ANDRÉ BLOCH

Le problème de la cubique lacunaire

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 161-168.

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__161_0>

LE PROBLÈME DE LA CUBIQUE LACUNAIRE;

PAR ANDRÉ BLOCH.

1. Dans le présent article, on verra comment on peut être conduit, par les considérations les plus élémentaires, à se poser, en obtenant même des indications sur sa solution, un problème qui dépasse la puissance actuelle de l'analyse; et l'on aura en même temps un exemple de cette fameuse « arithmétisation des mathématiques », dont on a beaucoup parlé, mais que jusqu'à présent l'on n'a guère fait passer dans le domaine des réalités.

2. Considérons une cubique plane indécomposable et sans point double. Nous allons envisager les courbes unicursales d'ordre m qu'elle coupe en un seul point (analytique). Une courbe d'ordre m dépend de $\frac{m(m+3)}{2}$ paramètres; pour que ses $3m$ points d'intersection avec la cubique soient confondus, il y a $3m-1$ conditions; d'autre part, pour qu'elle soit unicursale, il faut qu'elle ait $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, qui entraînent autant de conditions. Or :

$$\frac{m(m+3)}{2}-(3m-1)-\frac{(m-1)(m-2)}{2}=0.$$

Ainsi *les courbes cherchées sont en nombre fini pour chaque valeur de l'ordre* m; nous ne nous arrêtons pas à en calculer le nombre, égal d'ailleurs à 9, comme il est bien connu, pour $m=1$. Nous appellerons ces courbes, pour abréger, *courbes de type rationnel.*

Cherchons de même les courbes unicursales d'ordre m rencontrant la cubique en deux points au lieu d'un seul; nous n'avons plus de ce dernier chef que $3m-2$ conditions au lieu de $3m-1$. Ainsi *les courbes cherchées dépendent d'un paramètre, ou, plus exactement, se répartissent pour chaque valeur de l'ordre m, en un certain nombre de familles à un paramètre.*

Ce nombre est visiblement au moins égal à la partie entière de $\frac{3m}{2}$; mais il la dépasse dès que $m > 1$; en effet, à chaque décomposition $3m = \alpha + \beta$ correspond bien une seule famille de courbes algébriques coupant la cubique en deux points, si α et β sont premiers entre eux, mais plus d'une au contraire, d'après le théorème d'Abel, s'ils ne le sont pas. Nous ne cherchons pas ici le nombre de ces familles à un paramètre, il nous suffit de le savoir fini pour chaque valeur de m. Appelons les courbes unicursales correspondantes *courbes de type elliptique :* chaque famille de courbes de type elliptique contient un nombre fini de courbes de type rationnel.

Par un point générique du plan ne passe pas de courbe de type rationnel, mais passent une infinité dénombrable de courbes de type elliptique (un nombre fini pour chaque famille). Un élément de contact générique du plan (système d'un point et d'une droite passant par ce point) n'appartient à aucune courbe de type elliptique ou rationnel.

Il est vraisemblable que par un point du plan ne peuvent jamais passer qu'un nombre fini de courbes de type rationnel, et il n'est pas impossible que l'on puisse choisir le point en sorte que ce nombre soit aussi grand qu'on veut. Des réflexions analogues s'appliquent à un élément de contact du plan, envisagé par rapport aux courbes de type elliptique.

Nous admettrons que tout point du plan est aussi voisin que l'on veut d'un point d'une courbe de type rationnel; et pareillement que tout élément de contact du plan est aussi voisin que l'on veut d'un élément de contact d'une courbe de type elliptique. Ainsi la question de savoir si un point appartient à une courbe de type rationnel, un élément de contact à une courbe de type elliptique est une question de nature *arithmétique*.

