La propiedad isoperimétrica de la reina Dido (Elisa de Tiro), más de 3,000 años atrás

Rodrigo Bañuelos

Universidad de Purdue
West Lafayette, IN 47907

George Pólya

El distinguido matemático húngaro, George Pólya, explica en su libro *“Las matemáticas y el razonamiento plausible"*, publicado el 1954, lo siguiente:

> *El teorema isoperimétrico, profundamente arraigado en nuestra experiencia e intuición, tan fácil de conjeturar pero difícil de demostrar, es una fuente inagotable de inspiración.*

Tres ejemplos del principio isoperimétrico:

1. Propiedad geométrica, caso clásico, con profunda influencia en las matemática modernas – geometría, calculo de variaciones, ecuaciones parciales, ...

2. ¿Se puede escuchar el tamaño de un tambor?

   Pregunta relacionada con un famoso problema propuesto en 1964 por el matemático polaco, Mark Kats: ¿Se puede escuchar la forma de un tambor? Teoría de ondas de sonido, teoría espectral, teoría de resonancia, física matemática, y aplicaciones a otras áreas ...

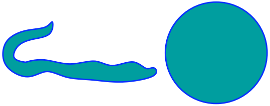
3. Propiedad isoperimétrica en el mundo aleatório: el movimento Browniano.

La ciudad de Tiro, 80 km al sur de Beirut situada en una isla a 1 km de la costa de Líbano, fue fundada en el III milenio a. C.. Rodeada por una potente e impenetrable muralla, fue la ciudad fenicia más importante de la antigüedad y dominó el comercio en el Mediterráneo por varios siglos. Fue conquistada (y destruida) a mediados del tercer siglo (300's) a. C. por Alejandro III de Macedonia, más conocido como Alejandro Magno o Alejandro el Grande.

Al principio del primer milenio a.C., Tiro fue reinado por Pigmalión, un cruel y déspota rey a quien todos le temían. Después que este degollara a su esposo, su hermana, la princesa Elisa (Dido), decidió huir.

El filósofo griego Proclo afirmaba en el siglo V: “El circulo (disco) es la figura más sencilla y más perfecta." Dicha "perfección” del disco se manifiesta en la importante propiedad descubierta por la **Reina Dido**, poco después de su llegada a África del Norte en 800 o 900 a.C.
Propiedad de Dido : De entre todas las curvas planas cerradas que tienen un perímetro fijo, el círculo es el que encierra una mayor área en su interior.

Equivalente: De entre todas las figuras que tienen un área fija, el disco tiene el menor perímetro.



Las leyendas antiguas nos dicen que en compra/venta de tierras, los campesinos listos solían engañar a otros al medir el tamaño de un terreno por el tiempo que les tomaba para caminarlo alrededor.

Virgilio, el poeta Romano, en el poema épico *La Eneida* escribe acerca de Dido, Princesa de Tiro en Fenicia

"...Dido preparó su huida y su escuadrilla, compuesta de hombres que más odiaban o que más le temían al cruel tirano. De naves ya dispuestas a zarpar se apoderan y las cargan de oro. Se van por el mar las riquezas del Pigmalión; una mujer dirige la expedicion."

Virgilio (autor de La Eneida), a sus costados las musas Clío (Historia) y Melpómene (Tragedia) - Musee du Bardo

“Desembarcaron en este lugar, donde ahora se ven enormes murallas y donde el surgimiento de una joven Cartago se vislumbra. Y compraron tierra, que le llamaron Birsa, tanto suelo como pudieron rodear con la piel de un toro."

Grabado por Matthaus Merian el Viejo,
en Historische Chronica, Frankfurt a.M. 1630

El rey Jarbas: La reina ocuparía sólo aquel trozo de tierra que pudiera abarcar con la piel de un toro. Dido hizo que su gente cortara la piel en tiras muy finas e hizo que las extendieran en el suelo de forma que encerrara en su interior la mayor superficie posible.

