы для определения типа некоторых классов односвязных римановых поверхностей.

§ 15. Склеивание бесконечного числа полос с полуплоскостью

61. Постановка задачи (см. [40]). Пусть $f(t)$ и $\{\varphi_n(t)\}$ ($n=1, 2, \dots$) — вещественные функции, определенные на интервале $(0, \infty)$, изменяющиеся от $-\infty$ до ∞ , когда t возрастает от 0 до ∞ , и имеющие всюду положительные первые производные, удовлетворяющие условию H_8 на каждом конечном интервале значений t .*

Каждой функции $\varphi_n(t)$ поставим в соответствие в комплексной плоскости $z = x + iy$ полосу S_n ($n-1 < y < n$) и функции $f(t)$ — полуплоскость H ($y < 0$). Полагая

$$x = f(t), \quad x_n = \varphi_n(t) \quad (1)$$

и рассматривая как соответствующие друг другу всякую пару

* См. примечание к началу п. 58.

точек $x_n + in$, $x_{n+1} + in$ ($n = 1, 2, \dots$), а также x , x_1 , получаем некоторую задачу на склеивание бесконечного числа полос $\{S_n\}$ с полуплоскостью H .

Пусть $\varphi(t)$ — функция, удовлетворяющая тем же условиям, что и функции (1). Заменяя последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ функцией $\varphi(t)$ и ставя последней в соответствие полуплоскость $H^*(y > 0)$, приходим к задаче на склеивание полуплоскостей H и H^* с функцией склеивания

$$x = \psi(x^*), \quad (2)$$

определяемой параметрически уравнениями

$$x = f(t), \quad x^* = \varphi(t). \quad (3)$$

Если функции $\varphi_n(t)$ сходятся, притом достаточно быстро, к функции $\varphi(t)$, то можно ожидать, что тип склеивания в обеих задачах будет одинаков. Ниже этот вопрос изучается при различных дополнительных ограничениях на функции склеивания.

62. Дополнительные ограничения на функции склеивания. Предположим, что наши функции удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

1) на каждом конечном отрезке значений

$$\varphi_n(t) \Rightarrow \varphi(t), \quad \varphi'_n(t) \Rightarrow \varphi'(t); \quad (4)$$

2) для всех t

$$f'(t) \geq \varphi'_1(t) \geq \varphi'_2(t) \geq \dots$$

или, учитывая (4),

$$f'(t) \geq \varphi'_1(t) \geq \varphi'_2(t) \geq \dots \geq \varphi'(t); \quad (5)$$

3) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)}{\varphi'(t)} = 1. \quad (6)$$

Из (5) и (6) для функции склеивания (2) получаем соотношения

$$\psi'(x^*) \geq 1, \quad \lim_{x^* \rightarrow -\infty} \psi'(x^*) = 1. \quad (7)$$

Зафиксируем произвольное значение t_0 , для которого

$$f(t_0) > \varphi(t_0) > 0 \quad (8)$$

(существование такого t_0 можно предполагать, не нарушая общности), и определим последовательность значений $\{t_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), определяемых для $n \geq 1$ последовательно из соотношений

$$f(t_n) = \varphi(t_{n+1}). \quad (9)$$

Потребуем еще от наших функций, чтобы:

4) существовало конечное $\lambda > 1$ такое, что для всех $n = 1, 2, \dots$

$$\sup_{0 < t < t_{n+1}} \frac{\varphi_n'(t)}{\varphi'(t)} < \lambda. \quad (10)$$

Для дальнейшего определим последовательность величин $\{r_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$r_n = f(t_n) = \varphi(t_{n+1}), \quad (11)$$

а также величин

$$\Delta_n = r_n - r_{n-1} = f(t_n) - f(t_{n-1}) = \varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n). \quad (12)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$r_{n+1} = \psi(r_n);$$

следовательно,

$$\Delta_{n+1} = \psi(r_n) - \psi(r_{n-1});$$

откуда, в силу (7),

$$\Delta_{n+1} \geq \Delta_n \geq \dots \geq \Delta_1 \quad (13)$$

и, как следствие,

$$r_n \geq r_0 + n\Delta_1. \quad (14)$$

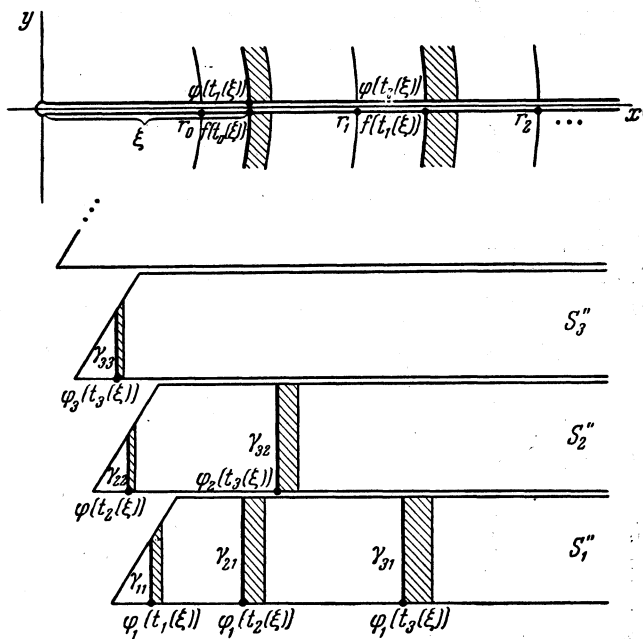
63. Частичное преобразование и склеивание полос $\{S_n\}$. При помощи отрезков, соединяющих точки $\varphi_n(t_n) + i(n-1)$ и $\varphi_n(t_{n+1}) + in$, разобьем каждую полосу S_n ($n = 1, 2, \dots$) на две части: S_n' — слева и S_n'' — справа.

Каждую полуполосу S_n' преобразуем Q -квазиконформно в аналогичную полуполосу S_n^* , ограниченную справа отрезком, соединяющим точки $\varphi(t_n) + i(n-1)$ и $\varphi(t_{n+1}) + in$. Для этого вертикальным сечением S_n' с абсциссами $\varphi_n(t)$ поставим в соответствие вертикальные сечения S_n^* с абсциссами $\varphi(t)$, подвергая преобразуемые сечения подходящему сжатию или растяжению (последнее может оказаться необходимым только для $t_n < t < t_{n+1}$, ибо для $t \leq t_n$ все указанные сечения равны 1). Коэффициент сжатия-растяжения для данного t равен отношению

$$\frac{\varphi_n(t_{n+1}) - \varphi_n(t_n)}{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t_n)} : \frac{\varphi_n(t_{n+1}) - \varphi_n(t)}{\varphi(t_{n+1}) - \varphi(t)},$$

откуда, применяя теорему Коши и вспоминая (5) и (10), заключаем, что это отношение не превосходит λ . Из тех же соотношений следует, что переход от абсциссы $\varphi_n(t)$ к абсциссе $\varphi(t)$ представляет квазиконформное преобразование с характеристикой, не превосходящей λ . Отсюда следует, что указанное преобразование S_n' в S_n^* есть квазиконформное преобразование с характеристикой, не превосходящей λ^2 .

Пусть $A_n(\xi)$ и $A_n^*(\xi)$ — граничные точки полуплоскостей H и H^* , соответственно, имеющие абсциссу $r_n(\xi)$. Считая полуплоскости H и H^* склеенными] вышеуказанным образом вдоль отрицательной действительной полуоси, обозначим через $C_n(\xi)$ окружности $|z| = r_n(\xi)$, разомкнутые в точке $z = r_n(\xi)$ и, следовательно, соединяющие точки $A_n(\xi)$ и $A_n^*(\xi)$. Обозначим еще через $\gamma_{sn}(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots; s = n, n + 1, \dots$) вертикальные сечения полуполос S_n'' с абсциссами $\varphi_s[t_n(\xi)]$. Рассмотрим отрезки $\gamma_{nn}(\xi)$, $\gamma_{n, n-1}(\xi)$, \dots , $\gamma_{n1}(\xi)$, определяемые значением $t_n(\xi)$.



Фиг. 15

Нетрудно заметить, что верхний конец отрезка $\gamma_{nn}(\xi)$ расположен на граничном отрезке полуполосы S_n'' , соответствует точке $A_n^*(\xi)$; далее, что нижнему концу $\gamma_{nn}(\xi)$ соответствует верхний конец $\gamma_{n, n-1}(\xi)$, нижнему концу $\gamma_{n, n-1}(\xi)$ — верхний конец $\gamma_{n, n-2}(\xi)$ и т. д. Нижнему же концу $\gamma_{n1}(\xi)$ соответствует точка $A_{n+1}(\xi)$. Таким образом, если мы к окружности $C_n(\xi)$ присоединим отрезки $\gamma_{nn}(\xi)$, $\gamma_{n, n-1}(\xi)$, \dots , $\gamma_{n1}(\xi)$, то после склеивания мы будем иметь линию, соединяющую $A_n(\xi)$ и $A_{n+1}(\xi)$.

Теперь мы уже можем определить линию P_ξ : именно, мы определим такую линию как совокупность разомкнутых окружностей $C_n(\xi)$ ($n = 0, 1, \dots$) и всевозможных отрезков $\gamma_{sn}(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots; s = n, n + 1, \dots$) (фиг. 15).

Чтобы оценить величину интеграла

$$\int_{P_{\xi}} \frac{d\xi}{d\nu} d\lambda, \quad (16)$$

входящего в S -признак гиперболического типа, рассмотрим область, заключенную между линиями P_{ξ} и $P_{\xi+d\xi}$. Эта область состоит из бесконечного числа круговых колец, заключенных между окружностями $C_n(\xi)$ и $C_n(\xi+d\xi)$, а также бесконечного числа вертикальных столбиков, заключенных в S_n'' между отрезками $\gamma_{sn}(\xi)$ и $\gamma_{sn}(\xi+d\xi)$. Кольца имеют, соответственно, ширину $dr_n(\xi)$ и длину $2\pi r_n(\xi)$, поэтому для соответствующей части интеграла (16) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_n(\xi)} \frac{d\xi}{d\nu} d\lambda = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(\xi)}{r'_n(\xi)}.$$

Так как ширина столбика, примыкающего к произвольному отрезку $\gamma_{sn}(\xi)$, равна $d\varphi_s[t_n(\xi)]$, следовательно, в силу (5), не меньше, чем $d\varphi[t_n(\xi)] = dr_{n-1}(\xi)$, и длина этого столбика равна 1 для $s < n$ и меньше 1 для $s = n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} \int \frac{d\xi}{d\nu} d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r'_{n-1}(\xi)}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\int_{P_{\xi}} \frac{d\xi}{d\nu} d\lambda \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1+2\pi r_n(\xi)}{r'_n(\xi)}.$$

Так как, очевидно, $r_{n+1}(\xi) = \psi[r_n(\xi)]$, то, как в конце п. 62, убеждаемся, что величина $r_n(\xi)$ растет не медленнее, чем $O(1) \cdot n$; поэтому последний ряд сходится и расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(\xi)}{r'_n(\xi)}. \quad (17)$$

На основании S -признака гиперболического типа \S сходимости ряда (17) достаточна для гиперболического типа склеивания полос $\{S_n\}$ с плоскостью H . Но это же условие, очевидно, достаточно для гиперболического типа склеивания полуплоскостей H и H^* . Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема 28. Если функции $f(t)$, $\{\varphi_n(t)\}$ и $\varphi(t)$, определяющие задачи на склеивание бесконечного числа полос $\{S_n\}$ с полуплоскостью H и полуплоскости H с полуплоскостью H^* , обладают указанными выше дифференциальными свойствами и удовлетворяют четырем условиям п. 62, то для обеих задач склеивание одно-

временно гиперболического типа, если сходится ряд (17), члены которого определяются соотношениями (15).

В частности, ряд (17) сходится, если, начиная с некоторого значения t , выполняется соотношение

$$\frac{[\ln \varphi(t)]}{[\ln f(t)]} \leq q < 1. \quad (18)$$

65. Пример. В качестве примера приведем систему функций:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \ln t, \\ \varphi_n(t) &= \ln [n(\sqrt[n]{1+t}-1)], \\ \varphi(t) &= \ln \ln(1+t). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Она удовлетворяет всем требованиям теоремы 28, исключая соотношение (10), которое выполняется для подпоследовательности $\{\varphi_{n_k}(t)\}$ с достаточно быстро возрастающими индексами $\{n_k\}$. * Ряд (17) сходится; поэтому для таких последовательностей склеивание полос $\{S_n\}$ с полуплоскостью H — гиперболического типа.

§ 16. Задача на склеивание для модулярной фигуры

66. Постановка задачи (см. [29]). Исходя из произвольного расходящегося ряда с положительными членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \infty, \quad (1)$$

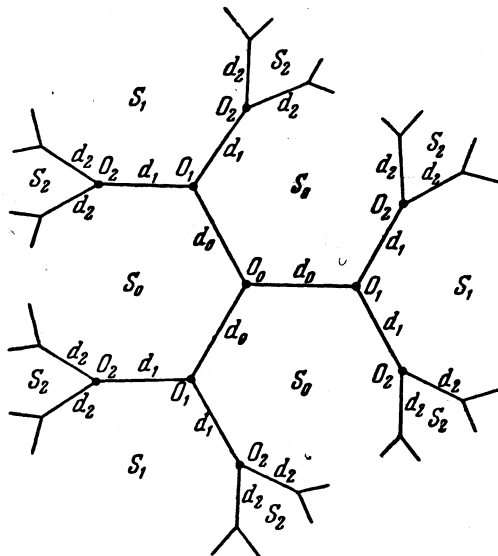
построим модулярную фигуру с отрезками, равными в n -ом поколении d_n . Обозначим через O_n любую из узловых точек n -го поколения и через S_n — любую область модулярной фигуры с наименьшим для ее граничных вершин индексом, равным n (фиг. 16). Каждой области S_n поставим в соответствие полуплоскость H_n (полуплоскость $I(z) > 0$), на границе которой, в обе стороны от начала, обозначенного через O_n , отложены последовательно отрезки $d_n, d_{n+1}, d_{n+2}, \dots$

Для совокупности $\{H\}$ всех таких полуплоскостей поставим задачу на склеивание, связывая их между собой попарно тождественным соответствием вдоль отрезков d_n , подобно заполнению модулярной фигуры ее областями. Под задачей на склеивание для модулярной фигуры будем понимать задачу на определение типа односвязной римановой поверхности, которую можно Q -квазиконформно отобразить на полуплоскости $\{H\}$, связанные между собой указанным выше образом.

$\frac{k \text{ раз}}{e \dots e}$

* Подсчет показывает, что n_k должно быть примерно порядка $e \dots e$.

Чтобы построить пример такой поверхности, достаточно полуплоскости $\{H\}$ превратить в плоскости $\{H^*\}$, с разрезом вдоль действительной положительной полуоси, без растяжения на границе (увеличиваем в два раза углы с вершиной в начале). Плоскости $\{H^*\}$ допускают тогда непосредственное склеивание по схеме модулярной фигуры. Получается односвязная риманова поверхность F^* с точками ветвления 1-го порядка, Q -квазиконформно соответствующая задаче на склеивание для модулярной фигуры.



Фиг. 16

Заметим, что поверхность F^* принадлежит классу поверхностей A_∞ (см. п. 29). Ниже (§ 20) мы рассмотрим другие примеры поверхностей классов A_∞ и $A_{0, \infty}$, Q -квазиконформно соответствующих той же задаче на склеивание.

В более общем случае отрезки d_n одного и того же поколения могут быть и разные.*

67. Параболический тип склеивания. Сохраняя евклидову метрику на комплексе отрезков K модулярной фигуры, состоящем из граничных отрезков $\{d_n\}$ полуплоскостей $\{H\}$, обозначим через Γ_ρ , для каждого значения $\rho > 0$, линию, составленную из всевозможных полуокружностей, расположенных в полуплоскостях $\{H\}$ и соединяющих точки комплекса K , отстоящие от точки O_0 („нулевой узел“) на расстоянии ρ . Положим для $n = 1, 2, \dots$

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k. \quad (2)$$

* По существу такой задачей занимался Ле-Ван Тьем [13] в связи с определением типа некоторых поверхностей класса $F^{(q)}$.

Тогда легко подсчитать, что для $\rho = R_n$ величина

$$L(R_n) = 3\pi \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_k \quad (3)$$

и для $\rho = R_n + r$, где $0 \leq r \leq d_n$

$$L(\rho) = L(R_n) + 3 \cdot 2^n \pi r = 3\pi \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_k + 2^n r \right); \quad (4)$$

следовательно, $dL(\rho) = 3 \cdot 2^n \pi dr$ и, так как, очевидно, $dr = d\rho$, то

$$\int_{R_n}^{R_{n+1}} \frac{d\rho}{L(\rho)} = \frac{1}{3 \cdot 2^n \pi} \ln \frac{L(R_{n+1})}{L(R_n)},$$

откуда следует, что для параболического типа склеивания достаточна расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{L(R_{n+1})}{L(R_n)}$$

или, что эквивалентно, ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln L(R_{n+1})}{2^n}$$

или, наконец, так как

$$3\pi(d_0 + d_1 + \dots + d_n) < L(R_{n+1}) < 3\pi \cdot 2^n (d_0 + d_1 + \dots + d_n),$$

ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(d_0 + d_1 + \dots + d_n)}{2^n},$$

откуда следует

Теорема 29. Для параболического типа склеивания модулярной фигуры с отрезками $\{d_n\}$ достаточна расходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(d_0 + d_1 + \dots + d_n)}{2^n} \quad (5)$$

или, если $d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n \leq \dots$, ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln d_n}{2^n}. \quad (6)$$

Примечание. Тот же результат получается из общего критерия для параболического типа поверхностей класса A_{∞} (§ 7),

приводящего к ряду (удобно рассматривать указанную выше поверхность F^*)

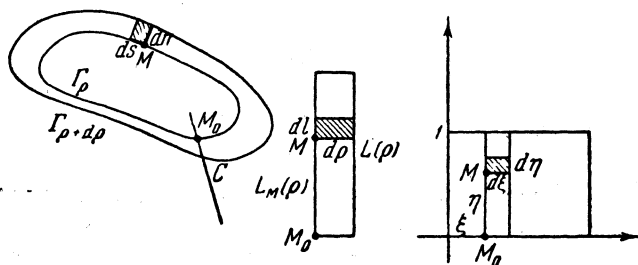
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{R_{n+1}}{R_n},$$

расходящемуся одновременно с рядом (5).

68. Гиперболический тип склеивания. Если интеграл

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{L(\rho)} < \infty \quad (7)$$

и линии Γ_ρ производят непрерывное концентрическое исчерпание данной открытой односвязной римановой поверхности F , то, удаляя из F область, ограниченную Γ_{ρ_0} , и используя линии Γ_ρ , можно оставшуюся двусвязную часть F' различными способами квазиконформно отобразить на кольцо или, превращая F' в „четырёхугольник“ посредством сечения C , встречающего по одному разу все линии Γ_ρ — на прямоугольник; при этом линии Γ_ρ переводятся в концентрические окружности кольца, соответственно, после разреза, в вертикальные сечения прямоугольника.



Фиг. 17

Так, например, можно построить отображение F' с разрезом на прямоугольник $R(0 < \xi < \mu, 0 \leq \eta \leq 1)$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, полагая (фиг. 17)

$$d\xi = \frac{d\rho}{L(\rho)}, \quad \xi = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{L(\rho)}$$

и

$$d\eta = \frac{dl}{L(\rho)}, \quad \eta = \frac{L_M(\rho)}{L(\rho)},$$

где dl — элемент k -длины на Γ_ρ :

$$dl = \frac{d\rho}{dn} ds$$

и $L_M(\rho)$ означает k -длину дуги M_0M на Γ_ρ от точки M_0 ее пересече-

ния с указанным выше разрезом на F' до ее переменной точки M :

$$L_M(\rho) = \int_{M, M} dl.$$

Если $p(M) = p(\xi, \eta)$ — характеристика отображения F' на R в точке M и $q(\rho) = \max p(M)$ для M на Γ_ρ , то, по теореме 4 (п. 11), для гиперболического типа поверхности F достаточна сходимость интеграла

$$\iint_R p(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

или, что слабее, интеграла

$$\int q(\rho) d\xi = \int_{\rho_0}^{\infty} q(\rho) \frac{d\rho}{L(\rho)}.$$

Указанное определение величин $\xi = \xi(\rho)$ и $\eta = \eta(M)$ не является, очевидно, единственно возможным и может вообще оказаться непригодным для вычислений. Ниже, следуя в основном Ле-Ван Тьем [13], мы применим к интересующей нас задаче другое определение величин ξ и η .

69. Продолжение. Удалим из $\{H\}$ область (три полукруга), ограниченную Γ_{R_n} ; затем, проведя в трех полуплоскостях H_0 разрез по мнимой полуоси, разобьем оставшуюся от $\{H\}$ двусвязную (после склеивания) часть на три симметричные части и одну из них, пусть G , будем квазиконформно отображать на прямоугольник. Для этого проведем в G линии Γ_{R_n} ($n = 2, 3, \dots$) и в плоскостях $\{H\}$, входящих в G , разрезы по мнимым полуосям. Часть G_n области G , заключенная между Γ_{R_n} и $\Gamma_{R_{n+1}}$, распадется при этом на четырехугольные области G_{kn} ($k = 0, 1, \dots, (n-1)$), лежащие в полуплоскостях H_k , и четверти кругов G_{np} , лежащие в H_n .

Каждую область G_{kn} отобразим на единичный квадрат Q в плоскости $w = u + iv$, отнеся произвольной точке из G_{kn} , с полярными координатами $\rho_{kn} + r$ и φ , где

$$\rho_{kn} = d_k + d_{k+1} + \dots + d_{n-1} \leq R_n, \quad (8)$$

точку из Q с координатами

$$u = \frac{r}{d_n}, \quad v = \frac{2}{\pi} \varphi. \quad (9)$$

Отобразив G_{kn} с помощью логарифмической функции $\zeta = \ln z = \xi + i\eta$ на прямоугольник, будем для той же точки иметь координаты

$$\xi = \ln \left(1 + \frac{r}{\rho_{kn}} \right), \quad \eta = \varphi,$$

откуда видно, что характеристика p отображения (9) есть большая из величин

$$\frac{2}{\pi} \frac{d_n}{\rho_{kn} + r}, \quad \frac{\pi}{2} \frac{\rho_{kn} + r}{d_n}$$

и, следовательно, для всех $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ и $0 \leq r \leq d_n$

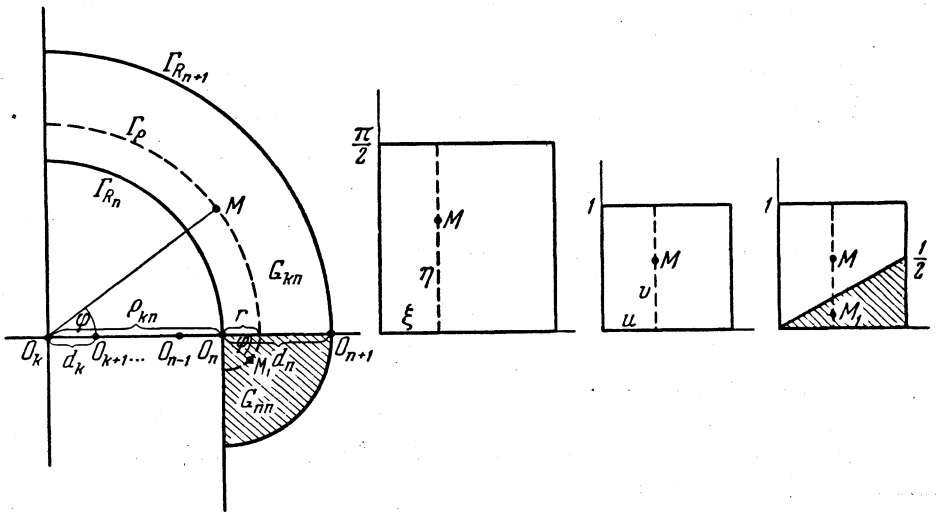
$$p + \frac{1}{p} < C \left(\frac{d_n}{d_{n-1} + r} + \frac{R_{n+1}}{d_n} \right), \quad (10)$$

где C — абсолютная постоянная.