3. Au point de vue de la pure géométrie, joignons maintenant celui de la théorie des fonctions. Considérons les systèmes de fonctions méromorphes dans tout le plan complexe *admettant la cubique lacunaire*, c'est-à-dire tels que, si $x = f(t)$, $y = g(t)$ sont ces deux fonctions, le point (x, y) ne coïncide jamais, pour une valeur finie de t, avec un point à distance finie ou infinie de la cubique. Une courbe de type elliptique est alors représentable

par un système de deux telles fonctions méromorphes, à savoir deux fractions rationnelles en e^t; et pour une courbe de type rationnel, on peut prendre simplement deux fractions rationnelles en t. D'après des théorèmes connus ([1]), il n'existe pas d'autres courbes *algébriques* uniformisables par des systèmes de fonctions méromorphes admettant la cubique lacunaire.

Considérons un élément de contact quelconque du plan de la cubique formée d'un point $M(x_0, y_0)$ non situé sur la courbe et d'une droite MZ passant par ce point. Soient deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, méromorphes dans le cercle-unité $|t| \leq 1$ admettant la cubique lacunaire, telles que pour $t = 0$ le point (x, y) soit en M et que $\frac{y'(0)}{x'(0)}$ soit égal au coefficient angulaire de MZ. Considérons l'expression :

$$x'(0)\,\overline{x}'(0) + y'(0)\,\overline{y}'(0),$$

où $\overline{x}'(0)$ et $\overline{y}'(0)$ sont les quantités imaginaires conjugués de $x'(0)$ et $y'(0)$.

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont assujetties à satisfaire à l'équation d'une courbe algébrique déterminée, tangente en M à MZ, et non comprises parmi les courbes de type elliptique ou rationnel, s'il en existe, auxquelles appartient cet élément de contact, on sait que l'expression ci-dessus admet un certain maximum fini déterminé par l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur la surface de Riemann correspondante.

Mais considérons le maximum ω^2 de la même expression lorsque x et y ne sont supposées liées par aucune relation, maximum qui ne dépend que de la cubique et de l'élément de contact donné. Ce maximum est infini lorsque l'élément de contact donné appartient à une courbe de type elliptique ou rationnel; il peut *a priori* être fini ou infini lorsque cela n'a pas lieu; mais si, dans ce dernier cas, il lui arrive d'être infini, nous pouvons être certain, en vertu du principe : *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito*, qu'il existe un système de deux fonctions méromorphes dans tout le plan complexe, admettant la cubique lacunaire, et *qui ne sont*

([1]) *Voir*, par exemple, pour tous renseignements bibliographiques, un fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques : Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité*, Paris, 1926 (fascicule XX).

pas liées par une relation algébrique; et si donc nous n'admettons pas la possibilité d'un tel fait, nous sommes conduit à conclure que ω est fini lorsque l'élément de contact n'appartient pas à une courbe de type rationnel ou elliptique. Autrement dit :

Si l'on suppose fixe le point M, *mais variable la direction* MZ *de l'élément de contact issu de* M, *le nombre* ω *attaché à cet élément est infini quand l'élément appartient à une courbe elliptique, ou rationnel, fini quand cela n'a pas lieu; c'est donc une fonction discontinue du coefficient angulaire de* MZ, *dépendant essentiellement de la nature arithmétique de ce coefficient.*

C'est, naturellement, ce dernier énoncé qu'il faudra démontrer, pour en déduire ensuite l'impossibilité d'une courbe transcendante uniformisable par des fonctions méromorphes dans tout le plan admettant la cubique lacunaire. On aura fait un grand pas dans la direction de ce théorème lorsqu'on aura démontré le suivant :

Deux fonctions méromorphes dans tout le plan, admettant la cubique lacunaire et d'ordre inférieur à l'unité, sont nécessairement liées par une relation algébrique, équation d'une courbe de type rationnel.

