Pour terminer je signalerai encore une équation fonctionnelle remarquable vérifiée par $\Phi_{p,q}$

$$s^{q-p}\Phi_{p.q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q \mid x)$$
$$= \sum_{r=o}^{r=s-1} x^r \Phi_{p.q}\left(\frac{\alpha_1 + r}{s}, \ldots, \frac{\alpha_p + r}{s} \middle| \frac{\beta_1 + r}{s}, \ldots, \frac{\beta_q + r}{s} \middle| x^s\right)$$

s désignant un entier positif arbitraire ; cette équation admet comme réciproque :

$$s^{p+1-q}\Phi_{p.q}\left(\frac{\alpha_1 + r}{s}, \ldots, \frac{\alpha_p + r}{s} \middle| \frac{\beta_1 + r}{s}, \ldots, \frac{\beta_q + r}{s} \middle| x\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{j=s} \xi_j^{-r} \Phi_{p.q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \mid \beta_1, \ldots, \beta_q \mid \xi_j)$$

r étant un entier positif plus petit que s, $\xi_1, \ldots, \xi_s$ désignant les s racines de l'équation $\xi^s = x$.

André BLOCH

Saint-Maurice (Seine).

1° SUR UN POINT DE LA THEORIE DES FONCTIONS A TROIS VALEURS LACUNAIRES (1)

Le théorème de M. Landau est compris dans celui de M. Schottky sans que l'inverse ait lieu. Toutefois, si l'on suppose connue explicitement une formule donnant une borne supérieure $\frac{\varphi(a_0)}{|a_1|}$ du rayon R du cercle de Landau, de laquelle on conclut si $R = 1$:

$$|a_1| < \varphi(a_0),$$

on en déduit, par une substitution linéaire convenable effectuée sur x, une inéquation différentielle :

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < \psi(y)$$

à laquelle satisfait en tout point du cercle-unité la fonction holomorphe $y(x)$ n'y prenant pas les valeurs 0 et 1. De là résulte par qua-

(1) Cf. pour cette note et la suivante : *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières, et la théorie de l'uniformisation* (*Annales de Toulouse*, 1925).

drature la limitation de $y(x)$ en fonction de $y(0)$ à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho \leq 1$, ρ étant une constante numérique dépendant uniquement de la forme de la fonction φ. Si φ est algébrique, on trouvera toujours $\rho < 1$; pour que l'on puisse prendre $\rho = 1$, il faut que φ contienne un logarithme.

On peut cependant, φ étant algébrique, perfectionner légèrement ce calcul de manière à obtenir le théorème de Schottky complet : il suffit d'introduire une intégrale abélienne convenable. Soit par exemple la formule d'Hurwitz :

$$R < \frac{16}{|a_1|} |a_0|^{\frac{1}{2}} |a_0 - 1|^{\frac{2}{3}}$$

Introduisons l'intégrale elliptique $\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}(y-1)^{\frac{2}{3}}}$. C'est une certaine fonction de $y(x)$ et par suite de x. En faisant comme plus haut une substitution linéaire sur x, puis une quadrature, on reconnaît que la différence des valeurs de cette intégrale à l'origine et en un point de module $|x| = r < 1$, admet une borne supérieure dépendant uniquement de r. Or, en posant $y = u^2$, $y - 1 = v^3$, cette intégrale réalise la représentation conforme sur un réseau de parallélogrammes de la surface de Riemann de la courbe $U^2 - V^3 = 1$, dont le point $U = V = \infty$ n'est pas atteint par $u(x)$ et $v(x)$ à l'intérieur du cercle $|x| < 1$. Cette intégrale étant bornée pour $|x| \leq r$, il résulte d'un théorème connu de Hadamard-Borel que la distance du point représentatif aux points, en nombre infini, du réseau de parallélogrammes, correspondant à $U = V = \infty$ est bornée inférieurement, puisque ces points ne sont pas atteints ; donc u et v sont bornés supérieurement, et par suite y.

2° SUR LA CROISSANCE D'UNE FONCTION DE FONCTION ENTIERE

Cette question, dont le développement de l'Analyse nécessitera probablement l'étude approfondie, sera seulement effleurée ici.

LEMME. — *Soit $y(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|x| < R$, et nulle à l'origine. Soit $\lambda(R, y)$ le plus grand nombre positif tel que dans le cercle $|x| < R$ la fonction $y(x)$ devienne égale à tous les nombres de module λ. Alors le maximum $M(r, y)$ de $y(x)$ dans tout cercle de rayon $r < R$ satisfait à l'inégalité :*

$$M(r, y) < \lambda(R, y)\, e^{K\frac{R}{R-r}}$$

K étant une certaine constante numérique.

Il suffit pour établir ce lemme d'observer que y ne prend pas dans le cercle de rayon R une certaine valeur de module $\frac{3\lambda}{2}$ et une certaine valeur de module 2λ et d'appliquer la formule précise donnée par M. Landau dans la théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires.

Théorème. — *Soit* $y = f(x)$ *une fonction holomorphe pour* $|x| < R$, *égale à* y_0 *à l'origine ; soit* $F(y)$ *une fonction entière de* y ; *on considère la fonction de fonction* $Y = F[f(x)]$. *On a pour tout cercle de rayon* $r < R$:

$$M(R, Y) > |F'(y_0)| [M(r, y) - |y_0|] e^{-K\frac{R}{R-r}}.$$

Il suffit d'appliquer le lemme précédent à la fonction $\bar{y} = y - y_0$, et une inégalité classique de Cauchy à la fonction $F(y)$.

