Si on prend les deux plans rectangulaires pour plans des Y Z et des Z X, et si on considère des droites passant par l'origine les équations de celles-ci peuvent s'écrire

$$(D) \qquad x = a z \qquad y = b z$$

$$(D') \qquad x = -\frac{1}{a} z \qquad y = -\frac{1}{b} z$$

Le cosinus de l'angle aigu des deux droites est

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1\right)}}$$

L'expression sous radical peut s'écrire

$$3 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2}\right)$$

Or, chacune des parenthèses est supérieure ou égale à 2 ; l'égalité étant obtenue dans le cas où

$$a^2 = b^2 = 1$$

L'expression sous radical est donc toujours supérieure ou égale à 9 et le cosinus de l'angle aigu de D et D' est inférieur ou égal à $\frac{1}{3}$. Comme cos $70^0 = 0{,}3420$ on voit que l'angle aigu de D et D' reste compris entre 70^0 et 90^0.

On peut remarquer que D et D' ont pour projections sur le plan $Z = o$ les droites d'équations

$$b x - a y = o \qquad a x - b y = o$$

autrement dit des droites symétriques par rapport aux plans bissecteurs des deux plans sur lesquels l'angle de D et D' se projette suivant des angles droits ; et le minimum de l'angle aigu de D et D' a lieu lorsque les droites sont dans un des plans bissecteurs en question.

Oct. DELHEZ

à Neuville-Andrimont

INVERSES DES PRODUITS

André BLOCH

SUR L'UNIFORMISABILITE DES SURFACES ALGEBRIQUES ET SUR UN COMPLEMENT A LEUR CLASSIFICATION

1. Dans sa conférence du Congrès des Mathématiciens à Rome en 1908, sur l'*Avenir des Mathématiques*, Henri Poincaré développa sur la théorie des fonctions analytiques les considérations les plus élevées ; il exprima alors l'espoir *qu'allaient s'éclaircir les derniers mystères se rapportant à l'étude des surfaces* (algébriques), *qui paraissaient si tenaces* et, au sujet du problème de leur uniformisation, supposa *qu'un avenir prochain en donnerait peut-être la solution.*

Ce double souhait n'a pas été exaucé jusqu'ici. Mais peut-être la théorie naissante de l'uniformisabilité des surfaces est-elle susceptible d'apporter quelque lumière dans ces questions difficiles.

2. Appelons, pour abréger, *variété à deux dimensions* une surface algébrique, sur laquelle sont donnés éventuellement un nombre fini de courbes algébriques et de points, chaque courbe et chaque point étant affecté d'un entier supérieur à 1, fini ou infini appelé son *indice.* Un système de trois fonctions X, Y, Z d'une ou de deux variables est dit *inclus* dans la variété lorsque X, Y, Z satisfont à l'équation de la surface et que leur système est stationnaire sur chaque courbe et en chaque point donné, l'ordre de multiplicité correspondant étant égal à l'indice (ou multiple de l'indice).

On peut répartir les variétés à deux dimensions en quatre catégories, définies comme il suit :

α) Une variété contient ∞^3 éléments formés d'un point et d'une tangente en ce point. Soit l'un d'entre eux ; considérons trois fonctions d'une variable $X = a_0 + a_1 \ t + ... \ ; \ y = b_0 + b_1 t + \ ; Z = c_0 + c_1 \ t + ...$, incluses dans la variété et telles que la courbe correspon dante soit tangente à l'élément pour $t = o$; il peut alors arriver que le rayon du cercle de méromorphie commun aux trois fonctions ait une borne supérieure ne dépendant que des six coefficients $a_0 ... \ c_1$ (et de la variété). Si la chose a lieu pour tous les éléments, sauf peut-être ceux d'un nombre fini de courbes et de systèmes ∞^1 de courbes. la variété est dite de *quatrième catégorie.*

β) Soit une variété n'appartenant pas à la quatrième catégorie, mais telle que, X, Y, Z étant trois fonctions de deux variables u et v, méromorphes dans l'hypersphère unité $u \ \bar{u}' + v \ \bar{v}' - 1 = 0$, et incluses dans la variété le jacobien à l'origine de deux d'entre elles admette une borne supérieure dépendant uniquement du point de la variété, supposé générique, qui correspond à l'origine (et de la variété). La variété est dite alors de *troisième catégorie.*

γ) Soit une variété n'appartenant ni à la quatrième, ni à la troisième catégorie, mais jouissant de la propriété suivante : X, Y, Z étant trois fonctions de deux variables u et v, incluses dans la variété, admettant deux à deux à l'origine des jacobiens non nuls, et telles que le point correspondant à l'origine soit générique, le rayon R de l'hypersphère $u\,\bar{u}' + v\,\bar{v}' - R^2 = 0$ où les trois fonctions sont simultanément méromorphes admet une borne supérieure ne dépendant que des valeurs à l'origine de X, Y, Z et de leurs dérivées. La variété est dite alors de *deuxième catégorie.*

δ) Enfin une variété n'appartenant à aucune des catégories précédentes est uniformisable par les fonctions méromorphes, et réciproquement ; elle appartient à la *première catégorie.*

L'hypothèse de la généricité du point initial dans la définition des deuxième et troisième catégories est probablement superflue.

