d'où

$$X^2 + X'^2 - Y^2 - Y'^2 \equiv 0, \qquad XY + X'Y' \equiv 0. \qquad (\alpha)$$

La deuxième congruence (α) se résout par les formules

$$X \equiv xy, \qquad Y \equiv zw, \qquad X' \equiv xz, \qquad Y' \equiv -yw;$$

substituant ces valeurs dans la première (α), il vient

$$(y^2 + z^2)(x^2 - w^2) \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad w \equiv \pm x$$

et par suite

$$\xi \equiv y + zi, \qquad \eta \equiv z - yi;$$

Ainsi on a :

$$(y + zi)^2 + (z - yi)^2 = 0 \qquad (y \text{ et } z \text{ réels quelconques}).$$

3° Ce résultat suggère l'étude de l'*hyperbole*

$$(x - yi)(y + xi) \equiv (2xy) + (x^2 - y^2)i$$

on est ramené au problème du n° 3.

4° Soit la *droite* nulle $(a + bi)(x + yi) + (a' + b'i)(y - xi) \equiv 0$. Appelons $\xi + \eta i$ le développement du premier membre et posons $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$; il viendra :

$$\xi x + \eta y \equiv (a + bi)(x^2 + y^2) \equiv 0,$$

ce qui donne les deux solutions

$$x = f, \qquad y = g, \qquad p = 4 + 1 \quad \text{et} \quad b' = -a, \qquad a' = b.$$

A. AUBRY

Dijon.

2° THEORIE ET USAGE DES INEGALITES

Jacques TOUCHARD
Paris.

SUR L'INTEGRALE

$$I=\int_0^1 f(-r)\ r^{-a}\ (1-r)^{-b}\ d\ r$$

MARGOSSIAN

SIMPLE OBSERVATION SUR LA DEFINITION DU CALCUL DES PROBABILITES

André BLOCH

SUR LES FONCTIONS A POINT ESSENTIEL ISOLE

I. Le théorème suivant paraît de nature à ramener l'étude des fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé les plus générales à celle des fonctions méromorphes.

Théorème. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'extérieur d'un contour simple C du plan des z, y compris le contour lui-même, et admettant une singularité essentielle à l'infini. On peut trouver une nouvelle variable ζ liéee à z de telle sorte qu'à l'extérieur de C corresponde biunivoquement la partie du plan des ζ extérieure à un certain contour simple Γ,* *que le rapport de* ζ *à* z *soit égal à* 1 *pour* z *infini, et que l'on ait pour* z *extérieur à* C :

$$f(z) = \varphi(\zeta),$$

la fonction $\varphi(\zeta)$ *étant méromorphe dans tout le plan des* ζ.

Cette proposition est une conséquence immédiate de deux lemmes très simples.

Lemme I. — *Soit sur la sphère complexe une ligne fermée de Jordan, se recoupant elle-même en un nombre fini de points. On peut construire une surface de Riemann de genre zéro telle que la ligne (un déterminé de ses points étant supposé placé sur un feuillet convenable de la surface) soit encore fermée sur la surface, mais ne s'y recoupe plus.*

Lemme II. — *Soient sur deux sphères deux aires simplement connexes* A *et* B, *limitées respectivement par deux couronnes* C *et* D *entre lesquelles existe une correspondance conforme faisant correspondre le bord intérieur de C au bord extérieur de* D, *et inversement. On peut alors, sur une troisième sphère, opérer le raccordement analytique des aires* A *et* B *par l'intermédiaire des couronnes* C *et* D, *c'est-à-dire, recouvrir entièrement cette sphère de deux aires* A_1 *et* B_1, *en correspondance conforme respectivement avec* A *et* B, *se recouvrant elles-mêmes sur une couronne qui corresponde conformément à* C *et* D *de manière que la correspondance ainsi réalisée entre* C *et* D *soit précisément celle supposée au début.*

Ce dernier lemme s'établit par la méthode alternée de Schwarz (1).

On peut se demander, si dans le cas particulier où $f(z)$ est dénuée de pôles à l'extérieur de C, il n'est pas possible de prendre toujours pour $\varphi(z)$ une fonction *entière*. Des exemples simples prouvent qu'il n'en est rien.

Cela n'est même pas possible si l'on se donne la faculté de remplacer le contour C par un contour simple quelconque l'enveloppant, c'est-à-dire, si l'on néglige, la région du plan des z intérieure à ce dernier contour.

II. La suite de cette communication n'utilise pas le théorème du paragraphe précédent, et est principalement consacrée au théorème de M. Picard sur le point essentiel isolé. Nous chercherons à ramener sa démonstration à celle du même théorème pour le cas particulier des fonctions méromorphes. Faisons d'abord deux remarques simples.

