La condition est nécessaire. En effet, on a

$$\{ f(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0 \} \tag{1}$$

d'où

$$\{ f(a) + f(b) = 0, \text{ et } f(a) - f(b) = 0 \} \tag{2}$$

et ces dernières, puisque $a \neq b$, se traduisent dans les (II).

La condition est suffisante. En effet, si les (II) sont satisfaites, celles-ci se réduisent à les (2), comme à dire à les (1), ce qui nous prouve la chose ; et le théorème est complètement démontré.

Le cas $p^2 - 4q = 0$ se réduit à la vérification simultanée des deux identités

$$f(a) = 0, \qquad f'(a) = 0.$$

Supposons maintenant qu'on ait

$$p = 2\rho \cos\varphi \quad \text{et} \quad q = \rho^2,$$

alors on a aussi

$$V_n = 2\rho \cos n\varphi, \qquad U_n = -\frac{2\rho^n \sin n\varphi}{\sin\varphi}, \text{ avec } V_0 = 2$$

et les relations (II) se transforment dans le suivant.

Théorème de Gauss. *Si la quantité ρ et l'angle φ satisfont à ces deux équations*

$$\rho^n \cos n\varphi + A_1 \rho_{n-1} \cos(n-1)\varphi + \ldots + A_{n-2}\rho^2 \cos 2\varphi + A_1 \rho \cos\varphi + A_1 = 0,$$
$$\rho^n \sin n\varphi + A_1 \rho_{n-1} \sin(n-1)\varphi + \ldots + A_{n-2}\varphi_2 \sin 2\varphi + A_{n-1}\rho \sin\varphi = 0,$$

alors la fonction

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-} x_1 + A_n$$

sera divisible par le trinôme $x^2 - 2\rho x \cos\varphi + \rho^2$; pourvu que $\rho \sin\varphi$ ne soit pas nul.

On peut observer que cette proposition est la généralisation de la décomposition en facteurs due à *Moivre* du trinôme $x^{2n} - 2x^n \cos\varphi + 1$.

Une étude détaillée de cette décomposition on peut l'obtenir directement par la résolution de l'équation de *Moivre* et sa dérivée, ce que nous faisons au moyen des fonctions U_n et V_n en repliant les équations

$$V_n(x, q) + k = 0, \qquad U_n(x, q) = 0$$

et ceci, peut-être, sera l'objet d'une autre Note.

Je me permets d'appeler l'attention sur ce qui a été dit précédemment, parce que cela, si je ne me trompe, ouvre un autre champ aux applications des fonctions U_n et V_n.

André BLOCH
Saint-Maurice (Seine)

1° SUR LE MÉMOIRE DE LAGUERRE RELATIF A LA FONCTION $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$

Dans le mémoire en question (*Œuvres*, tome I). Laguerre développe en fraction continue la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$, et obtient entre autres choses une équation linéaire du second ordre vérifiée par les termes de la réduite de degré n. Voici une méthode simplifiée, s'appliquant à toutes les questions analogues, pour obtenir cette équation.

Soient à trouver deux polynômes f_n, φ_n de degré n, tels que, pour $|x| > 1$:

$$(x+1)^{\omega} f_n - (x-1)^{\omega} \varphi_n = (x^{\omega-n-1}) \tag{1}$$

où le second membre est une série dont les termes sont de la forme $ax^{\omega+k}$ (k entier positif, nul ou négatif), ceux de degré supérieur à $\omega - n - 1$ étant tous nuls ; la détermination de deux tels polynômes est certainement possible, comme revenant à la résolution d'un système de $2n+1$ équations linéaires homogènes à $2n+2$ inconnues ; le second membre, hormis le cas banal où ω est un entier au plus égal à n en valeur absolue, ne peut être identiquement nul. En dérivant (1), il vient :

$$(x+1)^{\omega-1}[\omega f_n - (x+1)f'_n] - (x-1)^{\omega-1}[\omega\varphi_n - (x-1)\varphi'_n] = (x^{\omega-n-2}) \tag{2}$$

et, en résolvant ce système de deux équations linéaires en $(x+1)^{\omega-1}$, $(x-1)^{\omega-1}$:

$$(x+1)^{\omega-1}(x-1)^{\omega-1}[(x^2-1)(f_n\varphi'_n - \varphi_n f'_n) + 2\omega f_n \varphi_n] = \ldots = \ldots. \tag{3}$$

