

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (051 ; 1927 ; Constantine, Algérie). Compte-rendu de la 51e session, Cosntantine 1927. 1927.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

La condition est nécessaire. En effet, on a

$$\{ f(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0 \} \quad (1)$$

$$\text{d'où } \{ f(a) + f(b) = 0, \text{ et } f(a) - f(b) = 0 \} \quad (2)$$

et ces dernières, puisque $a \neq b$, se traduisent dans les (II).

La condition est suffisante. En effet, si les (II) sont satisfaites, celles-ci se réduisent à les (2), comme à dire à les (1), ce qui nous prouve la chose ; et le théorème est complètement démontré.

Le cas $p^2 - 4q = 0$ se réduit à la vérification simultanée des deux identités

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0.$$

Supposons maintenant qu'on ait

$$p = 2\rho \cos \varphi \quad \text{et} \quad q = \rho^2,$$

alors on a aussi

$$V_n = 2\rho \cos n\varphi, \quad U_n = -\frac{2\rho^n \sin n\varphi}{\sin \varphi}, \quad \text{avec } V_0 = 2$$

et les relations (II) se transforment dans le suivant.

THÉORÈME DE GAUSS. *Si la quantité ρ et l'angle φ satisfont à ces deux équations*

$$\rho^n \cos n\varphi + A_1 \rho^{n-1} \cos (n-1)\varphi + \dots + A_{n-2} \rho^2 \cos 2\varphi + A_1 \rho \cos \varphi + A_1 = 0,$$

$$\rho^n \sin n\varphi + A_1 \rho^{n-1} \sin (n-1)\varphi + \dots + A_{n-2} \rho^2 \sin 2\varphi + A_{n-1} \rho \sin \varphi = 0,$$

alors la fonction

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

sera divisible par le trinôme $x^2 - 2\rho x \cos \varphi + \rho^2$; pourvu que $\rho \sin \varphi$ ne soit pas nul.

On peut observer que cette proposition est la généralisation de la décomposition en facteurs due à *Moivre* du trinôme $x^{2n} - 2x^n \cos \varphi + 1$.

Une étude détaillée de cette décomposition on peut l'obtenir directement par la résolution de l'équation de *Moivre* et sa dérivée, ce que nous faisons au moyen des fonctions U_n et V_n en repliant les équations

$$V_n(x, \varphi) + k = 0, \quad U_n(x, \varphi) = 0$$

et ceci, peut-être, sera l'objet d'une autre Note.

Je me permets d'appeler l'attention sur ce qui a été dit précédemment, parce que cela, si je ne me trompe, ouvre un autre champ aux applications des fonctions U_n et V_n .

André BLOCH

Saint-Maurice (Seine)

1° SUR LE MÉMOIRE DE LAGUERRE RELATIF

A LA FONCTION $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$

Dans le mémoire en question (*Œuvres*, tome I). Laguerre développe en fraction continue la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$, et obtient entre autres choses une équation linéaire du second ordre vérifiée par les termes de la réduite de degré n . Voici une méthode simplifiée, s'appliquant à toutes les questions analogues, pour obtenir cette équation.

Soient à trouver deux polynômes f_n, φ_n de degré n , tels que, pour $-x > 1$:

$$(x+1)^\omega f_n - (x-1)^\omega \varphi_n = (x^{\omega-n-1}) \quad (1)$$

où le second membre est une série dont les termes sont de la forme $ax^{\omega+k}$ (k entier positif, nul ou négatif), ceux de degré supérieur à $\omega - n - 1$ étant tous nuls ; la détermination de deux tels polynômes est certainement possible, comme revenant à la résolution d'un système de $2n + 1$ équations linéaires homogènes à $2n + 2$ inconnues ; le second membre, hormis le cas banal où ω est un entier au plus égal à n en valeur absolue, ne peut être identiquement nul. En dérivant (1), il vient :

$$(x+1)^{\omega-1}[\omega f_n - (x+1)f'_n] - (x-1)^{\omega-1}[\omega \varphi_n - (x-1)\varphi'_n] = (x^{\omega-n-2}) \quad (2)$$

et, en résolvant ce système de deux équations linéaires en $(x+1)^{\omega-1}$, $(x-1)^{\omega-1}$:

$$(x+1)^{\omega-1} (x-1)^{\omega-1} [(x^2-1)(f_n \varphi'_n - \varphi_n f'_n) + 2\omega f_n \varphi_n] = \dots = \dots \quad (3)$$