Soient sur une sphère un certain nombre de points et un circuit fermé ne passant que 0 *ou* 1 *fois entre deux quelconques d'entre eux. Les points se divisent alors en deux groupes (au plus) et le circuit peut se ramener par déformation continue et sans rencontre d'aucun des points à un contour simple séparant les deux groupes.*

Soit sur une sphère un circuit fermé passant m fois entre deux points ; on peut le considérer aussi comme un circuit fermé sur la surface de Riemann à m feuillets ramifiée en ces deux points, correspondant à une m^e

(1) Voir E. PICARD, Traité d'Analyse, tome II, chap. XVI.

puissance. Alors, sur la surface, le circuit se recoupe moins de fois que sur la sphère.

De ces deux remarques, nous allons déduire la proposition suivante·

(α) *Soient sur la sphère un nombre fini de points* A, B, C,... *et un circuit fermé (ne passant pas par eux). Il existe alors une surface de Riemann de genre zéro, n'ayant pas de points de ramification en dehors de* A, B, C, *et telle que le circuit donné,* 1° *y soit fermé (un déterminé de ses points étant supposé placé sur un feuillet convenable de la surface).* 2° *y soit réductible, sans rencontre d'aucun des points de la surface coïncidant sur la sphère avec* A, B, C,..., *à un circuit sans points multiples.*

En effet, dans le cas particulier où le circuit ne passe que 0 ou 1 fois entre deux quelconques des points, on peut, d'après la première remarque, prendre pour la surface la sphère elle-même. Supposons que le circuit passe m fois entre A et B, par exemple ; construisons la surface de Riemann, correspondant à une m^e puissance, ramifiée en A et B ; le circuit, considéré comme placé sur cette surface, a d'après la seconde remarque moins de recoupements qu'il n'en avait sur la sphère primitive. Nous pouvons maintenant opérer sur cette surface de genre zéro comme nous avons opéré sur la sphére, le nombre des points à considérer : A, B, C_1... C_m... a simplement augmenté, mais ce qui précède s'applique . L'on continuera de la sorte ; à chaque opération, le nombre des recoupements diminuera ; et comme il est fini, les opérations auront nécessairement une fin ; à ce moment, la surface cherchée sera obtenue ; α est donc démontrée.

De la proposition (α) résulte enfin la proposition, qui nous servira de lemme, et dont voici l'énoncé.

Lemme. — *Soient sur la sphère trois points, a, b, c et un circuit fermé n'y passant pas. On peut alors trouver une surface de Riemann de genre zéro satisfaisant aux conditions suivantes :* 1° *elle n'a pas de points de ramification en dehors de a, b, c ;* 2° *le circuit donné peut être regardé comme fermé sur elle ;* 3° *il existe sur la surface trois points α, β, γ, ne tombant pas sur la sphère, ailleurs qu'en* a, b, ou c, *tels que le circuit, fermé sur la surface, y soit réductible à un point sans rencontre de, α, β, γ.*

Appliquons en effet la proposition (α) à la sphère ponctuée en a, b, c, et au circuit donné. Nous avons une surface de Riemann sur laquelle nous pouvons, sans rencontre de a, b, c, transformer le circuit en un circuit sans points multiples sur la surface. D'ailleurs, aux points a, b, c de la sphère, se trouvent sur la surface un certain nombre de points a_i, b_j, c_k, que le circuit sans points multiples sépare en deux groupes. Si l'un de ces groupes comprend trois points au moins, on peut les prendre pour α, β, γ, et la surface de Riemann répond à la question. Si chaque groupe comprend deux points au plus, prenons pour α et β les deux points d'un des groupes (l'autre groupe en contient un ou deux) ; nous pouvons, par une substitution $\frac{z-p}{z-q} = Z^2$, doubler la surface de Riemann, la nouvelle surface se composant de deux parties identiques à la précédente, (homologues entre elles) qui se ramifient en α et β. Le circuit sans points multiples sépare cette nouvelle surface en deux régions ; sur celle qui contient α et β, prenons pour γ le point homologue du point ou d'un deux points de l'autre groupe, la nouvelle surface répond à la question, car si l'on transforme le circuit sans points multiples en le circuit initial par une opération exactement inverse de celle effectuée tout à l'heure, on ne rencontre pas α, β, γ. Le lemme est donc établi.