Области G_{nn} отобразим на прямоугольные треугольники Δ в плоскости w , полагая

$$u = \frac{r}{d_n}, \quad v = \frac{r}{d_n} \cdot \frac{2}{\pi} \varphi,$$

что представляет квазиконформное отображение с характеристикой $p < C_1$, где C_1 — абсолютная постоянная и, следовательно, снова выполняется (10), если взять C достаточно большим.



Фиг. 18

К каждой области G_{kn} вдоль отрезка d_n примыкает область G_{nn} . Подвергая квадрат Q , соответствующий G_{kn} , вертикальному сжатию, превратим его в трапецию $Q-\Delta$, так чтобы полный квадрат Q соответствовал теперь области G_{kn} вместе с областью G_{nn} (фиг. 18). Указанное сжатие Q не нарушает, при некотором увеличении C , соотношения (10).

Соединяя построенные отображения для всех областей G_{kn} и G_{nn} , получим квазиконформное отображение области G_n на прямоугольник

с основанием, равным 1, и высотой, равной числу областей G_{kn} , т. е. 2^n . При этом соответствующая часть каждой линии Γ_p , пробегающая в G_n , переходит в вертикальное сечение этого прямоугольника с абсциссой $u = \frac{r}{d_n}$, затем на Γ_{R_n} и $\Gamma_{R_{n+1}}$ имеет $dv = \frac{2}{\pi} d\varphi$, соответственно, $dv = \frac{1}{\pi} d\varphi$, и характеристика p отображения удовлетворяет неравенству (10).

С помощью преобразования $\zeta = \frac{1}{2^n} w$ превратим наш прямоугольник в прямоугольник, пусть D_n с высотой 1. Для отображения G_n на D_n

$$\xi = \frac{1}{2^n d_n} r \text{ и } \frac{d\eta}{d\varphi} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1} \pi} & \text{на } \Gamma_{R_n} \\ \frac{1}{2^n \pi} & \text{на } \Gamma_{R_{n+1}}. \end{cases} \quad (11)$$

В силу (10) и первой части (11)

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} p(\xi_1 \eta) d\xi d\eta &< \frac{1}{2^n d_n} \int_0^{d_n} \left(p + \frac{1}{p}\right) dr < \frac{C}{2^n d_n} \int_0^{d_n} \left(\frac{d_n}{d_{n-1} + r} + \frac{R_{n+1}}{d_n}\right) dr = \\ &= \frac{C}{2^n} \left[\frac{R_{n+1}}{d_n} + \ln\left(1 + \frac{d_n}{d_{n-1}}\right)\right]. \end{aligned}$$

В силу второй части (11) при отображении смежных областей G_n и G_{n+1} линия $\Gamma_{R_{n+1}}$ преобразуется одинаково; поэтому мы получаем единое отображение всей области G на прямоугольник D , составленный из прямоугольников D_n . Применяя упомянутую выше теорему 4 и заменяя R_{n+1} его значением в соответствии с (2), приходим к следующей теореме:

Теорема 30. Для гиперболического типа склеивания модулярной фигуры с отрезками $\{d_n\}$ достаточна сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}}{d_n} + \ln\left(1 + \frac{d_n}{d_{n-1}}\right) \right] \quad (12)$$

или, если для всех n величина $d_n \geq d > 0$, — ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}, \quad (13)$$

или, наконец, если $d_1 \leq d_2 \leq \dots$, — ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln d_n}{2^n}. \quad (14)$$

Последнее утверждение легко следует из рассмотрения ряда (12). Вспомня теорему 29, приходим к следующей теореме:

Теорема 31. *Тип склеивания модулярной фигуры с отрезками $d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_n \leq \dots$ будет гиперболическим или параболическим в зависимости от того, сходится или расходится ряд (14).*

Примечание. В связи с изучением некоторых поверхностей класса $F^{(q)}$, Ле-Ван Тьем [13] получает различные признаки гиперболического типа склеивания для модулярной фигуры с отрезками, кратными 1 (d_n при фиксированном n в общем случае не все одинаковы для полуплоскостей H_n), в частности ряд (13), и с помощью признака параболического типа Виттиха (п. 29, теорема 9) теорему, эквивалентную теореме 31. Выше мы в основном следовали построению Ле-Ван Тьем. Признак гиперболического типа, связанный со сходимостью ряда (12), становится довольно слабым при наличии сколь угодно малых отрезков d_n . В нашей работе [30], развивая соображения, высказанные в п. 67, мы получили, независимо от Ле-Ван Тьем, другой признак, связанный со сходимостью ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\ln(d_0 + d_1 + \dots + d_n)}{2^n} + \frac{n 2^{\frac{n-1}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} d_k}{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_k} \right]. \quad (15)$$

Этот признак частично (легко построить примеры) перекрывается с теоремой 30. Однако ни тот, ни другой признак не позволили мне доказать следующее вероятное предложение: если $d_0 \geq d_1 \geq \dots$, то тип склеивания всегда гиперболический. Возможно, что достаточно условие равномерной ограниченности $\{d_n\}$.

* Первое слагаемое в (15), связанное со сходимостью интеграла $\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{L(\rho)}$, в статье [30] несколько другое.

Глава V

Определение типа некоторых классов односвязных римановых поверхностей

§ 17. Применение метода квазиконформных деформаций

70. Предварительное замечание. В этом параграфе систематически излагаются в основном известные результаты по проблеме типа, которые легко могут быть получены с помощью метода квазиконформных деформаций (см. выше, п. 12).

Для оценки характеристики $p(z)$ используемых ниже Q -отображений (п. 10) $w = u + iv = \rho e^{i\theta} = w(z)$, $z = x + iy = re^{it}$ заметим, что в случае преобразований:

$u = f(x)$, $v = y$ — продольное растяжение-сжатие,

$u = x$, $v = f(y)$ — поперечное растяжение-сжатие,

$\rho = r$, $\theta = f(t)$ — угловое растяжение-сжатие

имеем

$$p = \max\left(f' - \frac{1}{f'}\right); \quad (1)$$

для преобразования

$\rho = f(r)$, $\theta = t$ — радиальное растяжение-сжатие,

имеем

$$p = \max\left(\frac{rf''}{f}, \frac{f}{rf'}\right), \quad (2)$$

и в общем случае

$$p + \frac{1}{p} = \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{u_x v_y - v_x u_y}. \quad (3)$$

71. Q -эквивалентные области и области, эквивалентные относительно типа. Введем следующие определения:*

Определение 1. *Две конечнолистные или бесконечнолистные односвязные области G_1 и G_2 , расположенные над плоскостью w и*

* Для этой главы своя нумерация определений.

ограниченные кусочно гладкими кривыми Γ_1 и Γ_2 , будем называть Q -эквивалентными, если существует (возможно после предварительного линейного преобразования плоскости w или перехода к сферической метрике) Q -отображение G_1 на G_2 , переводящее Γ_1 в Γ_2 с одинаковым для всех точек коэффициентом растяжения.

Определение 2. Две конечнолистные или бесконечнолистные области G и G^* , ограниченные одной и той же кусочно гладкой кривой Γ и расположенные по одну и ту же сторону от нее, называются эквивалентными относительно типа, если существует Q -отображение G на G^* , оставляющее границу Γ неподвижной.

В силу теоремы 5 (п. 11) о сохранении типа при Q -отображениях, замена области G эквивалентной относительно типа областью G^* не меняет типа поверхности, содержащей область.

Примечание. Заметим, что если области G и G^* можно одновременно Q -квазиконформно отобразить на круг или на полуплоскость так, чтобы растяжения для одинаковых точек на Γ отличались множителем, равномерно ограниченным для всей кривой Γ , то области G и G^* эквивалентны относительно типа. В частности, если области G и G^* одновременно Q -эквивалентны кругу или (обе) полуплоскости, то они эквивалентны относительно типа.

72. Сдвиг точек ветвления. Докажем сперва следующую теорему:

Теорема 32. Области G и G^* , лежащие над кругом $|w| < R$ и являющиеся окрестностями точек ветвления одного и того же конечного или бесконечного порядка, расположенных соответственно над точками $w = 0$ и $w = a$ ($|a| < R$), эквивалентны относительно типа.

Доказательство. В случае однолистного круга $|w| < R$ Q -отображение, переводящее точку a в точку 0 при неподвижной окружности $|w| = R$, получается с помощью линейного преобразования $l(w) = \frac{R^2(w-a)}{R^2 - \bar{a}w}$ и последующего углового растяжения, возвращающего преобразованные точки окружности $|w| = R$ на их прежние места. Характеристика p последнего преобразования определяется, в силу (1), растяжением преобразования $l(w)$ на окружности $|w| = R$, откуда следует, что

$$p \leq \frac{R + |a|}{R - |a|} = \frac{1 + \frac{|a|}{R}}{1 - \frac{|a|}{R}}. \quad (4)$$

Заметив это, возьмем два круга $|w| < R$ и проведем в первом неполный радиальный разрез от точки a до окружности $|w| = R$, а во втором — полный радиальный разрез по радиусу, проходящему через точку a , и, продолжая по принципу симметрии рассмотренное выше

Q -отображение (преобразование $l(w)$ с последующим угловым растяжением), получим Q -отображение G^* на G , оставляющее неподвижной их общую границу и имеющую характеристику p , удовлетворяющую (4).

Называя рассмотренную в теореме 32 деформацию *сдвигом точки ветвления* и характеризуя его величиной $\frac{|a|}{R}$, можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 33. *Сдвиг любого числа точек ветвления, происходящий в попарно взаимно простых круговых окрестностях этих точек и характеризуемый величинами $\frac{|a_k|}{R_k}$, удовлетворяющими условию*

$$\frac{|a_k|}{R_k} \leq d < 1,$$

не меняет типа поверхности.

Следствие. С точки зрения типа безразлично, рассматривать ли класс поверхностей $F^{(q)}$ с точками ветвления, расположенными над q точками плоскости w , или класс поверхностей $F_{Q_1 Q_2 \dots Q_q}$, точки ветвления которых расположены над q попарно взаимно простыми (включая границы) областями Q_1, Q_2, \dots, Q_q плоскости w , притом так, что каждая точка ветвления, расположенная над такой областью, имеет окрестность, которая целиком расположена над той же областью и свободна от других точек ветвления (ср. Неванлинна [3], п. 249).

Из теорем 32 и 33 следует также теорема Тайхмюллера [16] о том, что две поверхности класса $F^{(q)}$ с одинаковыми комплексами отрезков могут быть связаны Q -квазиконформным соответствием и, следовательно, имеют одинаковый тип.

73. Деформация областей с алгебраическими точками ветвления. Докажем сперва следующую лемму:

Лемма 1. *Любая конечнолистная односвязная многоугольная область G с гладкими сторонами, с конечным числом вершин и отличными от нуля углами Q -эквивалентна однолиственному кругу $|w| < 1$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что граница Γ области G расположена над конечной частью плоскости w . Пусть $A_k (k = 1, 2, \dots, n)$ — вершины G , $\alpha_k \pi$ — соответствующие углы и λ — такая постоянная, что для всех k выполняется соотношение

$$\frac{1}{\lambda} < \alpha_k < \lambda. \tag{5}$$

Предполагая сперва что Γ — ломаная линия, выделим из G взаимно простые сектора S_k с вершинами в A_k и некоторыми радиусами $\rho_{k,0}$.

Затем, вводя в каждом секторе S_k полярные координаты ρ_k, θ_k , подвергаем их радиальным растяжениям

$$\rho_k^* = \rho_{k,0} \left(\frac{\rho_k}{\rho_{k,0}} \right)^{\alpha_k}, \quad \theta_k^* = \theta_k, \quad (6)$$

переводящим их самих в себя, без изменения на их граничных дугах, лежащих в области G .

Обозначим через $w^* = \varphi(w)$ отображение области G самое на себя, совпадающее в секторах S_k с отображением (6) и тождественное на остальной части G . В силу (2) и (5) это отображение есть Q -отображение с характеристикой

$$p \leq \max_{(k)} \left(\alpha_k, \frac{1}{\alpha_k} \right) < \lambda. \quad (7)$$

Заметив это, обозначим через $z = f(w)$ функцию, реализующую конформное отображение области G на круг $|z| < 1$. Тогда функция

$$z = f^*(w) = f(w^*) = f[\varphi(w)] \quad (8)$$

производит Q -отображение области G на круг $|z| < 1$ с характеристикой $p < \lambda$.

Так как в окрестности какой-либо вершины A_k функция $f(w)$ ведет себя как степень с показателем $\frac{1}{\alpha_k}$, то величина ρ_k^* вблизи A_k пре-

образуется как $c_k (\rho_k^*)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, где $c_k = \text{const} \neq 0$; поэтому, в силу (6), величина ρ_k вблизи A_k преобразуется как $c'_k \rho_k$, где c'_k — также постоянная. Отсюда можно сделать заключение, что при отображении $z = f^*(w)$ растяжение на Γ всюду ограничено:

$$\frac{1}{K} < |[f^*(w)]'| < K. \quad (9)$$

Подвергая круг $|z| < 1$ дополнительному угловому сжатию, можно, в силу (9), добиться того, чтобы растяжение на Γ было всюду одинаковым, что доказывает лемму 1 для случая, когда Γ — ломаная линия.

Общий случай, когда Γ — кусочно гладкая линия, приводится к предыдущему случаю при помощи Q -отображения области G на область G' , ограниченную ломаной Γ' , с равномерно ограниченным растяжением на Γ . Чтобы получить такое отображение, разобьем Γ на конечное число дуг γ_i ($i = 1, 2, \dots$), которые можно заключить в попарно взаимно

простые сектора s_i , боковые стороны которых l_i' и l_i'' образуют с γ_i положительные углы (здесь важно условие (5)), и γ_i в полярной системе координат, могут быть представлены с помощью однозначных функций $\theta_i = f_i(\rho)$. Кроме того, можно предполагать, что направление касательных всюду вдоль γ_i ($i = 1, 2, \dots$) сколь угодно мало отличается от касательной к γ_i в ее начале, т. е. в вершине сектора s_i (фиг. 19). Все это возможно в силу элементарных свойств гладких линий (см. Мусхелишвили [30], дополнение I).

Дуга γ_i отделяет от сектора s_i часть s_i' , принадлежащую области G . Подвергая s_i угловому растяжению-сжатию, превратим s_i' , без изменения на ее границе, лежащей внутри G , в часть сектора s_i , отсекаемую от него хордой γ_i' , стягивающей дугу γ_i (см. фиг. 19). Совокупность таких преобразований, дополненная тождественным преобразованием на остальной части области G , представляет Q -отображение области G на область G' , ограниченную ломаной Γ' , состоящей из отрезков γ_i' с равномерно

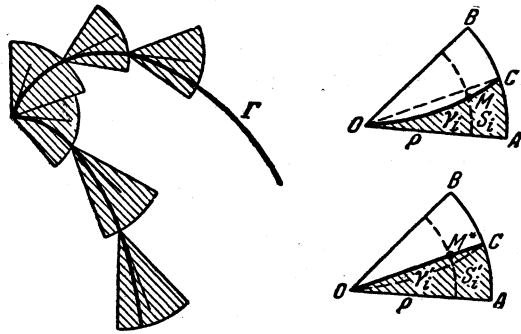
ограниченным растяжением на Γ . Строя теперь рассмотренное выше Q -отображение области G на круг $|z| < 1$ и подвергая еще этот круг подходящему угловому растяжению-сжатию, определяемому соответствием между Γ и Γ' , получим Q -отображение области G на круг $|z| < 1$ с равномерным растяжением вдоль Γ .

Примечание. Из доказательства леммы I видно, что она остается в силе, если отдельные стороны, составляющие Γ , примыкают друг к другу, образуя разрез по гладкой дуге.

Как следствие из леммы I имеем следующую теорему:

Теорема 34. Любые конечнолистные односвязные многоугольные области G и G^* с гладкими сторонами, конечным числом вершин и с положительными углами, имеющие общую границу Γ и одинаково относительно нее расположенные, эквивалентны относительно типа.

Примечание. Число вершин и углы при них для G и G^* могут быть разные, за счет алгебраических точек ветвления, „пересекаемых“ Γ . Важно также заметить, что если область G взята из некоторой поверхности F , то Γ может иметь точки, лежащие на границе поверхности F . Именно этот случай важен с точки зрения сохранения типа поверхности F при деформации области G , ибо если замкнутая область $G + \Gamma$ лежит на F , то поверхность F^* , получаемая из F заменой G



Фиг. 19

на S^* , имеет с F общую двусвязную часть $F - G$, конечность или бесконечность модуля которой определяет тип обеих поверхностей.*

Отметим еще следующую теорему:

Теорема 35. Если области G и G^* теоремы 34 имеют не только общую границу Γ , но и общую двусвязную часть D , примыкающую к Γ , то можно построить Q -отображение G на G^* , тождественное на Γ и имеющее характеристику, не превосходящую некоторого числа, зависящего только от модуля $\mu(D)$.

Доказательство. Пусть Γ_1 — вторая граница области D , P_0 — фиксированная точка на Γ_1 и $r = f(w)$, $r = f^*(w)$ функции, конформно отображающие G и G^* на круг $|z| < 1$ так, что

$$f(P_0) = f^*(P_0) = 0.$$

Для всякой точки на Γ мы получаем на окружности $|z| = 1$ две точки e^{it} и e^{it^*} . Пусть

$$t^* = \varphi(t).$$

Тогда функция

$$w = f^{*-1} [|f(w)| e^{i\varphi(t)}]$$

осуществляет квазиконформное отображение G на G^* , тождественное на Γ . Так как характеристика p этого отображения связана с преобразованием углового растяжения $|z| e^{i\varphi(t)}$, то, в силу (1),

$$p = \max_{(t)} \left[\varphi'(t), \frac{1}{\varphi'(t)} \right].$$

Заметив это, обозначим через D_z и D_z^* образы области D , получаемые в круге $|z| < 1$ при отображении последней с помощью функции $f(w)$ и $f^*(w)$. Тогда функция

$$z^* = \psi(z) = f^* [f^{-1}(z)]$$

конформно отображает D_z на D_z^* . Так как $f(P_0) = f^*(P_0) = 0$, то точка $z = 0$ является граничной точкой для обеих областей D_z и D_z^* . Тогда из теорем искажения для однолистных конформных отображений двусвязных областей** следует, что растяжение $|\psi'(z)|$ на окружности $|z| = 1$

* Случай $G + \Gamma \subset F$ имеется у Блана [17]. Там же он решает задачу на склеивание, по существу содержащую лемму 1 (см. выше, гл. 4, п. 47, случай Блана). Общий случай деформации областей с алгебраическими точками ветвления был мною рассмотрен, независимо от Блана, в кандидатской диссертации (1937), откуда, с некоторым изменением, возникла теорема 34.

** У Грётша [31] доказано, что при однолистном конформном отображении кольца $r < |z| < 1$ ($r > 0$) на двусвязную область, ограниченную окружностью $|z| = r$ и контуром, уходящим в ∞ , минимальное расстояние от этого контура до окружности $|z| = 1$ и экстремальное значение модуля производной на любой окружности $|z| = \rho$ ($r \leq \rho < 1$) достигаются для экстремальной области, представляющей область $|z| < r$ с лучевым разрезом, продолжение которого встречает начало координат.

ограничено числом, зависящим только от модуля $\mu(D)$. Но, очевидно, на окружности $|z|=1$ функция $\psi(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}$, следовательно, $|\psi'(e^{it})| = \varphi'(t)$, откуда следует, что указанная выше характеристика p ограничена числом, зависящим только от $\mu(D)$.*

74. Деформация областей с логарифмическими точками ветвления.

Определение 3. Пусть γ — простая гладкая линия, соединяющая две точки плоскости w (одна из этих точек может лежать в ∞), H_γ — плоскость w с разрезом вдоль γ и γ^+ , γ^- — оба края этого разреза. Склеивая бесконечную последовательность $\{H_\gamma^n\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) экземпляров H_γ так, чтобы край γ^+ на H_γ^n соединялся с краем γ^- на H_γ^{n+1} , получаем односвязную риманову поверхность со свободной граничной γ^- на H_γ^0 , называемую логарифмическим концом Λ_γ^- .

Если бы мы брали γ^- на H_γ^n и γ^+ на H_γ^{n+1} , то получили бы другой логарифмический конец Λ_{γ^+} со свободной стороной γ^+ на H_γ^0 . Вместе Λ_γ^- и Λ_γ^+ составляют поверхность логарифмической функции с точками ветвления на концах линии γ .

Лемма 2. Всякие два логарифмических конца Λ_{γ_1} и Λ_{γ_2} Q -эквивалентны.

Доказательство. В самом деле, из леммы 1 (см. примечание к этой лемме) следует Q -эквивалентность плоскостей H_{γ_1} и H_{γ_2} с разрезами вдоль γ_1 , соответственно, γ_2 . Строя Q -отображение H_{γ_1} на H_{γ_2} , переводящее концы дуги γ_1 в концы дуги γ_2 и имеющее всюду вдоль γ_1 одинаковый коэффициент растяжения (если нужно, то предварительно произведем линейное преобразование плоскости w так, чтобы γ_1 и γ_2 не имели точек в ∞) и бесконечно продолжая это отображение, получим отображение Λ_{γ_1} на Λ_{γ_2} , устанавливающее их Q -эквивалентность.

Теорема 36. Область G , состоящая из произвольного кругового сектора S с углом $\alpha < 2\pi$ и логарифмического конца, приклеенного к S вдоль его граничной дуги γ , Q -эквивалентна относительно типа области G^* , состоящей из сектора S и двух логарифмических концов, приклеенных к нему соответственно вдоль дуг γ_1 , γ_2 , представляющих произвольное разбиение дуги γ .

* У Какутани [15] доказывается следующая лемма:

Пусть D — произвольная замкнутая односвязная область и D' — односвязная замкнутая ее подобласть (строго). Пусть, далее, z_0 и α две произвольные точки в D' . Тогда существует квазиконформное отображение области D на себя, переводящее z_0 в α , тождественное на границе области D и имеющее характеристику $p < K(D, D')$, где постоянная K зависит только от конфигурации областей D и D' .

Далее, Какутани доказывает теорему о сохранении типа при Q -отображениях и, на основании указанной леммы, устанавливает возможность „деформации сдвига“ (наш термин). Из доказанной у нас теоремы 35 следует, что при более общей деформации области D' постоянная $K(D, D')$ зависит только от модуля двусвязной области $D - D'$.