Tragedia final de la reina de Cartago: Talento matemático (o intuición matemática) no es necesario ni suficiente para mitigar las penas, reproches y tribulaciones del corazón:

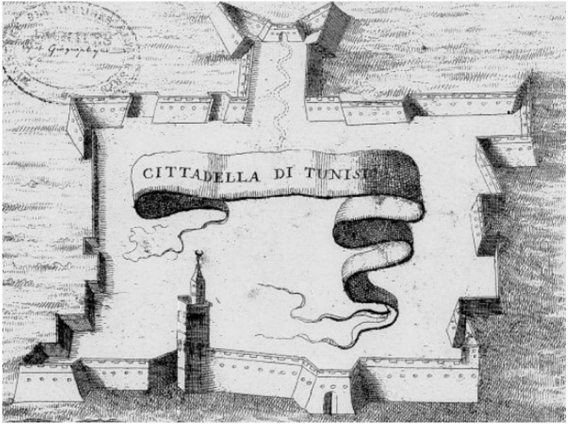
La Eneida nos sigue narrando como la reina de Cartago recibió a exiliados troyanos con hospitalidad. El príncipe troyano Eneas, protagonista de *La Eneida*, la conoció en su camino de Troya (en Grecia antigua) a Lacio (ahora Roma). Ella se enamoró profundamente de él. Eneas rechazó su amor para cumplir su destino. Después de este fracaso de amor, la reina se suicida tirándose sobre la espada de su enamorado.

Isoperimetría: Maximizar el área habitable bajo restricciones (frontera) naturales


Cy eft le vray
pourtraict
naturel
dela ville, cite,
vniuerfite
de
Parisy
1576


ORIENS
COLONIA AGRIPPINA
OCCIDENS
© The Hebrew University of Jerusalem & The Jewish National & University Library

Túnez en la época Medieval: No un círculo (casi un cuadrado)

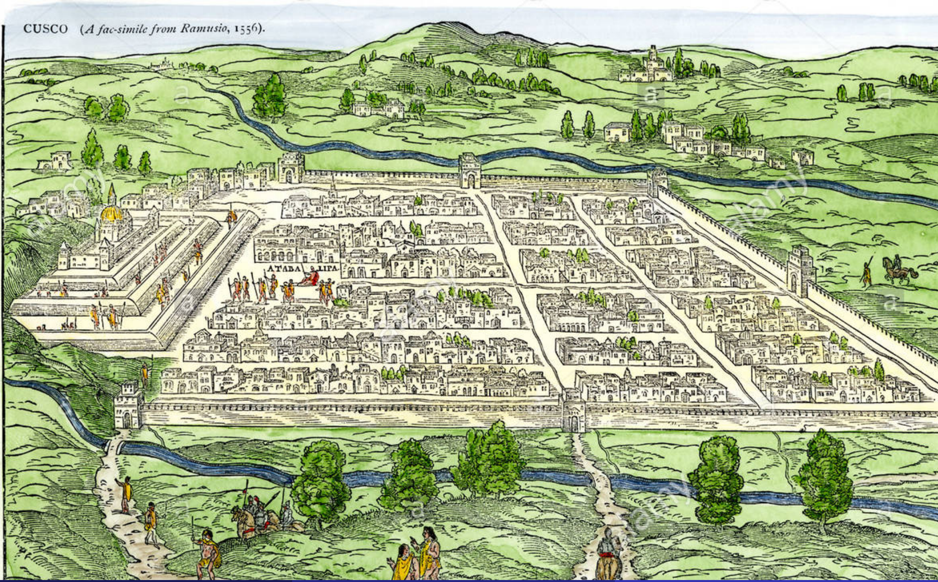


De todas las ciudades rectangulares con perímetro fijo, las cuadradas encierran el área habitable más grande.

Ciudad Azteca: La Gran Tenochtitlan

Ciudad Azteca: La Gran Tenochtitlan

Cusco: La Gran ciudad Inca



La gente a través del mundo ha sabido por siglos que tambores pequeños producen “tones fundamentales agudos (altos)” y tambores grandes producen “tonos fundamentales graves (bajos).”

