

Que 6

$$1. \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\begin{vmatrix} -1/2 - \lambda & 1 \\ -1 & -1/2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1/2 - \lambda)^2 + 1 = 0$$

$$(-1/2 - \lambda)^2 = -1$$

$$-1/2 - \lambda = \pm i$$

$$\lambda = -1/2 \pm i$$

$$\lambda = -1/2 + i$$

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & | & 0 \\ -1 & -i & | & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\text{or } \vec{v} = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_1(t) = e^{-1/2 t} (\cos t + i \sin t) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$= e^{-1/2 t} \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{bmatrix} = e^{-1/2 t} \left\{ \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \right\}$$

general solution:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-1/2 t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + C_2 e^{-1/2 t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$\text{or } \vec{x}(t) = C_1 e^{-1/2 t} \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + C_2 e^{-1/2 t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

$$\lambda = 3 \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_1 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{x}_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\Psi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(0) = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Phi}(t) = \Psi(t) \Psi^{-1}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$