Доказательство. Пусть $z = f(w)$ — функция, конформно и симметрично отображающая область G на плоский угол, величиной α .

Проведя в секторе S области G^* разрез по радиусу, определяемому общим концом дуг γ_1 и γ_2 , разобьем G^* на две части G_1^* и G_2^* . При помощи углового растяжения-сжатия превратим каждую из них в область G , и с помощью той же функции $f(w)$ отобразим их на плоские углы величиной α . Располагая оба экземпляра этого угла так, чтобы они соприкасались своими граничными сторонами, соответствующими обоим краям проведенного в S радиального разреза, и склеивая их вдоль этих сторон, мы, после дополнительного углового сжатия в два раза, получим Q -отображение области G^* на плоский угол величиной α с тем же поведением на боковых сторонах сектора S области G^* , что и для области G , откуда следует утверждение теоремы.

Примечание. Сектор S взят для удобства доказательства. Его можно заменить произвольным двуугольником с гладкими сторонами.

75. Теорема Неванлинна. Предыдущая теорема позволяет легко доказать известную теорему Неванлинна:

*Открытая односвязная риманова поверхность F с конечным числом точек ветвления всегда параболического типа.**

Доказательство. Рассмотрим сперва частный случай, когда F состоит из круга $|w| < 1$ и конечного числа логарифмических концов, приклеенных к нему вдоль дуг $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, представляющих произвольное разбиение окружности $|w| = 1$. В этом случае, повторно применяя теорему 36, уменьшаем число логарифмических концов до 2 и получаем поверхность логарифмической функции, откуда следует, что F — параболического типа.

Геометрическое исследование с помощью комплекса отрезков структуры поверхностей класса $F^{(q)}$ показывает, что открытая односвязная риманова поверхность F с конечным числом точек ветвления состоит из ядра K — конечнолистной односвязной многоугольной области с конечным числом сторон и не нулевыми углами, и логарифмических концов, приклеенных к ядру K вдоль его сторон. ** Переходя, с помощью леммы 1, от ядра K к кругу $|w| < 1$ и, с

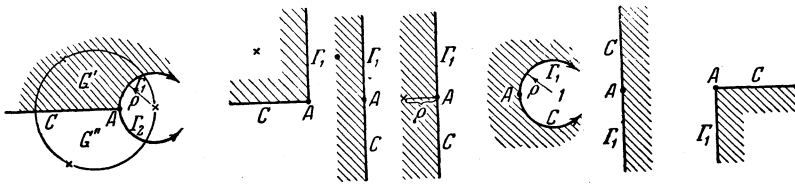
* В своей работе [32] Неванлинна рассматривает только поверхности с конечным числом логарифмических точек ветвления. Общий случай рассмотрен Эльфингом [33]. Теорема Неванлинна легко следует из признаков Кобеяши и Виттиха (гл. 2). Приводимое нами доказательство более элементарно и просто.

** Теорема 33 позволяет ограничиться рассмотрением только таких поверхностей класса $F^{(q)}$, точки ветвления которых расположены над точками $e^{\frac{2\pi i}{q} k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, q-1$), что значительно упрощает изучение структуры поверхностей этого класса (см. [34], [21] и др.).

помощью леммы 2, от приклеенных к K логарифмических концов к логарифмическим концам, приклеенным к кругу $|\omega| < 1$ вдоль соответствующих дуг окружности $|\omega| = 1$, придем к вышерассмотренному частному случаю, откуда следует справедливость теоремы Неванлинна.

76. Деформация областей с логарифмическими точками ветвления (продолжение).

Лемма 3. Область G , получаемая из поверхности F с 3 логарифмическими точками ветвления путем удаления круговой окрестности одной из точек ветвления, Q -эквивалентна полуплоскости.



Фиг. 20

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что точки ветвления поверхности F расположены над точками $1, \epsilon, \epsilon^2$, где $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, и область G получается из F удалением части ее, расположенной над кругом $|\omega - 1| < \rho < \sqrt{3}$. Разобьем G на две симметричные части G' и G'' посредством сечения γ , расположенного над действительной осью $I(\omega) = 0$ и начинающегося в некоторой точке A граничной спирали Γ , расположенной над окружностью $|\omega - 1| = \rho$. При помощи серии элементарных преобразований: линейное преобразование, угловые сжатия-растяжения вокруг точки A , сдвиг точки ветвления, новое линейное преобразование, обратное к первому отображение с помощью логарифмической функции и новое сжатие вокруг точки A (см. фиг. 20) легко построим Q -отображение области G' на квадрант плоскости z с постоянным коэффициентом растяжения на части Γ' спирали Γ , входящей в границу области G' . Продолжая это отображение по принципу симметрии, получим требуемое леммой отображение области G на полуплоскость.

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 37. Область G , являющаяся круговой окрестностью логарифмической точки ветвления, и область G^* , ограниченная той же спиралью Γ , что и G , расположенная от нее по ту же сторону и имеющая конечное число точек ветвления, из которых логарифмические не расположены на Γ , эквивалентны относительно типа.

Доказательство. Область G , очевидно, Q -эквивалентна полуплоскости (отображение с помощью логарифмической функции), поэтому достаточно показать, что тем же свойством обладает и область G^* .

Пусть область G расположена над областью $|\omega - 1| > \rho$ ($\rho < 1$). Тогда спираль Γ расположена над окружностью $|\omega - 1| = \rho$. Приклеим к области G^* вдоль Γ окрестность логарифмической точки ветвления, расположенной над точкой $\omega = 1$, и полученную поверхность продеформируем так, чтобы все ее точки ветвления были расположены над окружностью $|\omega| = 1$, притом, исключая новую логарифмическую точку ветвления — над той частью этой окружности, которая лежит вне круга $|\omega - 1| \leq \rho$. Такой сдвиг точек ветвления можно осуществить с помощью Q -отображения, оставляющего неподвижной всю спираль Γ , исключая, быть может, конечную ее часть (связанную с возможно лежащими на Γ алгебраическими точками ветвления), которая при этом преобразуется сама в себя с ограниченным растяжением-сжатием.

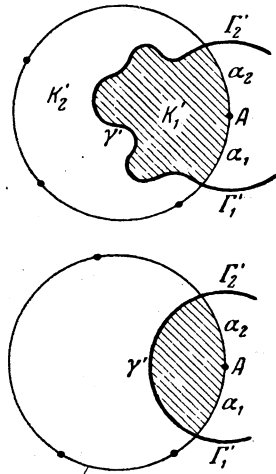
С помощью сечений, расположенных над окружностью $|\omega| = 1$, разобьем полученную поверхность F^* на ядро K и логарифмические концы. Пусть A — вершина K , расположенная в логарифмической точке ветвления, окруженной Γ . Ядро K делит Γ на три части: полуспиральи Γ_1 и Γ_2 , лежащие в логарифмических концах, примыкающих к ядру K вдоль его сторон, выходящих из A , и дугу γ , соединяющую Γ_1 и Γ_2 . Дополняя K конечным числом листов из примыкающих к нему логарифмических концов, расширим K настолько, чтобы полученная область K' содержала строго внутри себя всю дугу γ , включая ее концы, а также ту часть Γ , которая выше, при сдвиге точек ветвления, подвергалась, возможно, растяжению-сжатию. Новое ядро K' делит Γ на несколько укороченные по сравнению с Γ_1 и Γ_2 полуспиральи Γ'_1 и Γ'_2 и несколько удлиненную по сравнению с γ соединяющую их дугу γ' . Последняя делит K' на две многоугольные области: K'_1 , примыкающую к A , и K'_2 — остальную часть K' . С помощью Q -отображений преобразуем K'_1 и K'_2 в двуугольники, составляющие вместе круг $|\omega| < 1$ и разделенные дугой окружности $|\omega - 1| = \rho$, соответствующей дуге γ' . На основании леммы 1 нетрудно заметить, что указанные преобразования можно построить так, чтобы растяжения были всюду постоянными на γ' , а также постоянными (вообще другими) на остальных частях границ областей K'_1 и K'_2 . Точка A пусть переходит в точку $\omega = 1$.

Продеформируем еще (угловые сжатия) логарифмические концы, примыкающие к K' так, чтобы их можно было приклеить к соответствующим дугам, пусть α_1 и α_2 , окружности $|\omega| = 1$. Логарифмические концы будем при этом деформировать так, чтобы полуспиральи Γ'_1 и Γ'_2 оставались неподвижными (см. фиг. 21; рисунок слева — схематический, так как области K'_1 и K'_2 , вообще говоря, многолистные;

жирные точки на окружности $|w| = 1$ означают вершины многоугольной области K' ; дуги α_1 и α_2 , вдоль которых область K'_1 примыкает к логарифмическим концам, встречающимся в A при отображении K'_1 на двуугольник, не изменялись, что делает ясным возможность сохранения без изменения линий Γ'_1 и Γ'_2).

Оставляя теперь, с помощью теоремы 36, только три логарифмические конца, из них два, встречающиеся в точке A , и удаляя окрестность точки A , расположенную над кругом $|w - 1| < \rho$, получим область G'_1 вида, рассмотренного в лемме 3, следовательно, Q -эквивалентной полуплоскости. Так как исходная область G^* , очевидно, Q -эквивалентна G'_1 (ограниченное сжатие-растяжение только на конечной части γ' спирали Γ), то область G^* также Q -эквивалентна полуплоскости, откуда, как было указано выше, следует теорема 37.

Примечание. Теорема 37 представляет известное обобщение теоремы Неванлинна. Она показывает способ присоединения к произвольной односвязной римановой поверхности конечного числа точек ветвления без изменения типа. Интересно заметить, что все предыдущие критерии (Альфорса, Кобейши и др.) не позволяют доказать этой теоремы, легко доказываемой методом квазиконформных деформаций.



Фиг. 21

Ниже (см. п. 108) мы познакомимся с другим способом присоединения к поверхности точек ветвления, который, даже в случае присоединения конечного числа логарифмических точек ветвления, может изменить тип поверхности.

77. Поверхности с конечным числом периодических концов.

Близким по многим свойствам к классу поверхностей с конечным числом точек ветвления является класс поверхностей с конечным числом периодических концов, введенный Ульрихом [34, 35].

Определение 4. Пусть R — произвольная замкнутая риманова поверхность рода нуль и γ — простая гладкая линия, соединяющая две различные ее точки. Обозначим через R_γ поверхность R с разрезом вдоль γ и через γ^+ , γ^- — края этого разреза. Склеивая бесконечную последовательность $\{R_\gamma^n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) экземпляров R_γ так, чтобы край γ^+ на R_γ^n соединялся с краем γ^- на R_γ^{n+1} , получим односвязную риманову поверхность со свободным краем γ^- на R_γ^0 , называемую периодическим концом Π_{γ^-} 1-го рода.

При соединении γ^- на R_γ^n с γ^+ на R_γ^{n+1} получается другой периодический конец Π_{γ^+} со свободным краем γ^+ на R_γ^0 . Вместе Π_{γ^-} и

Π_{γ}^{+} составляют риманову поверхность параболического типа с отображающей функцией

$$w(z) = R(e^z),$$

где $R(\zeta)$ — рациональная функция, отображающая плоскость ζ на поверхность R так, что точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ переходят в концы линии γ на R .

Определение 5. Пусть R — произвольная замкнутая риманова поверхность рода нуль и γ_1, γ_2 — две простые гладкие линии на R , имеющие общий конец, в остальном же взаимно простые. Обозначим через $R_{\gamma_1\gamma_2}$ поверхность R с разрезами вдоль γ_1, γ_2 и через $\gamma_1^+, \gamma_1^-, \gamma_2^+, \gamma_2^-$, соответственно $\gamma_2^+, \gamma_2^-, \gamma_1^+, \gamma_1^-$ на $R_{\gamma_1\gamma_2}^n$, соответственно с краями γ_2^-, γ_2^+ на $R_{\gamma_1\gamma_2}^{n+1}$ и края γ_1^+, γ_1^- на $R_{\gamma_1\gamma_2}^{n+1}$ — соответственно с краями γ_1^-, γ_1^+ на $R_{\gamma_1\gamma_2}^{n+2}$, получим односвязную риманову поверхность со свободным разрезом вдоль γ_1 на $R_{\gamma_1\gamma_2}^0$, называемую периодическим концом $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}'$, 2-го рода.*

Аналогично, меняя ролями γ_1 и γ_2 , получаем периодический конец $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}''$, 2-го рода со свободным разрезом вдоль γ_2 на $R_{\gamma_1\gamma_2}^0$. Соединяя между собой два периодических конца $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}'$, или $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}''$, получаем одну и ту же риманову поверхность параболического типа с отображающей функцией

$$w(z) = R(\sin z),$$

где $R(\zeta)$ — рациональная функция, отображающая плоскость ζ на поверхность R так, что $\zeta = \infty$ переходит в общий конец линий γ_1, γ_2 и точки $\zeta = \pm 1$ — в оба других конца этих линий.

Определение 6. Риманова поверхность, состоящая из ядра — конечнолистной, односвязной многоугольной области с конечным числом гладких сторон — и конечного числа приклеенных к нему периодических концов, называется поверхностью с конечным числом периодических концов.**

* Разделение периодических концов по родам мне в литературе не встречалось.

** Не нарушая общности, можно считать, что вблизи произвольной своей стороны, к которой приклеивается периодический конец Π_{γ}^{\prime} или $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}^{\prime}$, ядро K ведет себя как соответствующий экземпляр R_{γ} или $R_{\gamma_1\gamma_2}$ около γ^+ , соответственно около γ_1 ; этого всегда можно достигнуть, присоединяя к K экземпляр R_{γ} , соответственно $R_{\gamma_1\gamma_2}$, за счет периодического конца.

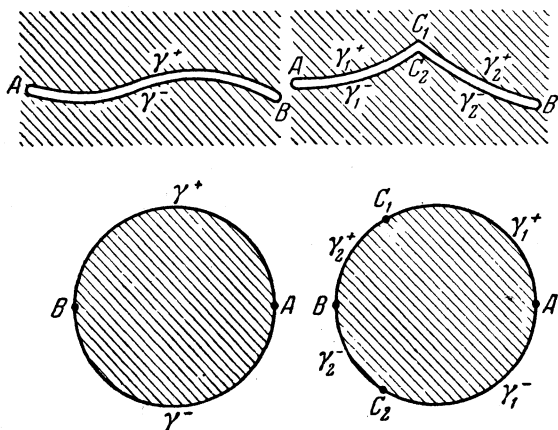
Поверхности с периодическими концами входят в класс поверхностей $F^{(q)}$ и характеризуются обычно тем, что их комплекс отрезков состоит из ядра, соответствующего ядру K и периодических по структуре концов, соответствующих вышеопределенным периодическим концам (см., например, [34]).

Теорема Ульриха. Все поверхности с конечным числом периодических концов — параболического типа.

Теорема эта легко получается с помощью признаков Кобеяши и Витиха (гл. II). Здесь мы приведем элементарное ее доказательство с помощью метода квазиконформных деформаций. Докажем сперва следующую лемму:

Лемма 4. Всякий периодический конец Q -эквивалентен логарифмическому концу.

Доказательство. Пусть Π_γ и $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}$ — какие-либо периодические концы 1-го и 2-го рода, построенные с помощью поверхностей R_γ



Фиг. 22

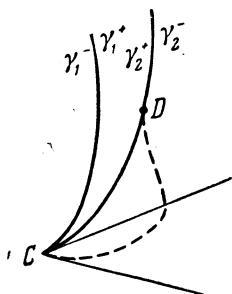
соответственно $R_{\gamma_1\gamma_2}$. Не нарушая общности, можно считать, что γ , γ_1 и γ_2 не имеют бесконечно удаленных точек. Предположим еще дополнительно, что γ_1 и γ_2 в своем общем конце не образуют нулевого угла.

На основании леммы 1 поверхности с разрезом R_γ и $R_{\gamma_1\gamma_2}$ можно отобразить на круг $|w| < 1$ при помощи Q -отображений с одинаковым растяжением всюду на γ , соответственно на γ_1 и γ_2 (фиг. 22). Продолжая эти отображения по принципу симметрии, получим Q -отображения концов Π_γ и $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}$ на логарифмические концы с одинаковым растяжением на свободных краях.

Случай, когда угол между γ_1^+ , γ_2^+ или γ_1^- , γ_2^- равен нулю, приводится к предыдущему. Пусть, для определенности, нулю равен угол между γ_1^+ , γ_2^+ и пусть γ_1 свободный разрез у конца $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}$. В этом случае при построении $\Pi_{\gamma_1\gamma_2}$ поверхности $R_{\gamma_1\gamma_2}^{2n}$ и $R_{\gamma_1\gamma_2}^{2n+1}$ склеивались по γ_2 . Но результат склеивания не изменится, если мы вблизи общего конца γ_1 и γ_2 изменим γ_2 в сторону γ_2^- так, чтобы угол между γ_1^+ и γ_2^+ стал отличным от нуля (см. фиг. 23; замена части γ_2 (дуги CD) пунктирной линией не меняет результат склеивания $R_{\gamma_1\gamma_2}^{2n}$ и $R_{\gamma_1\gamma_2}^{2n+1}$).

Доказательство теоремы Ульриха. Пусть F —заданная поверхность, $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_q$ —ее периодические концы и K —ядро, к которому они приклеены.

Пусть сперва $q > 1$. Не нарушая общности, можно считать, что вся граница ядра K расположена над конечной частью плоскости ω . На основании лемм 1 и 4 можно посредством Q -отображений с постоянным растяжением на границе преобразовать ядро



Фиг. 23

K в круг $|\omega| < 1$ и концы $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_q$ —в логарифмические концы, свободные стороны которых представляют дуги окружности $|\omega| = 1$, соответствующие граничным сторонам ядра K , вдоль которых происходило присоединение периодических концов к ядру на F . Полученная в результате поверхность F^* —параболического типа; следовательно, связанная с ней Q -отображением поверхность F также параболического типа.

Рассмотрим теперь случай, когда $q = 1$. Этот случай, очевидно, возможен только для периодического конца Π 2-го рода. Если γ его свободный разрез, то нужно показать, что замыкание Π вдоль γ замкнутой римановой поверхностью рода нуль с таким же разрезом приводит к поверхности параболического типа.

Для доказательства заметим, что логарифмический конец и, в силу леммы 4, также и периодический конец Q -эквивалентны кругу $|\omega| < 1$ с разрезом по радиусу $[0, 1]$ и двумя логарифмическими концами, приклеенными к верхней и нижней полуокружностям $|\omega| = 1$, т. е., другими словами, Q -эквивалентны поверхности логарифмической функции с разрезом, идущим к одной из ее точек ветвления. В самом деле, круг $|\omega| < 1$ с радиальным разрезом мы можем заменить кругом $|\omega| < 1$ без разреза, а два соответственно преобразованных и приклеенных к нему логарифмических конца можно тогда, на основании теоремы 36, заменить одним логарифмическим концом.

Заменяя Π поверхностью логарифмической функции с разрезом, как только что было указано, и преобразуя замкнутую поверхность с разрезом R_γ , замыкающую Π вдоль γ , в плоскость с тем же разрезом, мы после их склеивания (вышеуказанные преобразования производятся с помощью Q -отображений с постоянным растяжением на границе, так что склеивание поверхности логарифмической функции с плоскостью происходит автоматически) получим поверхность с двумя логарифмическими и одной алгебраической точками ветвления, следовательно, поверхность параболического типа. Отсюда следует, что поверхность $\Pi + R_\gamma$ также параболического типа и теорема Ульриха доказана полностью.

Примечание. В случае $q=1$ можно было Π взять в форме „половины поверхности функции $\operatorname{arcsin} w$ “ (разрез вдоль $(1, +\infty)$ или $(-\infty, -1)$ на двух смежных листах делит поверхность $\operatorname{arcsin} w$ на две такие части) и замыкать ее вдоль свободного разреза плоскостью с таким же разрезом. Указанную форму периодического конца 2-го рода можно рассматривать как каноническую; для периодических концов 1-го рода в качестве канонической формы можно рассматривать логарифмический конец.

§ 18. Классы поверхностей Φ_Γ , A_1 , A'_1 и \tilde{A}_1

78. Описание класса поверхностей Φ_Γ . Пусть $\{a_n\}$ ($n=0, 1, \dots$) — произвольная последовательность точек, расположенных на действительной оси $I(w)=0$ и удовлетворяющих условию: $a_{2n} < a_{2n+1}$. Каждой паре точек a_n, a_{n+1} поставим в соответствие плоскость H_n с двумя разрезами, выходящими из этих точек и идущих к ∞ вдоль действительной оси, направо и налево от интервала (a_n, a_{n+1}) . Склеим каждую пару плоскостей H_n, H_{n+1} вдоль разреза, выходящего из точки a_{n+1} и приклеим к остающемуся после всех склеиваний свободному разрезу, выходящему из точки a_0 на нулевом листе H_0 , два логарифмических конца. Совокупность получаемых таким образом поверхностей будет называться классом поверхностей Φ_Γ . Значок Γ внизу объясняется тем, что для $\dots < a_4 < a_2 < a_0 = 0 < a_1 < a_3 < \dots$ и $|a_n| \rightarrow \infty$ по некоторому закону, мы получаем поверхность, на которую Γ -функция отображает плоскость $|z| < \infty$ (см., например, [36]).*

79. Два вспомогательных Q -преобразования.

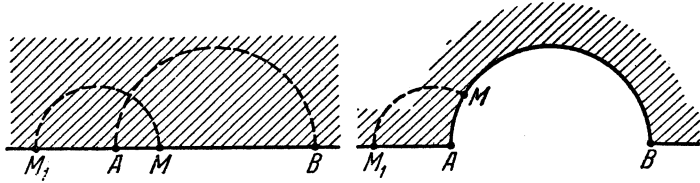
Преобразование 1. Это преобразование переводит полуплоскость с фиксированным граничным отрезком AB во внешность полукруга, построенного на AB как на диаметре, причем растяжение на AB всюду одинаково и граничные полупрямые, выходящие из точек A и B , остаются неподвижными (фиг. 24).

Чтобы получить такое преобразование, мы с помощью функции $\zeta = \ln \frac{w-w_A}{w-w_B}$ отображаем верхнюю полуплоскость $I(w) > 0$ на полосу

* Если требование $a_{2n} < a_{2n+1}$ заменить более жестким требованием $a_{2n} < 0$ для $n \geq 1$, $a_0 = 0$ и $a_{2n+1} > 0$, то мы получим подкласс класса Φ_Γ , рассмотренный Ульрихом [20]. В своей работе Ульрих, используя признак Альфорса, устанавливает довольно сложное достаточное условие для параболического типа поверхностей указанного подкласса.

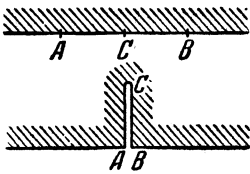
При подготовке к печати настоящей работы нам пришлось познакомиться с работой Маклана [37], где рассматривается общий класс поверхностей Φ_Γ и доказывается, что все они параболического типа. Это же предложение было независимо доказано нами методом квазиконформных деформаций и склеивания. Ввиду элементарности этого доказательства, мы его здесь приводим.

шириной Π . Сжимая эту полосу в два раза и используя функцию обратную к предыдущей, получим внешность полукруга, построенного на AB . Чтобы растяжение было одинаковым всюду на AB , остается провести ограниченное угловое растяжение-сжатие.