Au terme de plus fort degré du second membre de (1) correspond, au second et au troisième membre de (3), un terme de plus fort degré qui ne peut disparaître ; il en résulte, en égard à tous les degrés, que la quantité entre crochets est une constante *non nulle* :

$$(x^2-1)(f_n \varphi'_n - \varphi_n f'_n) + 2\omega f_n \varphi_n = A. \quad (4)$$

En dérivant (4), nous avons :

$$\varphi_n [(x^2-1)f''_n + 2xf'_n - 2\omega f'_n] = f_n [(x^2-1)\varphi''_n + 2x\varphi'_n + 2\omega\varphi'_n] \quad (5)$$

d'où, puisque A n'est pas nul, et eu égard au degré :

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) f''_n + 2(x - \omega) f'_n - n(n + 1) f_n &= 0; \\ (x^2 - 1) \varphi''_n + 2(x + \omega) \varphi'_n - n(n + 1) \varphi_n &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

équations d'où Laguerre déduit sous forme explicite les polynômes f_n et φ_n .

Des considérations analogues, jointes aux relations de récurrence entre les réduites de toute fraction continue, s'appliqueraient à l'obtention des équations (supposant les facteurs constants convenablement choisis) :

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) f'_n &= [\omega - (n + 1)x] f_n + f_{n+1} \\ f_{n+1} - (2n + 1) x f_n + (n^2 - \omega^2) f_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

également trouvées par Laguerre, et des équations analogues pour φ_n .

La méthode précédente s'applique sans modification au développement en fraction continue de $[F(x)]^\omega$, où $F(x)$ est une fraction rationnelle égale à 1 pour x infini.

2° SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE NON LINÉAIRE

Soit à résoudre :

$$\int_0^x \varphi(u) \varphi(x-u) du = f(x) \quad (1)$$

Guidons-nous sur l'extraction de la racine carrée d'une fonction définie par son développement taylorien. Nous avons :

$$\left[\int_0^\infty \varphi(x) y^x dx \right]^2 = \int_0^\infty \int_0^x \varphi(u) \varphi(x-u) y^x du dx = \int_0^\infty f(x) y^x dx \quad (2)$$

Dérivons par rapport à y :

$$2 \int_0^\infty \varphi(x) y^x dx \times \int_0^\infty \frac{x}{y} \varphi(x) y^x dx = \int_0^\infty \frac{x}{y} f(x) y^x dx. \quad (3)$$

Donc, eu égard à (2) :

$$2 \int_0^\infty x \varphi(x) y^x dx \times \int_0^\infty f(x) y^x dx = \int_0^\infty \varphi(x) y^x dx \times \int_0^\infty x f(x) y^x dx \quad (4)$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty \int_0^x 2u \varphi(u) f(x-u) y^x du dx = \int_0^\infty \int_0^x \varphi(u) (x-u) f(x-u) y^x du dx \quad (5)$$

On doit donc avoir :

$$\int_0^x (3u - x) \varphi(u) f(x-u) du = 0 \quad (6)$$

formule qu'il y aurait intérêt à établir par un raisonnement direct

et général. On est ainsi ramené à une équation intégrale linéaire et homogène.

Si $f(x)$ est une constante, l'équation (6) se résout aisément par dérivation ; on trouve $\varphi(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$. Or, pour $f(x) = \pi$ et $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, l'équation (1) est vérifiée.