Au terme de plus fort degré du second membre de (1) correspond, au second et au troisième membre de (3), un terme de plus fort degré qui ne peut disparaître ; il en résulte, en égard à tous les degrés, que la quantité entre crochets est une constante *non nulle* :

$$(x^2-1)(f_n\varphi'_n - \varphi_n f'_n) + 2\omega f_n \varphi_n = \mathrm{A}. \tag{4}$$

En dérivant (4), nous avons :

$$\varphi_n[(x^2-1)f''_n + 2xf'_n - 2\omega f'_n] = f_n[(x^2-1)\varphi''_n + 2x\varphi'_n + 2\omega\varphi'_n] \quad (5$$

d'où, puisque A n'est pas nul, et eu égard au degré :

$$(x^2-1)\,f''_n + 2\,(x-\omega)\,f'_n - n\,(n+1)\,f_n = 0;$$

$$(x^2-1)\,\varphi''_n + 2\,(x+\omega)\,\varphi'_n - n\,(n+1)\,\varphi_n = 0 \qquad (6)$$

équations d'où Laguerre déduit sous forme explicite les polynômes f_n et φ_n.

Des considérations analogues, jointes aux relations de récurrence entre les réduites de toute fraction continue, s'appliqueraient à l'obtention des équations (supposant les facteurs constants convenablement choisis) :

$$(x^2-1)\,f'_n = [\omega-(n+1)\,x]\,f_n + f_{n+1}$$

$$f_{n+1} - (2n+1)\,xf_n + (n^2-\omega^2)\,f_{n-1} = 0$$

également trouvées par Laguerre, et des équations analogues pour φ_n.

La méthode précédente s'applique sans modification au développement en fraction continue de $[\mathrm{F}(x)]^{\omega}$, où $\mathrm{F}(x)$ est une fraction rationnelle égale à 1 pour x infini.

2° SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE NON LINÉAIRE

Soit à résoudre :

$$\int_0^x \varphi(u)\,\varphi(x-u)\,du = f(x) \qquad (1)$$

Guidons-nous sur l'extraction de la racine carrée d'une fonction définie par son développement taylorien. Nous avons :

$$\left[\int_0^\infty \varphi(x)\,y^x\,dx\right]^2 = \int_0^\infty\int_0^x \varphi(u)\,\varphi(x-u)\,y^x\,du\,dx = \int_0^\infty f(x)\,y^x\,dx \quad (2)$$

Dérivons par rapport à y :

$$2\int_0^\infty \varphi(x)\,y^x\,dx \times \int_0^\infty \frac{x}{y}\,\varphi(x)\,y^x\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{y}\,f(x)\,y^x\,dx. \qquad (3)$$

Donc, eu égard à (2) :

$$2\int_0^\infty x\varphi(x)\,y^x\,dx \times \int^\infty f(x)\,y^x\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,y^x\,dx \times \int_0^\infty xf(x)\,y^x\,dx \quad (4)$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^\infty\int_0^x 2u\varphi(u)f(x-u)y^x\,du\,dx = \int_0^\infty\int_0^x \varphi(u)(x-u)f(x-u)y^x\,du\,dx \quad (5)$$

On doit donc avoir :

$$\int_0^x (3u-x)\,\varphi(u)\,f(x-u)\,du = 0 \qquad (6)$$

formule qu'il y aurait intérêt à établir par un raisonnement direct et général. On est ainsi ramené à une équation intégrale linéaire et homogène.

Si $f(x)$ est une constante, l'équation (6) se résout aisément par dérivation ; on trouve $\varphi(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$. Or, pour $f(x) = \pi$ et $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, l'équation (1) est vérifiée.