Фиг. 24

Преобразование 2. Это преобразование переводит полуплоскость с фиксированным отрезком AB в полуплоскость с перпендикулярным к ее границе разрезом вдоль отрезка $AC = \frac{1}{2} AB$, причем длина на границе везде сохраняется (фиг. 25).



Фиг. 25

80. Тип поверхностей Φ_{Γ} . Докажем следующую теорему:

Теорема 38. Все поверхности класса Φ_{Γ} параболического типа.

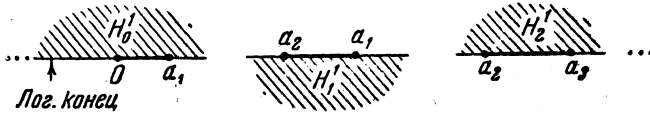
Доказательство. Пусть F — произвольная поверхность класса Φ_{Γ} ; $\{a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) — определяющая ее последовательность точек, H_n — плоскость с разрезами, выходящими из точек a_n, a_{n+1} (такую плоскость будем называть также листом поверхности F), и A_n — точка ветвления, соответствующая точке a_n на H_n .

Проведем на F сечение C вдоль ломаной, состоящей из отрезков, соединяющих точки A_n, A_{n+1} ($n = 0, 1, \dots$). Сечение C разбивает F на две симметричные части F_1, F_2 . Если бы нам удалось построить такое Q -отображение F_1 на полуплоскость $I(z) > 0$, чтобы граничная ломаная C перешла во всю действительную ось $I(z) = 0$, то, продолжая это отображение по принципу симметрии, мы получили бы Q -отображение F на всю конечную плоскость $|z| < \infty$, и теорема была бы доказана. В этом — идея доказательства.

Рассмотрим сперва частный случай, когда F — одна из поверхностей Ульриха (см. подстрочное примечание к п. 78). Проведем на F указанное выше сечение C , разбивающее ее на две симметричные части F_1, F_2 . Сечение C разбивает также каждую плоскость H_n на две полуплоскости H_n^1 и H_n^2 , принадлежащие, соответственно, F_1 и F_2 .

Поверхность F_1 состоит из последовательно склеенных „листов“ $\{H_n^1\}$ ($n = 0, 1, \dots$) и логарифмического конца, приклеенного к граничной полупрямой $(-\infty, 0)$ листа H_0^1 (фиг. 26). Обозначим через F_1^* по-

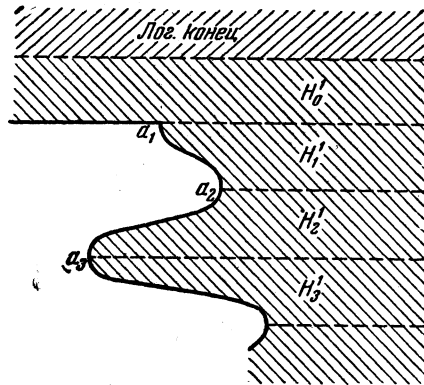
верхность, получаемую из F_1 , если все листы $\{H_n^1\}$ ($n=1, 2, \dots$) подвергнуть преобразованию 1, рассматривая в качестве отрезка AB , соответственно, отрезки $[a_n, a_{n+1}]$. Функция $z = \ln w$ отображает F_1^* на некоторую область D , ограниченную полупрямой, соответствующей отрезку $[0, a_1]$, и волнообразной линией, уходящей в ∞ в сторону



Фиг. 26

— $i\infty$ (фиг. 27). Эту область можно конформно отобразить на полуплоскости $I(z) > 0$ так, чтобы граница области D , соответствующая S , перешла во всю действительную ось $I(z) = 0$ (бесконечно удаленная точка является простым концом для области D), откуда, как было указано выше, следует, что F — параболического типа.

Общий случай приводится к рассмотренному частному случаю с помощью преобразования 2. Подвергая листы $\{H_n^1\}$ ($n=0, 1, \dots$) этому преобразованию, увеличивая затем угол $\frac{\pi}{2}$, получаемый при a_0 , до π и поворачивая преобразованные листы на $\frac{\pi}{2}$, мы приходим к поверхности \tilde{F}_1 , подобной вышерассмотренной половине F_1 поверхности Ульриха (фиг. 28).



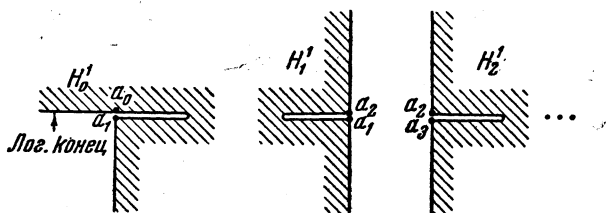
Фиг. 27

81. Классы поверхностей A_1 и A_1^* . Пусть $\{a_n\}$ ($n=0, \pm 1, \dots$) — произвольная последовательность точек, расположенных на действительной оси $I(w) = 0$ и удовлетворяющих условию $a_{2n} < a_{2n\pm 1}$. Поставим в соответствие каждой паре точек a_n, a_{n+1} плоскость (лист) H_n с двумя разрезами, выходящими из этих точек и идущими вдоль действительной оси к $\pm\infty$, соответственно. Склеивая каждую пару листов H_n, H_{n+1} вдоль разреза, выходящего из точки a_{n+1} , получим некоторую односвязную риманову поверхность F , имеющую над всей конечной плоскостью $|w| < \infty$ только алгебраические точки ветвления первого порядка и в ∞ — две точки ветвления бесконечного порядка.

* Нижеследующее, до конца § 20, в основном имеется в моей работе [29].

Совокупности таких поверхностей, соответствующих всевозможным указанным системам точек $\{a_n\}$, будем называть *классом поверхностей* A_1 .

Наряду с классом поверхностей A_1 будем рассматривать класс A'_1 , поверхности которого определяются аналогично при помощи последовательностей точек $\{a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$); при этом остающийся на



Фиг. 28

листе H_0 свободный разрез, выходящий из точки a_0 , уничтожается путем склеивания его краев.

Из описания классов поверхностей A_1 и A'_1 видна непосредственная связь первого с поверхностью $\operatorname{arcsin} w$, а второго — с „половиной“ такой поверхности, которую мы в конце п. 77 назвали канонической формой периодического конца 2-го рода.

Совершенно аналогично доказательству теоремы 38 доказывается следующая теорема:

Теорема 39. *Все поверхности классов A_1 и A'_1 параболлического типа.*

82. Класс поверхностей \tilde{A}_1 . Рассматривая снова систему точек $\{a_n\}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), откажемся от требования, чтобы эти точки лежали на действительной оси, но потребуем, чтобы $a_n \neq a_{n+1}$ и, обозначая для всех значений n через Δ_n отрезок $[a_n, a_{n+1}]$, направленный от a_n к a_{n+1} , чтобы отрезок Δ_{n+1} образовал с Δ_n угол α_n ($0 < \alpha_n < 2\pi$). Каждой паре точек a_n, a_{n+1} поставим в соответствие плоскость (лист) H_n с двумя лучевыми разрезами, выходящими из a_n и a_{n+1} и являющимися, соответственно, продолжениями отрезков Δ_{n-1} и Δ_n . Склеивая каждую пару листов H_n, H_{n+1} вдоль разреза, выходящего из точки a_{n+1} , получим некоторую односвязную риманову поверхность \tilde{F} . Совокупность таких поверхностей будем называть *классом поверхностей* \tilde{A}_1 .

Класс \tilde{A}_1 содержит класс A_1 , поверхности которого отличаются тем, что все $\alpha_n = \pi$. Ниже (п. 92) мы увидим, что в класс \tilde{A}_1 входят поверхности гиперболического типа, поэтому представляется интересным выделить из этого класса возможно более широкий подкласс поверхностей параболлического типа. В частности, желательно выделить поверхности \tilde{F} из \tilde{A}_1 , сравнительно просто Q -квазиконформно преобра-

зюемые в поверхности F из A_1 . В силу теоремы 39 все такие поверхности \tilde{F} — параболического типа.

Пусть \tilde{F} — произвольная поверхность класса \tilde{A}_1 , для которой ряды $\sum_0^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{-1}^{-\infty} \alpha_n$, а также, полагая $\beta_n = 2\pi - \alpha_n$, ряды $\sum_0^{\infty} \beta_n$ и $\sum_{-1}^{-\infty} \beta_n$ — все расходятся. Тогда, обозначая через $\{n_k\}$ и $\{n'_k\}$ последовательности наименьших натуральных чисел, определяемых последовательно из условий

$$\sum_1^{n_1} \alpha_n \geq \pi, \sum_1^{n_1} \beta_n \geq \pi; \dots; \sum_{n'_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_n \geq \pi, \sum_{n'_k+1}^{n_{k+1}} \beta_n \geq \pi; \dots$$

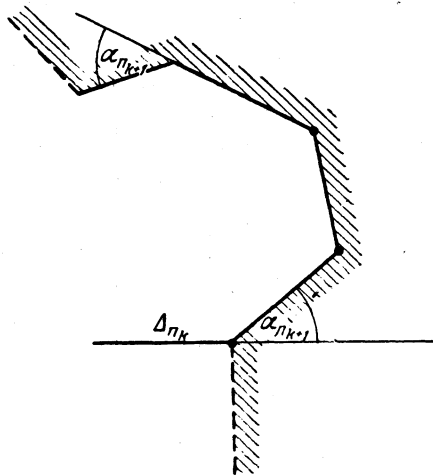
для $n > 0$ и, соответственно, из условий

$$\sum_0^{-n'_k+1} \alpha_n \geq \pi, \sum_0^{-n'_k+1} \beta_n \geq \pi; \dots; \sum_{-n'_k}^{-n'_{k+1}+1} \alpha_n \geq \pi, \sum_{-n'_k}^{-n'_{k+1}+1} \beta_n \geq \pi; \dots$$

для $n < 0$, имеем следующую теорему:

Теорема 40. Если для поверхности \tilde{F} класса \tilde{A}_1 все разности $n_{k+1} - n_k$ и $n'_{k+1} - n'_k$ равномерно ограничены, то \tilde{F} — параболического типа.

Доказательство. Проведем на \tilde{F} разрез вдоль ломаной S , составленной из всех отрезков Δ_n ; этот разрез разбивает F на какие-то две поверхности F_1 и F_2 . Каждую из поверхностей F_1 и F_2 разобьем на многоугольные части посредством перпендикуляров, восстановленных из концов всех отрезков $\{\Delta_{-n'_k}, \Delta_0, \Delta_{n_k}\}$ (фиг. 29). В силу условий теоремы граница каждой такой многоугольной части содержит



Фиг. 29

равномерно ограниченное число отрезков Δ_n ; поэтому при помощи угловых растяжений или сжатий вершин a_n можно соответствующие углы α_n и β_n превратить в углы, равные π , превращая таким образом поверхность \tilde{F} в поверхность F класса A_1 , связанную с \tilde{F} Q -отображением. Из теоремы 39 следует тогда теорема 40.

Аналогичная теорема справедлива для класса поверхностей, обобщающего, подобно предыдущему, класс поверхностей A'_1 .

§ 19. Классы поверхностей A_2 и A'_2

83. Описание классов поверхностей A_2 и A'_2 . Пусть $\{\omega_n^{(i)}\}$ ($i = 1, 2; n = 1, 2, \dots$) — произвольная система точек, удовлетворяющая условиям

$$\omega_n^{(i)} \neq 0, \arg \omega_{n+1}^{(i)} \neq \arg \omega_n^{(i)}, \omega_1^{(2)} = -\omega_1^{(1)}. \quad (1)$$

Каждой паре точек $\omega_n^{(i)}, \omega_{n+1}^{(i)}$ поставим в соответствие плоскость (лист) H_n^i с двумя лучевыми разрезами, выходящими из точек $\omega_n^{(i)}, \omega_{n+1}^{(i)}$ в направлениях, продолжение которых встречает начало координат. Аналогично поставим в соответствие точкам $\omega_1^{(1)}, \omega_1^{(2)}$ плоскость H_0 (она же H_0^1 и H_0^2). Склеивая каждую пару листов H_n^i, H_{n+1}^i ($n = 0, 1, \dots$) вдоль разреза, выходящего из точки $\omega_{n+1}^{(i)}$, получим некоторую односвязную риманову поверхность F , имеющую над всей конечной плоскостью $|\omega| < \infty$ только алгебраические точки ветвления первого порядка и в ∞ — две точки ветвления бесконечного порядка. Совокупность таких поверхностей, соответствующих всевозможным указанным системам точек $\{\omega_n^{(i)}\}$, будем называть *классом поверхностей A_2* .

Наряду с классом A_2 будем рассматривать класс A'_2 , каждая поверхность которого аналогично определяется с помощью последовательности точек $\{\omega_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), причем к листу H_1 , на котором остается свободный разрез, выходящий из точки ω_1 , приклеивается плоскость H_0 с одним таким разрезом.

84. Признаки параболического типа. Пусть F — произвольная поверхность класса A_2 . Обозначим через P_0 точку на H_0 , расположенную над точкой $\omega = 1$ и, определив на F , как в п. 32, области G_ω , неевклидовы координаты $h(P)$, $\tau(P)$ и т. д., воспользуемся доказанной в п. 34 теоремой 13.

Для оценки входящего в эту теорему интеграла

$$\int_0^\omega n_\omega(l, \tau) d\tau \quad (2)$$

введем на F наряду с угловой мерой $\tau_\omega(P)$ — соответственно $\tau_\omega(l)$ для проходящих через точку P простых или разветвленных лучей (см. п. 33) — величину

$$\tau(P) = \min_C \int_C |d \arg \omega|, \quad (3)$$

где C пробегает на F всевозможные пути, соединяющие точки P и P_0 . Обозначим через E_ω множество лучей l , для которых $\tau(l) \leq \omega$, и оценим его угловую меру

$$\theta(\omega) = \int_{E_\omega} |d\tau|, \quad (4)$$

где $|d\tau| = |d \arg w|$ означает угол между двумя бесконечно близкими лучами l множества E_ω . Для всякого луча l множества E_ω можно указать такую точку ветвления P^* , через которую проходит луч l^* с величиной $\tau(l^*) = \tau(P^*) \leq \omega$, что угловое расстояние $\tau(l, l^*) \leq 2\pi$. Угловая мера множества всех лучей l , для которых такой луч l^* является ближайшим в отношении углового расстояния $\tau(l, l^*)$, очевидно, не превосходит 4π , ибо все конечные точки ветвления на F — первого порядка. Поэтому, обозначая через $N(\omega)$ число точек ветвления P^* поверхности F , отстоящих от точки P_0 на угловое расстояние $\tau(P^*) \leq \omega$, будем иметь

$$\theta(\omega) \leq 4\pi N(\omega)$$

и так как, очевидно,

$$\tau(l) \leq \tau_\omega(l),$$

то

$$\int_0^\omega n_\omega(l, \tau) d\tau \leq \theta(\omega);$$

следовательно,

$$\int_0^\omega n_\omega(l, \tau) d\tau \leq 4\pi N(\omega), \quad (5)$$

откуда следует, что

для параболического типа поверхности F класса A_2 достаточна расходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{N(\omega)}. \quad (6)$$

Расположим все точки ветвления в порядке возрастания их углового расстояния τ от точки P_0 . Пусть

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n \leq \dots \quad (7)$$

получаемая таким образом последовательность значений τ . Если для некоторого n имеем $\tau_n < \tau_{n+1}$, то для $\tau_n \leq \omega < \tau_{n+1}$ величина $N(\omega) = n$ и, следовательно,

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{d\omega}{N(\omega)} = \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{n}.$$

Так как это соотношение справедливо и для $\tau_n = \tau_{n+1}$, то из предыдущего следует такая теорема:

Теорема 41. Для того чтобы поверхность F класса A_2 была параболического типа, достаточна расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{n}. \quad (8)$$

Пусть теперь F принадлежит классу A'_2 . Обозначим через α_n угол, получаемый при положительном вращении луча, выходящего на листе H_n из точки w_n , до совпадения с лучом, выходящим из точки w_{n+1} ; положим затем $\beta_n = 2\pi - \alpha_n$ и, введя на листе H_0 фиктивную точку ветвления $w_0 = -w_1$, будем считать $\alpha_0 = \beta_0 = \pi$. Выбирая точку P_0 на F так, чтобы она лежала на луче, проходящем на H_0 через точку w_0 , будем для последовательности (7) иметь значения

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n-1} \min(\alpha_k, \beta_k), \quad (9)$$

и так как теорема (41), очевидно, сохраняется и для класса A'_2 , то имеем следующую теорему:

Теорема 42. *Для параболического типа поверхности F класса A'_2 достаточна расходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(\alpha_n, \beta_n)}{n}. \quad (10)$$

Примечание 1. Если $\alpha_n = \beta_n = \pi$, то поверхность F класса A'_2 входит в класс A'_1 , рассмотренный выше (п. 81). Если для поверхностей F класса A_2 ввести углы α_n^i и $\beta_n^i = 2\pi - \alpha_n^i$, аналогично углам α_n и β_n , то при $\alpha_n^i = \beta_n^i = \pi$ получаем поверхности класса A_1 . Из теорем 41 и 42 снова следует параболический тип этих поверхностей.

Примечание 2. Теоремы 41 и 42 имеют смысл только тогда, когда $N(\omega) < \infty$, т. е. когда число точек ветвления, отстоящих от P_0 на заданное конечное угловое расстояние τ , всегда конечно. Это, однако, имеет место не всегда (достаточно, например, α_n и β_n взять равными, попеременно, $\frac{1}{n^2}$).

85. **Случай, когда точки ветвления сближаются в 0 или в ∞ .** Предположим теперь, что для модулей $|w_n^{(i)}| = \rho_n^i$ выполняется одно из соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^i = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^i = 0 \quad (11)$$

(одновременно для $i = 1, 2$). В первом случае поверхность принадлежит к классу A_∞ (§ 7), во втором — к классу $A_{0, \infty}$ (§ 8).

Располагая модуль ρ_n^i в виде единой монотонно возрастающей последовательности

$$\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n \leq \dots \quad (12)$$

соответственно монотонно убывающей последовательности

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n \geq \dots \quad (13)$$

и учитывая, что для точек ветвления первого порядка любое их число совпадает с суммой их порядков, получаем, на основании теоремы 12 (п. 30), следующее предложение:

Для параболического типа поверхности F класса A_2 , удовлетворяющей одному из условий (11), достаточна, соответственно, расходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\ln \frac{1}{\rho_{n+1}}}{\ln \frac{1}{\rho_n}}. \quad (14)$$

Если вместо теоремы 14 воспользоваться более сильной теоремой 13, то легко убедиться, что входящий туда интеграл (2) в интервале $\ln \frac{1}{\rho_n} < \omega < \ln \frac{1}{\rho_{n+1}}$ растет как $2(\omega \cdot 2 + 2\pi \cdot n)$, что позволяет второй ряд в (14) заменить рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\ln \frac{1}{\rho_{n+1}} + n}{\ln \frac{1}{\rho_n} + n},$$

который сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}}{\ln \frac{1}{\rho_n} + n},$$

в свою очередь эквивалентным ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}.$$

Полагая (при любом из соотношений в (11))

$$d_n = \left| \ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \right| + (\tau_{n+1} - \tau_n), \quad (15)$$

если $F \in A_2$ и

$$d_n = \left| \ln \frac{\rho_n^*}{\rho_{n+1}^*} \right| + \min(\alpha_n, \beta_n), \quad (15')$$

* Это легко следует из такого нетрудно доказываемого предложения о рядах с положительными членами:

если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, то ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n + n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

сходятся или расходятся одновременно.

если $F \in A'_2(\{\rho_n\})$ в (15') означает расположенную в монотонно возрастающем (убывающем) порядке последовательность $\{\rho_n\}$, приходим к следующей теореме:

Теорема 43. Если для поверхности F класса A_2 или A'_2 модули ρ'_n соответственно ρ_n стремятся к ∞ или к 0, то для параболического типа поверхности F достаточна расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n}. \quad (16)$$

86. Признак гиперболического типа для поверхностей класса A'_2 (начало). Сперва будем рассматривать поверхности F класса A'_2 , для которых модули $|\omega_n| = \rho_n$ монотонно убывают:

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n \geq \dots \quad (17)$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$\alpha_n \leq \beta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \quad (18)$$

и, полагая

$$d_n = \ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} + \alpha_n, \quad (19)$$

чтобы

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq \dots; \quad d_n \rightarrow 0 \quad (20)$$

или, короче, чтобы $d_n \searrow 0$.

По поводу этих условий заметим следующее: 1) при (17) второе условие в (18) естественно, ибо при $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ поверхность F тривиальным образом гиперболического типа за счет граничной полупрямой; 2) при (17) естественно также считать $\inf d_n = 0$, ибо в противном случае из теорем 42 и 43 следовало бы, что F — параболического типа. Более сильное требование (20) связано с применяемым ниже методом.

Из условия $\alpha_n \searrow 0$ следуют предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \quad (21)$$

и, учитывая (17), что величина

$$\delta_n = \rho_n d_n \searrow 0. \quad (22)$$

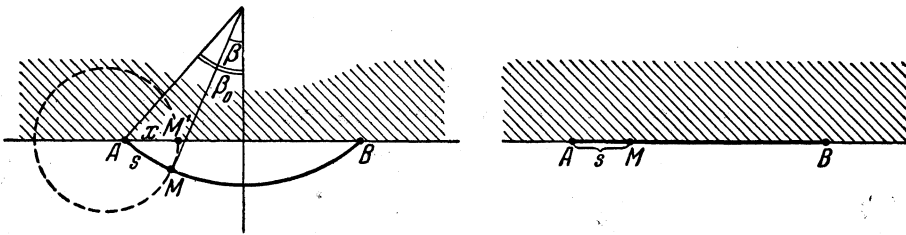
87. Вспомогательные Q -преобразования. Введем, дополнительно к преобразованиям п. 79, следующие Q -преобразования:

Преобразование 3. Это преобразование устанавливает соот-

ветствие между областями, указанными на фиг. 30, сохраняя длину на границе. Сперва, поступая как в п. 79, производим „вдавливание“ выступающего сегмента в полуплоскость. При этом произвольная точка M на дуге \overline{AB} , перемещаясь по окружности Аполлония, займет некоторое положение M' на отрезке \overline{AB} . Элементарный подсчет показывает коэффициент сжатия (величины β и β_0 указаны на фиг. 30)

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\cos^2 \frac{\beta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

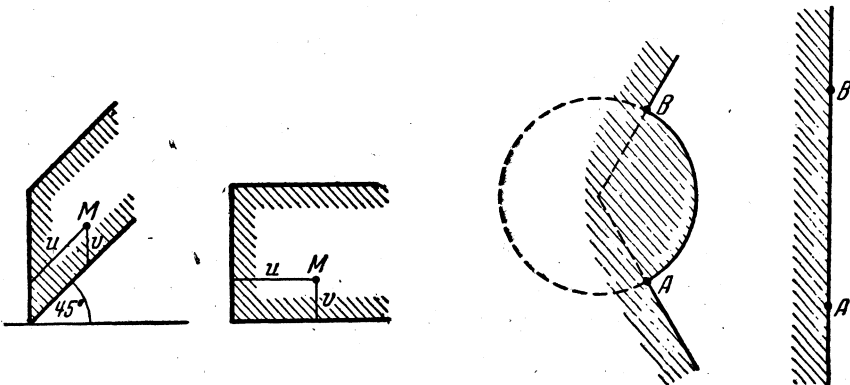
Чтобы получить отображение, сохраняющее длину и на дуге \overline{AB} , нужно провести дополнительное растяжение вертикальной полупло-



Фиг. 30

лосы, опирающееся на отрезок \overline{AB} . При $\beta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ характеристика преобразования $p \leq 3$.