Cette dernière proposition pourra d'ailleurs être précisée par une inégalité en termes finis relative à la croissance des fonctions méromorphes dans le cercle-unité, admettant la cubique lacunaire, et possédant pour $t = 0$ un élément de contact donné n'appartenant à aucune courbe de type rationnel (ou même peut-être simplement telles que le point M correspondant à l'origine ait une position donnée, non située sur une telle courbe); mais n'y insistons pas.

Observons que le fait pour la cubique d'être supposée sans point double joue un rôle essentiel dans ce qui précède; par exemple la cubique unicursale $y = x^2 + \frac{1}{x}$ est lacunaire pour le système de fonctions entières

$$x = e^{f(t)}, \qquad y = e^{2f(t)} + e^{-f(t)} + e^{g(t)},$$

où $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions entières quelconques; les deux tangentes au point double (la droite de l'infini et la droite $x = 0$) le sont d'ailleurs aussi.

Quant au cas d'une conique lacunaire, il suffit, pour être convaincu qu'il ne peut être considéré avec profit, d'observer que le système de deux fractions rationnelles, indépendantes, de deux variables :

$$x = \frac{u}{uv+1}, \qquad y = \frac{v(uv+2)}{uv+1},$$

ne vient sur l'hyperbole $xy = 1$ pour aucun système de valeurs finies de u et v.

4. Passons maintenant à la considération d'une variété présentant une grande analogie avec le plan affecté d'une cubique lacunaire : c'est le plan affecté d'une *courbe du sixième ordre avec l'indice deux*, associé à la surface appelée *plan double sextique*, d'équation

$$z^2 = F_6(x, y).$$

où $F_6(x, y)$ est un polynome du sixième degré en x et y. Nous supposons que la sextique est à coefficients génériques, c'est-à-dire ne satisfaisant à aucune relation particulière.

Considérons les courbes unicursales d'ordre m dont les $6m$ points d'intersection avec la sextique sont confondus deux à deux sur la courbe sécante à l'exception de deux d'entre eux qui sont distincts, autrement dit qui sont $3m - 1$ fois tangentes à la sextique : leur nombre est fini pour chaque valeur de m; ce sont les *courbes de type rationnel*.

De même, les courbes unicursales d'ordre m qui sont $3m - 2$ fois tangentes à la sextique se répartissent pour chaque valeur de m en un nombre fini de familles à un paramètre; ce sont les *courbes de type elliptique*.

Le cylindre droit ayant pour base une courbe de type rationnel coupe la surface dite plan double suivant une courbe unicursale, symétrique par rapport au plan xOy. Le cylindre droit ayant pour base une courbe de type elliptique la coupe suivant une courbe de genre *un*, symétrique par rapport au plan xOy.

Des considérations géométriques analogues à celles exposées pour le cas de la cubique lacunaire s'appliquent à ces courbes. Et des théorèmes de théorie des fonctions, selon toute apparence, sont vrais aussi, entièrement semblables à ceux énoncés plus haut. Ils se rattachent au fait certain que les courbes de type elliptique ou rationnel sont les seules courbes algébriques uniformisables par des fonctions méromorphes admettant la sextique avec l'indice deux, et au fait très vraisemblable que, la sextique étant générique, le mot « algébriques » est ici superflu. A tout élément de contact en position générique correspond, de la manière indiquee plus haut, un certain nombre fini ω.

5. Nous avons supposé jusqu'ici que la sextique d'indice deux était *générique*, et alors l'analogie est complète avec la cubique lacunaire sans point double. Mais dès que l'on cesse de supposer la sextique générique, de grandes différences se manifestent avec le cas de la cubique.

Tout d'abord il peut exister des courbes unicursales d'ordre m qui soient $3m$ fois tangentes à la sextique (il n'y avait aucune propriété analogue pour la cubique). S'il existe une telle courbe, que l'on peut appeler courbe de type *ultra-rationnel*, l'intersection de la surface plan double avec le cylindre droit qui l'a pour base se décompose : elle consiste en deux courbes unicursales, symétriques l'une de l'autre par rapport au plan de la sextique. La condition pour qu'il y ait une telle courbe d'ordre m dépend de m. Il est donc bien probable que si l'on ne spécifie pas la valeur de m, cette condition devient de nature arithmétique, c'est-à-dire que toute sextique est infiniment voisine d'une sextique pour laquelle il existe une pareille courbe, et même un nombre donné aussi grand qu'on veut de pareilles courbes.