Il résulte de ce théorème que (y étant une fonction entière), $\log M(r, Y)$ est d'un ordre de grandeur au moins égal à celui de $\log M(r, y)$ quand r croît indéfiniment.

R.-H. GERMAY

Assistant à l'Université de Liége.

APPLICATION DE LA METHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES A LA DETERMINATION DES INTEGRALES PERIODIQUES D'UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES, INFINIMENT VOISINES D'UNE INTEGRALE PERIODIQUE CONNUE.

Dans une Note précédente (1), nous avons établi, moyennant des hypothèses convenables, l'existence d'intégrales holomorphes, périodiques, de périodes $\omega_1, \ldots, \omega_n$ par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ de l'équation

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_s), \quad (1)$$

infiniment voisines, pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ suffisamment petits, de l'intégrale holomorphe, périodique, de mêmes périodes, de l'équation

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, r, p_2, \ldots, p_n, 0, \ldots, 0), \quad (2)$$

intégrale se réduisant d'ailleurs à $\chi(x_2, \ldots, x_n)$ pour $x_1 = x_1'^0$.

(1) Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 180, 1925, p. 2.001.

Ces intégrales périodiques et leurs dérivées partielles premières se calculent comme il suit par approximations successives. Les solutions du système différentiel des caractéristiques de Cauchy de l'équation (1) se réduisant à $x_j^0 + \varepsilon_j$, $z^0 + \xi$, $p_j^0 + \pi_j$ pour $x_1 = x'^0_1$ sont les limites, pour $\mu \to \infty$, des suites uniformément convergentes dont les termes se définissent de proche en proche par les formules récurrentes bien connues

$$\begin{aligned} & x_{j,\mu+1}(x_1, x'^0_1, x_2^0 + \varepsilon_2, \ldots, p_n^0 + \pi_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_s) \\ & \qquad = x_j^0 + \varepsilon_j - \int_{x'_1{}^0}^{x_1} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial p_j} \right]_{\substack{x_s = x_{s\mu} \\ z = z_\mu \\ p_s = p_{\mu s}}} \right\} dx_1, \qquad (3) \\ & \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \qquad (j,\ s = 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

moyennant

$$x_{j,0} = x_j^0 + \varepsilon_j,\ z_0 = z^0 + \xi,\ p_{j,0} = p_j^0 + \pi_j.$$

Posons :

$$\left.\begin{aligned} & U_{j\mu} = x_{j\mu}(x'^0_1 + \omega_1, x'^0_1, x_2^0 + \varepsilon_2, \ldots, p^0_n + \pi_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_s) - x_j^0 - \varepsilon_j, \\ & V_\mu = z_\mu(x'^0_1 + \omega_1, x'^0_1, \ldots, \lambda_s) - z^0 - \xi,\quad W_{j\mu} = p_{j\mu}(x'^0_1 + \omega_1, x'^0_1 \ldots, \lambda_s) - p_j^0 - \pi_j. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Les approximations successives des valeurs $\varepsilon_j, \xi, \pi_j$ qui correspondent à la solution périodique, de période ω_1 par rapport à x_1, du système différentiel des caractéristiques de l'équation (1) se définissent de proche en proche par les formules récurrentes bien connues

$$\left.\begin{aligned} & \varepsilon_{j,\mu+1}(x'^0_1, \omega_1, x_2^0, \ldots, p_n^0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s) \\ & \qquad = \varepsilon_{j\mu} - \sum_{k=2}^{k=n} \left\{ \left[\Delta^{(j-1)}_{k-1}\right]^o_{\mu+1} \left[U_{k,\mu+1} \right]_{\substack{\varepsilon_s = \varepsilon_{s\mu} \\ \xi = \xi_\mu \\ \pi_s = \pi_{s\mu}}} \right\} \\ & - \left[\Delta^{n}_{(j-1)}\right]^o_{\mu+1} \left[V_{\mu+1} \right]_{\substack{\varepsilon_s = \varepsilon_{s\mu} \\ \xi = \xi_\mu \\ \pi_s = \pi_{s\mu}}} \\ & \qquad - \sum_{k=2}^{k=n} \left\{ \left[\Delta^{(j-1)}_{n+k-1}\right]^o_{\mu+1} \left[W_{k,\mu+1} \right]_{\substack{\varepsilon_s = \varepsilon_{s\mu} \\ \xi = \xi_\mu \\ \pi_s = \pi_{s\mu}}} \right\} (j,\ s = 2, \ldots n), \\ & \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

moyennant $\varepsilon_{j0} = \varepsilon_0 = \pi_{j0} = 0$. Écrivons encore

$$\left.\begin{aligned} & \mathcal{E}_{j\mu}(t_1, \ldots, t_{n-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_s) \\ & \qquad = t_{j\mu}\left(x'^0_1, \omega_1; t_1, \ldots, t_{n-1}, \chi, \frac{\partial \chi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \chi}{\partial t_{n-1}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_s\right), \\ & \mathcal{K}_\mu = \xi_\mu(x'^0_1, \omega_1, t_1, \ldots, \lambda_s), \qquad \mathfrak{L}_{j\mu} = \pi_{j\mu}(x'^0_1, \omega_1, t_1, \ldots, \lambda_s); \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} & \mathfrak{T}_{j\mu}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, t_1, \ldots, t_{n-1}) \\ & \qquad\qquad = t_{j-1} + \mathcal{E}_{j\mu}(t_1, \ldots, \lambda_s) \\ & \qquad - x_{j\mu}(x'^0_1, x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n, \lambda_1, \ldots \lambda_s). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$