Преобразование 4. Это преобразование переводит косую полуплоску в прямоугольную (фиг. 31). Чтобы получить это преобразова-



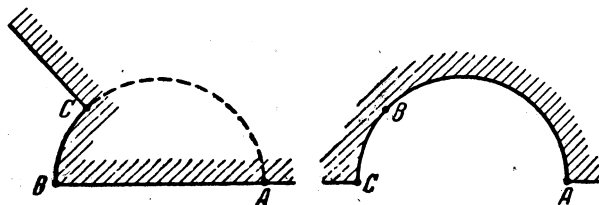
Фиг. 31

Фиг. 32

ние, достаточно косоугольные координаты u, v превратить в прямоугольные. Стороны полос переходят друг в друга без растяжения.

Преобразование 5. Это преобразование устанавливает соответствие между областями, указанными на фиг. 32, сохраняя длину на границе. Чтобы получить это преобразование, изменяем углы около точек A , B и используем преобразование 3.

Преобразование 6. Это преобразование устанавливает соответствие между областями, указанными на фиг. 33, сохраняя длину



Фиг. 33

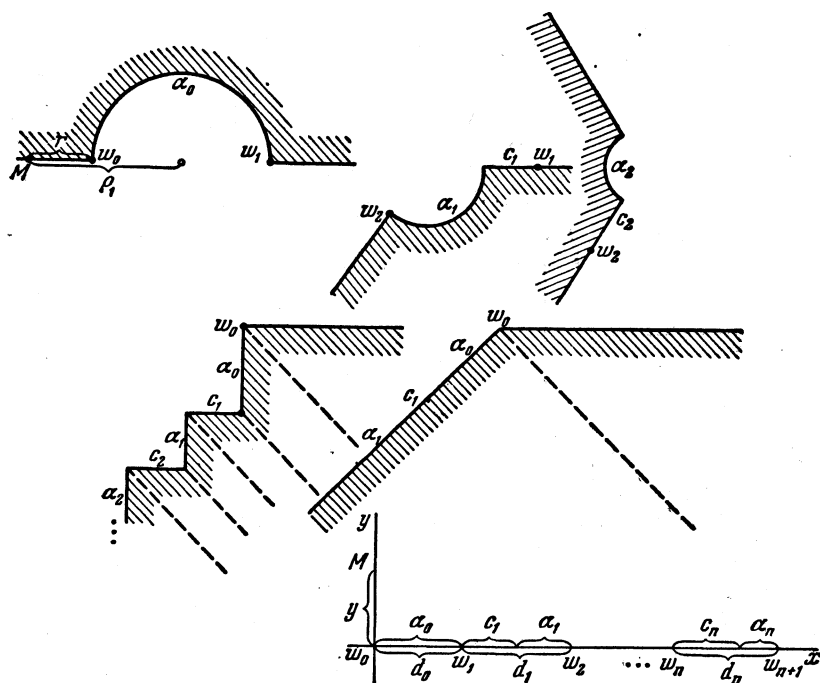
на дуге \widehat{BC} и равномерно изменяя ее на отрезке \overline{AB} (это преобразование нам потребуется в § 20).

88. Получение эквивалентной задачи на склеивание. Пусть F — произвольная поверхность класса A_2' , удовлетворяющая условиям п. 86. Проведем на каждом ее листе H_n разрез по радиальному отрезку c_n от w_n до окружности $|w| = \rho_{n+1}$ и по дуге α_n этой окружности, пробегающей в угле α_n до точки w_{n+1} . Кроме того, на листе H_0 проведем прямолинейный разрез от w_1 через начало координат в ∞ . В результате поверхность F распадается на две части G_1 и G_2 , из которых одна, пусть G_2 , пробегает по углам $\{\alpha_n\}$.

Зафиксируем на листе H_0 точку $w_0 = -w_1$ и половину листа H_0 , входящую в G_1 , подвергнем преобразованию 1 (см. п. 79), после чего отобразим G_1 с помощью функции $z = \ln w$. Последовательно применяя преобразование 4, угловое сжатие и поворот, получим в качестве образа G_1 первый квадрант плоскости z (см. фиг. 34; пунктиром указано выделение косых полуполос: для их выделения существенно условие $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$).

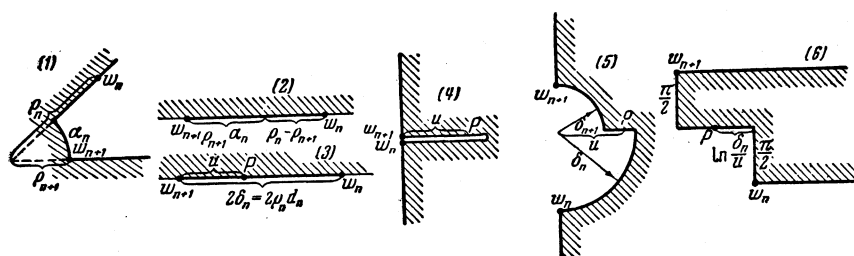
Преобразуем теперь G_2 . Для этого ту из двух частей каждого листа H_n ($n \geq 1$), которая входит в G_2 , преобразуем в полуплоскость с помощью преобразования 5. При этом разрез от w_n до w_{n+1} перейдет в отрезок длиной (см. фиг. 35) $\rho_{n+1} \alpha_n + (\rho_n - \rho_{n+1})$. Так как $\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \rightarrow 1$, то, после дополнительного равномерно ограниченного растяжения, получим для образа c_n отрезок длиной $2\delta_n$. Полученную полуплоскость подвергнем еще преобразованию 2 и еще одному преобразованию, показанному на фиг. 35 (5). Половину листа H_0 , входящую к G_2 , сперва подвергнем продольному растяжению в вертикальной полупо-

лосе, опирающейся на отрезок $w_0 w_1$, превращая ее в полуполосу шириной $2\delta_1 = 2\rho_1\alpha_1$; затем подвергнем преобразованию 1. Используя снова логарифмическую функцию $z = \ln w$, превратим G_2 в ступенчатую фи-



Фиг. 34

гуру, которую легко преобразовать во второй квадрант плоскости z , примыкающий к образу G_1 (первому квадранту) вдоль положительной мнимой полуоси, которая в обоих случаях соответствует части разреза



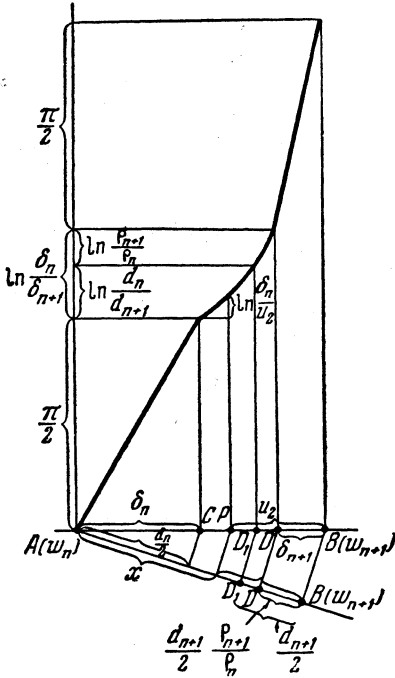
Фиг. 35

листа H_0 , идущему из точки w_0 в ∞ . Для точки M этого разреза, имеющего модуль $\rho_1 + r$, получаем, соответственно, точки с ординатами

$$y_1 = \ln\left(1 + \frac{r}{\rho_1}\right), \quad y_2 = \ln\left(1 + \frac{r}{\rho_1 d_1}\right),$$

откуда следует возможность Q -квазиконформного склеивания обоих квадрантов. Выполнив это склеивание, приходим к эквивалентной задаче на склеивание для верхней полуплоскости $I(z) > 0$.

89. Преобразование функции склеивания. При отображении G_1 растяжение $\left| \frac{dz}{dw} \right|$ на c_n меняется от $\frac{1}{\rho_n}$ до $\frac{1}{\rho_{n+1}}$, оставаясь затем рав-



Фиг. 36

Производя указанное на фиг. 36 разбиение отрезка AB , где точки A и B соответствуют точкам w_n и w_{n+1} при отображении G_1 , замечаем, что коэффициенты растяжения на AC и DB равны, соответственно,

$$k_{AC} = \frac{\pi}{d_n}, \quad k_{DB} = \frac{\pi}{d_{n+1}},$$

и для произвольной точки P на CD (см. точку P , отмеченную на фиг. 35) имеем $k_P = \frac{1}{u_1}$; следовательно,

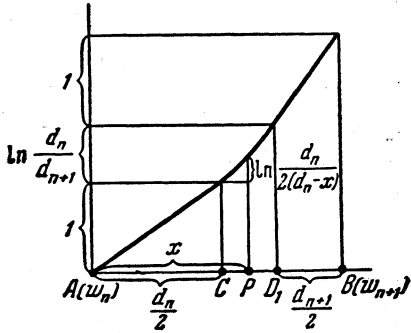
$$k_C = \frac{2}{d_n}, \quad k_{D_1} = \frac{2}{d_{n+1}}, \quad k_D = \frac{2}{d_{n+1}} \cdot \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}.$$

ным $\frac{1}{\rho_{n+1}}$ на α_n . Так как $\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \rightarrow 1$, то можно считать, что на c_n и α_n растяжение всюду равно $\frac{1}{\rho_n}$. Противоположный край разреза листа H_n при отображении G_2 испытывает растяжение, меняющееся с точностью до множителя, заключенного между положительными абсолютными постоянными, от $\frac{1}{\delta_n}$ до $\frac{1}{\delta_{n+1}}$ (на фиг. 35 при переходе от (1) к (4) растяжение на c_n и α_n всюду одинаково и заключено между некоторыми числами $K_1, K_2 > 0$, не зависящими от n ; при переходе от (4) к (5) соответствующие круговым дугам отрезки имеют коэффициент растяжения, равный $\frac{\pi}{2}$). Отсюда следует, что функцию склеивания на отрезке d_n положительной действительной полуоси можно считать имеющей вид, показанный на фиг. 36.

Так как $\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \rightarrow 1$, то растяжение на D_1D можно считать всюду равным $\frac{2}{d_{n+1}}$ и соответствующую D_1D длину $\ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}$ можно включить в длину $\frac{\pi}{2}$, соответствующую отрезку DB . Заменяя еще оба отрезка длиной $\frac{\pi}{2}$, соответствующие AC и DB , на отрезки длиной 1, придадим функции склеивания вид, показанный на фиг. 37.

Обозначая через d_0 отрезок длиной π , соответствующий при отображении G_1 и G_2 разрезу на листе H_0 от ω_0 до ω_1 , и полагая

$$s_n = \sum_{k=0}^n d_k,$$



Фиг. 37

получаем следующее окончательное выражение для функции склеивания $r^* = \varphi(r)$ полуплоскости $I(z) > 0$:

$$\varphi(r) \equiv r$$

для $0 \leq r \leq s_0$ и для $n \geq 1$

$$\varphi(s_{n-1} + x) - \varphi(s_{n-1}) = \begin{cases} \frac{2x}{d_n}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{d_n}{2}, \\ 1 + \ln \frac{d_n}{2(d_n - x)}, & \text{если } \frac{d_n}{2} \leq x \leq d_n - \frac{d_{n+1}}{2}, \\ 2 + \ln \frac{d_n}{d_{n+1}} + \frac{2(x - d_n)}{d_{n+1}}, & \text{если } d_n - \frac{d_{n+1}}{2} \leq x \leq d_n. \end{cases} \quad (23)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 44. Если для поверхности F класса A'_2 выполняются условия $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots$; $\alpha_n \leq \beta_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ и $d_n \searrow 0$, то тип поверхности F совпадает с типом склеивания для полуплоскости $I(z) > 0$ с функцией склеивания $r^* = \varphi(r)$, определяемой из соотношений (23).

90. Признак гиперболического типа для поверхностей класса A_2 (окончание). На основании теоремы 21, п. 52, для гиперболического типа склеивания полуплоскости $I(r) > 0$ с функцией склеивания $r^* = \varphi(r)$ достаточно, чтобы, начиная с некоторого значения r_0 , выполнялось соотношение

$$\chi(r) = \frac{r\varphi'(r)}{\varphi(r)} \geq q > 1, \quad (24)$$

где q — постоянная.

Для линейной функции $ar + b$ ($a > 0$) величина

$$x(r) = \frac{ar}{ar+b} = \frac{1}{1 + \frac{b}{ar}}$$

возрастает вместе с r , если $b > 0$, и убывает, если $b < 0$.

Для $0 \leq r \leq d_0$ имеем $\varphi'(r) = 1$; затем $\varphi'(r)$ монотонно возрастает как $\frac{2}{d_n}$; поэтому, как только будем иметь $d_n < 2$, касательная к кривой $r^* = \varphi(r)$ пересечет отрицательную мнимую полуось и, следовательно, на интервалах, где $\varphi(r)$ изменяется линейно, величина $x(r)$ убывает, когда $d_n < 2$. При этом в конце такого интервала линейного изменения, с абсциссой

$$r_n = s_{n-1} + \frac{d_n}{2},$$

имеем

$$\varphi(r_n) = 2n + \ln \frac{1}{d_n}, \quad \varphi'(r_n) = \frac{2}{d_n};$$

следовательно,

$$x(r_n) = \frac{\left(s_{n-1} + \frac{d_n}{2}\right) \cdot \frac{2}{d_n}}{2n + \ln \frac{1}{d_n}}.$$

С другой стороны, легко убедиться, что там, где $\varphi(r)$ изменяется по логарифмическому закону, величина $x(r)$ возрастает, когда $d_n < 2$. Заменяя $s_{n-1} + \frac{d_n}{2}$ асимптотически эквивалентной величиной s_n и замечая, что $d_n \ln \frac{1}{d_n} \rightarrow 0$, получаем следующую теорему:

Теорема 45. Если, в условиях теоремы 44, начиная с некоторого значения n , выполняется соотношение

$$\frac{d_0 + d_1 + \dots + d_n}{nd_n} \geq q > 1, \quad (25)$$

то F — гиперболического типа.

Как следствие получаем следующую теорему:

Теорема 46. Пусть $\{d_n\}$ — произвольная монотонно убывающая последовательность, для которой выполняется соотношение (25). Тогда ко всякой монотонно убывающей последовательности $\{\rho_n\}$, для которой

$$\ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} < d_n$$

можно подобрать такую последовательность $\{\alpha_n\}$, чтобы поверхность F класса A'_2 , определяемая значениями $\{\rho_n, \alpha_n\}$, была гиперболического типа.

Доказательство. Начиная с некоторого значения n_0 , будем иметь $\alpha_n < \pi$. Положим для $n \geq n_0$

$$\alpha_n = d_n - \ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}$$

и произвольно доопределим α_n для $n < n_0$. Исключая тривиальный для гиперболического типа случай, когда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, заключаем на основании теоремы 45, что соответствующая $\{\rho_n, \alpha_n\}$ поверхность F класса A'_2 — гиперболического типа.

В частности, можно взять все $\rho_n = \rho_0$.

Примерами последовательностей $\{d_n\}$, для которых $d_n \searrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$ и выполняется условие (25), являются:

$$d_n = \frac{1}{n}, \quad d_n = \frac{1}{n \ln n}, \quad d_n = \frac{1}{n^\lambda} \quad (0 < \lambda < 1) \text{ и т. д.}$$

Заметим для сравнения, что для $d_n = \frac{1}{\ln n}$ указанным выше способом получаются поверхности параболического типа.

Примечание. Если к ограничениям, наложенным выше на последовательность $\{d_n\}$, потребовать дополнительно, чтобы выполнялось условие $\frac{d_n}{d_{n+1}} < 0(1)$, то при помощи Q -деформаций можно функцию склеивания (23) заменить кусочно-линейной функцией, отображающей каждый отрезок d_n на отрезок длиной 1. Применяя теоремы о типе склеивания для полуплоскости (§ 12), можно получить разные признаки параболического и гиперболического типов для поверхностей класса A_2 .

91. Случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает. Будем теперь рассматривать поверхности F класса A'_2 , для которых модули $|w_n| = \rho_n$ монотонно возрастают:

$$\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n \leq \dots \tag{26}$$

и выполняются условия:

$$\alpha_n \leq \beta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad d_n \searrow 0, \tag{27}$$

где

$$d_n = \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} + \alpha_n. \tag{28}$$

Из условия $d_n \searrow 0$ следуют предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

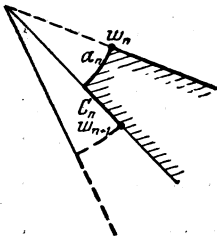
Введем еще величину

$$\delta_n = \rho_n d_n. \quad (29)$$

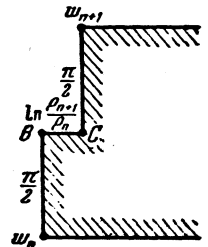
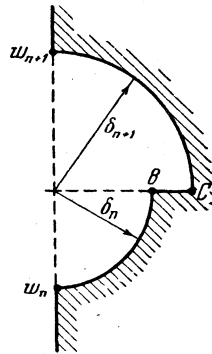
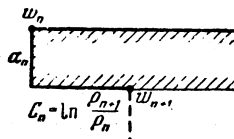
Теперь уже нельзя утверждать, что δ_n монотонно убывает; однако из предыдущих условий следует соотношение

$$\overline{\lim} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} \leq 1. \quad (30)$$

Проводя на листе H_n разрез от w_n до w_{n+1} сперва по дуге α_n , затем по радиальному отрезку c_n и проводя, как раньше, дополнительный разрез на листе H_0 , снова разобьем поверхность F на две части



Фиг. 38



Фиг. 39

G_1 и G_2 , которые, после вышерассмотренных деформаций части листа H_0 , входящего в G_1 , и частей всех листов H_n ($n = 0, 1, \dots$), входящих в G_2 , отобразим с помощью логарифмической функции $z = \ln w$ на некоторые бесконечно-ступенчатые области D_1 и D_2 в плоскости z . Непосредственный переход от этих областей к квадрантам плоскости z с помощью Q -отображений может оказаться невозможным для D_1 , если отрезки $c_n = \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$ растут слишком быстро (фиг. 38). Иначе обстоит дело с областью D_2 . Значения n , для которых $\delta_n < \delta_{n+1}$, приводят к идущим направо ступенькам в области D_2 (фиг. 39). В силу (30) эти ступеньки можно устранить с помощью Q -квазиконформных преобразований с равномерно ограниченными характеристиками (фиг. 40), после чего область D_2 , как выше, может быть преобразована в квадрант плоскости. Склеивая ее с областью D_1 , получаем возможность

преобразовать их вместе в полуплоскость $I(z) > 0$ и снова приходим к той же задаче на склеивание для этой полуплоскости, что и раньше. Отсюда следует такая теорема:

Теорема 47. Теоремы 44, 45 и 46, с заменой $\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}$ на $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$, имеют место и для поверхностей F класса A'_2 , удовлетворяющих условиям (26), (27).

Примечание 1. Если $\rho_n \nearrow \infty$, то условие $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ можно отбросить.

Примечание 2. Если, как выше, $\rho_n \nearrow \infty$ и F — гиперболического типа, то мероморфная функция $w = f(z)$, отображающая единичный круг $|z| < 1$ на F , является голоморфной внутри этого круга и имеет ровно одно асимптотическое значение, равное ∞ , к которому она стремится по спирали, асимптотически приближающейся к единичной окружности $|z| = 1$. Аналитическое построение и изучение голоморфных функций в круге $|z| < 1$, имеющих конечное число подобного рода асимптотических значений, было дано Валироном [38]. Приведенное здесь построение независимо от исследований Валирона.

Докажем еще следующую теорему:

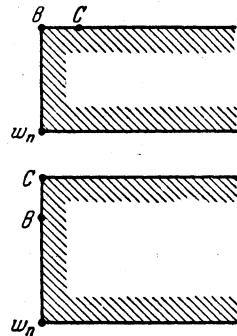
Теорема 48. Пусть F_0 — поверхность гиперболического типа класса A'_2 , для которой все модули $\rho_n^0 = 1$ и $\{\alpha_n^0\}$ ($\alpha_n^0 < \beta_0^0$) — монотонно убывающая последовательность, удовлетворяющая условию (25). Тогда всякая поверхность F класса A'_2 с той же последовательностью углов $\{\alpha_n^0\}$ и последовательностью $\{\rho_n\}$, монотонно возрастающей или монотонно убывающей настолько медленно, что

$$\left| \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \right| < \alpha_n^0, \tag{31}$$

также гиперболического типа.

Доказательство. Тип поверхности F_0 не изменится, если мы углы α_n^0 увеличим в два раза (за счет углов β_0^0). На основании теоремы 45 поверхность \tilde{F} класса A'_2 с монотонно возрастающей или монотонно убывающей последовательностью $\{\tilde{\rho}_n\}$, удовлетворяющей условию (31), и углами

$$\tilde{\alpha}_n = 2\alpha_n^0 - \ln \frac{\tilde{\rho}_n}{\rho_{n+1}}$$



Фиг. 40

(для определенности считаем $\tilde{\rho}_1 \geq \tilde{\rho}_2 \geq \dots$) — гиперболического типа, ибо для нее последовательность величин

$$\tilde{a}_n = \tilde{\alpha}_n + \ln \frac{\tilde{\rho}_n}{\tilde{\rho}_{n+1}} = 2\alpha_n^0$$

вместе с $\{\alpha_n^0\}$ монотонно убывает и удовлетворяет условию (25). Тип поверхности F не изменится, если мы углы $\tilde{\alpha}_n$ заменим на углы α_n^0 , ибо, в силу (31),

$$2\alpha_n^0 > \tilde{\alpha}_n > \alpha_n^0,$$

что приводит к поверхности F с углами $\alpha_n = \alpha_n^0$ и модулями $\rho_n = \tilde{\rho}_n$, откуда следует теорема 48.

92. Гиперболический тип поверхностей класса A_2 . Проведенное выше исследование переносится на несимметрично устроенные поверхности F класса A_2 . При этом получается эквивалентная задача на склеивание двух полуплоскостей. Изложенные в § 13 признаки гиперболического типа склеивания позволяют получить теоремы, аналогичные теоремам 44—48.

Изложенный метод позволяет получить признаки гиперболического типа для класса поверхностей \tilde{A}_1 , рассмотренного выше в § 18.