Si nous passons au point de vue de la théorie des fonctions, des différences plus importantes encore paraissent devoir se révéler. D'une part, l'existence de points multiples sur la sextique ne semble pas suffisante par elle-même pour entraîner un changement dans les théorèmes qui ont lieu pour la sextique générique, entièrement analogues à ceux énoncés pour la cubique lacunaire sans point double; par exemple, même si la sextique se décompose en six droites en position générique, tout subsiste. Et d'autre part, toute sextique est probablement infiniment voisine d'une sextique telle que le plan double correspondant contienne une courbe transcendante uniformisable par les fonctions méromorphes ; il suffira d'ailleurs qu'il en contienne une seule pour qu'il en contienne une infinité, et même pour qu'à un élément de contact quelconque corresponde un nombre ω infini ; en général, les conditions pour qu'il en soit ainsi s'obtiendront en exprimant l'existence d'un nombre suffisant de courbes de type ultra-rationnel ; la sextique composée de six droites tangentes à une même conique est dans ce dernier cas, car le plan double correspondant s'obtient en projetant d'un de ses points doubles coniques une surface de Kummer ; mais nous ne pouvons insister sur cette question, identique à celle de la représentation sur le plan double des surfaces hyperelliptiques de rang deux et de diviseur quelconque. Il résulte en tout cas de ce qui précède qu'au point de vue de la théorie des fonctions les conséquences de la particularisation de la sextique sont le contre-pied de ce qu'elles étaient pour la cubique lacunaire : tandis que pour cette dernière l'existence d'un point double suffisait à entraîner celle de courbes transcendantes uniformisables par des fonctions méromorphes, ici l'existence d'un nombre de points doubles aussi élevé qu'il peut l'être est insuffisante ; et inversement, tandis qu'une propriété de nature arithmétique de la cubique ne pouvait aucunement engendrer le même résultat, ici des propriétés de cette nature, en nombre convenable, peuvent suffire à l'entraîner.

On voit aussi que pour le problème de la sextique d'indice deux, que l'on se place au point de vue géométrique ou à celui de la théorie des fonctions, l' « arithmétisation » est encore beaucoup plus caractérisée que pour le problème de la cubique lacunaire.

6. Les plans doubles sextiques constituent la première des familles des *surfaces de genres un*, surfaces découvertes par M. Enriques et se répartissant en une infinité dénombrable de familles, chacune dépendant de 19 modules. Pour chacune de ces familles auront lieu des propositions entièrement analogues aux précédentes, au point de vue géométrique comme à celui de la théorie des fonctions.

Au sujet du problème de la cubique lacunaire, observons encore que la détermination des courbes unicursales coupant la cubique en p points seulement revient évidemment à celle des courbes unicursales situées sur une surface du troisième ordre d'équation $F_3(x, y, z) = 1$, où F_3 est un polynome homogène, coupant p fois seulement le plan de l'infini ; ce qui s'applique en particulier aux courbes de type rationnel et elliptique. De même, les systèmes de fonctions méromorphes admettant la cubique lacunaire correspondent aux systèmes de fonctions holomorphes liées par l'équation de la surface. D'ailleurs le problème concernant la surface cubique se pose aussi lorsque son équation n'a pas la forme spéciale ci-dessus, et les résultats semblent devoir être les mêmes.

Terminons en remarquant que le présent article contient bien moins de propositions complètement démontrées que de propositions seulement vraisemblables ; mais si une partie de ces dernières se trouvait inexacte, le sujet actuel n'en deviendrait en aucune manière moins intéressant.