El tambor más grande del Mundo?

El tono fundamental más grave (más bajo) del Mundo?

No realmente!

El Teorema de Rayleigh-Faber-Krahn: La propiedad isoperimétrica de los tambores

Entre todos los tambores de area fija, el circular produce el sonido más bajo. Además: entre mas grande el circulo, más bajo el sonido. Provado el 1923.

Ademas: entre mas grande el circulo, más bajo el sonido.

Provado por Lord Rayleigh (1914, Ingles), Georg Faber (Aleman) y Edgar Krahn (Estonio) (1923)

$$\text{el sonido} \approx \frac{1}{R^2}$$

done R is el radio del tambor.

"construcciones ideales de tambores"

- Descubierto por el botánico escocés Robert Brown en 1827. Brown estaba investigando bajo el microscopio una suspensión de partículas de polen en una solución acuosa. Observó que las partículas de polen tenían un movimiento caótico e incesante.

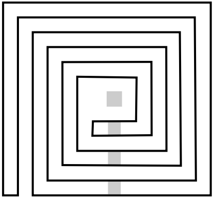
- Formulación matemática por Einstein (1905)

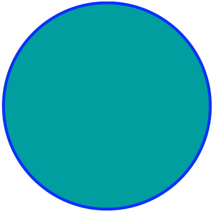
  El tiempo que sobrevivencia (tiempo de salida, tiempo de vida) es la cantidad de tiempo que le toma al movimiento Browniano tocar por primera vez la frontera de la figura D.

Propiedad isoperimétrica: El tiempo de salida entre todas las figuras de área fija es máximo en el disco.

Pregunta

¿Asumiendo áreas iguales, cuál de estas figuras tiene el mayor tiempo de vida y de qué punto debería partir el caminante aleatorio para maximizar las posibilidades de estar vivo en tiempo t? **La respuesta es obvia**





Teorema

Dada una figura D en el plano. Consideremos el disco D^* con la misma área que D. Entonces tenemos la siguiente desigualdad:

$$Prob_x\{\tau_D > t\} \leq Prob_0\{\tau_{D^*} > t\}.$$

Propiedad Isoperimétrica: De manera matemática más precisa

Llamemos $A(D)$ al área y $P(D)$ al perímetro de D. La propiedad de Dido:

Teorema (Desigualdad Isoperimétrica)

Si $P(D) = P(D^*)$, tenemos
$$A(D) \leq A(D^*)$$

Para el disco (círculo) D^* de radio r:

$$P(D^*) = 2\pi r \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{P(D^*)}{2\pi} = \frac{P(D)}{2\pi}$$

$$A(D^*) = \pi\, r^2 = \frac{(P(D))^2}{4\pi}$$

Teorema (equivalente)

Para cualquier superficie cerrada D en el plano, se cumple la siguiente la desigualdad entre el área y el perímetro:

$$A(D) \leq \frac{(P(D))^2}{4\pi}.$$

Dada una **figura** *D* en el **plano** (representando a la superficie del tambor) existen números (llamados valores propios)

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_3 \cdots \to \infty$$

y funciones (llamadas funciones propias)

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots,$$

definidas en *D* que satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\Delta\varphi_k(z) = \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial^2 x}(z) + \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial^2 y}(z) = -\lambda_k\varphi_k(z), \quad z = (x, y) \in D$$

$$\varphi(z) = 0 \text{ for } z \in \partial D, \text{ la frontera de } D.$$

Las funciones

$$u_k(t,z) = \varphi_k(z) e^{i\sqrt{\lambda_k}\ t} = \varphi_k(z)\left(\cos(\sqrt{\lambda_k}\ t) + i\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_k}\ t)\right)$$

son soluciones de la **ecuación de la onda:**

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}(z,t) = \Delta u_k(z,t) = \frac{\partial^2 u_k}{\partial^2 x}(z,t) + \frac{\partial^2 u_k}{\partial^2 y}(z,t)$$

Principio fundamental: Las soluciones generales $U(z,t)$ de la ecuación de la onda son combinaciones lineares de estas soluciones "fundamentales". Es decir, dada una solución $U(z,t)$ existen constantes C_k (dependiendo de valores iniciales) tal que:

$$U(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_k u_k(z,t)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son los **tonos puros** del **tambor** D.