§ 20. Класс поверхностей A_3

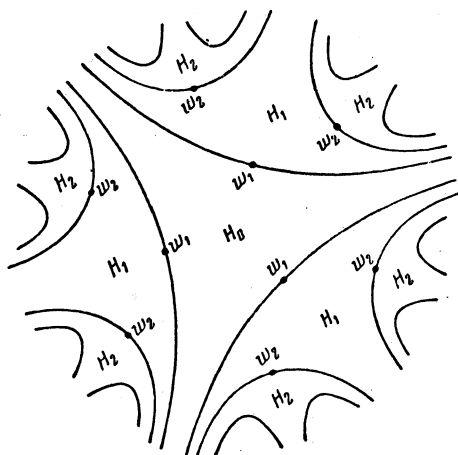
93. Описание класса поверхностей A_3 . Листами поверхностей класса A_3 являются плоскости w с тремя радиальными разрезами идущими в ∞ из трех отличных от нуля точек. Каждая поверхность F класса A_3 определяется бесконечной совокупностью таких листов склеенных между собой по схеме модулярной фигуры, т. е. так, что к одному листу H_0 нулевого поколения приклеиваются три листа H_1 первого поколения, к их свободным разрезам приклеиваются 3·2 листов H_2 второго поколения и т. д. Представителя листов n -го поколения будем обозначать через H_n . Всякий такой лист, посредством точки ветвления w_n , связан с определенным листом H_{n-1} и посредством двух точек ветвления w_{n+1} — с двумя листами H_{n+1} . Исключение составляет лист H_0 , связанный тремя точками ветвления w_1 с тремя листами H_1 (фиг. 41).

Совокупность всевозможных таких поверхностей будем называть классом поверхностей A_3 .

94. Параболический тип поверхности класса A_3 . Дополнительные ограничения. Используя результаты §§ 7, 8, можно дать различные достаточные признаки параболического типа для поверхностей класса A_3 . В случае, когда точки w_n всех листов H_n -го поколения имеют

одинаковый модуль $|\omega_n| = \rho_n$ и $\rho_n \nearrow \infty$ или $\rho_n \searrow 0$, достаточными признаками параболического типа являются расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \quad (1)$$



Фиг. 41

или, что эквивалентно, ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \rho_n}{2^n}, \quad (1')$$

если $\rho_n \nearrow \infty$, и, соответственно, ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{\ln \frac{1}{\rho_{n+1}}}{\ln \frac{1}{\rho_n}}, \quad (2)$$

если $\rho_n \searrow 0$. Заметим, что при дополнительном требовании

$$1 < q \leq \frac{\rho_1}{\rho_2} \leq \frac{\rho_2}{\rho_3} \leq \dots \quad (3)$$

ряд (2) расходится одновременно с рядом

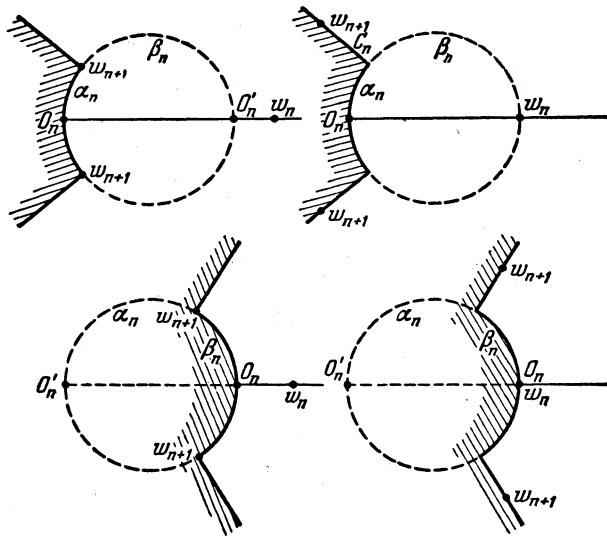
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}.$$

В дальнейшем нас будет интересовать гиперболический тип поверхностей класса A_3 . Используя результаты по задаче на склеивание для модулярной фигуры (см. гл. 4, § 16), мы ниже выведем достаточные признаки гиперболического типа при следующих дополнительных ограничениях (требованиях симметрии) на поверхности F класса A_3 :

для всех листов H_n n -го поколения модули $|w_n| = \rho_n$ равны, равно как и углы

$$\beta_n = \pi - \alpha_n = \left| \arg \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| < \pi. \quad (4)$$

95. Разбиение F на области $\{S\}$ и их деформирование. Пусть F — произвольная поверхность класса A_3 , удовлетворяющая требованиям симметрии п. 94. Продолжим разрезы каждого листа H_n до окружности $|w| = \min(\rho_n, \rho_{n+1})$, затем проведем разрез по меньшей

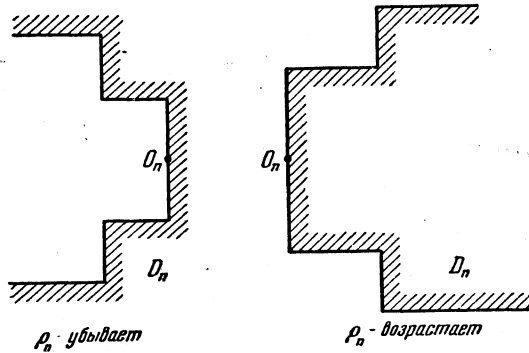


Фиг. 42

из дуг этой окружности, заключенной между точками w_{n+1} (если $\alpha_n = \beta_n$, то разрез проводим по дуге α_n), и если $\alpha_n < \beta_n$, то продолжим еще разрез, выходящий из точки w_n до встречи с указанной дугой в некоторой точке O_n (см. фиг. 42; слева $\rho_n > \rho_{n+1}$, справа $\rho_n < \rho_{n+1}$). Кроме того, соединим точки w_1 на H_0 с началом координат O_0 . Линии дополнительных разрезов образуют на F некоторую сеть T , состоящую из отрезков — дуг $O_n O_{n+1}$, разбивающую F на семейство областей $\{S\}$, расположенных подобно областям S_n модулярной фигуры (см. выше фиг. 16).

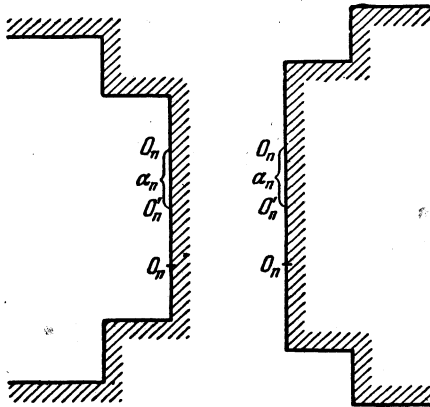
Рассмотрим какую-нибудь область S_n и предположим сперва, что $\alpha_n < \beta_n$. В этом случае S_n состоит из части листа H_n , представляющей круговой сектор с вершиной в ∞ (см. заштрихованные области на фиг. 42 сверху) и частей листов H_m ($m > n$), которые представляют аналогичные сектора, если $\alpha_m > \beta_m$, либо такие же сектора с дополнительным полукругом, если $\alpha_m < \beta_m$. Все сектора с полукругами,

входящие в S_n , подвергнем преобразованию 6 п. 87, после чего полученную из S_n область S_n^* отобразим с помощью функции $z = \ln w$ на некоторую ступенчатую область D_n (фиг. 43).



Фиг. 43

Если же $\alpha_n > \beta_n$, то часть листа H_n , входящая в S_n , содержит круг $|\omega| < \min(\rho_n, \rho_{n+1})$ (см. заштрихованные области на фиг. 42 снизу). Разбивая эту часть листа H_n на две симметричные части, подвергая



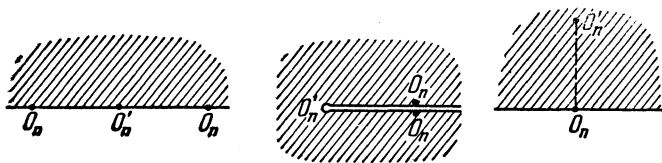
Фиг. 44

каждую из них преобразованию 6 п. 87 и поступая как раньше с входящими в S_n частями остальных листов H_m ($m > n$), мы снова сможем полученную из S_n область S_n^* отобразить с помощью функции $z = \ln w$ на некоторую ступенчатую область D_n ; однако в этом случае на границе области D_n мы будем иметь два новых отрезка $O_n O_n'$, связанных между собой тождественным соответствием (фиг. 44).

Аналогично поступим с областями S_0 , только предварительно входящие в них углы листа H_0 , которые все можно считать равными

$\frac{2\pi}{3}$, преобразуем во „внешние сектора“ (с вершиной в ∞), опирающиеся на дуги $\omega_1\omega_1$.

96. Случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно убывает. В этом случае области D_n легко преобразуются в полуплоскости $I(z) > 0$. В случае, когда $\alpha_n > \beta_n$, мы с помощью добавочного преобразования, показанного на фиг. 45, производим склеивание вдоль



Фиг. 45

отрезков $O_n O'_n$. В результате приходим к задаче на склеивание для модулярной фигуры с отрезками $d_n = O_n O_{n+1}$, которые, как нетрудно подсчитать, определяются по формуле

$$d_n = \min(\alpha_n, \beta_n) + \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}} + \epsilon_{n+1} \beta_{n+1}, \quad (5)$$

где ϵ_{n+1} равно 0, если $\alpha_{n+1} > \beta_{n+1}$, и равно 1, если $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$. Для $n = 0$ нужно вместо $\min(\alpha_0, \beta_0)$ взять $\frac{\pi}{3}$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 49. Если последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно убывает, то тип симметрично устроенной поверхности F класса A_3 совпадает с типом склеивания для модулярной фигуры с отрезками $\{d_n\}$, определяемыми согласно (5).

Если поверхность F удовлетворяет еще условию (3), то с помощью Q -квазиконформной деформации отрезки d_n можно заменить на отрезки

$$d'_n = \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}} \quad (5')$$

и из теоремы 31, п. 69, следует такая теорема:

Теорема 50. Если симметрично устроенная поверхность F класса A_3 удовлетворяет условию (3), то тип ее будет гиперболическим или параболическим в зависимости от того, сходится или расходится ряд (2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}.$$

Примечание. Как выше было отмечено, если $\rho \rightarrow 0$, то поверхность F класса A_3 входит в класс $A_{0, \infty}$, рассмотренный в § 8, и соответствующий признак параболического типа (расходимость ряда (2)) при дополнительном условии (3) эквивалентна расходимости ряда (2). Так как, по теореме 50, сходимость этого ряда влечет за собой гиперболический тип поверхности F , то отсюда следует, что в известных случаях признак параболического типа для поверхностей класса $A_{0, \infty}$, выражаемый теоремой 14, является точным, как, например, для поверхностей, выделяемых из класса A_3 теоремой 50.

Потребуем теперь, чтобы вместо (3) выполнялось условие

$$\alpha_n \leq \beta_n. \tag{6}$$

Тогда из (5) следует, что

$$d_n = \alpha_n + \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}} + \beta_{n+1}$$

и, следовательно

$$\frac{\pi}{2} < d_n < 2\pi + \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_{n+2}}. \tag{7}$$

Заметив это, рассмотрим наряду с поверхностью F , поверхность F_0 с теми же значениями α_n , что у F , но с модулями $\rho_n^0 = 1$. Из (7) следует, что для F_0 отрезки d_n^0 Q -эквивалентны 1 и, следовательно, F_0 — гиперболического типа (если верна гипотеза, высказанная в самом конце п. 69, то F_0 всегда гиперболического типа, независимо от дополнительного условия (6)). Поэтому *всякий признак гиперболического типа поверхности F можно рассматривать как ограничение на скорость убывания последовательности $\{\rho_n\}$, сохраняющее за F тот же тип (гиперболический), что и для соответствующей ей поверхности F_0 .* Так, например, используя ряд (13) теоремы 30, заключаем, что для этого достаточна сходимость ряда

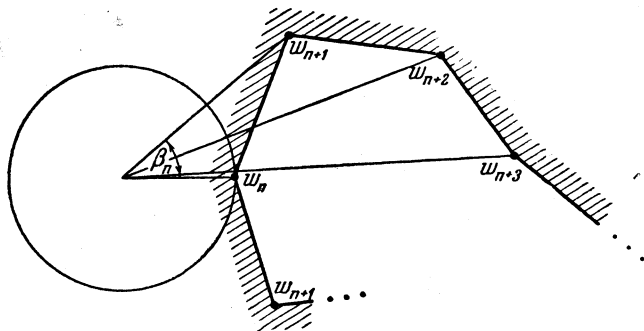
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}, \tag{8}$$

эквивалентного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{1}{\rho_n}. \tag{9}$$

97. Случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходится. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$, то естественно потребовать, чтобы $\rho_n \rightarrow \infty$ (иначе поверхность тривиальным образом гиперболического типа). Не ограничивая общности, можно, далее, считать, что

$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \pi$. При этих условиях сеть T , разбивающую F на области $\{S\}$, будем строить несколько иначе, чем выше, именно, будем соединять на каждом листе H_n ($n \geq 1$) w_n с точками w_{n+1} прямолинейными отрезками, а на листе H_0 попережнему соединим точки w_1 с началом координат. Принимая точки w_n за точки O_n и присоединяя к ним еще начало O_0 листа H_0 , получим на F нужную нам сеть T с отрезками $O_n O_{n+1}$. Области S_n будут иметь вид, изображенный на фиг. 46,



Фиг. 46

и легко могут быть преобразованы в полуплоскости с отрезками $O_n O_{n+1}$, равными

$$d_n = \rho_n \beta_n + (\rho_{n+1} - \rho_n), \quad (10)$$

откуда следует такая теорема:

Теорема 51. Если $\rho_n \nearrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$, то тип поверхности F совпадает с типом склеивания для модулярной фигуры с отрезками $\{d_n\}$, определяемыми согласно (10).

Если последовательность (10) удовлетворяет условию

$$d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots, \quad (11)$$

то, на основании теоремы 31, заключаем, что для гиперболического типа поверхности F необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln [\rho_n \beta_n + (\rho_{n+1} - \rho_n)] \quad (12)$$

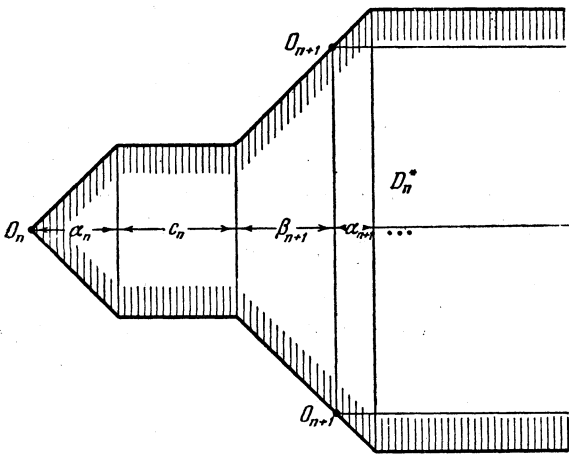
сходился.

Но при условии (11) ряд (12), как нетрудно доказать, сходится и расходится одновременно с рядом (1'):

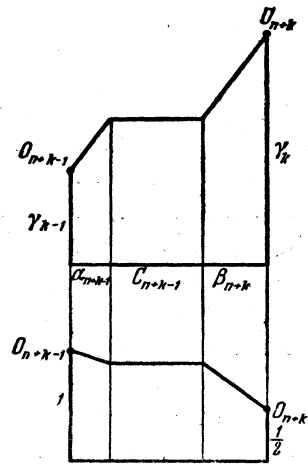
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \rho_n}{2^n}.$$

Поэтому из предыдущего следует

Теорема 52. Если для симметрично устроенной поверхности F класса A_3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходится и последовательности $\{\rho_n\}$ и $\{d_n\}$ (последняя определяется согласно (10)) монотонно возрастают, то F — гиперболического или параболического типа в зависимости от того, сходится или расходится ряд (1').



Фиг. 47



Фиг. 48

Примечание. Отсюда следует, что признак параболического типа для поверхности класса A_{∞} , выражаемый теоремой 12, в известных случаях является точным, как, например, для поверхностей, выделяемых из класса A_3 теоремой 52.

98. Случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ расходится. Предположим сперва, что все $\alpha_n \leq \beta_n$ и образуем каждую ступенчатую фигуру D_n (фиг. 48, справа) к виду D_n^* , показанному на фиг. 47, где образам дуг α_m, β_m ($m = n, n + 1, \dots$) придано наклонное положение, а образы радиальных разрезов c_n (см. c_n на фиг. 42 сверху справа) оставлены горизонтальными. Обозначим через D_{nk}^* ($k = 1, 2, \dots$) части D_n^* , отсекаемые от нее последовательно вертикальными сечениями γ_k , проходящими, соответственно, через

точки O_{n+k} , и для $k \geq 2$ преобразуем их при помощи вертикальных сжатий к виду, указанному на фиг. 48 (указана половина области D_{nk}^*), после чего уменьшим размеры фигуры в 2^{n+k} раз. Нетрудно убедиться, что в результате всех преобразований мы получим квазиконформное отображение исходной поверхности F на прямоугольник, причем с характеристикой, которая для областей D_{nk}^* — порядка $n+k$. Оценивая второй из интегралов соотношения (14) теоремы 4, п. 11 (в полной аналогии с оценкой подобного интеграла, проводимой у Ле-Ван Тьем [15]), заключаем, что поверхность F будет гиперболического типа, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}$ или, так как $c_n = \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$, если сходится ряд (1):*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}.$$

Так как из расходимости этого ряда следует параболический тип поверхности (см. выше п. 94), то имеем следующую теорему:

Теорема 53. *Если для симметрично устроенной поверхности F класса A_3 последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает и $\alpha_n \leq \beta_n$, то F — гиперболического или параболического типа в зависимости от того, сходится или расходится ряд (1).*

Примечание. Теорема 53, так же как теорема 52 (см. примечание к этой теореме), указывает случай, когда признак параболического типа для поверхностей класса A_{∞} (теорема 12) является точным.

Так как поверхность F_0 с углами $\alpha_n \leq \beta_n$ и $\rho_n^0 = 1$ — гиперболического типа, то теорема 53 указывает ту наибольшую скорость возрастания последовательности $\{\rho_n\}$, при которой тип поверхности остается гиперболическим. Вспоминая конец п. 96, заключаем, что в случае $\{\rho_n\}$, монотонно возрастающих или монотонно убывающих, это условие выражается одинаково: именно, требуется сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \right|. \quad (13)$$

Как и выше, возникает вопрос: всегда ли поверхность F_0 гиперболического типа (т. е. независимо от условия $\alpha_n \leq \beta_n$), и если да, то обеспечивает ли сходимость ряда (13), при монотонном (немонотонном) изменении $\{\rho_n\}$, сохранение гиперболического типа?

Заметим еще, что при $\rho_n \rightarrow \infty$ функция $w = f(z)$, голоморфная в круге $|z| < 1$ и отображающая его на поверхность F класса A_3 , имеет бесконечно много не эквивалентных между собой асимптотических

* Другое доказательство указанного признака гиперболического типа см. в [30].

значений, которые все равны ∞ ; если же $\rho_n \rightarrow 0$, то $f(z)$ имеет еще бесконечно много не эквивалентных между собой асимптотических значений, равных 0; все указанные асимптотические значения достигаются по путям, идущим к точкам одного и того же множества, всюду плотного на окружности $|z| = 1$.

Замечание. Если не предполагать, что $\alpha_n \leq \beta_n$, то приходится решать задачу на склеивание для модулярной фигуры с областями D_n , имеющими на своей границе отрезки $O_n O'_n$, требующие особого склеивания. Вводя подходящим образом линии Γ_p , можно и здесь получить некоторые признаки гиперболического типа.

§ 21. Класс поверхностей B

99. Описание класса поверхностей B . Возьмем две произвольные последовательности точек: $\{w_n = u_n + iv_n\}$ и $\{w'_n = u'_n + iv'_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} 0 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_n < \dots; \quad v_n \rightarrow \infty, \\ 0 \leq v'_1 < v'_2 < \dots < v'_n < \dots; \quad v'_n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

причем если одновременно $v_1 = v'_1 = 0$, то еще условию $u_1 = u'_1$. Назовем нулевым листом и обозначим через H_0 плоскость w с разрезами, выходящими из всех точек $\{w_n, w'_n\}$ и идущими параллельно действительной оси в сторону $-\infty$. Назовем листом H_n , соответственно H'_n , плоскость w с одним единственным разрезом, выходящим из точки w_n , соответственно w'_n , и пробегающим как на листе H_0 . Приклеивая к листу H_0 вдоль всех его разрезов соответствующие листы $\{H_n, H'_n\}$, получим некоторую односвязную риманову поверхность. Совокупность всевозможных таких поверхностей будем называть классом поверхностей B . Этот класс, очевидно, входит в класс поверхностей A_∞ (см. § 7).

В дальнейшем нас будут интересовать симметрично утраченные поверхности класса B , характеризруемые тем, что определяющие их последовательности точек $\{w_n, w'_n\}$ удовлетворяют условию

$$w'_n = \bar{w}_n \tag{1}$$

для всех $n = 1, 2, \dots$. По ряду соображений можно ожидать, что при условии (1) все поверхности F класса B — параболического типа. Ниже мы докажем лишь следующую теорему, представляющую частный случай высказанной гипотезы:

Теорема 54. Если для поверхности F класса B

$$u'_n = u_n = 0, \quad v'_n = -v_n \tag{2}$$

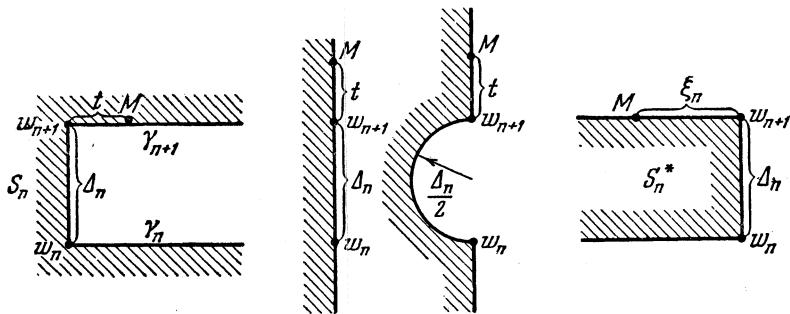
для всех $n = 1, 2, \dots$, и последовательность величин

$$\Delta_n = v_{n+1} - v_n \quad (3)$$

монотонно возрастает или монотонно убывает, то F — параболического типа.

Доказательство этой теоремы мы проведем методом склеивания
100. Задача на склеивание. Пусть F — произвольная поверхность класса B , удовлетворяющая условию (2). Кроме того, будем считать, что $v_1 = 0$; это, очевидно, не нарушает общности рассмотрения.

Проводя на F разрезы вдоль всей мнимой оси листа H_0 и всех линий γ_n, γ'_n ($n = 1, 2, \dots$), расположенных соответственно на листах H_n, H'_n ,



Фиг. 49

выходящих из точек w_n, w'_n и пробегаящих параллельно действительной оси в сторону $+\infty$, разобьем F на правую полуплоскость S_0 листа H_0 и области S_n, S'_n , состоящие из прямолинейных полулоп, примыкающих к S_0 слева, соответственно, вдоль отрезков Δ_n ($[w_n, w_{n+1}]$), Δ'_n ($[w'_n, w'_{n+1}]$) и двух полулоп, принадлежащих, соответственно, листам H_n, H_{n+1} и H'_n, H'_{n+1} .

Каждую область S_n преобразуем сперва в полулоп, затем во внешность круга, опирающегося на Δ_n , затем с помощью логарифмической функции — в полулоп шириной π , которую с помощью преобразования подобия превратим в полулоп шириной Δ_n (см. фиг. 49). Последнюю полулоп обозначим через S_n^* и сохраним для ее оснований, соответственно, обозначения γ_n и γ_{n+1} . Аналогично преобразуем области S'_n в полулоп $S_n'^*$. Таким образом мы придем к своеобразной симметричной задаче на склеивание полулопости S_0 с бесконечным числом полулоп $\{S_n^*, S_n'^*\}$, которые тождественно примыкают к S_0 вдоль отрезков $\{\Delta_n, \Delta'_n\}$ и связаны друг с другом определенными функциями склеивания вдоль своих оснований.

