

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (049 ; 1925 ; Grenoble). Conférences : compte-rendu de la 49e session, Grenoble 1925. 1926.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

Pour terminer je signalerai encore une équation fonctionnelle remarquable vérifiée par $\Phi_{p,q}$

$$s^{q-p} \Phi_{p,q}(\alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \beta_1, \dots, \beta_q \mid x) \\ = \sum_{r=0}^{s-1} x^r \Phi_{p,q} \left(\frac{\alpha_1 + r}{s}, \dots, \frac{\alpha_p + r}{s} \mid \frac{\beta_1 + r}{s}, \dots, \frac{\beta_q + r}{s} \mid x^s \right)$$

s désignant un entier positif arbitraire ; cette équation admet comme réciproque :

$$s^{p+1-q} \Phi_{p,q} \left(\frac{\alpha_1 + r}{s}, \dots, \frac{\alpha_p + r}{s} \mid \frac{\beta_1 + r}{s}, \dots, \frac{\beta_q + r}{s} \mid x \right) \\ = \sum_{j=1}^{j=s} \xi_j^{-r} \Phi_{p,q}(\alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \beta_1, \dots, \beta_q \mid \xi_j)$$

r étant un entier positif plus petit que s , ξ_1, \dots, ξ_s désignant les s racines de l'équation $\xi^s = x$.

André BLOCH

Saint-Maurice (Seine).

1° SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A TROIS VALEURS LACUNAIRES (1)

Le théorème de M. Landau est compris dans celui de M. Schottky sans que l'inverse ait lieu. Toutefois, si l'on suppose connue explicitement une formule donnant une borne supérieure $\frac{\varphi(a_0)}{|a_1|}$ du rayon R du cercle de Landau, de laquelle on conclut si $R = 1$:

$$|a_1| < \varphi(a_0),$$

on en déduit, par une substitution linéaire convenable effectuée sur x , une inéquation différentielle :

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| < \psi(y)$$

à laquelle satisfait en tout point du cercle-unité la fonction holomorphe $y(x)$ n'y prenant pas les valeurs 0 et 1. De là résulte par qua-

(1) Cf. pour cette note et la suivante : *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières, et la théorie de l'uniformisation (Annales de Toulouse, 1925).*

drature la limitation de $y(x)$ en fonction de $y(0)$ à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho \leq 1$, ρ étant une constante numérique dépendant uniquement de la forme de la fonction φ . Si φ est algébrique, on trouvera toujours $\rho < 1$; pour que l'on puisse prendre $\rho = 1$, il faut que φ contienne un logarithme.

On peut cependant, φ étant algébrique, perfectionner légèrement ce calcul de manière à obtenir le théorème de Schottky complet : il suffit d'introduire une intégrale abélienne convenable. Soit par exemple la formule d'Hurwitz :

$$R < \frac{16}{|a_1|} |a_2|^{\frac{1}{2}} |a_0 - 1|^{\frac{2}{3}}$$

Introduisons l'intégrale elliptique $\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}(y-1)^{\frac{2}{3}}}$. C'est une certaine

fonction de $y(x)$ et par suite de x . En faisant comme plus haut une substitution linéaire sur x , puis une quadrature, on reconnaît que la différence des valeurs de cette intégrale à l'origine et en un point de module $|x| = r < 1$, admet une borne supérieure dépendant uniquement de r . Or, en posant $y = u^2$, $y - 1 = v^3$, cette intégrale réalise la représentation conforme sur un réseau de parallélogrammes de la surface de Riemann de la courbe $U^2 - V^3 = 1$, dont le point $U = V = \infty$ n'est pas atteint par $u(x)$ et $v(x)$ à l'intérieur du cercle $|x| < 1$. Cette intégrale étant bornée pour $|x| \leq r$, il résulte d'un théorème connu de Hadamard-Borel que la distance du point représentatif aux points, en nombre infini, du réseau de parallélogrammes, correspondant à $U = V = \infty$ est bornée inférieurement, puisque ces points ne sont pas atteints; donc u et v sont bornés supérieurement, et par suite y .

2° SUR LA CROISSANCE D'UNE FONCTION DE FONCTION ENTIÈRE

Cette question, dont le développement de l'Analyse nécessitera probablement l'étude approfondie, sera seulement effleurée ici.

LEMME. — Soit $y(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|x| < R$, et nulle à l'origine. Soit $\lambda(R, y)$ le plus grand nombre positif tel que dans le cercle $|x| < R$ la fonction $y(x)$ devienne égale à tous les nombres de module λ . Alors le maximum $M(r, y)$ de $y(x)$ dans tout cercle de rayon $r < R$ satisfait à l'inégalité :

$$M(r, y) < \lambda(R, y) e^{\frac{K R}{R-r}}$$

K étant une certaine constante numérique.

Il suffit pour établir ce lemme d'observer que y ne prend pas dans le cercle de rayon R une certaine valeur de module $\frac{3\lambda}{2}$ et une certaine valeur de module 2λ et d'appliquer la formule précise donnée par M. Landau dans la théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires.

THÉORÈME. — Soit $y = f(x)$ une fonction holomorphe pour $|x| < R$, égale à y_0 à l'origine; soit $F(y)$ une fonction entière de y ; on considère la fonction de fonction $Y = F[f(x)]$. On a pour tout cercle de rayon $r < R$:

$$M(R, Y) > |F'(y_0)| [M(r, y) - |y_0|] e^{-K \frac{R}{R-r}}.$$

Il suffit d'appliquer le lemme précédent à la fonction $\bar{y} = y - y_0$, et une inégalité classique de Cauchy à la fonction $F(y)$.