Ainsi, d'une manière générale, l'on aura au voisinage de l'origine :

$$\varphi(x) \sim \sqrt{\frac{f(0)}{\pi x}}$$

M. B. HOSTINSKY

SUR LA FORMULE DE M. HADAMARD RELATIVE A LA VARIATION DE LA FONCTION DE GREEN

Soient A et B deux points pris à l'intérieur d'une surface fermée S sans point double. Désignons par $g(A.B)$ la fonction de Green qui, envisagée comme fonction au point variable B, satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta u = 0$$

à tout point intérieur à S ; lorsque B s'approche du point A, g devient infiniment grande comme r^{-1}, r étant la distance AB ; on a de plus $g(A, B) = 0$, B étant un point de S.

Soit M un point pris sur S et portons, sur la normale intérieure Mn menée à ce point, un segment infiniment petit δn. Le lieu de l'extrémité de ce segment est une surface que nous désignons par S'. Les points A et B étant fixes, la variation δg de la fonction g due à la déformation de la frontière S est exprimée par la formule de M. Hadamard (1) :

$$\delta g(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\partial g(\mathrm{A}, \mathrm{M})}{\partial n} \cdot \frac{\partial g(\mathrm{B}, \mathrm{M})}{\partial n} . \delta n \, d\omega,$$

$d\omega$ étant l'élément de surface au point M et l'intégration étant étendue à la surface S.

Je me propose de montrer que cette formule s'applique aussi à la fonction de Green relative à l'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad \text{.............(1)}$$

(1) *E. Picard* : Traité d'Analyse, t. II, 2e édition, p. 27.

k étant une constante réelle. La fonction de Green $[G(A, B)]$ relative à l'équation (1) est égale à

$$[G(A, B)] = \frac{\cos kr}{r} + u(A, B),$$

où u représente une fonction régulière qui satisfait à l'équation (1); il faut déterminer u de telle façon que G devienne égale à zéro lorsque le point B vient sur la frontière S. Un raisonnement connu (1) montre qu'il n'y a qu'une seule fonction de Green relative à l'équation (1) pourvu que la constante k soit suffisamment petite. La fonction $G(A,B)$ est symétrique par rapport aux points A et B. Désignons par $G'(A, B)$ la fonction de Green relative à la même équation et à la frontière S'. Lorsque r est infiniment petit, les deux fonctions G et G' peuvent être mises sous la forme générale

$$\frac{1}{r} + v(A, B),$$

v étant une fonction régulière. Cela va nous permettre d'appliquer un procédé connu pour trouver la variation cherchée $\delta G = G - G'$. Décrivons des deux points A et B comme centres deux surfaces sphériques Σ_1 et Σ_2 aux rayons infiniment petits. Soit D le domaine à trois dimensions limité par les trois surfaces S, Σ_1 et Σ_2 et M un point situé à l'intérieur de D. Les symboles Δ étant pris par rapport aux coordonnées du point M, on a

$$\Delta G(A, M) = -k^2 G(A, M), \qquad \Delta G'(A, M) = -k^2 G'(A, M)$$

donc

$$\iiint [G'(B, M) \Delta G(A, M) - G(A, M) \Delta G'(B, M)]\, d\tau = 0$$

$d\tau$ étant l'élément de volume au point M et l'intégration étant étendue au domaine D. Une transformation classique donne

$$\iint \left[G'(B, M) \frac{\partial G(A, M)}{\partial n} - G(B, M) \frac{\partial G'(A, M)}{\partial n} \right] d\omega = 0,$$

$d\omega$ étant l'élément de surface sur la frontière de D et l'intégration étant étendue à cette frontière qui se compose de S, de Σ_1 et de Σ_2. Lorsque les rayons de Σ_5 et de Σ_2 tendent vers zéro, on trouve

$$\delta G(A,B) = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial G(A, M)}{\partial n} \cdot \frac{\partial G(B, M)}{\partial n} . \delta n . d\omega.$$

La formule de M. Hadamard s'applique donc aussi à la fonction g. On voit que, les points A et B étant fixes, la variation infiniment petite de G due à la déformation de la frontière S est symétrique par rapport aux points A et B.

(1) *J. Hadamard* : Leçons sur le calcul des variations, Paris, 1910 ; p. 305.