Для нахождения этих функций склеивания заметим, ограничиваясь по соображениям симметрии полулопостями $\{S_n^*\}$, что всякие две граничные точки какой-либо области S_n , расположенные на ее осно-

ваниях γ_n, γ_{n+1} на одном и том же расстоянии t , соответственно, от точек w_n и w_{n+1} , при переходе к S_n^* преобразуются в точки, отстоящие от тех же точек w_n и w_{n+1} на одном и том же расстоянии

$$\xi_n(t) = \frac{\Delta_n}{\pi} \ln\left(1 + \frac{2t}{\Delta_n}\right). \quad (4)$$

Функции (4) определяют функции склеивания для полуполос. Заметим, что для всяких двух индексов i, k величина

$$\frac{d\xi_i}{d\xi_k} = \frac{\Delta_i}{\Delta_k} \cdot \frac{\Delta_k + 2t}{\Delta_i + 2t}$$

изменяется монотонно от 1 до $\frac{\Delta_i}{\Delta_k}$, когда t изменяется от 0 до ∞ .

101. Признак параболического типа. Построим сперва семейство линий Γ_v . Для этого из произвольной точки iv ($v > 0$) проведем наклонные, направленные к действительной оси под углами 45° и 135° и состоящие из одного отрезка справа и ряда отрезков, пересекающих последовательно области S_n^* (начало каждого нового отрезка соответствует концу предыдущего отрезка). Проводя симметричное построение в нижней полуплоскости (из точек $-iv$), получим линию Γ_v ($0 < v < \infty$).

Положим

$$s_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$$

и рассмотрим какую-нибудь линию Γ_v для

$$v = s_{n-1} + x \quad (0 < x \leq \Delta_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Обозначим через x_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$) нижние концы отрезков, принадлежащих Γ_v в S_k , а также их расстояния от мнимой оси. Рассматривая полоски, заключенные между линиями Γ_v, Γ_{v+dv} , замечаем, что они конформно эквивалентны прямоугольникам с высотами $dx, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ и основаниями $2(s_{n-1} + x), 2\Delta_1, 2\Delta_2, \dots, 2\Delta_{n-1}, 2x$ (см. фиг. 50). Приводя их все к высоте $dv = dx = dx_n$ и учитывая еще часть линии Γ_v , расположенную снизу, будем иметь

$$L(v) = 4 \left(s_{n-1} + 2x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{dx_n}{dx_k} \cdot \Delta_k \right) < 4 \left(s_n + \sum_{k=1}^n \frac{dx_n}{dx_k} \cdot \Delta_k \right),$$

откуда следует, что

для того чтобы поверхность F класса B , удовлетворяющая условию (2), была параболического типа, достаточна расходимость ряда

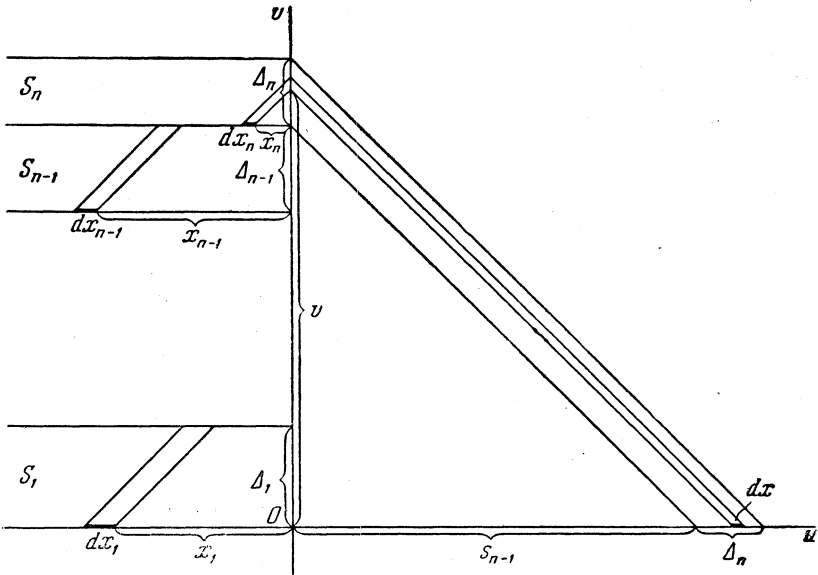
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n}{s_n + \sum_{k=1}^n \frac{dx_n}{dx_k} \cdot \Delta_k}. \quad (5)$$

Доказательство теоремы 54. Пусть $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots$. Тогда для всех $i = 1, 2, \dots$

$$\frac{dx_{i+1}}{dx_i} \leq \max \frac{d\xi_{i+1}}{d\xi_i} = \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i};$$

следовательно,

$$\frac{dx_n}{dx_k} = \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \cdot \frac{dx_{n-1}}{dx_{n-2}} \dots \frac{dx_{k+1}}{dx_k} \leq \frac{\Delta_n}{\Delta_k}$$



Фиг. 50

(равенство для $\Delta_k = \Delta_{k+1} = \dots = \Delta_n$), откуда

$$\sum_{k=1}^n \frac{dx_n}{dx_k} \cdot \Delta_k \leq n\Delta_n,$$

и так как $s_n \leq n\Delta_n$, то ряд (5) расходится.

Если $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots$, то для $i = 1, 2, \dots$

$$\frac{d\xi_{i+1}}{d\xi_i} \leq 1$$

(равенство для $\Delta_i = \Delta_{i+1}$); следовательно,

$$\frac{dx_n}{dx_k} \leq 1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{dx_n}{dx_k} \cdot \Delta_k \leq S_n,$$

и ряд (5) приводится к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_n}{s_n}$, который расходится в силу расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$.

Примечание. Используя Q -преобразования, можно несколько усилить теорему 54. Можно также приводить определение типа поверхностей класса B и к другим задачам на склеивание. Однако полного доказательства высказанного в п. 99 предположения мне, таким образом, получить не удалось.

§ 22. Несколько примеров поверхностей параболического и гиперболического типов

102. Предварительное замечание. Мы рассмотрим четыре поверхности F_1, F_2, F_3, F_4 , получающиеся из поверхности логарифмической функции. Тип их мы будем определять при помощи метода склеивания. Часть выкладок, связанных с определением функций, дающих нужные нам Q -отображения, мы дадим отдельно, после изложения всех четырех примеров.

103. Поверхность F_1 . Обозначим через F_0 поверхность логарифмической функции $\ln w$ и проведем на ней сечение C , расположенное над окружностью $|w| = 1$, разбивающее ее на две части G_0 и G_{∞} , лежащие соответственно над кругом $|w| < 1$ и его внешностью $|w| > 1$.

Возьмем бесконечно много экземпляров круга $|w| < 1$ и на каждом из них, кроме одного, который будем считать первым, проведем два диаметрально противоположных разреза, идущих из точек $w = \pm a$ ($0 < a < 1$), соответственно до точек $w = \pm 1$. На первом круге проведем только один разрез от $-a$ до -1 , вдоль которого приклеим к первому кругу экземпляр единичного круга с двумя разрезами; затем, к остающемуся свободным разрезу приклеим другой экземпляр единичного круга и т. д. Полученную таким образом область обозначим через G_0^* .

Поверхность F_1 получается из поверхности F_0 заменой G_0 на G_0^* . Поверхность F_1 входит в класс A'_1 (§ 18, п. 81) и, следовательно, она — параболического типа.

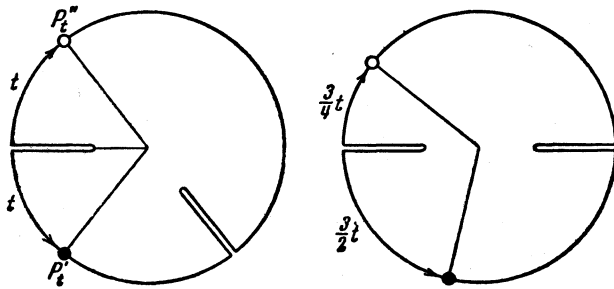
Строя конформные, соответственно Q -квазиконформные, отображения G_{∞} и G_0^* на полосы $0 < \eta < \pi$, $\pi < \eta < 2\pi$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, причем так, чтобы точка $w = 1$, обозначим ее через P_0 , первого круга области G_0^* переходила в граничные точки полос, имеющие $\xi = -\infty$, придем к симметричной задаче на склеивание двух полос с функциями склеивания

$$\xi^* = e^{\xi}, \quad \tau^* = e^{\tau} \quad (1)$$

и из теоремы 23, п. 54, снова следует параболический тип F_1 (нахождение функций склеивания (1), нужных нам собственно для следующих примеров, приводится ниже в п. 107).

104. Поверхность F_2 . Построим область G_0^{**} , которая отличается от G_0^* тем, что разрезы на кругах $|w| < 1$ проводятся несимметрично относительно направления пробегания линии C (линия разреза F_0); именно, на втором круге — от точек $ae^{i\pi}$, $ae^{i\frac{5\pi}{3}}$, на третьем — от точек $ae^{i\frac{5\pi}{3}}$, $ae^{i\frac{\pi}{3}}$ и т. д., и на первом — как раньше, от точки $ae^{i\pi}$.

Поверхность F_2 получается из F_0 после замены G_0 на G_0^{**} . Она также параболического типа, что видно хотя бы из того, что она легко Q -квазиконформно деформируема в F_1 .



Фиг. 51

Преобразуя G_0^{**} в G_0^* по кругам посредством круговых сжатий-растяжений (см. фиг. 51) и совершая отображение G_0^* и G_∞^* на те же полосы, что и раньше, приходим к задаче на склеивание для двух полос с функциями склеивания

$$\xi^* = \frac{3}{2} e^\xi, \quad \tau^* = \frac{3}{4} e^\tau, \quad (2)$$

откуда (п. 55, первый пример) снова следует параболический тип поверхности F_2 .

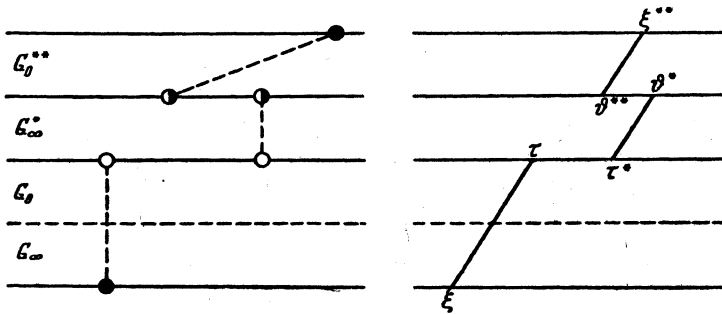
105. Поверхность F_3 . Обозначим через G_∞^* область, получаемую из G_0^* преобразованием $\frac{1}{w}$. Поверхность F_3 получается из F_0 после замены G_0 на G_0^{**} и G_∞ — на G_∞^* . Отображая G_0^{**} и G_∞^* на полосы, приходим к задаче на склеивание двух полос с функциями склеивания

$$\xi^* = \frac{3}{2} \xi, \quad \tau^* = \frac{3}{4} \tau, \quad (3)$$

и из признака гиперболического типа склеивания (теорема 24, п. 57) следует, что F_3 — гиперболического типа.

106. Поверхность F_4 . Присоединим теперь к поверхности F_3 особым образом поверхность F_0 . Для этого на обеих поверхностях проведем разрезы вдоль половины линии C , начиная от точки P_0 , для

определенности — по часовой стрелке, и склеим противоположные стороны обоих разрезов так, чтобы получилась единая риманова поверхность. Это и будет наша поверхность F_4 . Она снова параболического типа, что может быть доказано с помощью теоремы 13, п. 34, или методом склеивания. В последнем случае мы восстанавливаем разрез вдоль половины линии C , по которому были склеены поверхности F_3 и F_0 , и проводим еще на F_3 разрез по второй половине линии C , отчего F_3 распадается на области G_∞^* и G_0^{**} . Отображая Q -квазиконформно поверхность F_0 с разрезом вдоль половины линии C и области G_∞^* , G_0^{**} , соответственно, на полосы $0 < \eta < \pi$, $\pi < \eta < 2\pi$,



Фиг. 52

$2\pi < \eta < 3\pi$, придем к задаче на склеивание для трех полос с функциями склеивания (фиг. 52):

$$\tau^* = e^\tau, \quad \xi^{**} = \frac{3}{2} e^\xi, \quad \vartheta^{**} = \frac{3}{4} e^{\vartheta^*}. \quad (4)$$

τ^* и ϑ^* могут быть выбраны так, чтобы соблюдалось условие параллельности

$$\tau - \xi = \vartheta^* - \tau^* = \xi^{**} - \vartheta^{**}. \quad (5)$$

Это следует из соображений непрерывности, если, зафиксировав ξ , а значит и ξ^{**} , возьмем сперва $\tau = \xi$, $\vartheta^{**} = \xi^{**}$ и затем начнем τ увеличивать, а ϑ^{**} уменьшать, следя лишь за параллельностью крайних отрезков. Так как угол наклона среднего отрезка будет при этом переходить от острого к тупому, то найдется положение, при котором все три отрезка станут параллельными. В этом положении мы их принимаем за части одной и той же линии Γ_ξ .

Поступая как при выводе теоремы 23, п. 54, мы, вместо входящего туда интеграла, получаем интеграл

$$\int_{\xi_0}^{\infty} \frac{\min(d\xi, d\tau, d\tau^*, d\vartheta^*, d\vartheta^{**}, d\xi^{**})}{\pi^2 + (\tau - \xi)^2}. \quad (6)$$

Для функций склеивания (5) элементарный подсчет показывает, что

$$\tau - \xi < \ln 2, \min(d\xi, d\tau, d\tau^*, d\vartheta^*, d\vartheta^{**}, d\xi^{**}) = d\xi,$$

откуда следует, что интеграл (6) расходится и, следовательно, поверхность F_4 параболического типа.

107. Определение функций склеивания. Обозначим через C', C'' обе половины линии C , пробегаемые от P_0 , соответственно, в положительном и отрицательном направлениях и через P'_t, P''_t — точки на C', C'' , отстоящие от P_0 на угловое расстояние t . Каждую из этих точек будем рассматривать как пару точек соответственно двум краям разреза, проводимого вдоль линии C .

Займемся сперва отображением различных областей G .

Последовательность отображений $z = i \ln w, \zeta = \ln z$ дает нам конформное отображение областей G_∞ и G_0 , соответственно, на полосы $0 < \eta < \pi, \pi < \eta < 2\pi$. При этом оба края разреза C'' переходят, соответственно, в прямые $\eta = 0, \eta = 2\pi$, а оба края C' — в прямую $\eta = \pi$, и точки P'_t, P''_t — в точки на этих прямых, имеющих абсциссу $\xi = \ln t$.

Для построения нужного нам отображения G_0^* поступим следующим образом. Первый круг, имеющий один разрез, отобразим конформно на полуполосу $\xi < \pi, \pi < \eta < 2\pi$, притом так, чтобы разрез круга перешел симметрично в боковую сторону, а граничные полуокружности, лежащие на C', C'' — в основания $\xi < \pi, \eta = \pi$ и $\xi < \pi, \eta = 2\pi$ полуполосы. Образы точек P'_t и P''_t будут тогда иметь одинаковую абсциссу ξ , которая, с точностью до постоянного для малых значений t множителя, удовлетворяет асимптотическому равенству $\xi \approx \ln t$, как это следует из элементарного подсчета отображающей функции.

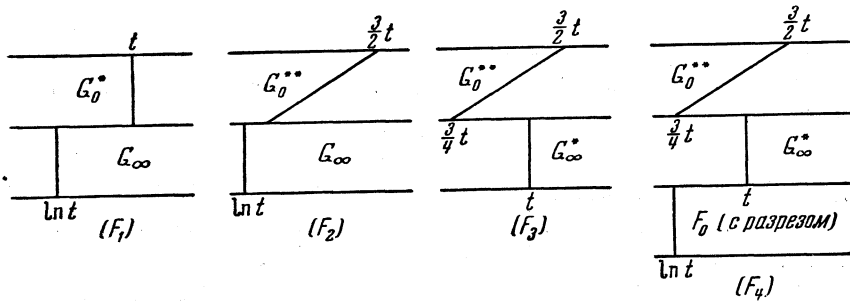
Возьмем теперь круг $|w| < 1$ с двумя диаметрально противоположными разрезами и отобразим его конформно на прямоугольник шириной π , притом так, чтобы разрезы перешли симметрично в боковые стороны, а граничные полуокружности, лежащие на C', C'' — в нижнее, соответственно верхнее, основания прямоугольника. Так как производная отображающей функции на указанных полуокружностях непрерывна и отлична от нуля, то при помощи Q -квазиконформного сжатия можно наш прямоугольник заменить квадратом со стороной π ; при этом можно добиться того, чтобы растяжение на граничных полуокружностях исходного круга с разрезами было везде равно 1.

Продолжая по принципу симметрии полученное отображение через правую боковую сторону, получим отображение области G_0^* без ее правого круга на полуполосу $\xi > \pi, \pi < \eta < 2\pi$. Склеивая это отображение с ранее полученным отображением первого круга, получим Q -квазиконформное отображение области G_0^* на всю полосу $\pi < \eta < 2\pi$; при этом точкам P'_t, P''_t будут соответствовать точки на прямых $\eta = \pi, \eta = 2\pi$ с абсциссой ξ , равной t для $t \geq \pi$ и, с точностью до ограниченного множителя и сдвига, равного $\ln t$ для $t < \pi$.

Совершая симметричное отображение относительно прямой $\eta = \pi$, получим отображение области G_∞^* на полосу $0 < \eta < \pi$.

Так как мы выше построили отображение G_0^{**} на G_0^* , то одновременно с отображением G_0^* мы получаем отображение на полосы области G_0^{**} и симметричной к ней области G_∞^{**} . При этом следует иметь в виду, что точкам P'_t, P''_t на границе области G_0^{**} соответствуют для $t > \pi$ точки $P'_{\pi + \frac{3}{2}(t-\pi)}, P''_{\pi + \frac{3}{4}(t-\pi)}$, а для $t \leq \pi$ — точки P'_t, P''_t на границе области G_0^* .

Представляя схематически все построенные отображения (фиг. 53), мы сразу получаем указанные выше функции склеивания (1) — (4).



Фиг. 53

При этом, не нарушая типа склеивания, мы заменяем $\pi + \frac{3}{2}(t - \pi)$ и $\pi + \frac{3}{4}(t - \pi)$, соответственно, на $\frac{3}{2}t$ и $\frac{3}{4}t$.

108. Выводы. Построенные примеры показывают, что присоединение или удаление областей с одной или с несколькими логарифмическими точками ветвления может изменить тип поверхности (см. примечание в конце п. 76). Так, например, присоединение к поверхности F_3 гиперболического типа поверхности логарифмической функции F_0 превращает ее в поверхность F_4 параболического типа. Обратное, удаление из поверхности F_4 параболического типа поверхности логарифмической функции F_0 превращает ее в поверхность F_3 гиперболического типа.

Далее, из того, что поверхность F_3 — гиперболического типа, следует отсутствие „транзитивности в типе склеивания для двух полос“, ибо полоса, представляющая G_∞ , дает параболический тип с каждой из полос, представляющих G_0^* и G_0^{**} , в то время как полосы, представляющие G_∞^* и G_∞^{**} (переход от G_0^* к G_∞^* очевидно необходим), дают гиперболический тип.

Заслуживает внимания мероморфная в круге $|z| < 1$ функция $w = f(z)$, отображающая этот круг на поверхность F_3 . Подобно функциям треугольников Шварца, $f(z)$ не имеет вовсе асимптотических значений, но в то же время ее „разветвленность“ чрезвычайно мала (в терминах дефектов средняя разветвленность поверхности F_3 равна 2).

§ 23. Класс поверхностей Λ_1

109. Описание класса поверхностей Λ_1 . Пусть $\{a_n\}$ ($n = 0, +1, \dots$) — произвольная система точек, расположенных на действительной оси $I(w) = 0$ и удовлетворяющих, как в п. 78, условию

$$a_{2n} < a_{2n+1}. \quad (1)$$

Каждой паре точек a_n, a_{n+1} поставим в соответствие область G_n , состоящую из верхней полуплоскости $I(w) > 0$ или нижней полуплоскости $I(w) < 0$, в зависимости от того, будет ли n четно или нечетно,



Фиг. 54

и логарифмического конца, приклеенного к соответствующей полуплоскости вдоль отрезка Δ_n , заключенного между точками a_n и a_{n+1} (фиг. 54). Склеивая каждую пару областей G_n, G_{n+1} вдоль их общей граничной полупрямой, выходящей из точки a_{n+1} , получим некоторую односвязную риманову поверхность F .

Совокупность таких поверхностей, соответствующих всевозможным указанным системам точек $\{a_n\}$, будем называть классом поверхностей Λ_1 .

110. Признак параболического типа. Определение типа поверхности F класса Λ_1 легко приводится к задаче на склеивание бесконечно-го числа полос. В самом деле, функция

$$\zeta = \ln \ln \frac{w - a_n}{w - a_{n+1}} \quad (2)$$

отображает область G_n на полосу шириной π , причем точки, расположенные на граничных полупрямых области G_n , выходящих из точек a_n, a_{n+1} на расстоянии τ от этих точек, в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ будут иметь абсциссу (полагая $\Delta_n = |a_n - a_{n+1}|$)

$$\xi_n(\tau) = \ln \ln \left(1 + \frac{\Delta_n}{\tau} \right). \quad (3)$$

Отображая области G_n соответственно, на полосы S_n : $n\pi < \eta < (n+1)\pi$, придем к эквивалентной задаче на склеивание бесконечного числа полос с функциями склеивания, определяемыми согласно (3).

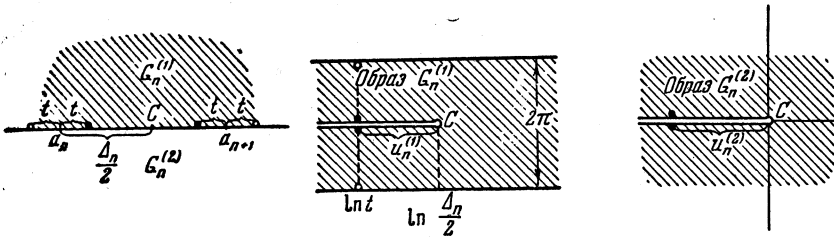
В случае, когда $a_{-n} = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$), получаем симметричную задачу на склеивание бесконечного числа полос с порождающей функцией

$$f(t) = \ln \ln(1+t), \quad t = \frac{1}{\tau}, \quad 0 < t < \infty$$

и последовательностью $\{\lambda_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$): $\lambda_n = \Delta_n$ (см. § 14, в частности, п. 60). Из теоремы 26 (п. 60) следует такая теорема:

Теорема 55. Если для поверхности F класса Λ_1 выполняется условие симметрии $a_{-n} = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и последовательность $\{\Delta_n\}$, $\Delta_n = |a_n - a_{n+1}|$ ($n = 0, 1, \dots$) либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, однако так, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ расходится, то F — параболического типа.

Примечание 1. Является ли при условии симметрии требование монотонного изменения $\{\Delta_n\}$ существенным, мне неизвестно.