Ainsi, d'une manière générale, l'on aura au voisinage de l'origine :

$$\varphi(x) \sim \sqrt{\frac{f(0)}{\pi x}}$$

M. B. HOSTINSKY

**SUR LA FORMULE DE M. HADAMARD
RELATIVE A LA VARIATION DE LA FONCTION DE GREEN**

Soient A et B deux points pris à l'intérieur d'une surface fermée S sans point double. Désignons par $g(A, B)$ la fonction de Green qui, envisagée comme fonction au point variable B , satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta u = 0$$

à tout point intérieur à S ; lorsque B s'approche du point A , g devient infiniment grande comme r^{-1} , r étant la distance AB ; on a de plus $g(A, B) = 0$, B étant un point de S .

Soit M un point pris sur S et portons, sur la normale intérieure Mn menée à ce point, un segment infiniment petit δn . Le lieu de l'extrémité de ce segment est une surface que nous désignons par S' . Les points A et B étant fixes, la variation δg de la fonction g due à la déformation de la frontière S est exprimée par la formule de M. Hadamard (1) :

$$\delta g(A, B) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\partial g(A, M)}{\partial n} \cdot \frac{\partial g(B, M)}{\partial n} \cdot \delta n \, d\omega,$$

$d\omega$ étant l'élément de surface au point M et l'intégration étant étendue à la surface S .

Je me propose de montrer que cette formule s'applique aussi à la fonction de Green relative à l'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (1)$$

(1) E. Picard : Traité d'Analyse, t. II, 2^e édition, p. 27.

k étant une constante réelle. La fonction de Green $[G(A, B)]$ relative à l'équation (1) est égale à

$$[G(A, B)] = \frac{\cos kr}{r} + u(A, B),$$

où u représente une fonction régulière qui satisfait à l'équation (1); il faut déterminer u de telle façon que G devienne égale à zéro lorsque le point B vient sur la frontière S . Un raisonnement connu (1) montre qu'il n'y a qu'une seule fonction de Green relative à l'équation (1) pourvu que la constante k soit suffisamment petite. La fonction $G(A, B)$ est symétrique par rapport aux points A et B . Désignons par $G'(A, B)$ la fonction de Green relative à la même équation et à la frontière S' . Lorsque r est infiniment petit, les deux fonctions G et G' peuvent être mises sous la forme générale

$$\frac{1}{r} + v(A, B),$$

v étant une fonction régulière. Cela va nous permettre d'appliquer un procédé connu pour trouver la variation cherchée $\delta G = G - G'$. Décrivons des deux points A et B comme centres deux surfaces sphériques Σ_1 et Σ_2 aux rayons infiniment petits. Soit D le domaine à trois dimensions limité par les trois surfaces S , Σ_1 et Σ_2 et M un point situé à l'intérieur de D . Les symboles Δ étant pris par rapport aux coordonnées du point M , on a

$$\Delta G(A, M) = -k^2 G(A, M), \quad \Delta G'(A, M) = -k^2 G'(A, M)$$

donc |

$$\int \int \int [G'(B, M) \Delta G(A, M) - G(A, M) \Delta G'(B, M)] d\tau = 0$$

$d\tau$ étant l'élément de volume au point M et l'intégration étant étendue au domaine D . Une transformation classique donne

$$\int \int \left[G'(B, M) \frac{\partial G(A, M)}{\partial n} - G(A, M) \frac{\partial G'(B, M)}{\partial n} \right] d\omega = 0,$$

$d\omega$ étant l'élément de surface sur la frontière de D et l'intégration étant étendue à cette frontière qui se compose de S , de Σ_1 et de Σ_2 . Lorsque les rayons de Σ_1 et de Σ_2 tendent vers zéro, on trouve

$$\delta G(A, B) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \frac{\partial G(A, M)}{\partial n} \cdot \frac{\partial G(B, M)}{\partial n} \cdot \delta n \cdot d\omega.$$

La formule de M. Hadamard s'applique donc aussi à la fonction g . On voit que, les points A et B étant fixes, la variation infiniment petite de G due à la déformation de la frontière S est symétrique par rapport aux points A et B .

(1) *J. Hadamard* : Leçons sur le calcul des variations, Paris, 1910 ; p. 305.