3. S'il n'y a pas de points imposés sur la surface, mais seulement éventuellement des courbes, ces définitions sont équivalentes aux suivantes. La variété est de première catégorie lorsqu'elle contient une courbe transcendante, lieu d'un point à coördonnées méromorphes dans tous le plan complexe, Elle est de deuxièmé catégorie lorsque sans être de première, elle contient une infinité discontinue de systèmes ∞^1 de courbes de type elliptique. Elle esf de troisième catégorie lorsque, sans être de première ni de seconde, elle contient une infinité discontinue de courbes isolées de type elliptique. Elle est de quatrième eatégorie dans les autres cas ; ou, si l'on veut, lorsque, sans qu'elle soit de première catégorie, les courbes de type elliptiqne ou rationnel qu'elle peut posséder se répartissent en un nombre fini de courbes isolées et de systèmes ∞^1.

Il n'y a probablement pas d'autres surfaces de première catégorie que les surfaces hyperelliptiques et leurs dégénérescences. Parmi les variétés de deuxième catégorie, on peut citer : le plan projectif affecté de trois droites et d'un point lacunaires (indice infini) ; le plan projectif affecté d'une cubique elliptique lacunaire ; la surface quartique générale (sans courbes ni points imposés) ; le plan projectif affecté de six droites d'indice deux, en position générale. La surface quintique sans singularités est de quatrième catégorie. Bien qu'il ne nous soit pas possible de citer des variétés de troisième catégorie, leur existence ne semble pas pouvoir faire de doute ; il y en a peut-être déjà parmi les surfaces quintiques.

Dans la classification des surfaces algébriques par M. Enriques, les surfaces dont le genre d'ordre 12 est zéro ou un sont — à l'exception des réglées de genre supérieur à un — de première ou deuxième catégorie ; celles dont le genre d'ordre 12 dépasse un sont de troisième ou quatrième catégorie.

Les *surfaces de genres un*, lesquelles sont de deuxième ou accidentellement de première catégorie, ont en général d'après la formule habituelle, 22 cycles à deux dimensions ; le nombre ρ étant en général égal à 1, l'intégrale double de première espèce a 21 périodes distinctes ; si l'on observe d'autre part que lorsque 16 des 22 cycles d'une surface quartique s'évanouissent en autant de points doubles, on obtient une surface de Kummer, on voit que les 21 périodes sont liées par une relation (probablement algébrique et quadratique) ; on retrouve ainsi pour chacune des familles, en infinité dénombrable, de surfaces de genres un, les 19 modules de M. Enriques.

Les résultats numériquement les plus complets au sujet des propriétés servant de définition aux diverses catégories de variétés paraissent comme dans le cas des courbes liés à certaines équations aux dérivées partielles. Ainsi la valeur extrême du jacobien pour la troisième et la quatrième catégorie est probablement donnée par la solution d'une équation formée par M. Giraud (*Comples-Rendus*, t. CLXVI, p. 893), qui peut s'intégrer sur la variété indépendamment de la question de son uniformisation (1). Pour la quatrième catégorie, si l'on veut déterminer en outre l'invariant correspondant à chacun des ∞^3 éléments de contact, il faudra à cette équation — ou éventuellement à son cas limite — en adjoindre d'autres. Quant aux variétés de deuxième catégorie, elles exigeront la considération d'équations toutes différentes.

Il y aurait intérêt à rechercher si, pour la troisième et la quatrième catégorie, la valeur extrême du jacobien, qui dépend certainement des courbes imposées sur la surface, dépend ou non des points imposés.

4. Au sujet du problème même de l'uniformisation des surfaces, nous ne pouvons dire que bien peu de chose. Tout d'abord, sauf le cas de surfaces d'irrégularité au moins égale à deux et satisfaisant à certaines conditions, il n'existe pas d'uniformisation partout localement biunivoque, analogue à celles qui se présentent pour les courbes ; des points de ramification isolés ne peuvent même suffire en général ; il faudra introduire certaines courbes de ramification.

D'autre part, d'après le théorème de Hartogs, le domaine d'existence d'une fonction uniforme de deux variables ne peut admettre de cycles à trois dimensions ; mais, s'il admet des cycles linéaires, il peut admettre aussi en conséquence des cycles à deux dimensions. Le « domaine de recouvrement » d'un tel domaine aura nécessairement une connexion linéaire simple, mais pourra avoir une connexion bidi-

(1) Pour l'application directe de l'équation $\Delta u = e^u$ à l'étude des fonctions liées par l'équation d'une courbe, cf. F. NEVANLINNA, *Ueber die Werteverteilung...* (6e Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Copenhague, 1925.)

mensionnelle multiple, et même infinie ; il ne sera pas alors représentable point par point sur une hypersphère, ni sur un domaine homéomorphe à cette dernière (cellule). Il est donc à prévoir que dans certains cas, au contraire de ce qui avait lieu pour les courbes, l'uniformisation la plus naturelle aura un domaine d'existence multiplement connexe ; cela se produit peut-être pour les surfaces de genres un.

Pour une surface de troisième ou quatrième catégorie, il conviendrait de caractériser l'uniformisation fournie par les fonctions méromorphes dans l'hypersphère-unité, donnant en un point déterminé de la surface sa valeur extrême au jacobien.

L. AUBRY
à Dijon

1° DEUX INVENTIONS OUBLIEES DE NAPIER, TRAVAUX OUBLIES DE BACHET DE MESIT

2° CARRES MAGIQUES PAIRS

3° LE PROBLEME DE LA GAMME

4° FORMES DES DIVISEURS PREMIERS D'UN POLYNOME

A. ALLIAUME
Professeur à l'Université de Louvain

TABLES DES FACTORIELLES N' JUSQUE N=1.000