Mark Kats: ¿Se puede escuchar el tamaño de un tambor? Matemáticamente: ¿Se puede recuperar la forma exacta de la figura D sabiendo la sucesión $\{\lambda_k\}$? Respuesta: No la forma completa pero sí el tamaño.

Resultados de probabilidades bajas: improbables pero no imposibles

- Licenciatura en matemáticas, Universidad de California, Santa Cruz, 1978 (primero en mi familia con un título universitario).
- Maestría, Universidad de California, Davis, 1980
- Doctorado en matemáticas (especializado en análisis estocástico), UCLA, 1984.
- Post-doctorado en Caltech (Instituto Tecnológico de California), 1984-1986.
- Post-doctorado por medio de la Fundación Nacional de Ciencias (EU), Universidad de Illinois, 1986-1987 bajo la tutela del destacado probabilista Donald Burkholder
- Llegada a Purdue en 1987 como Profesor (titular) Asistente, promoción a Profesor Asociado en 1989, y Profesor de Tiempo Completo en 1992. Director del Departamento de Purdue del 2005 al 2011.

Premios y reconocimientos internacionales

- Ganador del premio presidencial para jóvenes investigadores, 1989.
- Ganador del premio Blackwell-Tapia, 2004. Reconocimiento no solo por investigación matemática, sino también por la promoción de matemáticas en comunidades minoritarias–hispanos/latinos, y afroamericanos.
- Elegido miembro de la Sociedad Matemática Americana (AMS), El Instituto de Estadística Matemática (IMS), y Sociedad de Mujeres en Matemáticas.
- Invitado a congresos internacionales en todos los continentes, excepto Antártica. He presentado mis trabajos matemáticos en más de 20 países y cantidad de universidades e instituciones matemáticas a través del mundo.

¿Por qué resultados de pocas probabilidades?

Educación Primaria, Secundaria y Preparatoria

- Primeros 16 años: viví con mis padres, siete hermanos y una hermana, en el estado de Zacatecas, municipio de Monte Escobedo. Una zona agrícola. En esa época (mediados de los años 50's y 60's) el rancho donde nací y crecí (La Masita) no tenía agua potable, luz, teléfono, carreteras, ... ni tampoco escuelas.
- Por primera vez en la escuela en 1970: Noveno grado (último año de secundaria), Pasadena, California.
- Tres años más tarde, 1973: Graduación the High School (preparatoria)–sin haber aprendido absolutamente nada–no matemáticas (aritmética), no inglés, ... y hasta cierto punto, tampoco español. Durante la High School trabaje tiempo completo.
- Colegio comunitario, 1973-1974, casi a la edad de 20 años: Comenzando con aritmética básica, suma, resta, cuadrados, fracciones, álgebra básica, geometría analítica, trigonometría, cursos de inglés básico, etc. Es decir, en este colegio, a la edad de 20 años empecé con materias que se estudian en la primaria.

¿Qué he aprendido en mi larga carrera como matemático?

1. Ideas, teorías, conceptos, matemáticos y científicos no son fáciles.
2. Existe un mito (mistificación) que dice que solo aquellos con habilidades mentales extraordinarias pueden entenderlas y contribuir al desarrollo científico, matemático, tecnológico, ...
3. Esto para mí es falso, yo mismo soy un contraejemplo.
4. Importante distinguir entre preparación académica, matemática y habilidad.
5. Todos tenemos habilidad, capacidad, ...
6. Preparación viene de oportunidades educativas que para muchos jóvenes, especialmente aquellos que vienen de familias con pocos recursos, no son fácil de encontrar.
7. Mi consejo: busquen oportunidades, pongan todo el esfuerzo necesario, ...

Buena suerte con sus estudios

y

muchas gracias por su atención