Il résulte de ce théorème que (y étant une fonction entière), $\log M(r, Y)$ est d'un ordre de grandeur au moins égal à celui de $\log M(r, y)$ quand r croît indéfiniment.

R.-H. GERMAÏ

Assistant à l'Université de Liège.

APPLICATION DE LA METHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES A LA DETERMINATION DES INTEGRALES PERIODIQUES D'UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES, INFINIMENT VOISINES D'UNE INTEGRALE PERIODIQUE CONNUE.

Dans une Note précédente (1), nous avons établi, moyennant des hypothèses convenables, l'existence d'intégrales holomorphes, périodiques, de périodes $\omega_1, \dots, \omega_n$ par rapport à x_1, \dots, x_n de l'équation

$$p_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad (1)$$

infiniment voisines, pour $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ suffisamment petits, de l'intégrale holomorphe, périodique, de mêmes périodes, de l'équation

$$p_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n, 0, \dots, 0), \quad (2)$$

intégrale se réduisant d'ailleurs à $\chi(x_2, \dots, x_n)$ pour $x_1 = x_1^0$.

(1) Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 180, 1925, p. 2.001.

Ces intégrales périodiques et leurs dérivées partielles premières se calculent comme il suit par approximations successives. Les solutions du système différentiel des caractéristiques de Cauchy de l'équation (1) se réduisant à $x_j^0 + \varepsilon_j, z^0 + \xi, p_j^0 + \pi_j$ pour $x_1 = x_1^0$ sont les limites, pour $\mu \rightarrow \infty$, des suites uniformément convergentes dont les termes se définissent de proche en proche par les formules récurrentes bien connues

$$x_{j,\mu+1}(x_1, x_1^0, x_2^0 + \varepsilon_2, \dots, p_n^0 + \pi_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = x_j^0 + \varepsilon_j - \int_{x_1^0}^{x_1} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial p_j} \right]_{\substack{x_s = x_{s\mu} \\ z = z_\mu \\ p_s = p_{s\mu}}} \right\} dx_1, \quad (3)$$

.....
(j, s = 2, ..., n)

moyennant

$$x_{j,0} = x_j^0 + \varepsilon_j, z_0 = z^0 + \xi, p_{j,0} = p_j^0 + \pi_j.$$

Posons :

$$\begin{cases} U_{j\mu} = x_{j\mu}(x_1^0 + \omega_1, x_1^0, x_2^0 + \varepsilon_2, \dots, p_n^0 + \pi_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s) - x_j^0 - \varepsilon_j, \\ V_\mu = z_\mu(x_1^0 + \omega_1, x_1^0, \dots, \lambda_s) - z^0 - \xi, \\ W_{j\mu} = p_{j\mu}(x_1^0 + \omega_1, x_1^0, \dots, \lambda_s) - p_j^0 - \pi_j. \end{cases} \quad (4)$$

Les approximations successives des valeurs $\varepsilon_j, \xi, \pi_j$ qui correspondent à la solution périodique, de période ω_1 par rapport à x_1 , du système différentiel des caractéristiques de l'équation (1) se définissent de proche en proche par les formules récurrentes bien connues

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j,\mu+1}(x_1^0, \omega_1, x_2^0, \dots, p_n^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= \varepsilon_{j\mu} - \sum_{k=2}^{k=n} \left\{ \left[\Delta_{k-1}^{(j-1)} \right]_{\mu+1}^o \left[U_{k,\mu+1} \right]_{\substack{\varepsilon_s = \varepsilon_{s\mu} \\ \xi = \xi_\mu \\ \pi_s = \pi_{s\mu}}} \right\} \\ &- \left[\Delta_{(j-1)}^{(j-1)} \right]_{\mu+1}^o \left[V_{\mu+1} \right]_{\substack{\varepsilon_s = \varepsilon_{s\mu} \\ \xi = \xi_\mu \\ \pi_s = \pi_{s\mu}}} \\ &- \sum_{k=2}^{k=n} \left\{ \left[\Delta_{n+k-1}^{(j-1)} \right]_{\mu+1}^o \left[W_{k,\mu+1} \right]_{\substack{\varepsilon_s = \varepsilon_{s\mu} \\ \xi = \xi_\mu \\ \pi_s = \pi_{s\mu}}} \right\} \quad (j, s = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (5)$$

moyennant $\varepsilon_{j0} = \varepsilon_0 = \pi_{j0} = 0$. Écrivons encore

$$\mathcal{E}_{j\mu}(t_1, \dots, t_{n-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = t_{j\mu} \left(x_1^0, \omega_1, t_1, \dots, t_{n-1}, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \lambda}{\partial t_{n-1}}, \lambda_1, \dots, \lambda_s \right), \quad (6)$$

$$\mathcal{K}_\mu = \xi_\mu(x_1^0, \omega_1, t_1, \dots, \lambda_s), \quad \mathcal{P}_{j\mu} = \pi_{j\mu}(x_1^0, \omega_1, t_1, \dots, \lambda_s);$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{j\mu}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s, t_1, \dots, t_{n-1}) &= t_{j-1} + \mathcal{E}_{j\mu}(t_1, \dots, \lambda_s) \\ &- x_{j\mu}(x_1^0, x_1, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s). \end{aligned} \quad (7)$$