Considérons maintenant la fraction rationnelle correspondant à la surface de Riemann du lemme ; cela ne suppose pas connu le théorème d'existence de Riemann, même pour le genre zéro, car à chacune des surfaces que nous avons considérées, il est aisé, de proche en proche, d'associer une fraction rationnelle. Nous voyons alors que, grâce au lemme, la démonstration du théorème de M. Picard sur le point essentiel isolé se ramène à celle du théorème dans le cas particulier où le circuit correspondant à la circulation autour du point est réductible à un point sans rencontre des trois valeurs supposées exceptionnelles; à établir, autrement dit, que dans ce cas la singularité essentielle n'existe pas. Or il suffit d'examiner les différentes démonstrations connues du théorème sur les fonctions méromorphes dans tout le plan pour reconnaître qu'elles s'appliquent, avec des modifications insignifiantes, à ce cas particulier. Il en est ainsi, par exemple, de la démonstration au moyen de la fonction modulaire.

III. La démonstration directe donnée par M. Borel dans les Comptes Rendus de 1896 (*Le,ons sur les fonclions entières*, note 1) et dans son mémoire *Sur les zéros des fonctions entières* (Acta Mathematica, tome XX) s'applique également de la manière la plus simple au cas particulier où le circuit est supposé réductible à un point sans rencontre des trois valeurs exceptionnelles ; si bien que si le lemme purement algébrique que nous avons établi avait été connu dès le milieu de l'année 1896, on en aurait déduit immédiatement une démonstration directe du théorème général de M. Picard.

Mais à dire vrai, il n'est même pas besoin de ce lemme. M. Borel, dans le mémoire précité (p. 385-88) établit directement l'impossibilité d'une relation de la forme : $K(x)\,e^{H(x)} + K_1(x)\,e^{H_1(x)} + K_2(x) = 0$, où les K sont des polynômes et les H des fonctions entières ; il résout à cet effet par rapport à e^{H} et e^{H_1} le système formé par cette équation et celle obtenue en la dérivant, et constate que les égalités trouvées sont incompatibles avec ses théorèmes généraux sur la croissance. Or le théorème de M. Picard sur le point essentiel isolé revient à l'impossibilité d'une relation : $x^m e^{H(x)} + x^p e^{H_1(x)} = 1$, où H et H_1 sont non plus des fonctions entières, mais des fonctions holomorphes (sauf à l'infini) à l'extérieur d'un certain cercle. Il est aisé de reconnaître que, moyennant des compléments faciles, la démonstration par dérivation qui vient d'être rappelée s'applique aussi à l'impossibilité de cette relation.

Or dans son mémoire (voir la note au bas de la p. 388), M. Borel avait systématiquement laissé de côté le cas du point essentiel isolé. On sait d'autre part que huit ans plus tard (1), M. Schottky devait donner une démonstration directe du théorème général de M. Picard. Il est digne de remarque qu'une telle démonstration se soit trouvée implicitement contenue, dès 1896, dans les travaux mêmes de M. Borel.

Indiquons sommairement, pour terminer, comment les principes du paragraphe II peuvent s'appliquer à la démonstration du théorème de M. Picard (Acta Mathematica, tome XI), sur l'impossibilité d'uniformiser les courbes de genre supérieur à un par des fonctions ayant un point essentiel isolé commun.

On a toujours à considérer un circuit fermé, mais il est tracé maintenant non plus sur la sphère triponctuée, mais sur une surface de Riemann de genre supérieur à un. On va utiliser alors les courbes dont la courbe donnée est une transformée simplement rationnelle, mais la correspondance étant biunivoque dans le voisinage de chaque point (elles répondent aux sous-groupes d'indice fini du groupe fuchsien d'uniformisation). Supposons que le circuit donné tourne m fois le long d'un cycle simple de la surface de Riemann donnée ; sur la surface de Riemann correspondant à une certaine de ces courbes, il ne tournera plus qu'une fois le long du cycle correspondant. En opérant ainsi de proche en proche, on obtiendra une surface sur laquelle le circuit ne tournera plus que 0 ou 1 fois le long d'un cycle simple quelconque ; il sera alors lui-même identique à un tel cycle (sauf le cas où il était équivalent à zéro sur la surface initiale). On pourra donc trouver (d'une infinité de manières) une uniformisation kleinéenne de troisième famille de la surface de Riemann définitive, telle que la fonction uniformisante ne change pas par circulation le long du circuit. La fonction uniformisante ne prenant aucune des valeurs qui sont points d'accumulation du groupe kleinéen, on est ramené au théorème de M. Picard étudié au paragraphe II (et même au cas particulièrement simple où le circuit est réductible à un point sans rencontre des trois valeurs, car on peut prendre celles-ci dans un seul des deux groupes séparés par le circuit).

On voit que notre démonstration utilise non pas les fonctions fuchsiennes, mais les fonctions kleinéennes de troisième famille, et la fonction modulaire ; cela paraît plutôt un avantage si l'on observe que ces dernières sont susceptibles d'une détermination analytique régulière, tandis qu'il n'en est pas de même des fonctions fuchsiennes.

(1) *Ueber den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen* (*Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften*, octobre 1904).