Фиг. 55

Примечание 2. Если $\Delta_n \rightarrow 0$, то, независимо от условия симметрии ($a_{-n} = a_n$) и независимо от условия $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \infty$, можно указать признак параболического типа, используя результаты § 9.

III. Связь между классами поверхностей Λ_1 и B . Разобьем произвольную область G_n поверхности F класса Λ_1 на полуплоскость G_n^1 и логарифмический конец G_n^2 . Пусть C — середина отрезка Δ_n . Увеличивая углы с вершиной в C в два раза и используя логарифмическую функцию, отобразим G_n^1 на полосу $0 < \eta < 2\pi$, расположенную в плоскости ζ и имеющую разрез, выходящий из образа точки C и идущий налево в $-\infty$ (фиг. 55). При этом точки, отстоящие от концов отрезка Δ_n на расстоянии t , будут иметь абсциссу

$$\xi_n(t) = \ln t$$

и всякие две из них, которые для $0 < t < \frac{\Delta_n}{2}$ расположены на отрезке Δ_n , после преобразования будут расположены на разрезе на расстоянии от образа точки C , равном

$$u_n^{(1)} = \xi_n\left(\frac{\Delta_n}{2}\right) - \xi_n(t) = \ln \frac{\Delta_n}{2t}.$$

С помощью функции $\ln \frac{w - a_n}{w - a_{n+1}}$ отобразим G_n^2 на полуплоскость; затем, удваивая углы, превратим эту полуплоскость в плоскость с тем

же разрезом, что для G_n^1 . При этом прежние точки на Δ_n после преобразования G_n^2 будут отстоять от преобразованной точки C на расстоянии

$$u_n^{(2)} = \ln\left(\frac{\Delta_n}{t} - 1\right).$$

Так как для $0 \leq t \leq \frac{\Delta_n}{2}$ выполняется, как легко убедиться, неравенство

$$\frac{1}{2} \leq \frac{du_n^{(2)}}{du_n^{(1)}} \leq 1,$$

то полученную для G_n^2 плоскость с разрезом можно приклеить вдоль разреза к полосе, полученной для G_n^1 .

Получаемую таким образом полосу с плоскостью обозначим через G_n^* . Так как $\xi_n = \ln t$ не зависит от n , то, склеивая области $\{G_n^*\}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), получим поверхность F^* класса B , связанную Q -квазиконформным соответствием с поверхностью F . В частности, симметричной поверхности класса Λ_1 соответствует симметричная относительно действительной оси поверхности F^* класса B .

112. Примеры поверхностей гиперболического типа. На одном из листов поверхностей $\ln \frac{1}{w}$ и $\ln \ln \frac{w}{w-1}$ с точками ветвления $0, \infty$, проведем разрезы от 0 до $-\infty$ и склеим две половинки F_1 и F_2 от обеих поверхностей. Полученную поверхность обозначим через F .

Отображая F_1 и F_2 , соответственно, на полуплоскости $I(z) > 0$ и $I(z) < 0$, придем к задаче на склеивание для двух полуплоскостей с функцией склеивания, определяемой уравнениями

$$x_1 = \ln \frac{1}{t}, \quad x_2 = \ln \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right),$$

где t означает расстояние на F от точки $w = 0$ до точки, пробегающей линию склеивания F_1 и F_2 . На основании теоремы 24, п. 57, легко заключаем, что F — гиперболического типа (при $t \rightarrow \infty$ величины x_1, x_2 асимптотически равны, а при $t \rightarrow 0$ имеем $x_1 \approx e^{x_2}$).

Производя преобразование $w' = \frac{w}{1-w}$, мы из F получаем одну из поверхностей, на которые указывалось в примечании 2 к п. 40.

Обозначим теперь через G_n поверхность функции $\sqrt[n]{1-w}$ с разрезом от 0 до $-\infty$ на одном из ее листов. Склеим последовательно бесконечно много областей $G_{n_1}, G_{n_2}, \dots, G_{n_k}, \dots$ ($\{n_k\}$ — некоторая последовательность) так, как склеиваются листы при построении поверхности $\ln w$, и приклеим к остающемуся на G_{n_1} свободному краю разреза логарифмический конец. Полученную поверхность обозначим

через $F_{n_1, n_2, \dots}$. Отображая области G_{n_k} ($k = 1, 2, \dots$) при помощи функций

$$\zeta_k(w) = \ln(n_k \sqrt{1-w} - 1)$$

на полосы

$$2\pi(k-1) < \eta < 2\pi k,$$

а логарифмический конец — при помощи функции

$$\zeta_0(w) = \ln w$$

— на нижнюю полуплоскость $I(\zeta) < 0$, получим задачу на склеивание бесконечного числа полос с полуплоскостью (см. § 15), с функциями склеивания, определяемыми уравнениями

$$x_k = \varphi_k(t) = \ln(n_k \sqrt{1+t} - 1),$$

$$x = f(t) = \ln t,$$

где t означает расстояние на F от точки $w = 0$ до точки, пробегающей произвольную из линий склеивания. На основании теоремы 28, п. 64, и примера п. 65 заключаем, что при достаточно быстром возрастании последовательность $\{n_k\}$ и поверхность $F_{n_1, n_2, \dots}$ — гиперболического типа.*

Совершая преобразование $w' = w - 1$, мы из такой поверхности $F_{n_1, n_2, \dots}$ гиперболического типа получаем другой пример поверхности гиперболического типа, на который было указано в примечании 2 к п. 40.

§ 24. Класс поверхностей $F^{(e)}$

113. Признаки параболического типа. Определение класса поверхностей $F^{(e)}$, а также довольно общий признак параболического типа были даны раньше (п. 45). Здесь мы рассмотрим частный случай поверхностей класса $F^{(e)}$, именно, когда множество (e) на окружности $|\omega| = 1$ имеет единственную предельную точку. В этом случае удобно от круга $|\omega| < 1$ перейти к полуплоскости $I(\omega) > 0$. Каждая поверхность $F^{(e)}$ состоит тогда из полуплоскости $I(\omega) > 0$ и бесконечного числа логарифмических концов, приклеенных к отрезкам $\{\Delta_n\}$ ($n = 0, \pm 1, \dots$), заключенным между точками $\{a_n, a_{n+1}\}$, где $\{a_n\}$ —

* Упомянутая теорема 28 позволяет указать достаточную для этого скорость возрастания последовательности. Желательно, однако, вообще обойтись без теоремы 28, так как утверждение представляется почти очевидным, если учесть, что в случае $n_1 = n_2 = \dots = \infty$ мы получаем рассмотренную ранее поверхность F гиперболического типа.

точки на действительной оси $I(w) = 0$, монотонно приближающиеся к $+\infty$ (для $n \rightarrow +\infty$) и к $-\infty$ (для $n \rightarrow -\infty$).

Прежде всего покажем, что если

$$q(n) = \max_{(k)} \left(\Delta_k, \frac{1}{\Delta_k} \right) \quad (k = 0, \pm 1, \dots, \pm n),$$

то для параболического типа поверхности $F^{(e)}$ достаточна расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nq(n)}. \quad (1)$$

Для доказательства проведем из точек $\{a_n\}$ вертикальные лучевые разрезы в исходной полуплоскости $I(w) > 0$ поверхности F , разбивающие ее на области G_n , состоящие из вертикальных полуполос, опирающихся на отрезки Δ_n и приклеенные к ним логарифмические концы. При помощи продольного сжатия-растяжения придадим областям G_n (вернее их полуполосам) ширину, равную 1, после чего отобразим ее конформно на полосы шириной 1, заполняющие однолистно плоскость z . Тогда в круге $|z| < n$ характеристика построенного квазиконформного отображения плоскости $|z| < \infty$ на F не превосходит $q(n)$ и из расходимости ряда (1) следует расходимость интеграла

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{rq(r)}, \quad (2)$$

входящего в теорему 4, п. 11, и, следовательно, F — параболического типа.

Нетрудно построить Q -отображение G_n на полосу $S_n: n\pi < \eta < (n+1)\pi$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$; при этом граничные точки области G_n , отстоящие от конца Δ_n на расстоянии t , переходят в точки ζ с абсциссой

$$\xi(t) = -\ln \ln \operatorname{cth}^2 \lambda_n t, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2\Delta_n}. \quad (3)$$

При дополнительном требовании симметрии: $a_0 = 0, a_{-n} = a_n (n = 1, 2, \dots)$ приходим к симметричной задаче на склеивание бесконечного числа полос, рассмотренной в § 14. Из доказанной там теоремы 27, п. 60, получаем следующую теорему:

Теорема 56. Если для поверхности F класса $F^{(e)}$ выполняется условие симметрии: $a_0 = 0, a_{-n} = a_n (n = 1, 2, \dots)$ и последовательность $\{\Delta_n\}$, $\Delta_n = a_{n+1} - a_n (n = 0, 1, \dots)$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, то F — параболического типа.

Примечание. Освободиться от требования монотонности изменения последовательности $\{\Delta_n\}$ мне не удалось.

114. Пример поверхности гиперболического типа. Пусть F — поверхность класса $F^{(e)}$, состоящая из полуплоскости $I(w) > 0$ и логарифмических концов, приклеенных к интервалам $\Delta_n = (n, n+1)$ ($n = 0, 1, \dots$) и ко всему интервалу $(-\infty, 0)$. Покажем, что F — гиперболического типа.

Для доказательства разобьем F на две части G_1 и G_2 при помощи сечения, проведенного в исходной полуплоскости вдоль положительной мнимой полуоси. Отобразим G_1 и G_2 , соответственно, на полуплоскости $I(z) > 0$ и $I(z) < 0$. Отображение G_1 осуществляется с помощью логарифмической функции; при этом точки $w = iv$ на границе разреза получают абсциссу $x_1 = \ln v$. Для отображения области G_2 разобьем ее на такие же, как и раньше, вертикальные полуполосы с логарифмическими концами; затем, каждую вертикальную полуполосу отобразим на полуплоскость, притом так, чтобы граничный отрезок перешел сам в себя без растяжения. Это осуществимо при помощи Q -отображения. После этого отобразим каждую полученную полуплоскость с вновь приклеенным к ней прежним логарифмическим концом на целую полосу в плоскости z . Таким образом мы построим Q -отображение области G_2 на нижнюю полуплоскость $I(z) < 0$ с асимптотическим поведением $x_2 \approx v$ при $v \rightarrow \infty$ и $x_2 \approx \ln \ln \frac{1}{v}$ — при $v \rightarrow 0$ вдоль общей граничной линии областей G_1, G_2 .

Определяемая таким образом функция склеивания $x_2 = \psi(x_1)$ для полуплоскостей $I(z) \geq 0$ немедленно приводит к гиперболическому типу склеивания, а с ним — к гиперболическому типу поверхности F .

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Grötzsch. Einige Extremalprobleme der konformen Abbildung I. Ber. Sächs Akad. Wiss. 80, 1928.
2. M. Lavrentieff. Sur une classe de représentations continues. Матем. Сб. 42: 4, 1935.
3. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. (1936, русский перевод, 1941).
4. Г. Хажалия. О конформном отображении двусвязных областей на кольцо, Труды Тбилисского Матем. ин-та, т. I, 1937.
5. Г. Хажалия. К теории конформных отображений двусвязных областей на кольцо. ДАН, XX, 1938.
6. O. Teichmüller. Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Deutsche Math., 3, 1938, 620 — 678.
7. Г. Голузин. Внутренние задачи теории однолистных функций. УМН, вып. VI, 1939.
8. Л. Волковыский. К проблеме типа односвязной римановой поверхности. Матем. Сб. 18 (60): 2, 1946.
9. Ю. Лопатинский. К вопросу о решении уравнения $y' = f(x, y)$. Труды Азерб. Гос. Унив. 1, 1939, 88 — 106.
10. L. Ahlfors. Sur le type d'une surface de Riemann. C. R. Acad. Sci. Paris, 201, 1935, 30 — 32.
11. Z. Kobayashi. A remark of the type of Riemann. surfaces. Sc. Rep. T. B. D. Sec. A, Vol. 3, Nr. 62, 1937.
12. S. Stoilow. Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Paris, 1938.
13. Le-Van Tiem. Beitrag zur Typenproblem der Riemannschen Flächen. Comment. Math. Helv., 20, 1947, 270 — 286.
14. H. Grötzsch. Ueber die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen. Ber. Sächs. Akad. Wiss., 80, 1928.
15. S. Kakutani. Application of the theory of pseudoregular functions to the type-problem of Riemann surfaces. Jap. J. Math., Vol. XIII, Nr. 3, 1937.
16. O. Teichmüller. Eine Anwendung quasikonformer Abbildungen auf das Typenproblem. Deutsche Math., 2, 1937, 321 — 327.
17. Ch. Blanc. Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes. Comment. math. Helv., 9, 1937.
18. Ch. Blanc. Les demi-surfaces de Riemann. Comment. math. Helv., 11, 1938.
19. Z. Kobayashi. Theorems of the conformal representation of Riemann surfaces. Sc. Rep. B. T. B. D. Sec. A, Vol. 2, Nr. 39, 1935.
20. E. Ulrich. The problem of type for a certain class of Riemann surfaces. Duke Math. J., 5, 1939.
21. H. Wittich. Ein Kriterium zur Typenbestimmung vor Riemannschen Flächen. Mh. Math. Phys., 44, 1936.

22. H. Wittich. Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. *Math. Z.*, 45, 1939.
23. Л. Волковьский. Влияние сближения точек ветвления на тип односвязной римановой поверхности. *Матем. Сб.* 25 (67):3, 1949.
24. L. Ahlfors. Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. *Comment. math. Helv.*, 3, 1931.
25. M. Radojčić. Ueber einen Satz von Herrn Ahlfors. *Publ. math. de l'Université de Belgrade*, t. VI—VII, 37—83, 1938.
26. Л. Волковьский. Сходящиеся последовательности римановых поверхностей. *Матем. Сб.* 23 (65): 3, 1948.
27. Б. Шабат. Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных. *Матем. Сб.* 17 (59):2, 1945.
28. Л. Волковьский. К проблеме типа односвязной римановой поверхности. *Украинский математич. журнал*, № 1, 1949, 39—48.
29. Л. Волковьский. Определение типа некоторых классов односвязных римановых поверхностей. *Матем. Сб.* 23 (65): 2, 1948.
30. Н. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Москва, 1946.
31. H. Grötzsch. Einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. *Ber. Sachs. Akad. Wiss.*, 80, 1928.
32. R. Nevanlinna. Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. *Acta Math.*, 58, 1932.
33. G. Elfving. Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. *Acta Soc. Sci. Fenn. N. s.* 2, Nr. 3, 1934.
34. E. Ullrich. Zur Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, I, N. F. 1, 1936.
35. E. Ullrich. Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. *Jahresbericht D. M. V.*, 46, 1936.
36. J. Ginzell. Konforme Abbildung durch die Γ -Funktion. *Acta Math.*, 56, 1931.
37. Mac Lane. Concerning the uniformisation of certain Riemann surfaces allied to the inverse-cosine and inverse-gamma surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 62, 1947.
38. G. Valiron. Sur les singularités de certaines fonctions holomorphes et de leurs inverses. *J. math. pures appl.* 15, 1936.
39. R. Myrberg. Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A*, 45, Nr. 3, 1935.
40. Л. Волковьский. Пример односвязной римановой поверхности гиперболического типа. *Украинский математич. журнал*, № 3, 1949, 60—67.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Введение	5
<i>Глава I.</i> Основные методы изучения проблемы типа односвязной римановой поверхности, связанные с принципом Грётша и квазиконформными отображениями	9
§ 1. Континуальное выражение принципа Грётша	9
1. Предварительное замечание. 2. Лемма 1. 3. Лемма 2. 4. Примечания к леммам 1, 2. 5. Связь лемм 1, 2 с принципом Грётша. 6. Леммы 1, 2 как континуальное выражение принципа Грётша. 7. Теоремы о возрастании и сходимости модулей двусвязных областей и четырехугольников	
§ 2. Общие признаки типа открытой односвязной римановой поверхности	21
8. Признак параболического типа Альфорса. 9. S-признак гиперболического типа.	
§ 3. Методы квазиконформных отображений, склеивания и квазиконформных деформаций	24
10. N-квазиконформное отображение. 11. Метод квазиконформных отображений. 12. Метод склеивания и метод квазиконформных деформаций.	
<i>Глава II.</i> Поверхности с конечным числом точек ветвления на каждом листе	29
§ 4. Исследования Кобеяши	29
13. Определение. 14. Величины $h(P)$, $\tau(P)$ и функция Кобеяши $f(P)$. 15. Сеть Кобеяши T . 16. Поверхность F^* со складками. 17. Признак параболического типа и теорема Кобеяши.	
§ 5. Продолжение исследований Кобеяши	35
18. Оценка $\theta^\circ(\omega)$ через разветвленность поверхности (частный случай). 19. Теорема о параболическом типе. 20. Оценка $\theta^\circ(\omega)$ через разветвленность поверхности (общий случай). 21. Теорема о параболическом типе.	
§ 6. Класс поверхностей $F_{ \omega =1}$	40
22. Теорема о параболическом типе поверхностей класса $F_{ \omega =1}$. 23. Поверхность F^* со складками. 24. Поверхности $F^{(\delta)}$. 25. Теоремы о параболическом типе поверхностей класса $F^{(\delta)}$. 26. Поверхности $F_{q, \omega =1}$. 27. Поверхности $\Lambda_{q, \omega =1}$. 28. Продолжение.	
<i>Глава III.</i> Поверхности со сближающимися точками ветвления	50
§ 7. Поверхности с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в ∞ , или класс поверхностей A_∞	50
29. Определение класса поверхностей A_∞ . 30. Признак параболического типа.	

§ 8.	Поверхности с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в 0 и ∞ , или класс поверхностей $A_{0, \infty}$	52
	31. Определение класса поверхностей $A_{0, \infty}$. 32. Семейство линий Γ_ω . 33. Область G_ω^* со складками. 34. Признаки параболического типа. 35. Продолжение.	
§ 9.	Поверхности с точками ветвления, сближающимися в ∞ , или класс поверхностей W_∞	57
	36. Определение класса поверхностей W_∞ . 37. Величины $h(P)$ и $\tau_\omega(P)$. 38. Области G_p и соотношение $G_\omega \subset G_{p, \omega}$. 39. Множество E_ω и его угловая мера $\theta(\omega)$. 40. Признак параболического типа.	
§ 10.	Общий класс поверхностей со сближающимися точками ветвления	64
	41. Определение общего класса поверхностей со сближающимися точками ветвления. 42. Классы поверхностей $F_{p, v}$ и $F_{d, p, v}$. 43. Признак параболического типа. 44. Примечание к теореме 16. 45. Признак параболического типа для поверхностей $F^{(e)}$.	
Глава IV.	Задачи на склеивание	72
§ 11.	Общие задачи на склеивание	72
	46. Склеивание полукругов и круговых секторов. 47. Возможность склеивания. 48. Определенность склеивания. 49. Общая задача на склеивание.	
§ 12.	Склеивание полуплоскости или полуполосы	78
	50. Предварительные замечания. 51. Склеивание параболического типа. 52. Склеивание гиперболического типа.	
§ 13.	Склеивание двух полуплоскостей или двух полос	84
	53. Предварительные замечания. 54. Склеивание параболического типа. 55. Два примера. 56. Симметричный случай. 57. Гиперболический тип склеивания.	
§ 14.	Склеивание бесконечного числа полос	90
	58. Постановка задачи. 59. Признак параболического типа. 60. Два примера.	
§ 15.	Склеивание бесконечного числа полос с полуплоскостью	95
	61. Постановка задачи. 62. Дополнительные ограничения на функции склеивания. 63. Частичное преобразование и склеивание полос $\{S_n\}$. 64. Гиперболический тип склеивания. 65. Пример.	
§ 16.	Задача на склеивание для модулярной фигуры	101
	66. Постановка задачи. 67. Параболический тип склеивания. 68. Гиперболический тип склеивания. 69. Продолжение.	
Глава V.	Определение типа некоторых классов односвязных римановых поверхностей	109
§ 17.	Применение метода квазиконформных деформаций	109
	70. Предварительное замечание. 71. Q эквивалентные области и области, эквивалентные относительно типа. 72. Сдвиг точек ветвления. 73. Деформация областей с алгебраическими точками ветвления. 74. Деформация областей с логарифмическими точками ветвления. 75. Теорема Неванлинна. 76. Деформация областей с логарифмическими точками ветвления (продолжение). 77. Поверхности с конечным числом периодических концов.	
§ 18.	Классы поверхностей Φ_Γ, A_1, A'_1 и \tilde{A}_1	123
	78. Описание класса поверхностей Φ_Γ . 79. Два вспомогательных Q -преобразования. 80. Тип поверхностей Φ_Γ . 81. Классы поверхностей A_1 и A'_1 . 82. Класс поверхностей \tilde{A}_1 .	

§ 19. Классы поверхностей A_2 и A_2'	128
83. Описание классов поверхностей A_2 и A_2' . 84. Признаки параболического типа. 85. Случай, когда точки ветвления сближаются в 0 или в ∞ . 86. Признак гиперболического типа для поверхностей класса A_2' (начало). 87. Вспомогательные Q -преобразования. 88. Получение эквивалентной задачи на склеивание. 89. Преобразование функции склеивания. 90. Признак гиперболического типа для поверхностей класса A_2' (окончание). 91. Случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает. 92. Гиперболический тип поверхностей класса A_2 .	
§ 20. Класс поверхностей A_3	142
93. Описание класса поверхностей A_3 . 94. Параболический тип поверхностей класса A_3 . Дополнительные ограничения. 95. Разбиение F на области $\{S\}$ и их деформирование. 96. Случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно убывает. 97. Случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходится. 98. Случай, когда последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ расходится.	
§ 21. Класс поверхностей B	151
99. Описание класса поверхностей B . 100. Задача на склеивание. 101. Признак параболического типа.	
§ 22. Несколько примеров поверхностей параболического и гиперболического типов	155
102. Предварительное замечание. 103. Поверхность F_1 . 104. Поверхность F_2 . 105. Поверхность F_3 . 106. Поверхность F_4 . 107. Определение функций склеивания. 108. Выводы.	
§ 23. Класс поверхностей A_1	160
109. Описание класса поверхностей A_1 . 110. Признак параболического типа. 111. Связь между классами поверхностей A_1 и B . 112. Примеры поверхностей гиперболического типа.	
§ 24. Класс поверхностей $F^{(e)}$	163
113. Признаки параболического типа. 114. Пример поверхности гиперболического типа.	
Литература	166

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
13	9 св.	$\int \frac{d\rho}{L(\rho)}$	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\rho}{L(\rho)}$
42	19 св.	$n-1K_n$	$K_{n-1}K_n$
46	5 сн.	H_n	(H_n)
55	14 св.	В примечании	В применении
100	16 св.	$\int \frac{d\xi}{d\nu} d\lambda$	$\int_{\gamma_{sn}(\xi)} \frac{d\xi}{d\nu} d\lambda$
101	1 сн.	$\underbrace{e e \dots e}_{k \text{ раз}}$	$\underbrace{e e \dots e}_{k \text{ раз}}$
109	16 св.	$\max \left(f' - \frac{1}{f'} \right)$	$\max \left(f', \frac{1}{f'} \right)$
118	2 сн.	рисунок слева	рисунок сверху